JEAN G. DHOMBRES

Sur les opérateurs multiplicativement liés

Mémoires de la S. M. F., tome 27 (1971)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__27__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 27, 1971, 159 p.
(Thèse Sc. math. Paris, 1970)

SUR LES OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES

par Jean G. DHOMBRES

TABLE DES MATIERES

Pages

CHAPITRE IV

OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES DANS LES ALGEBRES DE FONCTIONS CONTINUES

CHAPITRE V

OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES DANS LES ESPACES
FONCTIONNELS DE BANACH REGULIERS

CHAPITRE VI

OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES COMMUTANTS AVEC LES TRANSLATIONS

INTRODUCTION

A l'origine de ce travail, il y a le désir d'obtenir une formulation mathématique satisfaisante pour la notion utile mais fort subjective de moyenne d'une fonction. Tous ceux qui manipulent des instruments de mesures savent, par expérience, que l'on n'obtient qu'une information moyennée de tout phénomène observable. En général cette moyenne réalise une approximation qu'il serait a priori loisible d'améliorer en perfectionnant l'instrument d'étude. Toutefois, lorsque l'intérêt du phénomène réside justement dans ses fluctuations, la comparaison des diverses mesures et la classification des résultats semblent exiger une théorie adéquate des moyennes et de moyennes qui ne soient pas des fonctions constantes. Un exemple des plus célèbres est la difficile étude de la turbulence d'un milieu visqueux et il n'est pas étonnant de constater que c'est l'ingénieur REYNOLDS O. [1] qui proposa, dès 1894, une méthode empirique pour déduire des célèbres équations de Navier-Stokes les équations satisfaites par ce qu'il appelait le mouvement moyen. Un double espoir l'animait, d'une part que les solutions obtenues pour les équations ainsi déduites soient précisément les fonctions lues sur un appareil comme l'anémomètre enregistreur, d'autre part que les équations, et donc leurs solutions, soient plus "simples", plus "régulières" que les équations de départ. Une démarche analogue se retrouve dans certaines pages de POINCARE Henri [1] sur le calcul approché du mouvement des astres. Malheureusement, dans l'abondante littérature qui suivit, les propriétés "souhaitées" des moyennes sont subtilement mais inextricablement introduites au milieu des propriétés logiquement déduites du formalisme axiomatique de départ. Au lieu de partir de connaissances particulières sur les fonctions à moyenner et d'envisager des moyennes ad hoc comme cela est notamment fait dans BASS J. [1] pour l'étude de certaines fonctions pseudo-aléatoires, nous proposons un point de vue axiomatique. Dans le cadre d'espaces fonctionnels relativement usuels et que nous préciserons, nous recherchons tous les opérateurs satisfaisant certaines propriétés posées a priori et essayons d'en déduire les propriétés souhaitées de moyenne. L'arbitraire se situe cette fois au niveau des axiomes et notre travail consiste donc à opposer et à classifier divers axiomes possibles, selon les résultats qu'ils impliquent.

Comme point de départ, nous supposons que la moyenne constitue une opération linéaire en ce sens que la somme des moyennes de deux fonctions est la moyenne de la somme de ces deux fonctions. Nous supposons aussi que l'opération est continue en ce sens que deux fonctions voisines ont des moyennes voisines, ce qui implique d'abord le choix d'une topologie sur l'espace fonctionnel. Une idée naturelle revient à dire que l'on ne change pas une moyenne en en prenant à nouveau la moyenne, ce qui est supposer l'idempotence de l'opérateur. Cette seule hypothèse est très insuffisante, d'une part parce qu'il existe encore beaucoup trop de tels opérateurs, et d'autre part parce que la caractérisation des sous-espaces complémentés n'est pas chose aisée dans des espaces non réflexifs. Une idée plus féconde, semble-t-il, est de considérer que la moyenne se comporte comme une constante vis-à-vis de l'opération de moyenne : si f et g sont deux fonctions et si P est l'opérateur de moyenne, la moyenne du produit de f par Pg est égale au produit des moyennes Pf par Pg : $P(fPg) = PfPg$. Comme on peut le constater en consultant la bibliographie, volontairement non exhaustive, de tels opérateurs, appelés ici semi-multiplicatifs symétriques, ont connu une grande vogue depuis leur introduction en mécanique par KAMPE DE FERIET J. [3] ou en probabilité par KOLMOGOROFF A. [1], aux alentours des années 1933. Ces opérateurs furent envisagés chez les algébristes avec BIRKHOFF G. [1] vers 1950, puis avec une équipe autour de Mme DUBREIL-JACOTIN M.L. [1] et ARBAULT J. [1], chez les probabilistes avec les travaux de caractérisation fonctionnelle des espérances conditionnelles commencés par MOY S.T.C. [1] en 1953, puis ROTA G.C. [2] lequel donne déjà, en 1964, rien moins que 57 références; chez les analystes enfin avec KELLEY J.L. [1], LLOYD S.P. [1], etc ...

Toutefois, la classe de ces opérateurs semi-multiplicatifs est restreinte dès lors que l'on impose des propriétés de commutation avec les translations, propriétés indispensables si l'on désire une commutation avec des opérateurs différentiels non linéaires, comme justement ceux de l'équation de Navier-Stokes. Peut-on rechercher des conditions moins sévères que $P(fPg) = PfPg$? En effectuant des essais, en parcourant la littérature existante, on peut constater que l'expression symétrisée $P(fPg+gPf)$ semble jouer un rôle essentiel. Aussi nous posons que $P(fPg+gPf)$ est une fonction analytique, mais en fait polynômiale (cf. Chapitre I) des 8 "variables"

$$f\ ,\ Pf\ ,\ g,\ Pg\ ,\ P(Pf)^2\ ,\ P(Pg)^2\ ,\ P(fg)\ \text{ et }\ P(PfPg)$$

définissant ainsi des opérateurs que nous convenons d'appeler <u>opérateurs multiplicativement liés</u>. Un recensement succinct montre la fréquente réalisation de tels opérateurs dans des domaines pour le moins variés. Citons quelques exemples :

<u>Les opérateurs de Reynolds</u> $\qquad P(fPg+gPf) = PfPg + P(PfPg)$
sont envisagés en mécanique des fluides KAMPE de FERIET J. [2] ou comme un lien entre la théorie ergodique et la théorie des martingales (cf. ROTA G.C.).

<u>Les opérateurs de Baxter</u> $\qquad P(fPg+gPf) = P(fg) + PfPg$
se manifestent dans la théorie des files d'attente ou dans l'étude des fluctuations des sommes de variables aléatoires KINGMAN J.F.C. [1], SPITZER F. [1],

BAXTER G. [1], ANDERSEN E.S. [1] etc... On les retrouve en analyse combinatoire (ROTA G.C. [3] et bibliographie citée), dans les algèbres de Banach, MILLER J.B. [2] ou pour l'étude abstraite de l'équation de Wiener-Hopf, ATKINSON F.V. [1].

Les opérateurs d'interpolation $P(fPg) = P(fg)$
utilisés sans le dire, notamment en théorie du potentiel, et qui forment un cas particulier essentiel de la théorie des exaves linéaires de PEŁCZYNSKI A.[1].Le mot exave étant construit par la contraction des mots "extension operator" et "averaging operator" (cf. Chapitre IV).

Les opérateurs semi-multiplicatifs $P(fPg+gPf) = 2PfPg$
qui figurent dans la théorie des algèbres de Boole, et sont étudiés sur des algèbres de Von Neumann par UMEGAKI H. [1] et d'autres mathématiciens japonais, voire dans la définition du quantificateur logique $\exists$ par TARSKI.

Les opérateurs d'antidérivation $P(fPg+gPf) = PfPg$
MILLER J.B. [2] sur lesquels on peut appliquer les procédés d'étude des opérateurs de dérivation à partir du célèbre théorème de SINGER I.M.; WERMER J. [1] et de ses généralisations par SAKAÏ S. [1].

Le plan de ce travail découle de ce qui précède.

Dans un Premier Chapitre, se plaçant dans une algèbre commutative de fonctions à valeurs dans un domaine d'intégrité, on parvient à réduire les diverses formes d'opérateurs multiplicativement liés à un très petit nombre de types simples que l'on répertorie. Pour ce faire, deux hypothèses peu exigeantes semblent nécessaires relativement à l'élément unité de l'algèbre (stabilité par P des éléments Pe et $(Pe)^2$).

Dans un Deuxième Chapitre, abandonnant les restrictions précédentes, on oppose les divers types d'opérateurs multiplicativement liés catalogués au premier chapitre, ce qui permet de dresser un tableau de comparaison. Grosso modo, l'idée est qu'un opérateur multiplicativement lié est somme directe d'opérateurs multiplicativement liés de types plus simples, tels que l'unité soit conservée ou annulée. On envisage alors l'effet d'hypothèses supplémentaires comme l'idempotence de l'opérateur P, la conservation de l'unité $Pe = e$ ou bien encore $Pe = 0$.

Le Troisième Chapitre, toujours de nature algébrique, concerne la résolution matricielle des équations fonctionnelles associées aux opérateurs multiplicativement liés. On détermine ainsi la structure des principaux opérateurs multiplicativement liés dans les algèbres de dimension finie,sans faire d'hypothèses supplémentaires. Ce chapitre suggère surtout des généralisations. En outre, on envisage des relations de récurrence appropriées permettant deux applications principales :

D'une part la détermination des opérateurs commutant avec les translations sur des algèbres de fonctions entières pour le type suivant, noté $D(\alpha)$:

$$P(fPg+gPf) = \alpha P(fg) + (1-\alpha)PfPg + P(PfPg).$$

D'autre part, la démonstration qu'à partir de seules hypothèses sur l'espace image de l'opérateur P on peut montrer qu'un opérateur de Reynolds est semi-multiplicatif symétrique, du moins dans le cas des fonctions continues sur les espaces compacts de Stone et donc pour les algèbres de fonctions bornées et mesurables.

Le Quatrième Chapitre est le plus important et il envisage l'étude de la structure des opérateurs multiplicativement liés précédemment répertoriés dans des algèbres de fonctions continues et à valeurs complexes sur un espace topologique compact. Utilisant la caractérisation du dual de $C(X)$, après des théorèmes de représentation intégrale, on donne des théorèmes d'existence et d'unicité relatifs à un espace de fonctions pour qu'il soit image d'un opérateur multiplicativement lié d'un certain type. L'existence d'un opérateur d'interpolation, par exemple, équivaut à l'existence d'un sous-ensemble fermé Y de X tel qu'il existe un opérateur d'extension linéaire de $C(Y)$ dans $C(X)$. Lorsque l'opérateur est de Markov, Y apparaît d'ailleurs comme une frontière de CHOQUET. On construit des opérateurs d'interpolation ou des opérateurs semi-multiplicatifs symétriques à partir de cas plus simples en utilisant les structures constructives classiques de l'analyse comme l'espace produit, voire les limites projectives. Quant à l'existence d'opérateurs aussi généraux que les exaves linéaires, à partir d'une condition supposée sur l'existence d'un point extrémal dans un certain convexe, on donne une condition nécessaire et suffisante laquelle s'exprime par des propriétés topologiques familières comme l'existence d'un retract ou celle d'un relèvement continu. Donnons deux exemples :

Pour qu'il existe un opérateur d'interpolation de Markov sur $C(X)$ pour lequel l'ensemble des points où toute fonction est égale à sa transformée par P soit un ensemble Y , il faut et il suffit que Y soit un retract de X .

Pour qu'il existe un opérateur semi-multiplicatif de Markov dont l'image soit une sous-algèbre donnée de $C(X)$, il faut et il suffit que la relation d'équivalence, associée sur X à cette sous-algèbre, admette un relèvement continu.

L'existence requise d'un point extrémal sera démontrée au Chapitre V pour des espaces compacts de STONE particuliers (espaces hyperstoniens), spectres de C^*-algèbres de fonctions mesurables et bornées sur un espace mesuré.

En fait, lorsque l'opérateur multiplicativement lié est de norme inférieure ou égale à l'unité (opérateur sous-markovien), ses propriétés sont nettement simplifiées et nous préciserons cette dichotomie au Chapitre V. En ce qui concerne les opérateurs positifs, disons pour simplifier qu'une projection de norme 1 sur une algèbre de fonctions continues sur un espace compact, est nécessairement multiplicativement liée. Enfin, la donnée de deux opérateurs semi-multiplicatifs symétriques, vérifiant certaines conditions, induit une décomposition de l'espace de base en un produit cartésien.

Le Cinquième Chapitre traite des opérateurs multiplicativement liés dans des espaces fonctionnels, introduits par Mme LUXEMBURG W.A.J. sous le nom de "Banach function spaces", généralisant les espaces de fonctions dont la puissance d'ordre p est intégrable ou les espaces d'ORLICZ. L'idée est simple : un opérateur multiplicativement lié conserve l'espace des fonctions bornées et est continu sur cet espace, ce qui, par la transformation de GELFAND, ramène l'étude à celle des espaces de fonctions continues. On dévide alors un certain nombre de conséquences mettant notamment en évidence le rôle des opérateurs multiplicativement liés de Markov. Dans les espaces considérés, il existe une notion d'espérance conditionnelle et elle est fournie par les opérateurs semi-multiplicatifs symétriques de Markov. L'hermiticité d'un opérateur multiplicativement lié fournit des renseignements et on distingue quelque peu le cas des espaces hyperstoniens.

Enfin, le dernier et Sixième Chapitre concerne l'étude des opérateurs multiplicativement liés commutant avec un groupe d'opérateurs opérant sur l'espace fonctionnel choisi. Nous fixerons comme exemple le cas des opérateurs de translation sur un groupe abélien localement compact, mais l'on pourrait adapter la situation au cas d'un système dynamique général. On obtient la complète caractérisation des opérateurs multiplicativement symétriques commutant avec les translations sur des algèbres de fonctions presque périodiques ou sur des espaces fonctionnels de Banach construits sur des groupes compacts. De même les opérateurs de Baxter commutant avec les translations caractérisent les contractions analytiques, c'est-à-dire la transformation de Hilbert ou le passage d'une fonction à sa conjuguée en analyse harmonique. Par un argument de compacité et de point fixe, on obtient une caractérisation algébrique au moyen des mesures asymptotiques. Pour être complète, l'étude devrait déboucher ici sur les propriétés spectrales des opérateurs, les propriétés des semi-groupes d'opérateurs multiplicativement liés et les propriétés limites analogues aux théorèmes de martingales.

Une conclusion générale est que la condition algébrique de liaison multiplicative n'introduit essentiellement que deux types très différents :

D'une part, les opérateurs multiplicativement symétriques $P(fPg) = P(gPf)$ qui sont dans tous les cas envisagés les bons opérateurs de moyenne et dont il existe de nombreuses réalisations. Ce cas se subdivise lui-même en deux autres, avec les opérateurs semi-multiplicatifs symétriques $P(fPg) = PfPg$ et les opérateurs d'interpolation $P(fPg) = P(fg)$. En caricaturant, les opérateurs du premier type donnent avec la connaissance de Pf , une information sur f en capitalisant par classes diverses informations sur f . Au contraire, un opérateur d'interpolation restitue fidèlement, mais partiellement, une information sur f .

D'autre part, les opérateurs de Baxter, dont la définition mélange les deux types précédents $P(fPg+gPf) = P(fg) + PfPg$. Ce sont des opérateurs de sommation aux propriétés combinatoires très intéressantes.

Une autre conclusion est la mise en évidence du rôle joué par l'hypothèse de Markov (opérateur de norme unité et conservant l'unité), quasiment indispensable pour des théorèmes d'existence et d'unicité et divisant les opérateurs en deux classes bien distinctes. D'ailleurs, un problème naturel se pose. Pour un opérateur multiplicativement lié, commutant avec les translations, en dehors d'un opérateur de Markov, peut-on approcher la norme 1 d'aussi près qu'on le désire ? Dans le cas $L^1(G)$ où G est un groupe abélien localement compact, on sait que la réponse est négative pour un opérateur idempotent.

Que Monsieur le Professeur J. BASS veuille bien accepter ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour n'avoir cessé de me prodiguer conseils et encouragements, et pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

Je remercie Monsieur le Professeur C. PISOT de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse et de m'avoir proposé un élégant sujet comme seconde thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur J. P. KAHANE, dont les séminaires d'Analyse Harmonique ont beaucoup contribué à ma formation mathématique, d'avoir bien voulu s'intéresser à ce travail.

J'ai pu profiter de fructueuses et amicales conversations avec Monsieur le Professeur J. P. BERTRANDIAS qui me représentait auprès du Centre National de la Recherche Scientifique. Qu'il en soit remercié.

Ma gratitude s'adresse à Madame J. BROHAN et à Mademoiselle B. RIBAILLIER qui, malgré des difficultés, ont permis la réalisation matérielle de ce mémoire.

Enfin, je ne saurais oublier l'aide et les encouragements de tous ceux qui m'ont entouré au cours de mes études.

CHAPITRE I

REDUCTION DES OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES

1. FORME GENERALE.

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre commutative et unifère, construite sur le corps des nombres complexes. Ses éléments sont notés f, g, ... Notamment e désigne l'élément unité de cette algèbre. Soit P un opérateur linéaire appartenant à $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ c'est-à-dire défini sur $\mathfrak{A}$ et à valeurs dans $\mathfrak{A}$. Nous proposons la recherche des éléments P de $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ pour lesquels l'expression $P(fPf)$ peut se calculer analytiquement à partir des quatre "variables" f , Pf , $P(f^2)$ et $P(Pf)^2$. Plus précisément, nous supposons que $P(fPf)$ s'exprime au moyen d'une fonction entière F définie sur le produit cartésien C^4 :

$$P(fPf) = F(f,Pf,P(f^2), P(Pf)^2)$$

Par polarisation, on constate que $P(fPg+gPf)$ dépend analytiquement de huit facteurs selon :

$$P(fPg+gPf) = \sum_{i_1,\dots,i_8=0}^{\infty} A_{i_1\dots i_8} B_1^{i_1} B_2^{i_2} \dots B_8^{i_8}$$

avec $B_1 = f$, $B_2 = g$, $B_3 = Pf$, $B_4 = Pg$, $B_5 = P(Pf)^2$, $B_6 = P(Pg)^2$, $B_7 = P(fg)$, enfin $B_8 = P(PfPg)$.

Cependant, l'homogénéité de l'opérateur P entraîne la nullité des coefficients $A_{i_1\dots i_8}$ tels que $i_1+i_2+i_3+i_4+2(i_5+i_6+i_7+i_8)$ soit différent de 2. De plus, le premier membre est identiquement nul tant pour $f = 0$ que pour $g = 0$. Il reste donc un polynôme paramétré par cinq constantes complexes que nous notons dorénavant A, B, C, D et E.

$$P(fPg+gPf) = APfPg+B(fPg+gPf)+Cfg+DP(fg)+EP(PfPg) \tag{1}$$

Un opérateur P satisfaisant une relation (1) est dit <u>multiplicativement lié</u> (cette définition polynômiale n'exige pas une hypothèse topologique, nécessaire mais omise pour la définition par la fonction analytique F).

Nous allons procéder à la réduction de la relation (1) en faisant essentiellement deux sortes d'hypothèses : les unes portant sur l'algèbre $\mathfrak{A}$, les autres portant sur l'opérateur P et sur son comportement vis-à-vis de Pe . Ces hypothèses sont en quelque sorte complémentaires et déterminent les trois sections suivantes. La réduction utilise une remarque de stabilité : lorsque P est multiplicativement lié, il en est de même pour $\lambda P+\mu I$, sauf lorsque $\lambda+\mu E = 0$. Ici λ et μ sont des constantes complexes, tandis que I désigne l'opérateur identique.

2. PREMIER ENSEMBLE d'HYPOTHESES.

Nous supposons que l'image de l'élément unité de l'algèbre $\mathfrak{A}$ est un idempotent invariant par l'opérateur P : $P(Pe) = Pe$ et $(Pe)^2 = Pe$. Mais nous n'ajoutons aucune hypothèse quant à l'algèbre $\mathfrak{A}$. La relation (1), appliquée en $f = g = e$, fournit deux identités

(2) $$(A+2B+D+E-2)Pe+Ce = 0$$

(3) $$(A+2B+D+E+C-2)Pe = 0$$

2.1. Le cas $Pe = 0$ entraîne la nullité de C . On peut faire $g = e$ dans (1) pour obtenir $P^2 = (B+D)P$, ce qui, réinjecté dans (1), donne l'expression nouvelle

(4) $$DP(fPg+gPf) = (A+E(B+D))P(PfPg) + D(B+D)P(fg).$$

Lorsque D n'est pas nul, la relation (1) se trouve simplifiée en

(5) $$P(fPg+gPf) = \alpha P(fg)+\beta P(PfPg) \quad \text{et} \quad Pe = 0 .$$

Nous convenons d'appeler opérateur du type $B(\alpha,\beta)$ un opérateur satisfaisant (5).

Lorsque D est nul, (4) devient $(A+EB)P(PfPg) = 0$ et se décompose d'une part en

(6) $$P(PfPg) = 0$$

auquel cas nous dirons que nous avons un opérateur U-nilpotent. De plus $Pe = 0$ et P est multiplicativement lié. D'autre part en $A+EB = 0$. En reportant dans la relation (1), on doit distinguer deux nouveaux cas :

(a) Lorsque B n'est pas nul, une homothétie de rapport B^{-1} sur l'opérateur P en posant $Q = B^{-1}P$ afin de réduire le coefficient B à l'unité, puis le passage à l'opérateur $R = I-Q$ afin d'éliminer un terme, fournissent

$$(1-EB)R(fRg+gRf) = (2-EB)R(fg)-EBR(RfRg)$$

ou encore lorsque EB diffère de l'unité :

$$R(fRg+gRf) = \alpha R(fg)+\beta R(RfRg)$$

R est donc un opérateur du type $B(\alpha,\beta)$, d'ailleurs tel que $\alpha+\beta = 2$ ce qui correspond à $Re = e$.

