

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALBERT BADRIKIAN

Propriétés permanentes des trajectoires de processus

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 21-29

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__21_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 21-29.

PROPRIÉTÉS PERMANENTES DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS

par

Albert BADRIKIAN

Dans son article [3], Dudley a introduit certaines parties d'un espace d'Hilbert séparable, les G. B. et les G. C. ensembles, liées à la mesure cylindrique gaussienne normale sur H , soit γ . Ces ensembles s'introduisent de manière naturelle dans la théorie des "espaces de Wiener abstraits", c'est-à-dire l'étude des transformations linéaires de H dans un Banach qui transforment γ en une mesure de Radon.

Nous publions ici quelques remarques simples montrant que ces notions peuvent être généralisées tout en conservant leur utilité. Dans un article ultérieur nous les appliquerons à l'étude de certaines applications radonifiantes entre espaces de type \mathcal{L}^p .

I - INTRODUCTION et NOTATION.

Dans tout ce qui suit on désignera par espace de probabilité un couple (Ω, P) où Ω est un espace topologique séparé et P une mesure de Radon sur Ω . Si Y est un espace topologique, $f : \Omega \rightarrow Y$ sera dite mesurable si elle est P -mesurable au sens de Lusin. $L^0(\Omega, P)$ désignera l'espace vectoriel des P -classes d'applications mesurables de Ω dans \mathbb{R} (pour simplifier). On le munira de la topologie de convergence en probabilité (non localement convexe en général).

Soit X un ensemble quelconque et (Ω, P) un espace de probabilité. On appelle fonction aléatoire basée sur (Ω, P) et indicée par X une application $F : X \rightarrow L^0(\Omega, P)$. Quand aucune confusion ne sera possible, on omettra l'expression "basée sur (Ω, P) ".

Deux fonctions aléatoires $F : X \rightarrow L^0(\Omega, P)$ et $F' : X \rightarrow L^0(\Omega', P')$ sont dites isonomes si elles ont même système projectif de répartitions finies. Une "classe" d'isonomie de fonctions aléatoires indicées par X est dite processus indicé par X ou processus sur X . Les fonctions aléatoires appartenant à une même "classe" d'isonomie sont dites des représentants du processus.

Enfin, on désigne par $\mathcal{L}^0(\Omega, P)$ l'espace vectoriel des fonctions P -mesurables de Ω dans \mathbb{R} (donc définies partout !) et l'on notera par π l'application canonique de $\mathcal{L}^0(\Omega, P)$ dans $L^0(\Omega, P)$.

Si $F : X \rightarrow L^0(\Omega, P)$ est une fonction aléatoire, $f : X \rightarrow \mathfrak{L}^0(\Omega, P)$ sera dite version de F si $\pi \circ f = F$. Si f est une version de F et si $\omega \in \Omega$, on appelle trajectoire de ω l'application $x \rightarrow f_x(\omega)$. Une version f d'une fonction aléatoire définit donc une application de Ω dans \mathbb{R}^X (cette application est "mesurable-abstraite" quand \mathbb{R}^X est muni de la tribu produit, mais est rarement Lusin-mesurable quand \mathbb{R}^X est muni d'une topologie).

DEFINITION 1. - Soit X un ensemble et considérons un processus sur X ; une propriété concernant les fonctions aléatoires indicées par X est dite propriété du processus si elle est satisfaite par tous les représentants du processus.

Par exemple :

- Si X est un espace topologique, la propriété " $F : X \rightarrow L^0(\Omega, P)$ est continue" est une propriété du processus ;
- Si X est un espace vectoriel, la propriété " $F : X \rightarrow L^0(\Omega, P)$ est linéaire" est une propriété du processus ; de même, si X est un espace vectoriel topologique, pour la propriété " F est linéaire et continue" ;
- Il en est de même de toute propriété "portant sur une famille dénombrable d'instants".

Par contre, il est bien connu que, si $f_1 : X \rightarrow \mathfrak{L}^0(\Omega, P)$ et $f_2 : X \rightarrow \mathfrak{L}^0(\Omega, P)$ sont deux versions de la fonction aléatoire $F : X \rightarrow L^0(\Omega, P)$, les trajectoires de f_1 peuvent être régulières sans que les trajectoires de f_2 possèdent cette propriété de régularité.

DEFINITION 2. - On dira qu'une propriété (P) concernant les fonctions définies sur X est une propriété d'un processus indicé par X , si tout représentant de ce processus possède une version dont les trajectoires satisfont à (P).

On va, dans ce qui suit, donner des conditions suffisantes pour que les propriétés "presque sûrement à trajectoires continues" ou "presque sûrement à trajectoires bornées" soient des propriétés du processus.

II - ENSEMBLES DE CONTINUITÉ DE PROCESSUS.

Tout repose sur le lemme suivant :

LEMME. - Soit X un ensemble, E un sous-ensemble de \mathbb{R}^X muni d'une topologie plus fine que celle induite par la topologie produit sur \mathbb{R}^X et soit

$F : X \rightarrow L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire. On suppose

- (1) que E satisfait à l'une des conditions suivantes :
- a) les compacts de E sont métrisables ;
 - b) il existe un sous-ensemble D de X dénombrable tel que les projections de E sur \mathbb{R} d'indice $x \in D$ séparent les points de E ;
- (2) que F possède une version f dont presque toutes les trajectoires appartiennent à E et que l'application de Ω dans E correspondante est P-Lusin mesurable.

Alors, toute fonction aléatoire $F' : X \rightarrow L^0(\Omega', P')$ isonome à F possède de une version dont presque toutes les trajectoires appartiennent à E et telle que l'application correspondante de Ω' dans E soit P'-Lusin mesurable. En outre, deux versions d'une même $F' : X \rightarrow L^0(\Omega', P')$, f'_1 et f'_2 , satisfaisant aux hypothèses du lemme, possèdent la propriété suivante :

$$\text{" il existe } \Omega'_1 \subset \Omega' \text{ , avec } P'(\Omega'_1) = 1 \text{ , tel que}$$

$$\omega' \in \Omega'_1 \Rightarrow f'_1(x, \omega') = f'_2(x, \omega') \text{ , } \forall x \in X \text{ " .}$$

Démonstration : C'est immédiat, compte tenu de SCHWARTZ [4, exposé 13]. En effet, si I désigne l'ensemble des parties finies de X, ordonné par inclusion, et si, pour tout $i \in I$, G_i désigne la P-classe de l'application $\omega \rightarrow (F_x(\omega))_{x \in i}$ de Ω dans $\mathbb{R}^{\text{card } i}$, les $(G_i)_{i \in I}$ satisfont à la condition de cohérence.

La condition (2) implique que la mesure ν image de P par l'application de Ω dans E définie par f est limite projective des $G_i(P)$. Donc la limite projective des $\mu_i = G_i(P)$ existe sur E. Le théorème fondamental de SCHWARTZ [4, exposé 13] montre alors l'existence, pour toute fonction aléatoire $F' : X \rightarrow L^0(\Omega', P')$ isonome à F, d'une version satisfaisant aux hypothèses du lemme.

La dernière partie du lemme résulte alors de la proposition (XIII, 1 ; 1) de [4].

Remarque 1 : Dans le lemme ci-dessus on pourrait remplacer \mathbb{R} par n'importe quel espace topologique séparé Y et considérer des variables aléatoires à valeurs dans Y au lieu de variables aléatoires réelles.

L'application de ce résultat nécessite la vérification de deux types de

propriétés.

La propriété de type ((1), a) est satisfaite si E est métrisable (donc si E est un Fréchet). Le lemme implique en particulier la

PROPOSITION. - Soit E un espace localement convexe (réel) métrisable et μ une mesure cylindrique sur E . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) μ est de Radon ;
- 2) (resp. 2') pour un (resp. tout) représentant $F : E' \rightarrow L^0(\Omega, P)$ du processus linéaire sur E' associé à μ , il existe $\varphi : \Omega \rightarrow E$ P -Lusin mesurable telle que, pour tout x' de E' , la P -classe de la fonction $\omega \rightarrow \langle \varphi(\omega), x' \rangle$ est égale à $F(x')$.

Remarque 2 : Si E est un Banach, U_E , la boule unité de E' muni de la topologie induite par celle de $\sigma(E', E)$ et si j est l'isomorphisme métrique canonique de E dans $\mathcal{C}(U_E)$, alors 1), 2) et 2') sont équivalents à :

- 3) la mesure cylindrique $j(\mu)$ sur $\mathcal{C}(U_E)$ est de Radon (cela est dû au fait que la transposée de j est surjective).