Lorsque $EB = 1$, la réduction conduit à la relation

$$(7) \qquad R(fg) = R(RfRg)$$

Nous posons cette relation comme définition des opérateurs <u>hémi-multiplicatifs</u>. (De plus nous avons $Re = e$, tandis que $Q = I-R$ satisfait la relation

$$(8) \qquad Q(fQg+gQf) = Q(QfQg)-QfQg+(fQg+gQf),$$

relation d'ailleurs enccre satisfaite par $Q' = I-2Q$) .

(b) Par contre lorsque B est nul, la relation (1) devient $P(fPg+gPf) = EP(PfPg)$ et on décompose en deux éventualités cette version du type $B(\alpha,\beta)$ à laquelle est jointe $Pe = 0$:

d'une part $\qquad P(fPg+gPf) = 0$

d'autre part $\qquad Q(fQg+gQf) = 2Q(QfQg)$ suivie de $Qe = 0$, obtenue du moins après une homothétie convenable.

<u>2.2.</u> $A+2B+C+D+E = 2$ .La relation (2) devient $CPe = Ce$ et se subdivise en deux cas.

<u>2.2.1.</u> Lorsque C est différent de 0 , on a $Pe = e$. Sur la relation (1), nous pouvons effectuer un changement linéaire d'opérateurs en posant $Q = I-P$ afin d'éliminer le terme en fg et se ramener à un cas précédent.

$$(9) \qquad (1-E)Q(fQg+gQf) = (A+E)QfQg+(1-A-B-E)(fQg+gQf)+(2-D-E)Q(fg)-EQ(QfQg)$$

<u>2.2.1.1.</u> Lorsque E est différent de 1 , Q est multiplicativement lié et l'on se trouve exactement dans le cas 2.1 pour des coefficients A', B', D' et E' . La seule remarque étant que E' est différent de 1. Les types auxquels on parvient sont les types $B(\alpha,\beta)$, U-nilpotents, hémi-multiplicatifs (ou (8) si l'on préfère). Les relations qui accompagnent ces cas ($Pe = 0$, $Pe = e$) sont encore valables.

<u>2.2.1.2.</u> Lorsque E est égal à 1 et lorsque P n'est pas l'opérateur identique, puisque $Qe = 0$, on dispose de la relation supplémentaire $A+B+D-1 = 0$. Choisissons pour λ une racine de l'équation $\lambda^2+\lambda(A-1)+B = 0$ et posons $Q' = P-\lambda I$. On vérifie que l'opérateur Q' satisfait la relation multiplicative :

$$(1-\lambda)Q'(fQ'g+gQ'f) = (A+\lambda)Q'fQ'g+(1-A-2B-(1+A)\lambda)Q'(fg)+Q'(Q'fQ'g)$$

Lorsque l'équation quadratique en λ n'a pas 1 comme racine double, c'est-à-dire lorsque l'on n'a pas simultanément $A = -1$ et $B = 1$, on obtient pour Q' un opérateur multiplicativement lié tel que

$$Q'(fQ'g+gQ'f) = \alpha Q'fQ'g+\beta Q'(fg)+\gamma Q'(Q'fQ'g)$$

et $Q'e = (1-\lambda)e$ donne à son tour $\gamma\beta+(\alpha-1) = 0$. Choisissons un homothétique $R' = \gamma Q'$ puisque nous savons que $\gamma = (1-\lambda)^{-1}$ est différent de zéro.

$$R'(fR'g+gR'f) = (1-\gamma\beta)R'fR'g+\gamma\beta R'(fg)+R'(R'fR'g)$$

Utilisant un nouveau paramètre, on convient de la définition des opérateurs du type $D(\alpha)$:

(10) $$R'(fR'g+gR'f) = \alpha R'(fg)+(1-\alpha)R'fR'g+R'(R'fR'g)$$

suivie ici du renseignement supplémentaire $R'e = e$. Lorsque $A = -1$, $B = 1$, le passage à $Q = I-P$ fournit une relation du type (6) avec $Qe = 0$. D'ailleurs, lorsque $E = 1$, le passage à $Q = I-P$ donne

$$(A+1)QfQg+(A+B)(Q(fg)-(fQg+gQf))-Q(QfQg) = 0$$

et toujours $Qe = 0$. Pour $A+B = 0$, cette relation conduit après une éventuelle homothétie aux deux relations

(6) $Q(QfQg) = 0$ Opérateurs U-nilpotents

ou (11) $R(RfRg) = RfRg$ Relation de définition des opérateurs U-idempotents.

D'ailleurs, on dispose de $Re = 0$. Lorsque $A+B$ n'est pas nul, on obtient une relation multiplicative caractérisant le type $F(\alpha,\beta)$ (ici avec $\beta \neq 0$)

(12) $$Q(fg) = fQg+gQf+\alpha QfQg+\beta Q(QfQg)$$

2.2.2. Enfin, le cas $A+2B+D+E = 2$ implique la nullité de C pour fournir une relation peu simplifiée.

(13) $$P(fPg+gPf) = APfPg+B(fPg+gPf)+(2-A-2B-E)P(fg)+EP(PfPg)$$

Ne disposant pas de renseignement suffisant sur Pe , on ne peut aller beaucoup plus loin dans la réduction. Certes un changement linéaire, où l'on pose $Q = I-P$, nous donne une formule duale de (13) lorsque E est distinct de 1 et l'on peut obtenir une formule multiplicative lorsque $E = 1$ et $A+2B$ non nul et distinguer quelques cas. Finalement, on peut résumer les résultats acquis sous forme d'un théorème :

THEOREME 1.1. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre commutative unifère complexe et P un opérateur multiplicativement lié sur $\mathfrak{A}$. Lorsque l'image par l'opérateur P de l'élément unité e est un idempotent invariant, on ramène P , par transformations linéaires, à satisfaire l'un des cinq types suivants :

$B(\alpha,\beta)$ $P(fPg+gPf) = \alpha P(fg)+\beta P(PfPg)$ avec soit $Pe = e$, soit $Pe = 0$

$D(\alpha)$ $P(fPg+gPf) = \alpha P(fg)+(1-\alpha)PfPg+P(PfPg)$ avec $Pe = e$

U-nilpotent $P(PfPg) = 0$ avec $Pe = 0$

Hémi-multiplicatif $P(fg) = P(PfPg)$ avec $Pe = e$

enfin le type (13) $P(fPg+gPf) = APfPg+B(fPg+gPf)+(2-A-2B-E)P(fg)+EP(PfPg)$

(13) apparaît comme le seul cas où l'on ne puisse a priori assurer $Pe = e$ ou $Pe = 0$.

Toutefois on peut remplacer le cas d'un opérateur multiplicativement lié du type $D(\alpha)$ par la considération de deux types, non multiplicativement liés :
U-idempotent (11) $P(PfPg) = PfPg$
et type $F(\alpha,\beta)$ (12) $P(fg) = fPg+gPf+\alpha PfPg+\beta P(PfPg)$.

De façon contraire, l'U-nilpotence ou l'hémi-multiplicativité peuvent s'écrire sous des formes multiplicativement liées (cf.(8)).

Ce comportement de Pe permet donc de réduire la relation (1) tout en laissant subsister le cas (13). Nous allons faire disparaître ce cas en diminuant les hypothèses sur Pe mais en les renforçant sur l'algèbre $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$.

3. DEUXIEME ENSEMBLE d'HYPOTHESES.

Nous supposons maintenant que l'image par P de l'élément unité et son carré, sont des invariants par l'opérateur P ;

$$P(Pe)^2 = (Pe)^2 \quad \text{et} \quad P(Pe) = Pe$$

et supposons, d'abord, que $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ constitue un domaine d'intégrité. La relation (1) appliquée en $f = g = e$ fournit en général une équation quadratique en Pe

$$(A+E)(Pe)^2+(2B+D-2)Pe+Ce = 0 \tag{14}$$

$$(A+E)(Pe)^2+(2B+D+C-2)e)Pe = 0 \tag{15}$$

L'intégrité de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ permet de décomposer (15) en une alternative.

3.1. $Pe = 0$, ce qui implique $C = 0$ grâce à (14). Cependant la relation (1) appliquée en $g = e$ donne un renseignement. Nous nous trouvons en fait dans la situation du paragraphe 2.1. dont les conclusions restent valables, à savoir l'obtention du type $B(\alpha,\beta)$, U-nilpotent ou hémi-multiplicatif.

3.2. $(A+E)Pe+(2B+C+D-2)e = 0$. Nous devons à nouveau distinguer deux cas et il convient de remarquer que nous n'utilisons plus l'hypothèse d'intégrité sur l'algèbre $\mathcal{A}$.

3.2.1. $A+E$ est différent de zéro : On peut écrire (15) sous la forme $Pe = \lambda e$ et l'invariance de Pe par rapport à P fournit soit $\lambda = 0$, soit $\lambda = 1$. Le cas $\lambda = 0$ nous redonne $Pe = 0$ et la situation du paragraphe 3.1., tandis que $Pe = e$ fournit une relation entre les cinq coefficients $A+2B+C+D+E = 2$. Nous nous trouvons dans la situation de 2.2.1. dont les conclusions restent valables.

3.2.2. $A+E = 0$. La relation (15) montre que $2B+C+D = 2$ tandis que (14) s'écrit $(2B+D-2)Pe+Ce = 0$ ou encore $CPe = Ce$.

Le cas $Pe = e$ est un cas particulier du paragraphe 2.2.1.

Le cas $C = 0$ s'accompagne de $2B+D = 2$. En reportant dans (1), nous nous trouvons dans une situation parallèle à 2.2.2. mais avec des données supplémentaires permettant la réduction. Comme précédemment, nous effectuons un changement d'opérateurs en posant $Q = I-P$.

Lorsque A est différent de -1 , il vient

(16) $$Q(fQg+gQf) = \alpha Q(fg)+\beta(fQg+gQf)+\gamma Q(QfQg)$$

avec $\alpha = \frac{2B+A}{A+1}$, $\beta = \frac{1-B}{A+1}$ et $\gamma = \frac{A}{A+1}$. Notamment $\alpha+2\beta+\gamma-2 = 0$.

Lorsque $\beta = 0$, c'est-à-dire $B = 1$, la relation (16) est un cas d'opérateur $B(\alpha,\beta)$ avec $\alpha+\beta = 2$, c'est-à-dire le plus général compte tenu des hypothèses relatives à P .

Lorsque β n'est pas nul, une homothétie $Q = \beta R$ permet de parvenir à la forme caractéristique des opérateurs du type $C(\alpha',\beta')$:

$$R(fRg+gRf) = fRg+gRf+\alpha'R(fg)+\beta'R(RfRg)$$

Lorsque A vaut -1 , P vérifie une relation de liaison multiplicative

(17) $$P(fPg+gPf) = P(PfPg)-PfPg+B(fPg+gPf)+2(1-B)P(fg)$$

tandis que $Q = I-P$ satisfait, de même que $Q' = 2I-P$, la relation multiplicative

$$Q(QfQg) = (2B-1)Q(fg)+(1-B)(fQg+gQf)$$

Lorsque $B = \frac{1}{2}$, il vient un opérateur pseudo-projectant

(18) P.P : $$2Q(QfQg) = fQg+gQf$$

Lorsque $B \neq \frac{1}{2}$, on parvient à une forme multiplicative, mise sous la forme caractéristique d'un opérateur $E(\alpha')$

(19) $E(\alpha')$ $$Q(fg) = \frac{1-\alpha'}{2}(fQg+gQf)+\alpha' Q(QfQg)$$

le cas $\alpha' = 1$, c'est-à-dire $B = 1$, correspond à un opérateur hémi-multiplicatif, et le cas $\alpha' = 0$ (exclu par hypothèse), correspondrait à ce que nous appelons un centralisateur.

Par rapport au paragraphe 2, nous avons fait éclater la relation (13) en deux autres relations, obtenant notamment $B(\alpha,\beta)$ sans autres indications que $\alpha+\beta = 2$. Rappelons que le type $D(\alpha)$ et le type (17) peuvent être remplacés par l'étude des opérateurs non multiplicativement liés : U-idempotents et $F(\alpha,\beta)$ pour $D(\alpha)$, PP et $E(\alpha)$ pour (17).

THEOREME 1.2. Soit $\mathfrak{A}$ un anneau intègre sur le corps des nombres complexes et P un opérateur multiplicativement lié. Lorsque Pe et son carré sont des invariants par P , on peut, par transformations linéaires, amener P à vérifier l'un des types :

$B(\alpha,\beta)$ $P(fPg+gPf) = \alpha P(fg)+\beta P(PfPg)$ $Pe = e$, $Pe = 0$ ou $\alpha+\beta = 2$

$C(\alpha,\beta)$ $P(fPg+gPf) = fPg+gPf+\alpha P(fg)+\beta P(PfPg)$

$D(\alpha)$ $P(fPg+gPf) = \alpha P(fg)+(1-\alpha)PfPg+P(PfPg)$ $Pe = e$

U-nilpotent $P(PfPg) = 0$ $Pe = 0$

Hémi-multiplicatif $P(PfPg) = P(fg)$ $Pe = e$

$E(\alpha)$ $P(fg) = \frac{1-\alpha}{2}(fPg+gPf)+\alpha P(PfPg)$

PP $P(PfPg) = \frac{fPg+gPf}{2}$

Au lieu de supposer que $\mathfrak{A}$ est un domaine d'intégrité, il convient souvent de se placer sur une algèbre commutative et unifère de fonctions f définies sur un ensemble X et prenant leurs valeurs dans un domaine d'intégrité : $fg = 0$ implique, en chaque point x de X, $f(x)$ ou $g(x)$ nul.

Par convention, de tels espaces sont appelés algèbres fonctionnelles dans ce qui suit. Avec les hypothèses de cette section sur P , on peut parvenir à une réduction des opérateurs multiplicativement liés à partir du résultat suivant où χ_Y désigne la fonction caractéristique d'un sous-ensemble Y de X .

<u>THEOREME 1.3</u>. <u>Soit</u> P <u>un opérateur multiplicativement lié sur une algèbre fonctionnelle laissant</u> Pe <u>et</u> $(Pe)^2$ <u>invariants. Supposons</u> C , A+E <u>et</u> 2B+D-2 <u>non simultanément nuls. Il existe alors un sous-ensemble</u> Y <u>de</u> X <u>tel que</u> $Pe = P(\chi_Y e) = \chi_Y e$.

Pe est solution de l'équation (14), équation linéaire lorsque $A+E = 0$. Lorsque C n'est pas nul, nous avons pu constater en 3.2.2., sans utiliser l'intégrité de $\mathfrak{A}$, que $Pe = e$. Il subsiste seulement le cas A+E non nul, pour lequel l'équation (14) s'écrit $(Pe-\lambda e)(Pe-\mu e) = 0$ tandis que (15) fournit $\lambda\mu = 0$. Par suite, utilisant notre hypothèse relative à $\mathfrak{A}$, il existe un sous-ensemble Y de X, tel que $Pe = \lambda X_Y e$ où λ n'est pas nul. On vérifie $C = 0$ et la relation $2 = A+2B+D+E$. Un calcul conduit à $\lambda = 1$, donc en désignant par Y' le complémentaire de Y

$$Pe = P(\chi_Y e) = \chi_Y e \quad \text{et} \quad P(\chi_{Y'} e) = 0$$

Pour la réduction, les résultats de 3.2.2. sont utilisables et il suffit de considérer le seul cas où A+E n'est pas nul. Lorsque $Y = X$, c'est-à-dire $Pe = e$, on obtient les types $B(\alpha,\beta)$ hémi-multiplicatif, U-nilpotent ou $D(\alpha)$. De même, lorsque $Y = \phi$, on obtient ces mêmes types sauf le cas $D(\alpha)$. Il reste à traiter l'éventualité où Y et Y' sont des sous-ensembles non vides de X.

Nous dirons qu'un opérateur P, défini sur une algèbre fonctionnelle, est <u>irréductible</u> lorsque $P(\chi_Y e) = \chi_Y e$ implique $Y = \phi$ ou $Y = X$.

<u>COROLLAIRE 1.1</u>. Soit P un opérateur multiplicativement lié irréductible sur une algèbre fonctionnelle et vérifiant les conditions du Théorème 1.3. Alors $Pe = e$ ou $Pe = 0$.

Si $Pe = 0$, on peut se ramener aux types $B(\alpha,\beta)$, U-nilpotent ou hémi-multiplicatif.

Si $Pe = e$, on peut se ramener aux types $B(\alpha,\beta)$, $D(\alpha)$, U-nilpotent ou hémi-multiplicatif.

On peut simplifier même les opérateurs multiplicativement liés non irréductibles.

On pose

$$\chi_Y = \chi_1 \,,\quad \chi_{Y'} = \chi_2 \quad \text{et} \quad P_{ij}(f) = \chi_i P(\chi_j f) \,,\quad i \text{ et } j \text{ valant } 1 \text{ ou } 2.$$

A ce propos, on remarque que l'appartenance de $\chi_i e$ à l'algèbre est acquise.

Pour i différent de j, les opérateurs P_{ij} sont multiplicativement liés d'un type très particulier puisque $P_{ij}(fP_{ij}g) = 0$ et que $P_{ij}(e) = 0$. Au contraire, les opérateurs P_{ii} ne sont pas nécessairement liés mais

$$P_{11}(e) = \chi_1 e \quad \text{et} \quad P_{22}(e) = 0.$$

On a sans peine le

<u>LEMME 1.1</u>. Si $P_{12} = 0$ (ou bien $P_{21} = 0$), P_{11} et P_{22} sont multiplicativement liés.

Lorsque $P_{12} = P_{21} = 0$, P est la somme directe de deux opérateurs multiplicativement liés P_{11} et P_{22} : $P = P_{11} \oplus P_{22}$. Sur l'algèbre $\chi_1 \mathfrak{a}$, $P_{11}(e) = e$ et la réduction de l'opérateur P_{11} a déjà été effectuée, tandis que sur l'algèbre $\chi_2 \mathfrak{a}$, $P_{22}(e) = 0$ et la réduction de l'opérateur P_{22} est connue.

Groupons quelques résultats techniques.

<u>LEMME 1.2</u>. $$P_{12}P_{21} = 0 \quad \text{et} \quad (1-E)P_{21}P_{12} = 0$$

<u>LEMME 1.3</u>. $$BDP_{21} = 0 \quad \text{et} \quad (1-E)(B+D-1)(A+2B)P_{12} = 0$$

<u>LEMME 1.4</u>. $$P_{22}^2 = (B+D)P_{22} \quad \text{et} \quad (1-E)P_{11}^2 = (1-B-E)P_{11}+B\chi_1 I$$

<u>LEMME 1.5</u>. $$BDP_{12} = 0$$

<u>DEMONSTRATION</u>. En posant $f = \chi_2 e$ et $g = \chi_1 h$ dans la relation (1), on obtient $P(P_{21}) = BP_{21}$ prouvant la première relation du lemme 1.2 et en outre que le sous-espace image de P_{21} est sous-espace propre relatif à P (et à P_{22}).

On obtient de même

(20) $$(1-E)P(P_{12}) = (A+B)P_{12}$$

ce qui prouve la deuxième relation du lemme 1.2 et en outre que l'image directe de P_{12} est sous-espace propre relatif à P (et à P_{11}), lorsque E est différent de 1.

Posant $g = e$ et $f = P_{21}(h)$ dans la relation (1), il vient

$$P^2(P_{21}) = (B+D)P(P_{21})$$

en tenant compte du lemme 1.2. Mais $P_{21}(h)$ est vecteur propre de P , d'où

$$BDP_{21} = 0 .$$

De même, à partir de $g = e$ et $f = P_{12}(h)$, après une multiplication préalable par $\chi_1 e$, on trouve selon le lemme 1.2,

$$\chi_1 P^2(P_{12})-EP_{11}^2(P_{12}) = (A+B+D-1)P_{11}(P_{12})+BP_{12} .$$

Or, lorsque E est distinct de l'unité, $P(P_{12}) = P_{11}P_{12} = \frac{A+B}{1-E} P_{12}$. Au terme d'un calcul on obtient le résultat :

$$(1-E)(B+D-1)(A+2B)P_{12} = 0$$

On obtiendrait par un procédé analogue

(21) $$P_{12}(P_{22}) = DP_{12}$$

ainsi que

$$(1-E)P(P_{11}h)+(1-D)P(h\chi_1) = (A+B)P_{11}(h)+B\chi_1 h$$

et

(22) $$(1-E)P_{21}(P_{11})+(1-D)P_{21} = 0.$$

Enfin, la comparaison des deux relations $P_{22}^2 = (B+D)P_{22}$ et $P_{12}P_{22} = DP_{12}$ fournit facilement la formule du lemme 1.5, à savoir $BDP_{12} = 0$.

Lorsque P_{11} est idempotent, en raisonnant sur les valeurs propres, on a

$$(1-E)(A+B)(B+D-1)P_{12} = 0 \quad \text{et} \quad (E+D-2)(1-D)P_{21} = 0$$

Lorsque P_{22} est idempotent, il vient de même $D(1-D)P_{12} = 0$.

Nous sommes en mesure d'entreprendre la réduction d'un opérateur multiplicativement lié dans une algèbre fonctionnelle. Sous les hypothèses d'inclusion stricte, $\emptyset \subset Y \subset X$, on a la réduction :

(1) Lorsque BD n'est pas nul, P_{12} et P_{21} sont nuls grâce aux lemmes 1.3 et 1.5. L'opérateur P est donc somme directe de deux opérateurs multiplicativement liés dont la réduction est connue.

(2) Lorsque B est nul, on dispose de la relation $A+D+E = 2$.

2.1. Lorsque le coefficient E est distinct de 1 , le lemme 1.4. établit l'idempotence de P_{11} . D'une part, la nullité de A conduit à un opérateur $B(\alpha,\beta)$ avec $\alpha+\beta = 2$, tandis que lorsque A n'est pas nul, le cas $D \neq 1$

conduit à $P_{12} = P_{21} = 0$. Le cas $D = 1$ fournit un nouveau type, par définition appelé <u>opérateur</u> $D'(\alpha)$:

$$(23) \qquad P(fPg+gPf) = P(fg)+(1-\alpha)PfPg+\alpha P(PfPg)$$

Mais lorsque le coefficient α n'est pas nul, une homothétie $P = \alpha Q$ fournit un opérateur de type $D(\alpha)$.

<u>2.2</u>. Lorsque E est égal à 1 , il vient $A+D = 1$.

Si A est différent de 0 , on trouve $P_{12} = 0$ et comme D est différent de 1 , on a $P_{21} = 0$.

Si A est nul, P est du type $B(1,1)$

(<u>3</u>) Lorsque D est nul et B différent de zéro, on a $A+2B+E = 2$.

<u>3.1</u>. Supposons d'abord le coefficient E différent de 1 .

<u>3.1.1</u>. Le cas $A+2B = 0$ entraîne $E = 2$ et fournit un opérateur du type $P(fPg+gPf) = -2BPfPg+B(fPg+gPf)+2P(PfPg)$ dont nous avons déjà établi la réduction (§2). On obtient par passage à $I-B^{-1}P$, le type $B(\alpha,\beta)$ avec $\alpha+\beta = 2$ lorsque $B \neq 2^{-1}$ et le type hémi-multiplicatif lorsque $B = 2^{-1}$.

<u>3.1.2</u>. Lorsque $A+2B$ n'est pas nul et $B = 1$, le passage à l'opérateur $Q = I-P$ introduit le type $B(\alpha,\beta)$ avec $\alpha+\beta = 2$ puisque E est différent de 1.

Par contre, dans le cas où B n'est pas égal à 1 , on a seulement $P_{12} = 0$ mais P_{11} et P_{22} sont multiplicativement liés d'un type connu.

<u>3.2</u>. Lorsque $E = 1$, on a $A+2B = 1$ et B est différent de zéro. Deux cas se présentent :

Lorsque B vaut 1, donc $A = -1$, $P_{21} = 0$ par (21) et $Q = I-P$ est hémi-multiplicatif. D'ailleurs on vérifie $P(f\chi_1) = f\chi_1$ et $P_{22}^2 = P_{22}$.

Lorsque B diffère de 1, grâce aux relations (20) et (21), on a $P_{12} = P_{21} = 0$.

On peut résumer cette discussion sous la forme d'un théorème et de 2 corollaires.

THEOREME 1.4. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre fonctionnelle et P un opérateur multiplicativement lié sur $\mathcal{A}$, laissant Pe et $(Pe)^2$ invariants. Après transformations linéaires, P se ramène

(a) soit à l'un des quatre types $B(\alpha,\beta)$, U-nilpotent, hémi-multiplicatif ou $D(\alpha)$

(b) soit à une somme de transformations linéaires de tels opérateurs.

(c) soit enfin à l'un des trois types $C(\alpha,\beta)$, $E(\alpha)$ ou PP.

On peut préciser ce théorème par deux corollaires plus techniques

COROLLAIRE 1.2. Lorsque $|A+E| + |C|$ est différent de 0, sous les conditions du Théorème 1.4., l'opérateur P est somme de transformations linéaires d'opérateurs des types suivants :

(a) $B(\alpha,\beta)$ avec $\alpha+\beta = 2$
(b) hémi-multiplicatif
(c) U-nilpotent
(d) $D(\alpha)$ ou $D'(\alpha)$

COROLLAIRE 1.3. Mis à part le cas $C = D = 0$ avec $E \neq 2$, $E \neq 1$, $B \neq 1$ et sous les conditions du Théorème 1.4, l'opérateur P se ramène

(a) soit à l'un des types $B(\alpha,\beta)$ avec $\alpha+\beta = 2$, hémi-multiplicatif, U-nilpotent, ou $D(\alpha)$

(b) soit à une somme directe de transformations linéaires de deux opérateurs de l'un des quatre premiers types précédents.

(c) soit à l'un des types $C(\alpha,\beta)$, $E(\alpha)$ ou PP.

4. OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES IDEMPOTENTS.

En dernier lieu, nous supposons l'opérateur P idempotent car il s'agit d'une circonstance fréquente pour les opérateurs jouant le rôle de moyennes. L'idempotence, appliquée en (1), montre que P est du type $B(\alpha,\beta)$ sauf lorsque $B = 1$, auquel cas on a la relation $(A+E)P(PfPg)+(C+D)P(fg) = 0$.

On peut alors répartir différemment les termes de (1) pour obtenir

$$P(fPg+gPf) = A(PfPg-P(PfPg))+fPg+gPf+C(fg-P(fg))$$

ce qui est la définition du type $A(\alpha,\beta)$ si l'on pose $A = \alpha$ et $C = \beta$. Mais on relie $A(\alpha,\beta)$ et $B(\alpha,\beta)$ grâce au lemme suivant :

<u>LEMME 1.6.</u> Pour un opérateur P du type $A(\alpha,\beta)$, l'opérateur $Q = I-P$ est du type $B((\alpha+\beta+2)(\alpha+1)^{-1}, \alpha(\alpha+1)^{-1})$ lorsque $\alpha \neq -1$ et pour $\alpha = -1$, l'opérateur Q satisfait la relation $Q(QfQg) = (\beta+1)Q(fg)$.

L'idempotence de P se transmet à l'opérateur $I-P$. Cependant, en prenant un homothétique de P, le cas $\alpha = -1$ donne soit l'hémi-multiplicativité, soit la U-nilpotence.

<u>THEOREME 1.6.</u> <u>Par transformations linéaires, un opérateur multiplicativement lié idempotent est soit du type</u> $B(\alpha,\beta)$, <u>soit U-nilpotent, soit hémi-multiplicatif</u>.

Toutefois, l'opérateur P est souvent doublement multiplicativement lié et, afin d'examiner son comportement vis-à-vis de l'unité, une étude méthodique est nécessaire, pour laquelle on peut se placer dans le cadre d'une algèbre unifère commutative et intègre. Un calcul assez long conduit au théorème.

<u>THEOREME 1.7.</u> <u>Soit</u> P <u>un opérateur multiplicativement lié et idempotent sur une algèbre commutative unifère et intègre. Lorsque l'on n'a pas simultanément</u> $A = C = 0$ <u>pour</u> $A+E \neq 0$, <u>ou</u> $2B+C+D = 2$ <u>pour</u> $A+E = 0$, <u>alors</u> Pe <u>vaut soit</u> e, <u>soit</u> 0.

Il faut noter que l'hypothèse d'intégrité ne simplifie guère la réduction puisque l'on obtient les types $B(\alpha,\beta)$ les plus généraux. Cependant, on peut pousser plus loin la réduction. Nous allons donner ici un seul résultat typique, introduisant une importante notion de symétrie. Considérons un opérateur de <u>quasi-interpolation</u> défini par

$$P(fPg+gPf) = 2P(fg) \tag{24}$$

et supposons $P^2 = P$. La relation (24) appliquée en Pf et g devient aussitôt $P(PfPg)+P(gPf) = 2P(gPf)$ donc fournit la relation de symétrie

$$P(gPf) = P(fPg).$$

Cette relation symétrique en f et g définit les <u>opérateurs multiplicativement symétriques</u>.

<u>THEOREME 1.8.</u> <u>Un opérateur de quasi-interpolation idempotent est multiplicativement symétrique</u>.

Dorénavant, après une récapitulation des définitions et un rappel des types classiques d'opérateurs multiplicativement liés, nous allons envisager différents cas d'algèbres commutatives, en nous restreignant à l'étude des seuls cas $B(\alpha,\beta)$, hémi-multiplicatifs, U-nilpotents, $E(\alpha)$ et $D(\alpha)$.

Cependant, nous ne ferons plus systématiquement les deux hypothèses de ce paragraphe :

$$P(Pe) = Pe \quad \text{et} \quad P(Pe)^2 = (Pe)^2.$$

Tous les théorèmes et décompositions de ce chapitre restent valables si l'on suppose que l'espace $\mathcal{A}$ est un ensemble de fonctions définies sur X , ensemble abstrait, et à valeurs dans un corps commutatif algébriquement clos K , à condition que $\mathcal{A}$ soit muni de la structure naturelle d'algèbre sur le corps K . Les coefficients α et β sont alors pris dans ce corps K . Pratiquement, nous supposons toujours $K = C$.

CHAPITRE II

DEFINITIONS ET COMPARAISONS DES DIVERS TYPES D'OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES

1. DEFINITIONS.

Pour la commodité de l'exposé, il convient de donner ou de récapituler quelques définitions. Sur une algèbre $\mathcal{A}$, on dit qu'un opérateur P est du type, ou plus simplement est multiplicativement lié, si P satisfait une relation :

$$P(fPg+gPf) = APfPg+B(fPg+gPf)+Cfg+DP(fg)+EP(PfPg)$$

On distingue alors divers types :

$B(\alpha)$		$P(fPg+gPf) = \alpha P(fg) + (2-\alpha)P(PfPg)$
$B(\alpha,\beta)$		$P(fPg+gPf) = \alpha P(fg) + \beta P(PfPg)$
$D(\alpha)$		$P(fPg+gPf) = \alpha P(fg) + (1-\alpha)PfPg + P(PfPg)$
$D'(\alpha)$		$P(fPg+gPf) = P(fg) + (1-\alpha)PfPg + \alpha P(PfPg)$
DM	demi-multiplicatif	$P(fPg+gPf) = 2P(PfPg)$
QI	de quasi-interpolation	$P(fPg+gPf) = 2P(fg)$
D		$P(fPg+gPf) = P(fg) + P(PfPg)$
Ba	de Baxter	$P(fPg+gPf) = P(fg) + PfPg$
R	de Reynolds	$P(fPg+gPf) = PfPg + P(PfPg)$
SM	semi-multiplicatif	$P(fPg+gPf) = 2PfPg$
$C(\alpha,\beta)$		$(P-I)(fPg+gPf) = \alpha P(fg) + \beta P(PfPg)$

Pour les opérateurs tels que I-P soit multiplicativement lié, on distingue :

HM	hémi-multiplicatif	$P(PfPg) = P(fg)$
$E(\alpha)$		$P(fg) = \alpha P(PfPg) + \frac{1-\alpha}{2}(fPg+gPf)$
PP	pseudo-projectant	$2P(PfPg) = fPg+gPf$

On doit également envisager une importante notion de symétrie

MS	multiplicativement symétrique	$P(fPg) = P(gPf)$
MAS	multiplicativement antisymétrique	$P(fPg+gPf) = 0$

Un opérateur multiplicativement lié et multiplicativement symétrique est dit multiplicativement lié symétrique. On ne redouble pas la lettre M dans une abréviation.

Ainsi

SMS	semi-multiplicatif symétrique	$P(fPg) = PfPg$
DMS	demi-multiplicatif symétrique	$P(fPg) = P(PfPg)$
I	interpolation	$P(fPg) = P(fg)$

Enfin, nous avons les types

MN	multiplicativement nilpotent	$P(fPg) = 0$
U.N	U-nilpotent	$P(PfPg) = 0$
n.N	nilpotent d'ordre n	$P^n = 0$
U.2	U-idempotent	$P(PfPg) = PfPg$
n.I	n-potent	$P^n = P$
M	multiplicatif	$P(fg) = PfPg$
CS	centralisateur symétrique	$P(fg) = fPg$
C	centralisateur	$P(fg) = \frac{fPg + gPf}{2}$
F(α,β)		$P(fg) = fPg+gPf+\alpha PfPg+\beta P(PfPg)$

Précisons tout de suite quelques rapports entre ces diverses définitions et la littérature existante.

(1) Un opérateur du type D(1), ou B(1,1), ou encore D'(1), est du type D.

(2) Un opérateur du type B(0), ou B(0,2), est de quasi-interpolation. Un opérateur B(2), ou B(2,0), est demi-multiplicatif.

(3) Un opérateur du type B(0,0) est multiplicativement antisymétrique.

(4) Un opérateur du type D(0) est un opérateur de Reynolds (O. REYNOLDS : opus cité), encore appelé "smoothing operator" (cf. ROTA G.C. [1]), tandis qu'un opérateur de type D'(0) est un opérateur de Baxter (cf. BAXTER G. [1]).

(5) Un opérateur E(1) est hémi-multiplicatif, un opérateur E(0) est une sorte de multiplicateur. En analyse harmonique notamment, on définit un multiplicateur à gauche lorsque $P(fg) = (Pf)g$ (cf. LARSEN R. [1]). Comme nous nous restreignons au cas commutatif, nous avons choisi les définitions ci-dessus. Bien entendu, dès que l'algèbre est unifère, un centralisateur n'est autre qu'une multiplication

par Pe .

(6) Dans la littérature anglo-saxonne, un opérateur semi-multiplicatif symétrique est appelé "averaging operator", principalement lorsque l'on suppose de plus $Pe = e$ et $\|P\| \leq 1$.

(7) Un opérateur $F(0,0)$ est un opérateur de dérivation noté ∂ , tandis qu'une anti-dérivation, notée ∂^{-1} satisfait $P(fPg+gPf) = PfPg$ (cf. MILLER J.B. [2])

(8) Dans le cas d'une algèbre $\mathfrak{A}$ non commutative, les opérateurs intéressants sont ceux pour lesquels les groupements sont de la forme $fPg+Pfg$. Nous renvoyons à un article ultérieur l'étude du cas non commutatif pour lequel d'ailleurs des résultats ont déjà été fournis pour un opérateur semi-multiplicatif symétrique par des mathématiciens japonais (cf. UMEGAKI H. [1] et [2]).

(9) En outre, nous n'étudierons pas dans cet article les opérateurs généraux du type $C(\alpha,\beta)$ qui feront l'objet d'une autre publication. .

2. PREMIERES REDUCTIONS ET ROLE DE L'ELEMENT UNITE.

Dans la plupart des cas précédents, la somme des coefficients du membre de droite est égale à 2, ce qui permet à l'opérateur identique d'être du type multiplicativement lié considéré. Il est pratique de se ramener à cette situation par une homothétie.

(a) Prenons un opérateur $B(\alpha,\beta)$ et choisissons pour λ une solution de l'équation du second degré $\beta\lambda^2-2\lambda+\alpha = 0$. L'opérateur $Q = \lambda P$ est du type $B(\alpha)$.

(b) Lorsque P est du type $B(\alpha)$, l'opérateur $Q = \alpha^{-1}(2-\alpha)P$ est du type $B(2-\alpha)$, du moins pour α non nul. On peut donc restreindre l'étude des opérateurs $B(\alpha,\beta)$ à la seule considération du type $B(\alpha)$ pour $\alpha \geq 1$, du type $B(0)$ (demi-multiplicatif) et d'un opérateur multiplicativement antisymétrique.

(c) De la même façon nous avons noté qu'un homothétique αP de l'opérateur de type $D(\alpha)$ est du type $D'(\alpha)$ du moins lorsque α n'est pas nul.

Dans les réductions précédentes, nous avons pu apprécier le rôle d'un élément unité e dans l'algèbre qui sert de domaine de définition aux opérateurs multiplicativement liés. Lorsque l'algèbre complexe $\mathfrak{A}$ est quelconque, un procédé classique mais discutable, consiste à adjoindre une unité en considérant l'espace agrandi

$\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathbb{C} \oplus \widetilde{\mathfrak{A}}$ muni de la multiplication :

$$(\zeta \oplus f)(\eta \oplus g) = (\zeta\eta) \oplus (\eta f+\zeta g+fg)$$

L'espace $\widetilde{\mathfrak{A}}$ est alors une algèbre unifère dont l'unité est $e = 1 \oplus 0$ tandis que $\mathfrak{A}$ est un idéal de $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Partant d'une norme sur $\mathfrak{A}$, on peut choisir de beaucoup de façons une norme sur $\widetilde{\mathfrak{A}}$ qui restreinte à $\mathfrak{A}$ donne la norme de départ : on peut dire qu'il s'agit d'une <u>norme compatible</u>. En outre, et la remarque sera utile au Chapitre V, lorsque $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre, on peut construire une norme compatible sur $\widetilde{\mathfrak{A}}$ pour laquelle $\widetilde{\mathfrak{A}}$ soit également structurée en C^*-algèbre. Bien entendu, un opérateur multiplicativement lié sur $\mathfrak{A}$ ne se prolonge pas toujours en un opérateur multiplicativement lié du même type sur $\widetilde{\mathfrak{A}}$ (Il suffit de prendre le cas d'un centralisateur dont la structure est triviale pour une algèbre unifère). On dispose toutefois de certains théorèmes de prolongement. Soit P un opérateur multiplicativement lié sur $\mathfrak{A}$ et $\tilde{P}$ l'opérateur linéaire défini sur l'algèbre par

$$\tilde{P}(\zeta \oplus f) = (a\zeta) \oplus Pf$$

où a désigne une constante complexe à déterminer convenablement. $\tilde{P}$ est évidemment un prolongement de l'opérateur P sur l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

<u>Propriété de prolongement 2.1. Soit</u> P <u>un opérateur multiplicativement lié sur</u> $\mathfrak{A}$ <u>tel que l'on ait simultanément</u> $E \neq 0$, $A+E(B+D) = 1$ <u>et</u> $B+EC = 0$. <u>Il existe un opérateur</u> $\tilde{P}$, <u>du même type que</u> P <u>et qui prolonge l'opérateur</u> P <u>sur</u> $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Cette propriété de prolongement s'adapte notamment aux opérateurs du type D, $B(\alpha,\beta)$ avec $\alpha\beta = 1$, $D(\alpha)$ pour tout α et $D'(\alpha)$ pour les α non nuls.

Le calcul montre, en identifiant les termes en ζ et η, que $\tilde{P}$ est un opérateur multiplicativement lié du même type que P dès que les quatre équations suivantes sont satisfaites

$$(Aa^2+2Ba+C+Da+Ea^3) = 2a^2$$

$$Aa+B+D = a$$

$$Ea = 1$$

$$Ba+C = 0$$

L'élimination de a fournit les trois conditions suffisantes du prolongement

$$E \neq 0$$

$$B+EC = 0$$

$$A+E(B+D) = 1$$

Considérons maintenant le cas où P est un opérateur multiplicativement lié et idempotent. Le cas où a est différent de 1 ou de 0 se ramène au cas général. Le cas $a = 1$ donne $B+C = 0$ et $A+2B+C+D+E = 2$. Le cas $a = 0$ donne $B+D = 1$ et $C = 0$. Il faut noter que les deux derniers cas fournissent un opérateur $\tilde{P}$ multiplicativement lié et idempotent et nous délivrent de l'hypothèse relative à la non nullité du coefficient E. Nous énonçons :

Propriété de prolongement 2.2. Soit P un opérateur multiplicativement lié idempotent sur $\mathfrak{A}$. Lorsque $B+C = 0$ et $A+2B+C+D+E = 2$ ou bien lorsque $B+D = 1$ et $C = 0$, il existe un opérateur idempotent $\tilde{P}$, multiplicativement lié de même type que P, qui prolonge l'opérateur P sur $\tilde{\mathfrak{A}}$. Cette propriété de prolongement s'applique notamment aux cas suivants : le cas $B(\alpha,\beta)$ sous la seule condition $\alpha+\beta = 2$ (donc en particulier pour un opérateur de quasi-interpolation, un opérateur demi-multiplicatif ou un opérateur du type D); le cas $D(\alpha)$ ou $D'(\alpha)$ pour toutes les valeurs de α (donc en particulier pour un opérateur de Reynolds ou un opérateur de Baxter).

Nous pourrions dresser un tableau des prolongements possibles pour d'autres types d'opérateurs multiplicativement liés en supposant réalisées certaines conditions raisonnables. Faute de place, sinon d'intérêt, nous nous contenterons d'énoncer :

Propriété de prolongement 2.3. Soit P un opérateur multiplicativement symétrique idempotent, il existe sur $\tilde{\mathfrak{A}}$ un opérateur multiplicativement symétrique idempotent qui prolonge l'opérateur P.

Désormais, nous supposerons que l'algèbre $\mathfrak{A}$ est une algèbre fonctionnelle unifère dans ce chapitre, mais nous ne préjugeons pas encore de l'action de P sur l'élément unité de cette algèbre. Remarquons enfin que la présence d'une unité rend inutile la considération d'opérateurs non bornés dont le domaine serait un sous-ensemble de $\mathfrak{A}$ doté d'une structure d'idéal.

3. ROLE DE LA SYMETRIE MULTIPLICATIVE.

La symétrie multiplicative permet une réduction appréciable en jouant un peu le rôle de l'idempotence. Prenons d'abord le cas d'un opérateur de Reynolds multiplicativement symétrique.

THEOREME 2.1. Un opérateur de Reynolds multiplicativement symétrique est somme directe d'un opérateur semi-multiplicatif symétrique idempotent et d'une anti-dérivation multiplicativement symétrique nilpotente : ces deux opérateurs étant d'ailleurs de Reynolds.