La propriété de type ((1), a) est aussi satisfaite si E est souslinien (donc si E est lusinien ou si E est polonais). Dans ce cas d'ailleurs la propriété ((1), b) est satisfaite (BADRIKIAN, [1, page 138]). Ce sera le cas

. Si X est un compact métrisable, $E = \mathcal{C}(X)$ espace des fonctions continues sur X avec la norme uniforme ; ou bien si X est polonais et $E = \mathcal{C}_u(X)$ est l'espace des fonctions uniformément continues sur X et bornées sur X avec la norme uniforme ;

. Si X est localement compact dénombrable à l'infini, $E = \mathcal{C}_c(X)$ espace des fonctions continues muni de la topologie de convergence compacte ;

. Si $X = \mathbb{R}$, E l'espace des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} réglées et continues à droite, muni de la topologie de convergence simple sur un ensemble dénombrable et partout dense dans \mathbb{R} (E est en effet lusinien d'après [5]) ;

. Si X est un espace de Banach séparable, $E = X'$ le dual de X muni de $\sigma(X', X)$ ou de la topologie de convergence compacte.

La propriété de type ((1), b) est vérifiée dans le cas suivant : " X est un espace complètement régulier séparable et E est l'espace des fonctions continues bornées sur X (par exemple $X = \mathbb{N}$ et donc $E = \ell^\infty$)" ; il suffit de prendre

pour D un ensemble dénombrable partout dense dans X .

Il reste à vérifier la condition relative à la Lusin mesurabilité. Si E est souslinien, la P -mesurabilité Lusin est équivalente à la P -mesurabilité Borel ; donc, si l'application de Ω dans E , définie par la version de la fonction aléatoire dont les trajectoires appartiennent à E , est P -borélienne, elle est P -Lusin mesurable. Sous cette forme, la condition de mesurabilité ne change pas si on remplace la topologie "initiale" de E par n'importe quelle topologie souslinienne qui lui est comparable.

Toujours dans le cas souslinien, la condition de mesurabilité est réalisée ipso facto. En effet, si on désigne par Π_x la restriction à E de la projection d'indice x sur \mathbb{R} , une application de (Ω, P) dans E est P -borélienne si et seulement si sa composée avec toute Π_x est P -mesurable. Or, il en est bien ainsi puisque cette composée est égale P -presque partout à la variable aléatoire f_x sur (Ω, P) . Il suffit d'ailleurs de faire varier x dans un sous-ensemble dénombrable D de X tel que les $(\Pi_x)_{x \in D}$ séparent les points de E (BADRIKIAN, [1, prop. 15, page 138]).

La principale application de ce qui précède réside dans la notion d'ensemble de continuité d'un processus stochastique.

DEFINITION 3. - Soit X un espace topologique et soit P un processus stochastique sur X . On dit que $D \subset X$ est un ensemble de continuité (resp. uniforme continuité) du processus, si le processus indicé par D , restriction de P à D soit P_D , possède une version dont les restrictions à D de presque toutes les trajectoires sont continues (resp. uniformément continues) sur D muni de la topologie induite par celle de X .

Les considérations ci-dessus permettent d'exhiber des cas où cette condition n'est pas vide. Comme exemple d'application donnons le résultat suivant dans le cadre "espace de Wiener abstrait".

THEOREME 1. - Soit G un Banach, μ une mesure cylindrique sur G et $L : G' \rightarrow L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire linéaire sur G' associée à μ . Soit $A' \subset G'$ un disque fermé borné de G'_b et A'^0 son polaire dans G .

Si G est séparable et si D' est une partie dénombrable de A' , partout dense dans A' muni de la topologie induite par celle de $\sigma(G'_{A'}, G'_{A'^0})$ (donc bien séparable) les assertions suivantes sont équivalentes :

(α) D' est un ensemble d'uniforme continuité du processus stochastique linéaire associé à μ pour la structure uniforme induite par celle de $\sigma(G'_A, \hat{G}_{A,0})$ et la restriction de L à G'_A , est une application (uniformément) continue de $c(G'_A, \hat{G}_{A,0})$ dans $L^0(\Omega, P)$ (**) ;

(β) A' est un ensemble d'uniforme continuité du processus linéaire associé à μ pour la structure uniforme induite par celle de $\sigma(G'_A, \hat{G}_{A,0})$;

(γ) la mesure cylindrique image de μ par l'application canonique $i : G \rightarrow \hat{G}_{A,0}$ est de Radon.