La relation de Reynolds fournit $P(PfPg)+P(gP^2f) = P^2fPg+P(P^2fPg)$ et la symétrie multiplicative indique (1) $P^2fPg = PfP^2g$. En un point x de non nullité de Pf , on peut poser $k_f(x) = \frac{P^2f(x)}{Pf(x)}$ et (1) donne $P^2g(x) = k_f(x)Pg(x)$, c'est-à-dire $k_f(x) = k_g(x)$. Lorsque $Pf(x) = 0$, ou bien $P^2f(x) = 0$ et tout k_g peut convenir comme k_f , ou bien $Pg(x) = 0$ pour tout g , donc en particulier $P^2f(x) = 0$. Appelons $k(P)$ l'ensemble des points de x où tous les éléments de l'image de l'algèbre $\mathcal{A}$ par l'opérateur P s'annulent. Cette notation nous servira dans tout ce travail. Nous venons donc de trouver une fonction k , nulle sur cet ensemble $k(P)$ et pour laquelle on peut écrire pour tout élément f appartenant à l'algèbre $\mathcal{A}$

(2) $$P^2f = kPf$$

Reporté dans l'équation de Reynolds, ce résultat fournit après calculs

(3) $$k(k-1)PfPg = 0$$

Par suite, k est la fonction caractéristique d'un certain sous-ensemble, par ailleurs inclus dans le complémentaire de $k(P)$. Mais une manipulation algébrique relie k et Pe selon

$$Pe(x) = k(x)e(x)$$

ce qui établit l'appartenance de l'élément ke à l'algèbre $\mathcal{A}$, comme prévisible De $P^2e = P(ke) = kPe = k^2e = ke$, on tire $P((1-k)e) = 0$. Enfin on pose $k(x) = \chi_1(x)$ et on utilise les notations du chapitre I §3 pour assurer l'égalité $P_{12} = P_{21} = 0$, ainsi que $P_{22}^2 = 0$. La symétrie procure $P_{11}^2 = P_{11}$. Finalement P est décomposé en une somme directe

$$P = P_{11} \oplus P_{22}$$

où P_{11} est un opérateur de Reynolds idempotent, ce qui assure que P_{11} est un opérateur semi-multiplicatif symétrique (cf. par analogie le théorème 1.8), tandis que P_{22} est un opérateur de Reynolds nilpotent d'ordre 2 et vérifie $P_{22}(fP_{22}(g)) = \frac{1}{2} P_{22}(f)P_{22}(g)$, ce qui termine la démonstration du théorème 2.1.

Réciproquement, un opérateur somme directe de deux opérateurs P_{11} et P_{22} des types signalés, est un opérateur de Reynolds multiplicativement symétrique (la démonstration se fait par vérification directe).

Comme conséquence de la démonstration précédente, nous disposons du :

COROLLAIRE 2.1. Un opérateur de Reynolds multiplicativement symétrique satisfait la relation $P^2 = P^3$.

On dispose d'une sorte de réciproque à ce corollaire pour laquelle nous énonçons d'abord un lemme dont la démonstration ne fait pas problème.

LEMME 2.1. Pour un opérateur de Reynolds, on a l'équivalence entre $Pe = 0$ et $P^2 = 0$. Dans ce cas, P est une antidérivation pour laquelle $P(Pf)^n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

COROLLAIRE 2.2. Un opérateur de Reynolds pour lequel $P^2 = P^3$ est une somme directe de deux opérateurs de Reynolds. De plus P^2 est un opérateur semi-multiplicatif symétrique tandis que $P-P^2$ est une antidérivation nilpotente.

On calcule facilement $$P(gP^2f) = P^2fPg$$

et par suite

$$P(PfP^2g) = P^2fP^2g = P(PfP^2g)$$

ce qui fournit la semi-multiplicativité de P^2 selon

$$P^2(gP^2f) = P^2(fP^2g) = P^2fP^2g \tag{4}$$

En outre $P^3f = P^2f = P^2fPe$, mais également

$$P(PeP^2f) = P^2fP^2e = P^4f = P^2f.$$

Ces relations permettent d'écrire $P^2e = \chi_Y e$ ou χ_Y est la fonction caractéristique du complémentaire de l'ensemble $k(P^2)$.

Comme $P^3 = P^2$, on a $P(\chi_Y e) = \chi_Y e$, soit $P^2(\chi_{Y'}e) = 0$. Rappelons que Y' désigne le complémentaire du sous-ensemble Y.

Reprenant les notations et la méthode du chapitre I §3, bien que les hypothèses soient légèrement différentes, on trouve $P_{12} = P_{21} = 0$. Par suite $P = P_{11} \oplus P_{22}$ où P_{11} et P_{22} sont des opérateurs de Reynolds. Grâce au lemme 2.1, P_{22} est une antidérivation. En outre on vérifie que P(et P_{11}) satisfait la relation

$$P(fPg+gPf) = PfPg + P^2fP^2g \tag{5}$$

ce qui donne en particulier $P(PfPg) = P^2(P^2fP^2g) = P^2fP^2g$. Posant alors $Q = P-P^2$ par analogie avec le cas symétrique, on constate d'abord que Q est nilpotent.

Puis, après un calcul quelque peu long, on montre que Q est aussi un opérateur de Reynolds. Une application du lemme 2.1 termine la démonstration.

Ces deux corollaires permettent de retrouver le résultat de BILLIK M.; ROTA G.C.[1] sur les opérateurs de Reynolds dans le cas des algèbres de dimension finie, résultat antérieurement démontré par MOLINARO I. dans le cas d'un opérateur positif, puis dans le cas général par ARBAULT J.[1] . La présentation actuelle a peut être l'avantage de distinguer ce qu'apporte l'hypothèse de dimension finie et suggère une extension (cf. Chapitre III §5).

THEOREME 2.2. Dans une algèbre fonctionnelle de dimension finie, un opérateur de Reynolds est idempotent, donc semi-multiplicatif symétrique.

Pour la commodité des notations, nous reportons la démonstration au chapitre suivant.

En suivant une démarche analogue, mais avec quelques difficultés techniques supplémentaires, nous pouvons énoncer des théorèmes de décomposition pour d'autres types d'opérateurs.

THEOREME 2.3. Un opérateur multiplicativement symétrique de type $D(\alpha)$, pour α différent de 0 ou de 1 , est somme directe de trois opérateurs : $P = P_{11} \oplus P_{22} \oplus P_{34}$, où P_{11} est un opérateur idempotent multiplicatif, P_{22} est comme P_{11} , à une homothétie près, et P_{34} est un opérateur nilpotent multiplicatif à une homothétie près.

THEOREME 2.4. Un opérateur multiplicativement symétrique de Baxter est différence directe de deux opérateurs $P = P_{11} \ominus P_{24}$ où P_{11} est un opérateur idempotent multiplicatif et P_{24} un opérateur nilpotent multiplicatif.

THEOREME 2.5. Un opérateur hémi-multiplicatif est multiplicativement symétrique, en outre on a la relation $P = P^3$.

THEOREME 2.6. Un opérateur U-idempotent multiplicativement symétrique est un opérateur semi-multiplicatif symétrique idempotent.

Pour les opérateurs du type $D(\alpha)$, ou du type D , nous donnerons plus loin (Théorème 3.8 et seq) des résultats faisant intervenir une technique toute différente.

Passons à la démonstration succincte des théorèmes précédents.

Démonstration du Théorème 2.3.

On part d'un opérateur $D(\alpha)$, lequel satisfait en particulier la relation suivante

$$P(PfPg) + P(gP^2f) = \alpha P(gPf) + (1-\alpha)P^2fPg + P(P^2fPg)$$

Pour α différent de l'unité, la symétrie multiplicative implique $P^2fPg = PfP^2g$, relation déjà interprétée comme donnant $P^2f = kPf$ où k est une fonction nulle sur l'ensemble $k(P)$. Un calcul conduit à $P(PfPg) = kPfPg$, dont on déduit la relation de type multiplicatif :

(1) $$P(fg) = \frac{(2k+\alpha)(\alpha-k) + 2k-\alpha}{2} PfPg$$

Il s'agit maintenant de relier k et Pe. Un calcul méthodique, mais un peu long, montre que les seules valeurs possibles de k sont $0,1$ et α. De plus,

lorsque $k(x) = 1$, $P(fg)(x) = Pf(x)Pg(x)$ et $Pe(x) = e(x)$

lorsque $k(x) = \alpha$, $\alpha P(fg)(x) = Pf(x)Pg(x)$ et $Pe(x) = \alpha e(x)$

lorsque $k(x) = 0$, $\frac{\alpha}{\alpha-1} P(fg)(x) = Pf(x)Pg(x)$ et $Pe(x) = 0$ ou $\frac{\alpha}{\alpha-1} e(x)$

Compte tenu de l'hypothèse d'intégrité du domaine des valeurs des fonctions de l'algèbre fonctionnelle $\mathfrak{A}$, on peut décomposer l'espace de base X en quatre ensembles disjoints dont les fonctions caractéristiques sont notées χ_1, χ_2, χ_3, et χ_4 :

$$Pe = \chi_1 e + \chi_2 e + \chi_3 e + \chi_4 e$$

$$P^2e = kPe = \chi_1 e + \alpha^2 \chi_2 e$$

$$P^3e = k^2Pe = \chi_1 e + \alpha^3 \chi_2 e$$

Par suite, $\chi_2 e$ puis $\chi_1 e$ appartiennent à l'algèbre $\mathfrak{A}$. Il en est de même pour $\chi_3 e$ et donc pour $\chi_4 e$. Les lois de multiplicativité fournissent aussitôt pour $j = 1, 2, 3$ ou 4

$$\chi_1 P(\chi_j e) = (\chi_1 P(\chi_j e))^2$$

$$\alpha \chi_2 P(\chi_j e) = (\chi_2 P(\chi_j e))^2$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \chi_3 P(\chi_j e) = (\chi_3 P(\chi_j e))^2$$

$$\text{et } \chi_4 P(\chi_j e) = 0.$$

Montrons d'abord que $\chi_1 P(\chi_1 e) = \chi_1 e$.

(2) $$\chi_1 P(\chi_1 e) + \chi_1 P(\chi_2 e) + \chi_1 P(\chi_3 e) + \chi_1 P(\chi_4 e) = \chi_1 e$$

(3) $$\chi_1 P(\chi_1 e) + \alpha\chi_1 P(\chi_2 e) + \frac{\alpha}{\alpha-1}\chi_1 P(\chi_3 e) = \chi_1 e$$ d'où la relation

(4) $$(1-\alpha)\chi_1 P(\chi_2 e) + (1-\frac{\alpha}{\alpha-1})\chi_1 P(\chi_3 e) + \chi_1 P(\chi_4 e) = 0$$

Les termes $\chi_1 P(\chi_j e)$ valent 0 ou 1 en chaque point x. Mais d'après la relation (4), on ne peut avoir un seul des termes croisés égal à 1 . On en a au moins deux, ce que la relation (2) rend impossible. Finalement, les termes croisés sont nuls et $\chi_1 P(\chi_1 e) = \chi_1 e$.

En opérant de la même façon, après un examen particulier du cas $\alpha = 2$, on a bien $\chi_2 P(\chi_2 e) = \alpha\chi_2 e$. Un raisonnement similaire donne $\chi_3 P(\chi_4 e) = \frac{\alpha}{\alpha-1}\chi_3 e$.

Posons $P_{ij}(f) = \chi_i P(\chi_j f)$. Lorsque j est différent de 1 , on a les égalités $P(\chi_1 f\chi_j) = 0 = P(\chi_1 e)P(f\chi_j)$. Tenant compte de $\chi_1 P(\chi_1 e) = \chi_1 e$, on déduit $P_{1j} = 0$ pour tout j distinct de 1. De façon analogue, on obtient $P_{2j} = 0$ pour $j \neq 2$ et $P_{3j} = 0$ pour $j = 1, 2$ ou 3 . Après avoir noté que $P_{4j} = 0$ pour tout j puisque $\chi_4 = k(P)$, on constate la décomposition en somme directe de l'opérateur P

$$P = P_{11} \oplus P_{22} \oplus P_{34}$$

$$P_{11}(fg) = P_{11}(f)P_{11}(g) \quad \text{jointe à} \quad P_{11}(e) = \chi_1 e \quad \text{et} \quad P_{11}^2 = P_{11}$$

$$\alpha P_{22}(fg) = P_{22}(f)P_{22}(g) \quad \text{jointe à} \quad P_{22}(e) = \alpha\chi_2 e \quad \text{et} \quad P_{22}^2 = \alpha P_{22}$$

(D'ailleurs, une homothétie de rapport α^{-1} transforme P_{22} en un opérateur multiplicatif idempotent).

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} P_{34}(fg) = P_{34}(f)P_{34}(g) \quad \text{avec} \quad P_{34}^2 = 0 \quad \text{et} \quad P_{34}(e) = \frac{\alpha}{\alpha-1}\chi_3 e.$$

(D'ailleurs, une homothétie de rapport $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ ramène P_{34} à un opérateur multiplicatif et nilpotent donc multiplicativement nilpotent).

<u>Réciproquement, un opérateur</u> P , <u>somme directe de trois opérateurs</u> P_{11}, P_{22} et P_{34} <u>est un opérateur</u> $D(\alpha)$ <u>multiplicativement symétrique,</u> ce qui termine la démonstration du Théorème 2.3.

On peut exprimer les opérateurs de la décomposition à partir des trois premières puissances de P selon

$$P_{11} = \frac{\alpha P^2 - P^3}{\alpha-1}, \quad P_{22} = \frac{P^3-P^2}{\alpha(\alpha-1)} \quad \text{et} \quad P_{34} = \frac{\alpha P-(1+\alpha)P^2+P^3}{\alpha}$$

En particulier, lorsque $P_{34} = 0$, on obtient $P_{11} = \frac{\alpha P-P^2}{\alpha-1}$ et $P_{22} = \frac{P^2-P}{\alpha-1}$ et lorsque $P_{22} = 0$, c'est-à-dire $P^3 = P^2$, alors $P_{11} = P^2$ tandis que $P_{34} = P-P^2$.

Donnons pour terminer, et sans démonstration, une réciproque partielle à ce dernier cas :

COROLLAIRE 2.3. Un opérateur de type $D(\alpha)$ pour lequel $P^2 = P^3$ est tel que P^2 soit multiplicatif et idempotent, et $P-P^2$ multiplicativement nilpotent.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.4. En appliquant la même technique que pour le Théorème 2.3, on montre, pour un opérateur de Baxter multiplicativement symétrique, la relation $P^2 = kP$ où ke est nulle sur $k(P)$ et appartient à l'algèbre $\mathfrak{A}$ On obtient ensuite $k(Pe-e)Pe = 0$ et les seules valeurs possibles de k sont 0,1 et 1/2. Décomposant l'espace X en quatre sous-ensembles, X_1, X_2, X_3 et X_4 , on parvient après calculs à la décomposition directe du Théorème 2.4.

Réciproquement un opérateur s'écrivant comme différence directe de deux opérateurs R et T $(P = R \ominus T)$ est un opérateur de Baxter.

COROLLAIRE 2.4. Un opérateur de Baxter multiplicativement symétrique satisfait $P^2 = P^3$.

En effet on vérifie que $P = R \ominus T$ entraîne $P^2 = R$ et $P^3 = R$. Notamment $R = P^2$ et $T = P^2-P$.

On peut donner une réciproque partielle pour laquelle nous ne fournirons pas de démonstration :

PROPOSITION 2.1. Un opérateur de Baxter pour lequel $P^2 = P^3$ s'écrit comme la différence de deux opérateurs R et T dont l'un vaut P^2 et est un opérateur de Baxter idempotent, tandis que l'autre T , est multiplicativement nilpotent. En outre $RT = TR = 0$.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.5. On note que l'on a les égalités avec trois fonctions:

$$P(fhPg) = P(P(PfPh)P^2g) = P(PfPhPg) \text{ donc pour } h = 1,\ P(fPg) = P(gPf).$$

En outre, P^2 est un opérateur d'interpolation mais en général P n'est pas un opérateur idempotent comme le montre l'exemple de la matrice suivante. (cf.Chap III)

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

On établit sans peine la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. Un opérateur hémi-multiplicatif est la différence de deux opérateurs idempotents demi-multiplicatifs symétriques dont le produit est nul. D'ailleurs pour que ces opérateurs soient d'interpolation, il faut et il suffit que $P^2(fg) = P(fPg)$. Réciproquement, la différence de deux opérateurs d'interpolation dont le produit commute et est nul est un opérateur hémi-multiplicatif.

La démonstration du Théorème 2.6 suit les mêmes principes et nous ne la donnerons pas ici.

4. TABLEAU GENERAL DE COMPARAISON. Il arrive fréquemment qu'un opérateur P soit doublement multiplicativement lié, c'est-à-dire satisfasse deux relations du type (1). De tels opérateurs se réduisent en général à des types simples. Envisageons d'abord le cas d'un opérateur U-idempotent, c'est-à-dire tel que $I-P$ soit du type D . Cette U-idempotence joue le rôle de l'idempotence.

THEOREME 2.7. Soit P un opérateur U-idempotent. Si de plus P est

(1) Semi-multiplicatif, P est idempotent et multiplicativement symétrique.
(2) de quasi-interpolation, P est idempotent multiplicatif.
(3) demi-multiplicatif, P est idempotent et semi-multiplicatif symétrique.
(4) de Reynolds, P est idempotent et semi-multiplicatif symétrique.
(5) $D'(\alpha)$ ou de Baxter, P est idempotent et de Baxter
(6) $B(\alpha)$ ou $D(\alpha)$ pour α différent de 1 ou 0 , P est idempotent et multiplicatif.

(1) On a les relations (1) $P(fPg+gPf) = 2PfPg$ et (2) $P(PfPg) = PfPg$ d'où l'on déduit

$PfP^2g+PgP^2f = 2P^2fP^2g$ soit $P^2f(P^2g-Pg)+P^2g(P^2f-Pf) = 0$ et notamment $P^2f(P^2f-Pf) = 0$

En choisissant pour χ_1 la fonction caractéristique du complémentaire de $k(P^2)$, on a

$$P^2f(x) = \chi_1(x)Pf(x)$$

Cette relation fournit $P^2 = P^3$ et l'on reporte dans (1) pour obtenir

$$P(gP^2f) = P^2fPg$$

On en déduit ensuite $P(PfPg) = PfPg = P^2fPg$ ce qui fournit $P^2 = P$ dont on pourrait encore déduire $Pe = \chi_1 e$. Conformément à la remarque précédant le Théorème 1.8, l'idempotence implique la symétrie multiplicative.

(2) Pour un opérateur U-idempotent de quasi-interpolation, on peut calculer $Pf(P^2g-Pg) + Pg(P^2f-Pf) = 0$ ce qui implique $P^2 = P$ et donc la symétrie multiplicative (Théorème 1.8) : $P(fPg) = P(fg)$ donc $P(PfPg) = P(gPf)$ soit $P(fg) = PfPg$.

(3) et (4) peuvent être ramenés au cas (1).

(5) Puisque P est U-idempotent et de type $D'(\alpha)$, P est alors de Baxter. Puis on calcule $(P^2f-Pf)(P^2g-Pg) = 0$ ce qui assure l'idempotence de P.

(6) On se donne (1) $P(PfPg) = PfPg$ et (2) $P(fPg+gPf) = \alpha P(fg) + (2-\alpha)PfPg$. Le cas $\alpha = 1$ (opérateur de Baxter), $\alpha = 0$ (opérateur SM) et $\alpha = 2$ (QI) ont déjà été examinés. La relation (2) fournit alors

$$(3)\quad PfP^2g + PgP^2f = \alpha PfPg + (2-\alpha)P^2fP^2g$$

et en particulier l'égalité $(P^2f-Pf)(2-\alpha)P^2f-\alpha Pf) = 0$. Puisque l'algèbre $\mathfrak{A}$ est fonctionnelle, il existe un sous-ensemble X_f, de fonction caractéristique χ_f tel que pour tout f dans $\mathfrak{A}$, on ait la valeur de P^2f

$$P^2f = \chi_f Pf + \frac{\alpha}{2-\alpha}(1-\chi_f)Pf.$$

Bien entendu, la définition de χ_f est ambigüe lorsque $Pf(x) = 0$.