De plus, si A' est un compact de G'_b , on peut, dans (α) et (β) remplacer $\sigma(G'_A, \hat{G}_{A,0})$ par G'_b .

Démonstration : Rappelons que G'_A est le sous-espace vectoriel de G' engendré par A' , muni de la norme jauge de A' (qui en fait un Banach) et $\hat{G}_{A,0}$ est le complété de l'espace quotient séparé $G_{A,0}$ associé à l'espace semi-normé $(G, p_{A,0})$. G'_A est le dual de $\hat{G}_{A,0}$.

La dernière partie du théorème est presque triviale. En effet, les structures uniformes induites sur A' par celles de $\sigma(G', G)$, $\sigma(G'_A, \hat{G}_{A,0})$ et de G'_b coïncident puisque A' est à la fois un compact de $\sigma(G'_A, \hat{G}_{A,0})$ et de G'_b et la structure uniforme (séparée) induite sur A' par celle de $\sigma(G', G)$ moins fine que les structures uniformes induites sur A' par celles de $\sigma(G'_A, \hat{G}_{A,0})$ et de G'_b .

D'autre part, d'après la proposition, (γ) implique (α) (vrai même si G non séparable) ; on vérifie facilement que (α) implique (β).

Il reste donc à montrer l'implication " $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ ". Supposons donc (β). Dans tout ce qui suit on suppose A' muni de la topologie induite sur A' par celle de $\sigma(G'_A, \hat{G}_{A,0})$.

Remarquons tout d'abord que (β) implique (β') avec (β') : "l'application $L \circ i' : (\hat{G}_{A,0})'_C \rightarrow L^0(\Omega, P)$ est continue". En effet, si l'on a (β), la restriction de L à A' est continue (puisque A' métrisable) et l'on en déduit (β') par le théorème de Banach-Dieudonné.

(**) Si H est un Banach, H'_C désigne le dual de H muni de la topologie de convergence uniforme sur les parties compactes (convexes) de H et $c(H', H)$ le dual de H , muni de la structure uniforme déduite de la topologie de H'_C .

D'autre part, d'après la remarque 2, si j désigne l'isomorphisme métrique de $\hat{G}_{A,0}$ dans $\mathcal{C}(A')$, (γ) est équivalent à (γ') où :

(γ') : "il existe une probabilité de Radon ν sur $\mathcal{C}(A')$ telle que

$$\xi \circ \nu = (\xi \circ j \circ i)(\mu), \quad \forall \xi \in (\mathcal{C}(A'))'_c = \mathfrak{M}(A'). "$$

En fait, il suffit de montrer que l'on a (γ'') où (γ'') est obtenu à partir de (γ') en y remplaçant " $\forall \xi \in \mathfrak{M}(A')$ " par " $\forall \xi \in \mathfrak{M}(A')$ à support fini " puisque l'ensemble des mesures de Radon sur A' , à support fini, est partout dense dans $(\mathcal{C}(A'))'_c$, l'application $\xi \rightarrow (\xi \circ j \circ i)(\mu)$ de $(\mathcal{C}(A'))'_c$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est continue (par (β')) et que, pour toute probabilité de Radon ν sur $\mathcal{C}(A')$, l'application $\xi \rightarrow \xi \circ \nu$ de $(\mathcal{C}(A'))'_c$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est trivialement continue.

Mais, en prenant $X = A'$, $E = \mathcal{C}(A')$ et pour F la restriction de L à A' , les conditions (1) et (2) du lemme sont satisfaites d'après les commentaires suivant le lemme (puisque A' est un compact métrisable et donc $\mathcal{C}(A')$ souslinien). Cela entraîne aisément (γ'') et donc (γ) .

Remarque 3 : Si A' est un disque compact de G'_b et si $L : G'_b \rightarrow L^0(\Omega, P)$ est continue (c'est-à-dire μ scalairement concentrée sur les boules de G), la restriction $L \circ i'$ de L à G'_A , est une application uniformément continue de $c(G'_A, \hat{G}_{A,0})$ dans $L^0(\Omega, P)$.