Cependant, en reprenant (3), on trouve

$$[(2\chi_f-\alpha)Pg + (2-\alpha)(2\chi_f-1)P^2g]Pf = 0.$$

Si $Pf(x) \neq 0$, on a encore $P^2g(x) = \chi_f(x)Pg(x) + \frac{\alpha}{2-\alpha}(1-\chi_f(x))Pg(x)$. Finalement on peut écrire

$$P^2f = \chi_1''Pf + \frac{\alpha}{2-\alpha}\chi_2''Pf \quad \text{où } X_1'', X_2'' \text{ et } X_3''$$

sont trois sous-ensembles disjoints de X, formant un recouvrement de X. En particulier $X_3'' = k(P) = k(P^2)$. Relions maintenant ces ensembles aux valeurs de Pe. Il vient

$$Pe[\alpha-2\chi_1'' - \frac{2\alpha}{2-\alpha}\chi_2'' + (2-\alpha)Pe] = 0$$

Sur X_1'' : $Pe(x) = 0$ ou $Pe(x) = e(x)$, sur X_2'' : $Pe(x) = 0$, ou bien encore

$Pe(x) = (\frac{\alpha}{2-\alpha})^2 e(x)$ et sur X_3'' : $Pe(x) = 0$. Nous sommes amenés à distinguer cinq sous-ensembles disjoints de X pour lesquels on a les relations suivantes

(4) $Pe = \chi_1 e + (\frac{\alpha}{2-\alpha})^2 \chi_2 e$, (5) $P^2 f = (\chi_1+\chi_3)Pf + \frac{\alpha}{2-\alpha}(\chi_2+\chi_4)Pf$ et (6) $\chi_5 Pf = 0$

En calculant $(Pe)^2$ et retranchant de Pe, on assure que $\chi_2 e$, puis $\chi_1 e$, appartiennent à l'algèbre $\mathfrak{A}$. On utilise $P(Pe)^2 = (Pe)^2$ et le calcul de $P^2 e$ grâce à (4) et (5) pour obtenir

$$P(\chi_1 e) + (\frac{\alpha}{2-\alpha})^4 P(\chi_2 e) = \chi_1 e + (\frac{\alpha}{2-\alpha})^4 \chi_2 e$$

et

$$P(\chi_1 e) + (\frac{\alpha}{2-\alpha})^4 P(\chi_2 e) = \chi_1 e + (\frac{\alpha}{2-\alpha})^3 \chi_2 e$$

d'où

$$P(\chi_2 e) = \frac{\alpha}{2}\chi_2 e \quad \text{et} \quad P(\chi_1 e) = \chi_1 e + \frac{\alpha^4}{2(2-\alpha)^3}\chi_2 e.$$

On remplace les valeurs obtenues dans la relation (2)

$$(1-\alpha)P(f\chi_1) + ((\frac{\alpha}{2-\alpha})^2-\alpha)\, P(f\chi_2) + (\chi_1+\chi_3)\, Pf + (\chi_2+\chi_4)\frac{\alpha}{2-\alpha}\, Pf = (2-\alpha)\chi_1 Pf + \frac{\alpha^2}{2-\alpha}\chi_2 Pf$$

Avec des fonctions convenables, on calcule $P_{21} = P_{12} = 0$ et $P_{22} = 0$, Comme $P(\chi_2 e) = \frac{\alpha}{2}\chi_2 e$, on en déduit $\chi_2 = 0$ donc $X_2 = \emptyset$. D'où $Pe = \chi_1 e$. Un calcul désormais usuel aboutit à $X_3 = X_5$ puis $P_{11} + P_{15} = P$ et $P_{11}^2 = P_{11}$. Enfin on vérifie que P_{11} satisfait $P_{11}(fg) = P_{11}(f)P_{11}(g)$, tandis que $P_{15}(e) = 0$ et $\frac{\alpha}{\alpha-2}\, P_{15}(fg) = P_{15}(f)\, P_{15}(g)$, donc $P_{15} = 0$.

Finalement, $P = P_{11}$, donc P est un opérateur multiplicatif et idempotent, ce qui termine la démonstration du Théorème 2.7.

On démontrerait de même que pour un opérateur P, U-idempotent du type $E(-1)$, $I-P$ serait multiplicatif idempotent.

Ces quelques exemples suffisent sans doute à faire comprendre les mécanismes et nous ne détaillerons plus les démonstrations. Les résultats relatifs aux opérateurs multiplicativement liés figurent sous forme d'un tableau triangulaire à double entrée : dans ce tableau une case représente un opérateur doublement multiplicativement lié. Le signe 0 indique que seul l'opérateur nul est des deux types correspondants à la case. Par contre, un signe comme Théorème suivi d'un numéro renvoie au théorème correspondant du texte, tandis qu'un numéro entre parenthèses signale une note explicative figurant à la suite du tableau. Pour des exemples, on pourra se reporter aux chapitres suivants, notamment au chapitre III sur les algèbres finies. Les abréviations sont celles du § 1 de ce chapitre et l'opérateur identique est noté Id .

Les démonstrations sont simplifiées lorsque quelques hypothèses sont faite sur Pe . Nous en ferons de trois types. Le cas $Pe = e$ permet de dresser un tableau 3 ou le signe $\uparrow$ (ou $\downarrow$) manifeste que l'opérateur d'un type implique l'autre type. Le cas $P^2 = P$ et $Pe = 0$ sont regroupés en un tableau n°2. (Ce dernier cas se compose essentiellement de zéros, comme il était prévisible).

Tableau n°1 : Cas général d'une algèbre fonctionnelle

	MS	QI	SM	DM	D(α)	R	B(α)	D	D'(α)	Ba	HM	E(α)	E(-1)	U2	MAS	UN	PP
MS		I	SMS	DMS	Th 2.3	Th 2.1	(1)	(1)	Th 2.3	Th 2.4	Th 2.5	C 3I	C 3I	Th 2.6	MN	3N (2)	C 3I
QI			M 2I	HM	M 2I	M 2I	HM	HM	M 2I	M 2I	DM (3)	C 2I	C 2I	M 2I	0	(4)	C 2I
SM				SMS 2I	(5)	SMS 2I	(6)	M 2I	(5)	M 2I	M 2I	C 3I	C 3I	SMS 2I	0	2N	C 3I
DM					M 2I	SMS 2I	HM	HM	M 2I	M 2I	QI	C 2I	C 2I	SMS 2I	UN (2)	MAS	C 2I
α≠1, α≠0 } D(α)						M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	(7)	(7) α≠-1	M 2I	MN (8)	MN (8)	(7)
R							(6)	M 2I	(6)	M 2I	M 2I	(7)	(7)	SMS 2I	0	2N ∂^{-1}	(7)
α≠2, α≠1, α≠0 } B(α)								HM	(6)	M 2I	QI	C 2I	C 2I	M 2I	0	(9)	C 2I
D									Ba 2I	U2 2I	QI	C 2I	(10)	Ba 2I	0	(9)	C 2I
α≠1, α≠0 } D'(α)										U2 2I	M 2I	(7)	(11)	Ba 2I	MN (8)	MN (8)	(7)
Ba											M 2I	(7)	(11)	D 2I	MN (8)	MN (8)	(7)
HM												C 3I	C 3I	M 2I	0	0	C 3I
$\alpha^2 \neq 1$ } E(α)													C 3I	C 2I	0	0	C 2I
E(-1)													C	(10)	0	0	C 3I
U2															0	0	C 2I
MAS															3N	(2)	0
UN																	0
PP																	

Notes

(1) cf. Chap. III (Th. 3.8).

(2) P^n est MN pour tout $n \geq 2$.

(3) P^n est QI pour tout $n \geq 1$.

(4) $P^2 = 2P$, $Pe = 0$.

(5) $P = P_{11} \oplus P_{22}$ où P_{11} est M, 2I, et λP_{22} est M, 2I.

(6) Si $P^2e = Pe$ ou si $P(Pe)^2 = (Pe)^2$, alors P est M, 2I.

(7) Si $P^2e = Pe$ ou si $P(Pe)^2 = (Pe)^2$, alors P est C, 2I.

(8) A une homothétie près, P est M, nilpotent.

(9) A une homothétie près, P est QI, UN.

(10) I-P est un opérateur M, 2I.

(11) Si $P^2e = Pe$ ou si $P(Pe)^2 = (Pe)^2$, alors I-P est M, 2I.

Tableau n°2 : Cas $P^2 = P$ (au-dessus de la diagonale principale)
Cas $Pe = 0$ (au-dessous de la diagonale principale)

	MS	QI	SM	DM	D(α)	R	B(α)	D	D'(α)	Ba	HM	E(α)	E(-1)	U2	MAS	UN	PP
MS	2N	↓	↓	↑↓	↓	↓	↓	I	M	M	↓	↓	CS	SMS	0	0	↓
QI	0	(3)	M	↑	↓	M	↑↓	↑	M	M	↑↓	↓	CS	M	0	0	↓
SM	SMS	0	2N	↑	↓	↑↓	M	M	M	M	M	↓	CS	↑	0	0	↓
DM	MN	0	0	2N	↓	↓	↓	I	M	M	↓	↓	CS	SMS	0	0	↓
D(α)	0	0	0	0	M / (4)	↑	↑	↑	M	↑	↑	↓	CS	↑	0	0	↓
R	J'	0	0	0	0	2N J^{-1}	M	M	M	M	M	↓	CS	↑	0	0	↓
B(α)	0	0	0	0	0	0	(4)	↑	M	M	↑	↓	CS	M	0	0	↓
D	0	0	0	0	0	0	0	2I	↓	↓	↓	↓	↓	Ba	0	(1)	↓
D'(α)	0	0	0	0	0	0	0	↑	2I	↑	M	↓	↓	↑	0	0	↓
Ba	0	0	0	0	0	0	0	↑	↓	2I	M	↓	↓	↑	0	0	↓
HM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	↓	CS	M	0	0	↓
E(α)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	CS / 0	↑	↑	0	0	↓
E(-1)	0	0	0	0	0	0	0	(2)	(2)	(2)	0	0	(2)	↑	0	0	↓
U2	0	0	0	0	0	0	0	Ba 2I	↓	↓	0	0	(2)		0	0	↓
MAS	MN	0	↑↓	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 / 2N	0	0
UN	↓	↓	↓	↓	0	↓	↓	(1)	0	0	0	0	0	0	↓		0
PP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	CS / 0

Notes

Dans ce tableau : $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ pour les types $D(\alpha)$ et $D'(\alpha)$; $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$ pour le type $B(\alpha)$; $\alpha^2 \neq 1$ pour le type $E(\alpha)$.

(1) A une homothétie près, P est de quasi-interpolation.

(2) I-P est un opérateur multiplicatif idempotent.

(3) $P^2 = 2P$.

(4) $P^2 = \alpha P$.

Tableau n°3 : Cas Pe = e

	MS	QI	SM	DM	D(λ)	R	B(λ)	D	D'(λ)	Ba	HM	E(λ)	E(-1)	U2	MAS	UN	PP
MS	2I	↓	↓	↓↑	M	SMS	↓	I	M	M	↓	Id	Id	SMS	∅	∅	↓
QI		2I	M	↑	M	M	↓	HM	M	M	↑↓	Id	Id	M 2I	∅	∅	↓
SM			2I	↑	M	↑	M	M	M	M	M	Id	Id	↑	∅	∅	↓
DM				2I	M	SMS	↓	I	M	M	↓	Id	Id	SMS	∅	∅	↓
$\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ } D(λ)						M 2I	M	M 2I	M	M	M	Id	Id $\lambda \neq -1$	M	∅	∅	↓
R							M	M 2I	M	M	M	Id	Id	SMS	∅	∅	↓
$\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ } B(λ)							2I	HM	M	M	↑↓	Id	Id	M	∅	∅	↓
D									↓	↓	I	Id	Id	Ba	∅	∅	↓
$\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ } D'(λ)									2I	↓	M	Id	Id	Ba	∅	∅	↓
Ba										2I	M	Id	Id	↑	∅	∅	↓
HM											2I	Id	Id	M	∅	∅	↓
$\lambda^2 \neq 1$ } E(λ)													Id	Id	∅	∅	↓
E(-1)													P^2=Id	Id	∅	∅	↓
U2														2I	∅	∅	↓
MAS															∅	∅	∅
UN																∅	∅
PP																	Id

Par convention, le signe ∅ dans une case signifie qu'il n'existe pas d'opérateur doublement multiplicativement lié correspondant à cette case. En outre Id désigne l'opérateur identité tandis que I désigne un opérateur d'interpolation et 2I un opérateur idempotent.

CHAPITRE III

ETUDE ALGEBRIQUE DES OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES

1. ALGEBRES DE DIMENSIONS FINIE .

Nous cherchons à déterminer les opérateurs multiplicativement liés dans le cas où l'algèbre $\mathcal{A}$ est définie sur un ensemble X comportant un nombre fini de points. Sans perdre de généralité, on peut supposer que

$$\mathcal{A} = C(X) \quad \text{où} \quad X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

où même est l'ensemble des fonctions définies sur X et à valeurs dans un corps commutatif de caractéristique infinie. Pour simplifier, nous dirons que $\mathcal{A}$ est une <u>algèbre finie</u>. Il s'agit effectivement d'un espace vectoriel dont une base est constituée par la famille finie d'idempotents orthogonaux δ_{x_i} où :

$$\delta_{x_i}(x_j) = \delta_{ij}$$

symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

Tout opérateur linéaire P sur $\mathcal{A}$ se représente dans la base précédente par une matrice carrée $n \times n$, mais il est utile de noter que la numérotation des points de X est libre, donc l'ordre de rangement des colonnes de la matrice représentative de l'opérateur P . Nous introduisons quelques notations :

$$p_{ij} = P(\delta_{x_j})(x_i)$$

et $k(P) = \{x | Pf(x) = 0$ pour tout f dans $\mathcal{A}$ $\}$.

Commençons par la démonstration du Théorème 2.2., à partir de trois lemmes élémentaires. Le Théorème 3.9. constituera d'ailleurs une généralisation de ce théorème.

<u>LEMME 3.1.</u> Dans une algèbre finie, tout opérateur d'antidérivation est l'opérateur nul.

$$P(fPg+gPf) = PfPg \quad \text{donc} \quad 2p_{ii}P(\delta_{x_i}) = P(\delta_{x_i}) \quad \text{, ce qui donne} \quad p_{ii} = 0,$$

puis $P(\delta_{x_i}) = 0$ donc enfin $P = 0$. Ce résultat, joint au lemme 2.1, assure qu'un opérateur de Reynolds satisfaisant $Pe = 0$ est nécessairement l'opérateur nul.

LEMME 3.2. Dans une algèbre finie, un opérateur de Reynolds surjectif est l'opérateur identique.

Ce lemme est le dual du précédent. En effet, l'opérateur $I-P^{-1}$, où P^{-1} est bien défini grâce à la surjection, est une dérivation. Par suite, $I-P^{-1} = 0$, donc $P = I$.

LEMME 3.3. (cf. BILLIK M., ROTA G.C. [1]). Dans une algèbre finie, un opérateur de Reynolds satisfait $P^2 = P^3$.

Pour un opérateur de Reynolds, la relation $PfPg = P(fPg+gPf-PfPg)$ montre que l'image par P de l'algèbre $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre. Puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre finie, il existe un entier n_0 pour lequel $\mathcal{A}_{n_0+1} = \mathcal{A}_{n_0}$, où l'on a préalablement posé $\mathcal{A}_n = P^n(\mathcal{A})$. L'opérateur P est un opérateur de Reynolds surjectif sur $\mathcal{A}_{n_0}$, donc réalise l'identité sur $\mathcal{A}_{n_0}$ et $P^{n_0+1}(f) = P^{n_0}(f)$ en utilisant le lemme 3.2.

Montrons que ce dernier résultat implique $P^2 = P^3$. Ceci est acquis si $n_0 = 2$. Supposons $n_0 > 2$ et posons $F = f-P^{n_0}(f)$. On a $P^{n_0}(F) = 0$. Puis l'identité de Reynolds, appliquée à $P^{n_0-1}(F)$ et à $P^{n_0-2}(F)$ fournit $P(P^{n_0-1}(F))^2 = 0$. On applique ensuite l'identité de Reynolds à $P^{n_0-1}(F)$ et à $P^{n_0-3}(F)$ pour obtenir la relation $P(P^{n_0-2}(F)P^{n_0-1}(F)) = 0$. Puis une nouvelle utilisation de l'identité de Reynolds à $P^{n_0-2}(F)$ et $P^{n_0-2}(F)$ donne $P^{n_0-1}(F) = 0$. Par récurrence, on en déduit $P^2(F) = 0$. Soit $P^2f = P^{n_0+2}(f) = P^{n_0}(f)$ et en particulier $P^2(f) = P^3(f)$.

Dès lors, il suffit de joindre le corollaire 2.2 et le lemme 3.1 pour obtenir l'idempotence de l'opérateur P, laquelle conduit facilement à la propriété de semi-multiplicativité symétrique pour P, selon un principe général évoqué par le Théorème 1.8, terminant ainsi la démonstration du Théorème 2.2. Nous généraliserons ce théorème sur un espace compact de Stone.

Dans le paragraphe qui vient, nous allons envisager des théorèmes de structures relatifs aux opérateurs multiplicativement liés sur des algèbres de dimension finie. Les démonstrations sont parfois longues et seront améliorées au Chapitre IV.

2. QUELQUES THEOREMES DE STRUCTURE.

Les coefficients p_{ij} définis en 3.1 vérifient des équations canoniques, du troisième degré en général, que l'on peut obtenir en faisant $f = \delta_{x_i}$ et $g = \delta_{x_j}$ dans la formule de définition d'un opérateur multiplicativement lié, calculée au point x_k. Les démonstrations sont purement combinatoires et jouent sur la liberté de numérotation des points de X. Nous ne donnerons que la démonstration, d'ailleurs la plus simple et la plus courte, concernant un opérateur multiplicativement symétrique, renvoyant à DHOMBRES J. [9] pour des calculs détaillés. Au Chapitre IV, nous envisagerons des généralisations.

THEOREME 3.1. Dans une algèbre finie, une matrice typique représentant un opérateur multiplicativement symétrique peut se décomposer selon

$$[P] = \left[\begin{array}{cc:cc} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ L'_1 & L'_2 & M & 0 \end{array}\right]$$

Réciproquement, une telle matrice représente un opérateur multiplicativement symétrique.

Dans cette écriture, on convient de noter par M une matrice quelconque, par L une matrice carrée $r \times r$ dont toutes les lignes sont égales et par L' une matrice $q \times r$ de sorte que chaque ligne de L' soit proportionnelle à la ligne de L.

Si par exemple $r = 3$ et $q = 2$, on a la configuration suivante pour deux nombres complexes quelconques μ et μ' :

$$L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad L' = \begin{bmatrix} \mu a & \mu b & \mu c \\ \mu' a & \mu' b & \mu' c \end{bmatrix}$$

LEMME 3.4. Dans une algèbre finie, soit P un opérateur multiplicativement lié tel que $B = C = D = 0$ ou bien un opérateur multiplicativement symétrique. Lorsque p colonnes non nulles de la matrice $[P]$ forment un système de rang $p-1$, les p lignes transposées de ces colonnes sont égales.

Pour la démonstration, on utilisera la remarque suivante laquelle est toute simple: si $Pf = 0$, alors $P(fPg)$ 0 pour tout élément g de $\mathfrak{a}$ sous les conditions du lemme 3.4.

Les équations canoniques d'un opérateur multiplicativement symétrique sont $p_{ij}p_{ki} = p_{ji}p_{kj}$, soit $\frac{n^2(n-1)}{2}$ équations entre les n^2 coefficients, p_{ij} de $[P]$. Pour simplifier, on appelle <u>termes antidiagonaux</u> relatifs à deux colonnes i et j , les termes p_{ij} et p_{ji} . Lorsque les termes antidiagonaux de deux colonnes ne sont pas tous deux nuls, le lemme 3.4 est applicable et notamment, si $p_{ij} = p_{ji} \neq 0$, les colonnes i et j sont égales ainsi que les lignes transposées. Plaçons-nous d'abord dans le cas où toute colonne possède au moins un coefficient non nul. Egrenons quelques remarques utiles pour la réduction d'un opérateur multiplicativement symétrique :

Si $p_{ij} = 0$, d'une part $p_{ji} = 0$ et d'autre part le produit de chaque terme de la ligne i par un terme correspondant de la colonne j donne 0.

Si $p_{ii} = 0$, alors les termes antidiagonaux relatifs à toute autre colonne non nulle sont nuls.

Lorsque p_{ij} n'est pas nul, l'élément diagonal de la ligne i est égal au transposé p_{ji} de p_{ij} .

Une numérotation convenable des points de X permet de ranger en dernier les colonnes nulles, puis, les précédant, celles dont l'élément diagonal est nul, En premier, on peut placer une des colonnes ayant le plus grand nombre d'éléments non nuls et ranger à sa suite toutes les colonnes dont le terme antidiagonal relatif à la première colonne n'est pas nul, formant ainsi un groupement de r colonnes par exemple. Puisque ces r premiers coefficients de la première ligne ne sont pas nuls, les remarques précédentes impliquent que ces coefficients répètent ceux de la diagonale de la matrice $r \times r$ ainsi formée. Par contre-coup, les r premiers coefficients de la première colonne sont tous égaux au premier terme diagonal. La première remarque assure que la matrice $r \times r$ a tous ses éléments non nuls, donc que les r lignes de cette matrice sont égales. Cette même remarque permet d'assurer la nullité des $n-r$ derniers éléments des r premières lignes et par suite la nullité des termes transposés, sauf en ce qui concerne les lignes transposées de colonnes nulles. Quant aux lignes dont le terme diagonal est nul, elles sont nulles selon la deuxième remarque. Enfin, les lignes qui correspondent aux colonnes nulles sont susceptibles du lemme 3.4. En regroupant ces résultats, on obtient le théorème 3.1 qui donne la solution, en termes d'opérateurs, de l'équation fonctionnelle

$$P(fPg) = P(gPf).$$

Sur un demi-groupe quelconque on peut d'ailleurs chercher toutes les fonctions à valeurs dans le demi-groupe, solution de l'équation fonctionnelle

$$f(xf(y)) = f(yf(x))$$

et des solutions d'équations analogues déduites des relations satisfaites par les opérateurs multiplicativement liés comme $f(xf(y))+f(yf(x)) = f(x)f(y)+f(xy)$. Sur ces équations, à ma connaissance fort peu étudiées à ce jour, on pourra consulter un premier travail DHOMBRES J. [8].

Grâce au Théorème 3.1, un opérateur multiplicativement symétrique s'écrit

$$P = P_1+P_2-P_3$$

où P_1 est un opérateur semi-multiplicatif symétrique, P_2 est un opérateur d'interpolation et P_3 un centralisateur idempotent positif.

Une démarche analogue permet de démontrer les théorèmes suivants.

THEOREME 3.2. Dans une algèbre finie, un opérateur semi-multiplicatif est multiplicativement symétrique.

Nous obtiendrons un théorème plus général au Chapitre IV. Mais dès à présent, on peut constater à partir du Théorème 3.1, qu'un tel opérateur est somme directe d'opérateurs pouvant être représentés par une matrice [L] dont les lignes sont égales (Le cas $P(fPg) = P(gPf) = PfPg$ et $P(1) = 1$, fut traité initialement par BIRKHOFF G. [1] et KAMPE DE FERIET J. [1]).

THEOREME 3.3. Dans une algèbre finie, un opérateur demi-multiplicatif symétrique pour lequel Pf est nul pour toute fonction f portée par $k(P)$ et dont l'image est une sous-algèbre, est un opérateur semi-multiplicatif symétrique. Lorsque l'ensemble $k(P)$ est vide, P est alors un opérateur idempotent.

THEOREME 3.4. Dans une algèbre finie, un opérateur U-nilpotent positif est multiplicativement anti-symétrique.

Un opérateur multiplicativement anti-symétrique est multiplicativement nilpotent.

Le théorème suivant montre que parmi les opérateurs de type $E(\alpha)$, seul l'opérateur $E(-1)$ n'a pas une structure simple.

THEOREME 3.5. Dans une algèbre finie

(a) Un opérateur hémi-multiplicatif $E(1)$ est différence de deux opérateurs d'interpolation dont le produit commute et est nul.

(b) Un opérateur de type $E(\alpha)$, pour α différent de 1 , -1 , ou 3 , est différence directe de deux centralisateurs idempotents positifs.

(c) Un opérateur de type $E(3)$ est somme directe d'opérateurs $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} P$ et $\varepsilon \sqrt{3} P'$ où P' est un centralisateur idempotent positif, et P un opérateur ne faisant intervenir que deux points de X selon la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = +1.$$

PROPOSITION 3.1. Soit P un opérateur de type $E(-1)$ tel que $P^2 e = Pe$. P est alors somme directe de deux opérateurs du même type que P, l'un conservant l'unité, l'autre l'annulant.

Si P est un opérateur de type $E(-1)$ conservant l'unité et tel que

$$P(\delta_{x_i}) = \pm \delta_{x_i}$$

pour un unique point x_i de X, on peut alors numéroter les points de X de sorte que

$$\begin{aligned} &P(\delta_{x_n}) = \varepsilon \delta_{x_n} \\ &\vdots \\ &P(\delta_{x_{n-k}}) = (-1)^k \varepsilon (\delta_{x_{n-k}} + 2\delta_{x_{n-k+1}} + \dots + 2\delta_{x_n}) \\ &\dots \end{aligned}$$

THEOREME 3.6. Dans une algèbre finie, un opérateur de quasi-interpolation est une somme du type $P = P' + \sum_{i=1}^{k} P_i$ où P' est d'interpolation et $P_i(e) = 0$. De plus $P_i(f)$ ne dépend que des valeurs de f en deux points fixes de X et peut se représenter par une matrice décomposée en blocs selon

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & & 0 \\ 0 & C & & 0 \end{bmatrix}$$

où C désigne une matrice $2\times q$ dont les colonnes sont opposées. Enfin

$$P_i P' = P' P_i = 0$$

En particulier, si $Pe(x)$ ne s'annule pas, P est un opérateur d'interpolation.

Au Chapitre IV, nous donnerons la structure générale des opérateurs d'interpolation. En dimension finie, une matrice typique est décomposée en blocs selon

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

où I est une matrice carrée unité et M une matrice quelconque.

THEOREME 3.7. Dans une algèbre finie, un opérateur pseudo-projectant est la différence directe de deux centralisateurs idempotents positifs.

Les algèbres de dimension finie fournissent des contre exemples maniables à certaines conjectures naturelles. Nous ne mentionnerons ici que quelques cas (cf. DHOMBRES J. [3]).

(a) On peut ainsi construire un opérateur du type D, idempotent, mais non multiplicativement symétrique (cf. d'ailleurs le Théorème 4.13).

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou plus simplement} \quad P = \begin{bmatrix} a & -a \\ a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

(b) On peut aussi fournir un opérateur demi-multiplicatif symétrique dont l'image soit une algèbre mais tel que P ne soit pas semi-multiplicatif. L'intérêt des opérateurs demi-multiplicatifs symétriques réside surtout dans le théorème 4.15 que nous démontrerons au chapitre IV.

$$P = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu a & \mu b & c & 0 \end{bmatrix}$$

(c) On peut construire un opérateur U-nilpotent, tel que $Pe = 0$, mais qui ne soit pas un homothétique d'un opérateur de quasi-interpolation.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ a & -a & 0 & 0 \\ b & -b & c & -c \end{bmatrix}$$

(d) La matrice

$$\frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

représente un opérateur $B(\alpha)$ non multiplicativement symétrique.

(e) Lorsque $(Pe)^2 = P(Pe)^2$ et $P(Pe) = Pe$ ou lorsque ImP contient une unité relative (c'est-à-dire un élément f de ImP tel que $fg = g$ pour tout g dans ImP) , un opérateur demi-multiplicatif est en fait un opérateur multiplicativement symétrique, c'est-à-dire de structure connue (cf. Chapitre IV § 7).

(f) En ce qui concerne les opérateurs $D(\alpha)$ ou $D'(\alpha)$, les résultats sont d'un aspect tout à fait différent (Chapitre V § 5 et Chapitre VI § 3). Notamment, pour les opérateurs de Baxter, une technique d'analyse spectrale permet d'obtenir la représentation de l'action de P sur l'algèbre engendrée par e et Pe (cf. ATKINSON F.V. [1] et les précisions apportées par MILLER J.B. [3]. Récemment, ROTA G.C. [3] a donné une approche purement combinatoire à partir du théorème assurant que toute algèbre standard de Baxter est libre. En particulier, ceci permet de retrouver le résultat suivant de SPITZER F. [1], dans des algèbres topologiques convenables . Précisons auparavant qu'un résultat voisin est accessible quant aux opérateurs du type $E(-1)$ pour lesquels nous n'avions pas encore obtenu de décomposition satisfaisante. Nous ne le donnerons pas ici, faute de place sinon d'importance.

THEOREME 3.8. L'équation ou l'inconnue est y :

$$y = e+xP(x_o y)$$

avec x et x_o fixés, a une solution unique sous la forme explicite

$$y = \exp(-P(\mathrm{Log}(e-xx_o)))$$

si et seulement si P est de Baxter.

3. FORMULES DE RECURRENCE.

Les opérateurs multiplicativement liés satisfont des relations de récurrence de deux sortes : les unes portant sur les puissances n-ièmes de la fonction Pf, d'autres concernant les puissances successives de l'opérateur P . Ces relations jouent un rôle tant pour l'analyse spectrale de ces opérateurs que pour l'étude de leur structure, et cela même dans le cadre d'une algèbre de dimension finie. Choisissons un premier exemple en proposant la détermination des opérateurs multiplicativement symétriques du type $B(\alpha)$.

LEMME 3.5. Pour tout entier n , supérieur ou égal à 2 , un opérateur multiplicativement symétrique du type $B(\alpha)$ (avec $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq 1$) satisfait la relation de récurrence :

(1) $$P(P^n f P^n g) = \frac{\beta^n-1}{\beta-1} P(PfPg) - \beta\,\frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta} P(fg) \text{ avec } \beta = \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^2$$

On part de la relation de définition d'un opérateur $B(\alpha)$.

$$P(PfPg)+P(gP^2f) = \alpha P(gPf)+(2-\alpha)P(P^2fPg)$$

La relation de symétrie fournit $P(PfPg) = P(gP^2f)$ tandis que la relation de définition d'un $B(\alpha)$ permet d'exprimer l'expression $P(P^2fPg+PfP^2g)$. On en déduit la formule fournissant $P(P^2fP^2g)$:

$$4P(PfPg) = \alpha^2P(fg)+\alpha(2-\alpha)P(PfPg)+(2-\alpha)(\alpha P(PfPg)+(2-\alpha)P(P^2fP^2g))$$

$$(2-\alpha)^2P(P^2fP^2g) = (\alpha^2+(2-\alpha)^2)P(PfPg)-\alpha^2P(fg)$$

ou encore lorsque $\alpha \neq 2$, une expression de $P(P^2fP^2g)$ à partir de $P(PfPg)$ et $P(fg)$

(2) $$P(P^2fP^2g) = (1+\beta)P(PfPg)-\beta P(fg)$$

ce qui est précisément la relation (1) pour $n = 2$.

Posons maintenant $U_n = P(P^nfP^ng)$ pour $n \geq 1$ et $U_o = P(fg)$. On a

$$(\alpha^2+(2-\alpha)^2)U_{n+1} = \alpha^2U_n+(2-\alpha)^2U_{n+2}$$

Cette récurrence linéaire se résoud classiquement en cherchant les solutions de la forme $U_n = x^n$. L'équation caractéristique

$$(\alpha-2)^2x^2-(\alpha^2+(\alpha-2)^2)x + \alpha^2 = 0$$

admet, lorsque $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq 1$, deux racines simples : 1 et $\beta = (\frac{\alpha}{2-\alpha})^2$. Par suite la forme générale de U_n est donnée par l'expression $U_n = a\beta^n+b$ avec les conditions initiales $U_o = a+b$ et $U_1 = a(\frac{\alpha}{2-\alpha})^2+b$.

Après élimination des constantes a et b , on obtient pour tout entier $n \geq 2$

$$(2-\alpha)^{2n-2}U_n = \frac{\alpha^{2n}-(2-\alpha)^{2n}}{\alpha^2-(2-\alpha)^2} U_1 + \left[(2-\alpha)^{2n-2} - \frac{\alpha^{2n}-(2-\alpha)^{2n}}{\alpha^2-(2-\alpha)^2}\right]U_o$$

formule que l'on ramène immédiatement à la formule (1).

Lorsque $\alpha = 1$, l'équation caractéristique possède une racine double et la démonstration doit être aménagée. Cependant le résultat trouvé revient à faire tendre α vers 1 dans la relation de récurrence (1). D'où

LEMME 3.6. Un opérateur multiplicativement symétrique du type D satisfait la relation suivante pour $n \geq 2$

$$P(P^nfP^ng) = nP(PfPg)-(n-1)P(fg)$$

Sur une algèbre normée, ces deux lemmes permettent l'étude des opérateurs multiplicativement symétriques continus du type $B(\alpha)$ dès que la norme de ces opérateurs obéit à une condition de croissance pour les puissances successives.

THEOREME 3.8. Sur une algèbre normée, un opérateur continu multiplicativement symétrique du type $B(\alpha)$, lorsque $\alpha \geq 1$, et dont les puissances n-ièmes restent bornées en norme, est un opérateur d'interpolation.

Considérons d'abord le cas $\alpha > 1$, en excluant $\alpha = 2$ pour lequel le théorème est trivialement vérifié. Les hypothèses faites impliquent $\beta > 1$ et par suite $\operatorname{Lim}\beta^n = +\infty$. En outre il existe une constante A telle que $\|P^n\| < A$ pour tout entier n . On peut estimer $\|P(P^nfP^ng)\|$ selon $\|P(P^nfP^ng)\| \leq A^3 \|f\| \|g\|$. La relation (1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\beta^{-n}P(P^nfP^ng) = \frac{1-\beta^{-n}}{\beta-1} P(PfPg) + \frac{1-\beta^{1-n}}{1-\beta} P(fg)$$

qui donne $P(PfPg) = P(fg)$ lorsque n tend vers l'infini, donc termine la démonstration du théorème.

(On remarquera que seule l'hypothèse $\|P\| < |\frac{\alpha}{2-\alpha}|$ suffirait pour ce cas $\alpha > 1$).

Le cas $\alpha = 1$ se traite de la même manière à partir du lemme 3.6 puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{P(P^n f P^n g}{n} = 0$ au sens de l'algèbre normée.

Regroupons maintenant sous forme d'un unique théorème les principales relations de récurrence de la première sorte concernant les opérateurs multiplicativement liés (cf. d'autres relations dans DHOMBRES J. [6]).

THEOREME 3.9. Sur une algèbre commutative, un opérateur :

(1) du type $D(\alpha)$, pour $\alpha \neq 1, 0$, satisfait pour tout entier $n \geq 0$:

$$P(\alpha f-Pf)^{n+1} = (\alpha-1)^n [\alpha(Pf)^{n+1}-P(Pf)^{n+1}]$$

(2) du type $D = D(1)$ satisfait, pour tous entiers n et m supérieurs ou égaux à 1,

$$P[(f-Pf)^n(g-Pg)^m] = 0$$

(3) du type de Reynolds, c'est-à-dire du type $D(o)$, satisfait pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$nP[f(Pf)^{n-1}] = (Pf)^n+(n-1)P(Pf)^n$$

(4) du type de Baxter, c'est-à-dire du type $D'(o)$, satisfait pour tout entier n supérieur ou égal à 1

$$P(Pf-f)^n = P(Pf)^n-(Pf)^n$$

Commençons par la dernière relation (4), trivialement vérifiée par $n = 1$. Pour $n = 2$, il s'agit d'une écriture différente de la relation de définition d'un opérateur de Baxter lorsque $f = g$. Raisonnons par récurrence en supposant (4) exacte pour tous les entiers jusqu'à n inclusivement. On dispose de la relation

$$C_n^o(Pf)^n + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_n^k P(f^k(Pf)^{n-k}) = 0 \tag{5}$$

On remarque que pour tout entier $k \geq 1$

$$P(fP(f^k(Pf)^{n-k})) = P(f^{k+1}(Pf)^{n-k})+P(f)P(f^k(Pf)^{n-k})-P(f^k(Pf)^{n+1-k})$$

Multiplions (5) par f et faisons ensuite agir l'opérateur P :

$$C_n^o(P(f(Pf)^n)-(Pf)^{n+1}) + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_n^k P(f^{k+1}(Pf)^{n+1-(k+1)}) + (-1)^{k+1} C_n^k P(f^k(Pf)^{n+1-k})$$

ou encore en réorganisant cette somme, on peut écrire

$$-C_n^o(Pf)^{n+1} + (C_n^o+C_n^1)P(f(Pf)^n) - (C_n^1+C_n^2)P(f^2(Pf)^{n+1-2}) + \dots$$

$$+(-1)^{p-1}(C_n^p+C_n^{p-1})P(f^p(Pf)^{n+1-p}) + \dots + (-1)^n C_n^n P(f^{n+1})$$

donc

$$P\left(\sum_{k=o}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k f^k (Pf)^{n+1-k}\right) = P(Pf)^{n+1} - (Pf)^{n+1}$$

ce qui est bien la formule désirée .

Notamment si l'opérateur P est idempotent, on a $P(Pf)^n = (Pf)^n$ ce qui peut s'établir directement puisque $\mathrm{Im}P$ constitue une algèbre.

La relation (3) se déduit de même par récurrence mais il est plus intéressant de noter que cette relation (3) peut s'obtenir formellement à partir de la relation (1) en faisant tendre α vers 0 . Effectivement dans la suite, le cas d'un opérateur de Reynolds apparaît comme un cas limite du type $D(\alpha)$. Ainsi au § 5 de ce chapitre, intervient une équation aux différences pour $D(\alpha)$ et une équation différentielle pour un opérateur de Reynolds.

La relation (2) peut s'établir par récurrence mais on note que $\mathrm{Im}(I-P)$ est une algèbre et que $\mathrm{Im}(I-P)\times\mathrm{Im}(I-P)$ est inclus dans le noyau de l'opérateur P lui-même inclus dans l'espace image de l'opérateur $I-P$.

Enfin, supposons la relation (1) exacte jusqu'à l'ordre n,

$$P(\alpha f-Pf)^{n+1} = P((\alpha f-Pf)(\alpha f-Pf)^n)$$

Posons $F = \alpha f-Pf$ et $G = (\alpha f-Pf)^n$. Il vient la relation

$$P(\alpha f-Pf)^{n+1} = P(fG)-P(GPf)$$

Or par l'hypothèse de récurrence valable jusqu'à l'ordre n

$$P(G) = (\alpha-1)^{n-1}[\alpha(Pf)^n-P(Pf)^n]$$

d'où, en posant $g = (Pf)^n$, on obtient

$$\begin{aligned} P(\alpha f-Pf)^{n+1} &= (\alpha-1)^n\,[\alpha P(fg)-P(fPg)+(1-\alpha)PfPg+P(PfPg)-\alpha(1-\alpha)(Pf)^{n+1}] \\ &= (\alpha-1)^{n-1}[P(gPf)-\alpha(1-\alpha)(Pf)^{n+1}-\alpha P(Pf)^{n+1}] \\ &= (\alpha-1)^n\,[\alpha(Pf)^{n+1}-P(Pf)^{n+1}] \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la relation de récurrence (1).

4. OPERATEURS DU TYPE $D(\alpha)$ COMMUTANT AVEC LES TRANSLATIONS.

Comme premier exemple d'application des relations de récurrence, nous proposons la détermination des opérateurs du type $D(\alpha)$ invariants par translation. L'algèbre $\mathfrak{A}$ sur laquelle nous nous plaçons est l'algèbre des fonctions entières de type exponentiel nul, munie de la topologie de la convergence compacte. Nous supposons que P est un opérateur de type $D(\alpha)$ sur $\mathfrak{A}$, invariant par translation et continu sur $\mathfrak{A}$.

L'image de la fonction constante 1 est une constante a_o qui ne peut prendre que les valeurs 1, α ou 0 . Après homothétie les deux derniers cas se ramènent à un opérateur de Baxter idempotent et invariant par translation. Nous supposons donc $a_o = 1$. Grâce à l'invariance par translation, l'espace des polynômes est stable vis-à-vis de P selon la relation

$$P(z^n) = \sum_{k=o}^{k=n} C_n^k a_{n-k} z^k \quad \text{où} \quad a_k = P(z^k)(o)$$

Appliquons la relation de récurrence (1) à la fonction $f(z) = z-x_o$ où x_o désigne un nombre complexe quelconque.

$$P[\alpha(z-x_o)-(z-x_o+a_1)]^{n+1} = (\alpha-1)^n[\alpha(z-x_o+a_1)^{n+1} - P(z-x_o+a_1)^{n+1}]$$

Puis en posant $z_o = x_o - a_1$ ainsi que $a_1 = \frac{\alpha-1}{\alpha} b_1$, il vient

$$(\alpha-1)P(z-z_o-b_1)^{n+1} = \alpha(z-z_o)^{n+1} - P(z-z_o)^{n+1}$$

formule dont on peut constater la validité pour $n = -1$. A partir d'une fonction entière f et de son développement de Taylor autour de z_o, la continuité de P pour la convergence compacte permet d'écrire

$$(\alpha-1)\sum_{n=o}^{\infty} \frac{P(z-z_o-b_1)^n}{n\,!} f^{(n)}(z_o) = \alpha \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(z-z_o)^n f^{(n)}(z_o)}{n\,!} - P\Big(\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(z-z_o)^n f^{(n)}(z_o)}{n\,!}\Big)$$

soit en posant $F(z) = Pf(z)$, et grâce à l'invariance de P par translation

(6) $$(\alpha-1)F(z-b_1)+F(z) = \alpha f(z)$$

F est ainsi solution d'une équation linéaire aux différences. Or, il ne peut y avoir une solution polynômiale de l'équation homogène associée

$$(\alpha-1)(F(z-b_1)+F(z) = 0$$

Mais, lorsque $0 < \alpha < 1$, un calcul facile basé sur la transformée de Laplace nous permet de trouver une solution particulière de (6)

(7) $$F(z) = \alpha \sum_{k=o}^{\infty} (1-\alpha)^k f(z-kb_1)$$

expression convergente lorsque f est un polynôme, ou plus généralement une fonction entière dont le type exponentiel est strictement inférieur à $\frac{1}{b_1} \log \frac{1}{1-\alpha}$.
On vérifie en outre que, pour $f = 1$, la fonction est égale à 1 et que pour $f(z) = z$, $F(z) = z+a_1 = z+\alpha^{-1}(1-\alpha)b_1$. D'ailleurs, un calcul de résidus, par analogie avec les formules classiques relatives aux polynômes de Bernouilli (cf PICARD E. [1]), donne encore

$$F(z) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(o)}{2i\Pi} \int_{C^+} \frac{e^{vz}}{e^{v}-(1-\alpha)^{-1}} \frac{dv}{v^{n+1}}$$

où C^+ désigne le bord orienté d'un compact ne contenant que le pôle en zéro. Bien entendu, les problèmes de convergence restent identiques.

Réciproquement, la solution de l'équation aux différences (6) fournie par (7), définit un opérateur non trivial de type $D(\alpha)$. Pour le vérifier, on peut effectuer un raisonnement par double récurrence sur les fonctions

$$f(z) = z^n \quad \text{et} \quad g(z) = z^m$$

L'équation aux différences (6) devient une équation différentielle lorsque α tend vers 0. En effet

$$a_1 \frac{F(z)-F(z-\frac{\alpha}{\alpha-1}a_1)}{\alpha a_1} + F(z-\frac{\alpha a_1}{\alpha-1}) = f(z)$$

donc en passant à la limite on obtient l'équation cherchée

(8) $$F(z)-a_1F'(z) = f(z)$$

Cette équation admet une solution F, bien déterminée lorsque l'on impose l'invariance par translation,

(9) $$F(z) = \frac{\exp(za_1^{-1})}{a_1} \int_z^{+\infty} f(x)\exp(-a_1^{-1}x)dx$$

à condition toutefois que f ait un comportement convenable à l'infini (si l'on prend $a_1 > 0$). Or un opérateur $D(o)$ est un opérateur de Reynolds et on vérifie que (9) définit bien un tel opérateur. Pour constater que ce sont les seuls opérateurs de Reynolds possibles, on peut utiliser la relation de récurrence (3). D'ailleurs cette solution (9) fut expérimentalement découverte en moyennant les mesures d'un anémomètre dans un courant d'air turbulent (cf. KAMPE de FERIET J.[2]). On remarquera que l'opérateur défini par (9) satisfait $P^2 = I$ ce qui n'est pas le cas de (7).