III - ENSEMBLES BORNES POUR UN PROCESSUS.

Ici $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ désigne un espace de probabilité "abstrait".

DEFINITION 4. - Soit $F : X \rightarrow L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ une fonction aléatoire. On dit qu'elle est bornée sur X (ou que X est un B-ensemble pour F) s'il existe une version de F , $f : X \rightarrow \mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ presque sûrement à trajectoires bornées. Cela signifie que

$$(1) \quad P^* \{ \omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in X} |f_x(\omega)| = +\infty \} = 0$$

où P^* désigne la mesure extérieure de Caratheodory.

DEFINITION 5. - Un processus indicé par X est dit borné sur X (ou X est un B-ensemble pour le processus) si X est un B-ensemble pour tout représentant du processus.

La méthode donnée dans le numéro 2, pour vérifier que X est un B-ensemble pour un processus, est mal commode. En effet, on peut prendre pour E l'espace des fonctions mesurables bornées de X dans \mathbb{R} muni de la norme uniforme ; ses compacts sont métrisables. Néanmoins, les conditions de Lusin-mesurabilité sont malaisées à vérifier : E n'est pas souslinien en général.

Supposons que X soit un espace métrisable séparable et que (Ω, \mathcal{F}, P) soit un espace probabilisé complet ; la condition " $F : X \rightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est bornée sur X " peut s'exprimer plus simplement.

En effet, en plongeant \mathbb{R} dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut supposer que $F(x)$ est une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique compact. On sait donc qu'il existe une version séparable $f : X \rightarrow \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P, \overline{\mathbb{R}})$. Soit S un sous-ensemble dénombrable de X , séparant pour f (au sens de MEYER) ; alors :

$$\{\omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in S} |f_x(\omega)| < \infty\} = \{\omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in X} |f_x(\omega)| < \infty\} \quad (\text{P. p. s.}).$$

Donc on peut remplacer la condition (1) par :

$$P \{\omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in S} |f_x(\omega)| < \infty\} = 1.$$

C'est le cas si X est un espace métrisable séparable et $F : X \rightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est continue en probabilité. On sait que l'on peut prendre pour S tout ensemble dénombrable partout dense dans X .

On en déduit immédiatement que, si X est un espace métrisable séparable et P un processus indicé par X et continu en probabilité, X est borné pour le processus si et seulement si X est borné pour un de ses représentants.

DEFINITION 6. - Soit $F : X \rightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une fonction aléatoire et soit $D \subset X$; on dit que D est un ensemble borné pour F si la fonction aléatoire $(F)_{x \in D}$ est bornée sur D .

La principale application de ces notions réside dans le résultat suivant :

THEOREME 2. - Soit E un Banach séparable, μ une mesure cylindrique sur E scalairement concentrée sur les boules de E et $L : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une fonction aléatoire linéaire associée à μ . Soit $A' \subset E'$ un disque fermé borné. On a équivalence des propriétés suivantes :

- (1) A' est un ensemble borné pour L ;
- (2) la mesure cylindrique image de μ par l'application canonique $E \rightarrow \sigma((\hat{E}_A, \circ)'' , E'_A)$ est de Radon.

La démonstration de ce résultat sera donné dans [2] et un article à paraître dans les C. R. du colloque de Strasbourg du 31-3-71 (BADRIKIAN).

Ces ensembles bornés pour certaines fonctions aléatoires linéaires ont un lien très étroit avec la théorie de l'approximation. (Voir exposés de S. CHEVET dans [2]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BADRIKIAN (A.). - Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires. Lecture Notes in Mathematics n° 139, Springer-Verlag, 1970.
- [2] BADRIKIAN (A.) et CHEVET (S.). - Séminaire 1970-1971 sur les espaces de Wiener. A paraître.
- [3] DUDLEY (). - The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. Journal of functional analysis 1, p. 290-330 (1967).
- [4] SCHWARTZ (L.). - Séminaire 1969-1970. Ecole Polytechnique, Paris.
- [5] SCHWARTZ (L.). - Measures on topological spaces. A paraître à Tata Institute.

Albert BADRIKIAN
Complexe Scientifique Universitaire
des CÉZEAUX
63 - AUBIÈRE
(France)