Au contraire, lorsque la constante α prend la valeur 1, on peut montrer qu'un opérateur du type D invariant par translation est soit l'opérateur identique, soit l'opérateur nul. A une homothétie près, ce résultat subsiste notamment en ce qui concerne les opérateurs semi-multiplicatifs, les opérateurs de quasi-interpolation, les opérateurs multiplicativement symétriques, les opérateurs hémi-multiplicatifs et enfin les opérateurs de Baxter.

5. CAS D'UN OPERATEUR DE REYNOLDS SUR UN ESPACE DE STONE.

Donnons un deuxième exemple d'application des relations de récurrence, où, cette fois, la topologie va jouer un rôle essentiel.

Lorsque l'algèbre $\mathfrak{A}$ est constituée de fonctions à valeurs complexes nous convenons de dire qu'un opérateur P est réel si $P(\bar{f}) = \overline{P(f)}$ où $\bar{f}$ désigne la fonction dont les valeurs sont les conjuguées de celles de f.

THEOREME 3.10. Soit X un espace de Stone et P un opérateur de Reynolds continu sur $C(X)$. Si l'image de $C(X)$ par P est en outre l'image de $C(X)$ par une projection réelle Q, de norme 1, P est alors un opérateur semi-multiplicatif idempotent.

Un espace de Stone est un espace compact extrêmement discontinu, c'est-à-dire un espace compact pour lequel la fermeture de tout ouvert est encore ouverte. La relation de récurrence (3) permet de montrer qu'un opérateur de Reynolds est idempotent sur les idempotents de son image. Soit en effet Pf un élément tel que $(Pf)^2 = Pf$. D'après (3), on peut écrire

$$P(fPf) = \frac{Pf}{n} + (1-\frac{1}{n})P(Pf)$$

et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $P(fPf) = P(Pf)$. Puis en reportant dans (3) il vient $Pf = P(Pf)$.

Or l'image de l'algèbre $C(X)$ par P est une algèbre comme nous l'avons déjà remarqué, auto-adjointe grâce à l'hypothèse faite sur Q. Cette algèbre est nécessairement fermée puisqu'image d'un opérateur de projection. Pour conduire la démonstration, nous devons succinctement rappeler quelques résultats concernant les espaces de Stone et la propriété de HAHN-BANACH généralisée.

Un espace de Banach réel N possède la propriété de Hahn-Banach généralisée si pour tout espace normé réel N', sous-espace fermé d'un espace normé réel N'' et pour toute application linéaire continue T' de N' dans N, il existe une application linéaire T'' de N'' dans N, de même norme que T' et prolongeant T'.

$$\begin{tikzcd} N'' \arrow[dr, "T''"] & \\ N' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "T'"'] & N \end{tikzcd}$$

KELLEY J.L. [2] établit en toute généralité une caractérisation de ces espaces selon :

Un espace de Banach réel N possède la propriété de Hahn-Banach généralisée si et seulement si N est isométriquement isomorphe à l'algèbre des fonctions continues réelles sur un espace de Stone.

Il n'est pas inutile de souligner, après GOODNER D.B. [1], que la propriété de Hahn-Banach généralisée est équivalente à la propriété suivante, appelée P_1 . Plus généralement définissons la propriété P_λ selon :

Un espace de Banach réel N possède la propriété P_λ si pour tout sur-espace de Banach réel B de N , il existe une projection de norme inférieure ou égale à λ de l'espace B sur N .

Ces rappels effectués, l'hypothèse du Théorème 3.10 assure l'existence d'une projection réelle de norme 1 sur l'espace de Banach ImP, donc l'existence d'une projection réelle, de norme 1 , de l'espace $C_R(X)$ sur l'espace $(\mathrm{ImP})_R = \mathrm{Re}(\mathrm{ImP})$ constitué par les parties réelles des fonctions de ImP ou de façon équivalente par les fonctions de ImP à valeurs réelles. Montrons que $(\mathrm{ImP})_R$ possède la propriété de Hahn-Banach généralisée. Soit T' une application linéaire continue de N' dans $(\mathrm{ImP})_R$. On peut encore la considérer comme une application linéaire continue $\tilde{T}$, de même norme que T' , de N' dans $C_R(X)$, donc la prolonger en une application $\tilde{T}''$ de même norme que T' , de N'' dans $C_R(X)$. L'application $T'' = \mathrm{RO}\tilde{T}''$ est une application linéaire continue, de même norme que T' , définie de N'' dans $(\mathrm{ImP})_R$ et prolongeant T' . Le théorème de Kelley enseigne que $\mathrm{Re}(\mathrm{ImP})$ est isométriquement isomorphe à $C_R(X')$ où X' est un espace de Stone. Cependant, il est classique qu'une propriété caractéristique des espaces de Stone X' est que la boule unité de $C_R(X')$ est l'enveloppe fermée convexe de ses idempotents (cf. DUNFORD N., SCHWARTZ J.T. [1]). Cette propriété se propage donc à $(\mathrm{ImP})_R$ et à $\mathrm{ImP} = \mathrm{Re}(\mathrm{ImP})+i\mathrm{Re}(\mathrm{ImP})$ et comme P est invariant sur les idempotents de l'image, c'est que ImP est invariant sous l'action de P , donc que P est idempotent. On sait que cette dernière propriété implique la semi-multiplicativité symétrique d'un opérateur de Reynolds, ce qui termine la démonstration. Nous donnerons au Chapitre V un prolongement de ce résultat.

Bien entendu, le Théorème 3.10 peut s'exprimer de bien d'autres manières par l'intermédiaire des théorèmes de représentation de Stone et de Kakutani (cf. DAY M. M. [1]). Soit $\{\Omega , \mathcal{F}, \mu\}$ un espace de probabilité où μ est une mesure de probabilité définie sur une tribu $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω . On vérifie que l'espace $L^{\infty}(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ des classes de fonctions à valeurs complexes et μ essentiellement bornées constitue une C^*- algèbre commutative, donc est isométriquement isomorphe à $C(X)$ où X est un espace de Stone (cf. Chapitre V § 6). On a donc le corollaire suivant, où l'on peut remarquer, comme dans le Théorème 3.10, qu'une condition portant seulement sur l'espace image de P implique l'idempotence de P .

<u>COROLLAIRE 3.1</u>. Soit P un opérateur de Reynolds borné sur $L^{\infty}(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$. Si l'image de L^{∞} par P est également l'image de $L^{\infty}(\Omega , \mathcal{F},\mu)$, par une projection réelle Q de norme 1 , alors P est un opérateur semi-multiplicatif idempotent.

<u>COROLLAIRE 3.2</u>. Soit P un opérateur de Reynolds borné sur $L^{\infty}(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$. Si l'image de L^{∞} par P est également l'image de L^{∞} par une projection Q positive, alors P est un opérateur semi-multiplicatif idempotent.

Pour la démonstration, on peut utiliser une proposition mise sous forme plus générale que nécessaire dans le seul corollaire 3.2.

<u>PROPOSITION 3.2</u>. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach réel, complétement réticulé et possédant un élément u dans l'intérieur de son cône positif de sorte que l'intervalle ordonné $[-u + u]$ reste borné. Soit Q un opérateur positif de projection défini sur $\mathcal{B}$. Alors ImQ est isométriquement isomorphe à l'espace des fonctions continues réelles sur un espace de Stone.

D'une manière classique, nous définissons $\|f\|_u = \text{Inf}(\lambda \mid \lambda \in R, \text{Sup}(f,-f) \leq \lambda e)$. Il s'agit d'une norme sur $\mathcal{B}$ et il existe une constante a assurant $\|f\| \leq a \ \|f\|_u$ puisque $[-u + u]$ est borné, et une constante b assurant $\|f\| \geq b \ \|f\|_u$ puisque u est dans l'intérieur du cône d'ordre de $\mathcal{B}$. Par suite $\|f\|_u$ et $\|f\|$ sont des normes équivalentes.

Montrons aussi que ImQ constitue un treillis pour l'ordre induit par $\mathcal{B}$. Soient deux éléments f et g dans ImQ . Puisque Q est un opérateur idempotent et

positif, $Q(\mathrm{Sup}(f,g))$ est un élément de ImQ qui majore $f = Qf$ et $g = Qg$ (respectivement $Q(\mathrm{Inf}(f,g))$ minore f et g). Si h est dans ImQ et majore f et g (respectivement minore f et g) alors $Qh = h$ majore $\mathrm{Sup}(f , g)$ donc $Q(\sup(f , g))$ (respectivement minore $\mathrm{Inf}(f , g)$ et donc $Q(\mathrm{Inf}(f , g))$)
Pour son ordre propre, ImQ est alors un treillis complétement réticulé.

Construisons une nouvelle norme sur cet espace ImQ . On pose

$$\|f\|_{Qu} = \mathrm{Inf}\{\lambda \mid \lambda \text{ réel}, \ \mathrm{Sup}(f,-f) \leq \lambda\, Qu\}$$

et montrons l'équivalence des normes $\|f\|_u$ et $\|f\|_{Qu}$ sur ImQ . On note que puisque Q est positif et idempotent, il est inutile de préciser si le $\mathrm{Sup}(f,-f)$ est pris au sens de ImQ ou au sens de $\mathfrak{B}$, du moins pour le calcul de $\|f\|_{Qu}$.
L'équivalence de $\|f\|$ et $\|f\|_u$ assure l'existence d'une constante notée $\|Q\|_u$ telle que

$$\sup_{\|f\|_u \leq 1} \|Qf\|_u = \|Q\|_u .$$

(Notons d'ailleurs que $\|Q\|_u = \|Qu\|_u$ comme un calcul facile permet de le constater). Pour f dans ImQ , si $\mathrm{Sup}(f,-f) \leq \lambda u$ alors

$$Q(\mathrm{Sup}(f,-f)) = \mathrm{Sup}(Qf,-Qf) = \mathrm{Sup}(f,-f) \leq \lambda\, Qu$$

donc $\|f\|_{Qu} \leq \|f\|_u$. La réciproque est facile puisque si $\mathrm{Sup}(f,-f) \leq \lambda\, Qu$, on a à partir de l'inégalité $Qu \leq (\|Qu\|_u + \varepsilon)u$ la majoration

$$\mathrm{Sup}(f,-f) \leq \lambda\, (\|Qu\|_u + \varepsilon)u$$

donc $\|f\|_u \leq \|Qu\|_u \ \|f\|_{Qu}$.

Finalement ImQ est un espace vectoriel réticulé, de Banach pour la topologie de l'ordre associée à un élément Qu . Par suite, d'après DAY M. [1], ImQ est isométriquement isomorphe, en tant qu'espace vectoriel normé et en tant que treillis, à l'algèbre $C_R(Y)$ où Y est un espace compact. Comme l'espace ImQ est complètement réticulé, Y est nécessairement de Stone d'après GOODNER D.B.[1].

Dans le Théorème 3.10, et le corollaire 3.1, une modification légère de l'hypothèse consiste à supposer la projection Q de norme 1 et l'opérateur P réel . En effet, l'opérateur R défini selon $Rg = \frac{Qg+\overline{Q\bar{g}}}{2}$ est une projection de norme 1 réelle envoyant $C_R(X)$ sur $(\mathrm{ImP})_R$.

Sur un espace de Banach ordonné, on pourrait décomposer un opérateur multiplicativement lié. Nous nous contenterons d'envisager le cas d'un opérateur multiplicativement lié positif au chapitre IV.

6. CARACTERISATIONS ALGEBRIQUES.

On peut donner quelques caractérisations purement algébriques des opérateurs multiplicativement liés. Nous ne le ferons que sur trois exemples car il existe une littérature extensive à ce sujet, essentiellement consacrée aux opérateurs semi-multiplicatifs symétriques. On pourra consulter la bibliographie détaillée fournie dans ROTA G.C. [2] et l'article initiateur de BIRKHOFF G. [1] ainsi que les généralisations aux F-anneaux BRAINERD B. [1] . Les opérateurs SMS "réguliers" furent envisagés par Mme DUBREIL-JACOTIN M.L. [1] et ARBAULT J. [2] .

PROPOSITION 3.3. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre, somme directe de deux sous-espaces vectoriels M et N . Si M constitue une sous-algèbre et si $M \times N = N \times M$ est inclus dans N , alors la projection de $\mathfrak{a}$ sur M parallèlement à N , définit un opérateur semi-multiplicatif symétrique.

PROPOSITION 3.4. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre, somme directe de deux sous-espaces vectoriels M et N . Si N constitue une sous-algèbre, la projection de $\mathfrak{a}$ sur M parallèlement à N , définit un opérateur du type D .

Pour le type D , on notera d'ailleurs les inclusions

$$\operatorname{Im}(I-P) X \operatorname{Im}(I-P) \subset \operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Im}(I-P)$$

(Dans la relation ci-dessus, le signe X signifie que l'on considère l'ensemble des éléments de la forme $f_1 f_2$ où f_1, f_2 sont dans $\operatorname{Im}(I-P)$).

PROPOSITION 3.5. (cf. ATKINSON F.V. [1]) . Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre. Pour qu'un opérateur P soit de Baxter sur $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ soit la différence sous-directe de deux algèbres M et N : c'est-à-dire qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{a}'$ de $M \times N$ pour la structure produit et, pour tout f dans $\mathfrak{a}$, un unique élément (m, n) de $\mathfrak{a}'$ tel que $f = m-n$. L'opérateur de Baxter est défini par $Pf = m$.

Sous les conditions de la proposition 3.3, si M constitue également une algèbre, P est un opérateur du type $D'(0)$, c'est-à-dire un opérateur de Baxter.

Tableau n°4 : Cas d'une algèbre finie

	MS	QI	SM	DM	D(λ)	R	B(λ)	D	D'(λ)	HM	E(λ)	E(-1)	Ba	U2	MAS	UN	PP
MS	Th 3.1	I	↓	DMS	(6)	↓	I	I	(6)	↓	C 3I	C 3I	(7)	2I SMS	↓	2N	↓
QI		Th 3.6	M 2I	MS 2I	M 2I	M 2I	I	I	M 2I	I	C 2I	C 2I	M 2I	M 2I	0	(5)	2I
SM			Th 3.3	2I	M 2I	↓	M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	C 3I	C 3I	M 2I	2I	0	2N	↓
DM				Th 3.3	M 2I	↓	I	I	M 2I	M 2I	C 3I	C 2I	M 2I	M 2I	↓	MN	2I
$\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ D(λ)						M	M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	C 2I	(2)	M 2I	M 2I	(4)	0	2I $\lambda \neq -1$
R						Th 2.2	M	M	M	M	C 3I	C 3I	M	↑	0	0	2I
$\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ B(λ)								I	(3)	I	C 2I	C 2I	M 2I	M 2I	0	(8)	2I
D									Ba 2I	I	C 2I	(1)	U2 2I	Ba 2I	0	(8)	2I
$\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ D'(λ)										M 2I	C 2I	(2)	U2 2I	Ba 2I	(4)	MN (4)	2I $\lambda \neq -1$
HM										Th 3.5	C 3I	C 3I	M 2I	M 2I	0	0	↓
$\lambda^2 \neq 1$ E(λ)											Th 3.5	C 3I	C 2I	C 2I	0	0	2I
E(-1)												Pr 3.1	(2)	C 2I	0	0	↓
Ba														2I D	(4)	MN (4)	2I
U2															0	0	2I
MAS															MN	↑	0
UN																Th 3.4	0
PP																	Th 3.7

(1) I-P est M, 2I.

(2) On a (1) lorsque $P^2 = P$.

(3) Si $(Pe)^2 = P(Pe)^2$ ou $P^2e = Pe$ alors P est M, 2I.

(4) A une homothétie près, P est M, 2N.

(5) Pe = 0, $P^2 = 2P$ cf. Th. 3.6

(6) $P = P_{11} + P_{22} + P_{34}$

(7) même remarque qu'en (6) mais $P_{22} = 0$.

(8) Pe = 0, après homothétie on a (5).

CHAPITRE IV

OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES DANS LES ALGEBRES DE FONCTIONS CONTINUES

Sur un espace topologique compact X , nous considérons l'algèbre $C(X)$ constituée par les fonctions continues et à valeurs complexes définies sur X . Quand nous nous restreindrons aux fonctions dont les valeurs sont réelles, on notera $C_R(X)$. Nous munissons $C(X)$ de la topologie de la convergence uniforme selon la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Le dual topologique de $C(X)$ est l'ensemble $M(X)$ des mesures de Radon sur X et la dualité sera indifféremment notée $\mu(f) = \langle f, \mu \rangle = \int_X f(x)d\mu(x)$. Nous désignons par $M_r(X)$ la boule de rayon r de $M(X)$, et par $M_1^+(X)$, le sous-ensemble fermé de $M_1(X)$ constitué par les mesures positives. La sphère de $M_1(X)$ est notée $S_1(X)$. Rappelons que pour la topologie vague sur $M(X)$, les sous-ensembles $M_r(X)$ et $M_1^+(X)$ sont des sous-ensembles convexes compacts.

Sur cette algèbre $C(X)$, nous proposons l'étude de certains opérateurs multiplicativement liés. On pourrait encore se placer sur $C_o(X)$, espace des fonctions continues à valeurs complexes nulles à l'infini sur un espace localement compact X , mais après compactification, cela reviendrait à opérer sur un idéal maximal fermé de $C(X)$ pour X compact, situation à laquelle on peut facilement adapter les méthodes qui font l'objet de ce chapitre.

Précisons que δ_x est la mesure de Dirac au point x , c'est-à-dire par définition

$$f(x) = \langle f , \delta_x \rangle \text{ et } \mu_x(P) \text{ , ou } \mu_x ,$$

est la mesure transformée de δ_x par l'adjoint P^* d'un opérateur continu P de $\mathcal{L}(C(X))$

$$\mu_x = P^*(\delta_x) \quad \text{et} \quad Pf(x) = \langle f, P^*(\delta_x) \rangle$$

Nous allons commencer ce chapitre par l'étude des opérateurs d'interpolation.

1. THEOREME DE REPRESENTATION INTEGRALE DES OPERATEURS D'INTERPOLATION.
La relation algébrique de définition $P(fPg) = P(fg)$ peut s'écrire

(1) $$< f(Pg-g) \ , \ P^*(\delta_x) > = 0$$

et pour toute mesure de Radon μ de $M(X)$, on a encore l'égalité

(2) $$P^*(fP^*(\mu)) = fP^*(\mu)$$

En particulier, l'ensemble des mesures de Radon invariantes par P^* constitue un module sur $C(X)$. La relation (1) étant valable pour tout f dans l'algèbre $C(X)$

$$Pg(y) = g(y)$$

pour tout y appartenant au support de $P^*(\delta_x)$, ce résultat étant valable pour tout x dans X . En outre, l'application $x \to P^*(\delta_x)$ est vaguement continue. Réciproquement une application vaguement continue satisfaisant la propriété précédente détermine un opérateur d'interpolation.

Soit Y l'ensemble des points de X pour lesquels $P^*(\delta_x) = \delta_x$, ensemble que nous appelons interpolateur de P . Il s'agit d'un sous-ensemble compact de X , lequel porte toute mesure $\mu_x(P)$.

THEOREME 4.1. Soit Y un sous-ensemble fermé d'un espace compact X et P un opérateur linéaire borné. Il y a équivalence entre :

(a) $P(fPg) = P(fg)$ et P admet Y pour interpolateur
(b) $Pf(x)$ ne dépend que des valeurs de f sur Y et $Pf(y) = f(y)$ pour tout y appartenant à Y .

En particulier, si l'on note par R_Y l'opérateur de restriction au sous-espace Y , on a la relation $R_Y P = R_Y$, c'est-à-dire que P est un prolongement à $C(X)$ de l'opérateur identique défini sur $C(Y)$. Un opérateur d'interpolation permet l'extension linéaire à tout X des fonctions continues définies sur Y . En effet, soit f un élément de $C(Y)$ et $\tilde{f}$ un quelconque prolongement en une fonction continue sur X , obtenu par exemple par le procédé (non linéaire) de Tietze. Si l'on applique P à $\tilde{f}$, on obtient un prolongement de f en une fonction continue sur tout X et de plus la correspondance $f \to P(\tilde{f})$ est linéaire et ne dépend pas du prolongement $\tilde{f}$ choisi. Réciproquement, un opérateur linéaire d'extension Q associé à l'espace Y permet de définir un opérateur d'interpolation. On pose $P = QR_Y$. Algébriquement, $P(fg) = QR_Y(fg)$ tandis qu'on peut calculer

$$P(fPg) = QR_Y(fQR_Y(g)) = QR_Y(fg)$$

ce qui donne bien $P(fg) = P(fPg)$.

Donnons maintenant une autre caractérisation de l'interpolateur. D'après la formule de définition, le noyau d'un opérateur d'interpolation constitue un idéal fermé de l'algèbre $C(X)$, dont le "support" est un certain sous-ensemble fermé Y_o . Lorsque f est nulle sur Y , la représentation intégrale de l'opérateur

$$Pf(x) = < f \; , \; P^*(\delta_x) > \quad \text{assure} \quad Pf = 0 \; ,$$

donc que f appartient au noyau de P et par suite s'annule sur Y_o . Grâce au théorème d'extension de Tietze, cela signifie $Y_o \subset Y$. D'autre part, lorsque f n'est pas identiquement nulle sur Y , par exemple $f(z_o)$ différent de 0 pour un z_o dans Y , cela signifie que $Pf(z_o)$ est différent de zéro. Par suite f n'appartient pas au noyau de P et n'est pas identiquement nulle sur Y_o . D'où $Y_o = Y$. On énonce :

<u>LEMME 4.1.</u> L'interpolateur d'un opérateur d'interpolation P est un ensemble compact qui coïncide avec le "support" du noyau de P .

On dispose d'un résultat dual.

<u>LEMME 4.2.</u> Pour qu'une mesure de Radon μ soit invariante vis-à-vis de l'opérateur P^*, il faut et il suffit que son support soit inclus dans l'interpolateur.

D'une part, si $\mathrm{Supp}\,\mu$ est inclus dans Y , la mesure μ est alors une limite vague de combinaisons linéaires de δ_{x_i} où les x_i appartiennent à Y (cf BOURBAKI N. [1]). Par suite $P^*(\mu)$ est limite vague des mêmes combinaisons linéaires, d'où $P^*(\mu) = \mu$.

D'autre part, si $P^*(\mu) = \mu$ et si f a son support dans Y' , alors $Pf = 0$ puisque P est d'interpolation. Par suite $< Pf \; , \; \mu > = 0$ et donc on dispose de $< f, P^*(\mu) > = 0$ ce qui signifie $< f, \mu > = 0$, soit $\mathrm{Supp}\,\mu \subset Y$.

On déduit de ce lemme 4.2 que l'image de P^* coïncide avec l'ensemble des mesures de Radon dont le support est dans Y .

Convenons d'appeler <u>espace d'interpolation</u> l'image de l'algèbre $C(X)$ par l'opérateur P . On dispose d'un premier résultat d'unicité qui fait intervenir les deux objets caractéristiques d'un opérateur d'interpolation, à savoir l'interpolateur et l'espace d'interpolation. On énonce :

THEOREME 4.2. Deux opérateurs d'interpolation sur l'algèbre $C(X)$ qui admettent même espace d'interpolation et même interpolateur coïncident.

Soient P_1 et P_2 ces deux opérateurs. D'après les hypothèses faites, on dispose de $\mathrm{Im}P_1 = \mathrm{Im}P_2$ et de $\mathrm{Im}P_1^* = \mathrm{Im}P_2^*$ (lemme 4.2). De plus, P_i étant idempotent, l'orthogonal de $\mathrm{Im}P_i^*$ est $\mathrm{Ker}\, P_i = \mathrm{Im}(I-P_i)$, donc $Q_i = I-P_i$ a une même image pour $i = 1$ ou 2. Posons

$$g = P_1(f)-P_2(f) = Q_2(f)-Q_1(f).$$

D'une part, g appartient à l'espace d'interpolation commun, d'autre part, g appartient à l'espace commun image de $I-P_i$. Mais ces deux espaces sont "disjoints" ce qui établit la nullité de g.

Un résultat plus précis est possible grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. Pour un opérateur d'interpolation de norme inférieure ou égale à l'unité, dont l'image sépare l'espace X et contient les constantes, l'interpolateur est la frontière de Choquet de l'espace d'interpolation.

L'idempotence de l'opérateur P assure que $P(1) = 1$. On peut montrer que Y est un ensemble frontière de $P(C(X))$ et coïncide même avec la frontière de Silov. Mais on peut obtenir plus. Soit y un point de la frontière de Choquet de l'espace $P(C(X))$, ce qui signifie que δ_y est un point extrémal de la boule unité positive du dual de $P(C(X))$, (cf. PHELPS R.R. [1]). Supposons que y n'appartienne pas à Y, la mesure $\mu_y = P^*(\delta_y)$ a son support dans Y et pour tout f dans $P(C(X))$, $Pf(y) = f(y)$. Mais $\| P^*(\delta_y) \| \leq 1$, tandis que

$$< 1 \,,\, P^*(\delta_y) > \; = \; < P(1) \,,\, \delta_y > \; = 1,$$

ce qui montre que $P^*(\delta_y)$ est un élément de la boule unité positive du dual de $P(C(X))$ (cf. Chapitre V, Lemme 5.4), dont le support est par hypothèse distinct de celui de δ_y. Or, une propriété caractéristique d'un point de la frontière de Choquet d'un sous-ensemble E de $C(X)$, séparant les points de X et contenant les constantes, est que l'égalité $< f \,,\, \mu > = f(y)$ pour tout f de E implique nécessairement $\mu = \delta_y$ lorsque μ est une mesure de Radon positive de norme 1. La contradiction entraîne l'inclusion de la frontière de Choquet de l'espace d'interpolation de P dans Y.

Inversement, soit y un point quelconque de Y. Si $f(y) = \dfrac{\mu_1(f)+\mu_2(f)}{2}$ pour tout f de $\mathrm{Im}P$, où μ_1 et μ_2 sont des mesures de Radon (positives) dans $S^1(X)$, alors on a relativement à $P^*(\delta_y)$:

$$P^*(\delta_y) = \frac{P^*(\mu_1)+P^*(\mu_2)}{2}$$

Puisque P est de norme unité, on a également les majorations :

$$\| P^*(\mu_i) \| \leq \| P^* \| \; \| \mu_i \| \leq 1$$

tandis que $< 1 , P(\mu_i) > = 1$. Puis $P^*(\delta_y) = \delta_y$, donc $\dfrac{P^*(\mu_1)+P^*(\mu_2)}{2} = \delta_y$ ce qui implique $P^*(\mu_1) = P^*(\mu_2) = \delta_y$ (cf. DUNFORD-SCHWARTZ [1])^2, donc que δ_y est point extrémal dans la boule unité positive du dual de l'espace d'interpolation, ou encore que y est un élément de la frontière de Choquet de cet espace.

Cette caractérisation de l'interpolateur permet le deuxième théorème d'unicité.

<u>THEOREME 4.3</u>. <u>Deux opérateurs d'interpolation sur l'algèbre</u> $C(X)$, <u>dont la norme est inférieure ou égale à</u> 1 , <u>et qui admettent un même espace d'interpolation séparant les points de</u> X <u>et contenant les constantes, coïncident nécessairement</u>.

Donnons quelques exemples de réalisation des opérateurs étudiés dans ce paragraphe

<u>Exemple 1</u>. Soit $X = [-1, +1]$ et définissons pour un indice i prenant les valeurs 1 ou 2 les deux opérateurs suivants :

$$P_i f(x) = x(f(-1)^i - f(o)) + f(o) \qquad \text{pour } 1 \geq x \geq 0$$

$$P_i f(x) = -x(f(-1)^i - f(o)) + f(o) \qquad \text{pour } 0 \geq x \geq -1$$

P_1 et P_2 sont des opérateurs d'interpolation de même image et de norme unité, tels que $P_i(1) = 1$. Pourtant $Y_1 = \{0\} \cup \{1\}$ diffère de $Y_2 = \{0\} \cup \{-1\}$. Mais il est clair que l'image de ces opérateurs n'est pas séparante. Toutefois, on pourrait modifier le Théorème 4.3 pour inclure le cas où l'espace d'interpolation n'est pas séparant, mais l'énoncé devient inutilement compliqué.

<u>Exemple 2</u>. Pour a et b positifs, notons $\Delta_{b,a}$ la fonction triangle de support $[\, a \, , \, b \,]$, valant 1 en 0 , 0 en a et $-b$ et linéaire par morceaux. Soit $S = \{x_1 = 0, \ldots, x_h , \ldots, x_n = 1\}$ une division de $[0,1]$ avec $n \geq 2$. Posons

$$\Delta_i(x) = \Delta_{x_i - x_{i-1},\, x_{i+1} - x_i}(x) \quad \text{pour } i = 1, \ldots , n ,$$

en convenant de noter $x_o = 0$ et $x_{n+1} = 1$. L'opérateur P_S associé à la division S selon :

$$P_S f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta_i (x - x_i)$$

est l'opérateur usuel d'interpolation linéaire, opérateur positif, de norme 1 et d'interpolateur S . Puisque l'espace vectoriel des fonctions linéaires par morceaux dont les noeuds appartiennent à la division S sépare les points de X , le Théorème 4.3 assure qu'il s'agit de l'unique opérateur d'interpolation positif sur cet espace. Par contre, il est possible de construire d'autres opérateurs d'interpolation à valeurs dans l'espace des fonctions linéaires par morceaux, pour une subdivision S' plus fine que S , et dont l'interpolateur soit cependant S .

Cet exemple se transcrit notamment sur l'ensemble triadique de Cantor Y sur $[0,1]$. En prolongeant toute fonction continue sur Y par des fonctions linéaires sur les intervalles ouverts du complémentaire de Y , on constate que Y est un interpolateur relatif à un opérateur d'interpolation satisfaisant les hypothèses du Théorème 4.3.

PROPOSITION 4.2. Soient P_1 et P_2 deux opérateurs d'interpolation définis sur l'algèbre $C(X)$. Deux quelconques des trois propriétés suivantes impliquent la troisième.

(a) P_1 et P_2 commutent

(b) l'interpolateur Y_2 de P_2 est inclus dans l'interpolateur Y_1 de P_1

(c) l'espace d'interpolation de P_2 est inclus dans l'espace d'interpolation de P_1.

Montrons d'abord que l'inclusion $Y_2 \subset Y_1$ équivaut à la relation $P_2P_1 = P_2$. Nous partons d'une mesure de Radon μ de $M(X)$. Des relations d'inclusion

Supp $P_2^*(\mu) \subset Y_2 \subset Y_1$, on déduit que $P_2^*(\mu)$ est une mesure invariante par P_1^* (Lemme 4.2). Soit $P_1^*P_2^* = P_2^*$ ou encore $P_2P_1 = P_2$.

Réciproquement, supposons $P_2P_1 = P_2$ et choisissons un point x de Y_2. De $P_2^*(\delta_x) = \delta_x$ et $P_1^*P_2^* = P_2^*$, on déduit $P_1^*(\delta_x) = \delta_x$ établissant que x est dans Y_1 . L'idempotence de P_2 assure facilement l'équivalence entre $P_1P_2 = P_2$ et l'inclusion $\mathrm{Im}P_2 \subset \mathrm{Im}P_1$. La démonstration de la proposition 4.2 est alors facile

(a) et (b) donnent $P_1P_2 = P_2P_1$ et $P_2P_1 = P_2$ donc $P_1P_2 = P_2$ soit (c)

(a) et (c) donnent $P_1P_2 = P_2P_1$ et $P_1P_2 = P_2$ donc $P_2P_1 = P_2$ soit (b)

(b) et (c) donnent $P_2P_1 = P_2$ et $P_1P_2 = P_2$ donc $P_1P_2 = P_2P_1$ soit (a)

En particulier, si l'on a une égalité dans (b) ou dans (c), les deux opérateurs P_1 et P_2 sont égaux.

Passons maintenant à la construction d'interpolateurs à partir d'interpolateurs connus.

Convenons d'appeler interpolateur markovien (ou de Markov) relatif à X, un sous-espace Y de X, tel qu'il existe un opérateur de Markov, c'est-à-dire un opérateur sur $C(X)$ de norme inférieure ou égale à 1 et conservant les constantes, d'interpolation et dont l'interpolateur soit Y.

Un interpolateur markovien absolu est un interpolateur markovien relatif à tout espace compact dans lequel il est injecté homéomorphiquement.

THEOREME 4.4. Soit Y_i une famille d'interpolateurs markoviens relatifs à des compacts X_i indexés par une famille I. Le produit topologique $Y = \prod_{i\in I}(Y_i)$ est un interpolateur markovien relatif à $X = \prod_{i\in I}(X_i)$

Lorsque I est un ensemble fini, les Théorèmes de Stone-Weierstrass et de Fubini permettent une démonstration simple à partir du produit tensoriel selon I $\bigotimes_{i\in I} C(X_i)$.

Lorsque la famille I n'est pas finie, appelons pr_J la projection canonique de S sur $\prod_{j\in J}(X_j)$ où $J \subset I$ et F l'espace vectoriel formé par les fonctions continues sur X de la forme $f_J \circ pr_J$ où J parcourt l'ensemble filtrant des parties finies de I et où f_J est une fonction continue sur $\prod_{i\in J}(X_i)$. Cet espace F est dense dans $C(X)$. Soit $x = \bigotimes_{i\in I} x_i$ un point de X et posons $P^*(\delta_x)$ égal à la mesure produit tensoriel $\bigotimes_{i\in I} P_i^*(\delta_{x_i})$ où P_i est un opérateur de Markov d'interpolation sur $C(X_i)$ dont l'interpolateur (markovien) est Y_i. La mesure $P^*(\delta_x)$ est une mesure de Radon sur X car $P_i^*(\delta_{x_i})(1) = 1$ et également $P_i^*(\delta_{x_i}) \geq 0$ (cf. BOURBAKI N. [1] Chapitre III § 4). En plus, $P^*(\delta_x)$ appartient à $S_1^+(X)$. Lorsque x est dans Y, on a l'égalité $P^*(\delta_x) = \delta_x$ puisque, d'après les propriétés de la mesure produit :

$$< f_J \circ pr_J , P^*(\delta_x) > = < f_J , \bigotimes_{i\in J} P^*(\delta_{x_i}) > = < f_J , \bigotimes_{i\in J} \delta_{x_i} >$$

$$= f_J(\bigotimes_{i\in J} x_i) = f_J \circ pr_J(x)$$

et l'on termine grâce à la densité de F dans $C(X)$.

En outre $P^*(\delta_x)$ a son support dans Y car $\mathrm{Supp}\, P_i^*(\delta_{x_i}) \subset Y_i$. Pour la démonstration, on utilise le Théorème de Fubini afin d'obtenir

$$\mathrm{Supp}\,\Big(\bigotimes_{i \in J} P_i^*(\delta_{x_i})\Big) \subset \prod_{i \in J} \mathrm{Supp}\, P_i^*(\delta_{x_i})$$

pour un ensemble J fini et on utilise la densité de F et la topologie produit. Grâce au Théorème 4.1, il ne reste plus qu'à démontrer la continuité vague de l'application $x \to P^*(\delta_x)$. Or, pour f dans F , de la forme $f_J \circ pr_J$:

$$< f, P^*(\delta_x) > = < f_J \circ pr_J, P^*(\delta_x) > = < f_J \, , \bigotimes_{i \in J} P^*(\delta_{x_i}) >$$

et donc $x \to < f, P^*(\delta_x) >$ est continue, par application du Théorème 4.4, dans le cas d'un ensemble J fini. Par densité de F dans $C(X)$, puisque $\|P^*(\delta_x)\| \leq 1$, on a le résultat pour tout f dans $C(X)$ et donc la continuité vague $x \to P^*(\delta_x)$.

Ce théorème relatif au produit peut se généraliser de la même manière aux <u>limites projectives</u> (cf. BOURBAKI N. [1] Chap III) pour un système projectif $(X_i \, , P_{ij})$ d'espaces compacts, indexé par un ensemble préordonné filtrant I , lorsque P_{ij} est surjectif (ainsi que sa restriction à $Y_i \subset X_i$ sur $Y_j \subset X_j$. Une condition d'existence d'une mesure limite projective $\varprojlim P_i(\delta_{x_i})$ est la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M_1^+(X_i) & \xrightarrow{P_{ij}^*} & M_1^+(X_j) \\ {\scriptstyle P_i^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_j^*} \\ M_1^+(Y_i) & \xrightarrow{P_{ij}^*} & M_1^+(Y_j) \end{array}$$

Sous ces conditions, on montre sans difficulté que $\varprojlim Y_i$ est un interpolateur markovien relatif à $\varprojlim X_i$.

On aurait des énoncés analogues en considérant des interpolateurs markoviens absolus. Un espace compact, homéomorphe à un espace markovien absolu,est bien entendu un espace markovien absolu.

<u>THEOREME 4.4 bis</u>. <u>Un produit topologique (ou une limite projective) d'espaces compacts markoviens absolus est un espace compact markovien absolu.</u>

Il semble naturel de fournir maintenant des conditions suffisantes d'existence.

2. THEOREME D'EXISTENCE D'UN OPERATEUR D'INTERPOLATION.

On distingue plusieurs problèmes distincts, les uns portant sur le couple (X, Y) les autres sur l'espace d'interpolation.

Problème a_λ . Soit Y un sous-ensemble fermé d'un espace compact X . Existe-t-il un opérateur d'interpolation sur $C(X)$, de norme inférieure ou égale à λ, dont Y soit l'interpolateur ?

Problème a'_1 . Soit Y un sous-ensemble fermé d'un espace compact X . L'espace Y est-il un interpolateur markovien relatif à X ?

Problème b_λ . Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $C(X)$. Existe-t-il un opérateur d'interpolation, de norme inférieure ou égale à λ , dont l'espace d'interpolation soit H ?

Problème b'_1 . Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $C(X)$ contenant les constantes et séparant les points de X . Résoudre le problème b_1 dans ce cas ?

Commençons par examiner le problème b_λ . Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $C(X)$ et Y un sous-espace fermé de Y . Nous dirons que H possède la propriété de l'extension unique λ-majorée sur Y si pour tout élément g de $C(Y)$, il existe un unique prolongement de g en une fonction $\tilde{g}$ continue sur X et appartenant à H pour lequel $\|\tilde{g}\|_X \leq \|g\|_Y$. Bien entendu, on suppose $\lambda \geq 1$.

PROPOSITION 4.3. Lorsque l'espace H possède la propriété de l'extension unique λ-majorée sur Y , il existe un opérateur d'interpolation de norme inférieure ou égale à λ dont l'interpolateur est Y et l'espace d'interpolation H .

L'unicité est essentielle. Si $H = C(X)$, d'après le Théorème de Tietze, il existe une fonction $\tilde{f}$ prolongeant f définie sur Y . Quitte à multiplier $\tilde{f}$ par une fonction ϕ valant 0 sur l'ensemble des points où $|\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x \in Y} |f(x)| + 2\varepsilon$ et 1 sur l'ensemble des points de x ou $|\tilde{f}(x)| < \sup_{x \in Y} |f(x)| + \varepsilon$, on note que pour $\varepsilon > 0$, l'espace $C(X)$ possède la propriété de l'extension $(1+\varepsilon)$ majorée sur tout sous-espace compact Y de X .

Soit R_Y l'opérateur de restriction d'une fonction de $C(X)$ au sous-espace Y . Par hypothèse, il existe une bijection bicontinue entre H et $C(Y)$. Soit f dans H et x un point quelconque de X . L'application qui a $R_Y f$ fait correspondre le nombre $f(x)$ est une forme linéaire continue sur $C(Y)$ puisque

$$| < f , \delta_x > | \leq \|f\| \quad \|\widetilde{R_Y f}\| \leq \lambda \|R_Y f\|$$

D'après le Théorème de Riesz, il existe une mesure de Radon μ_x , portée par Y et de norme au plus égale à λ , telle que $f(x) = \int_Y f(z)d\mu_x(z)$ pour toute fonction f de H . Pour établir que l'application $x \to \mu_x$ est vaguement continue, choisissons un filtre $\mathfrak{X}$ sur X qui converge vers x . Pour tout f dans C(X) ,

$$\operatorname*{Lim}_{\mathfrak{X}} \mu_y(f) = \lim_{\mathfrak{X}} \int_Y f(z)d\mu_y(z) = \lim_{\mathfrak{X}} \int_Y R_Y(f)d\mu_y(z)$$

$$= \lim_{\mathfrak{X}} \widetilde{R_Y f}(y) = \widetilde{R_Y f}(x)$$

$$= \int_X f(z)d\mu_x(z) = \mu_x(f)$$

L'application $x \to \mu_x$ a toutes les propriétés requises par le théorème de représentation intégrale 4.1 lequel permet de définir un opérateur d'interpolation P selon $P^*(\delta_x) = \delta_x$. De plus $\|P^*\| = \|P\| \leq \operatorname*{Sup}_{x \in X} \|\mu_x\| \leq \lambda$ tandis que l'on a $P(C(X)) = H$ et $P^*(\delta_x) = \delta_x$ si et seulement si x est dans Y , donc l'interpolateur de P est Y .

Restreignons-nous au problème b_1' pour lequel la théorie abstraite du potentiel va nous être utile. Si le problème b_1' a une solution, puisque P est de Markov, P est positif (cf. Lemme 5.4) et ImP = H est un espace auto-adjoint. En particulier, ReH = $P(C_R(X))$. Cet espace ReH sépare les points de X et contient les constantes. D'ailleurs, la frontière de Choquet de H et celle de ReH coïncident. Une condition nécessaire du problème b_1' est donc que la frontière de Choquet de H soit fermée (Proposition 4.1) et que ReH soit réticulé supérieurement et inférieurement pour son ordre propre (cf. début de la proposition 3.2 où le fait que P soit un opérateur positif de projection est seul utilisé). Ces conditions sont suffisantes pour le problème b_1' et même la deuxième condition implique la première en utilisant un résultat dû à BAUER H. [1] . De ce même article, on peut déduire que H possède la propriété de l'extension 1-majorée sur sa frontière de Choquet car BAUER H.H. montre que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet abstrait dans H à partir de la frontière de Silov de H qui est précisément Y . Or, si $\|f\| \leq 1$ sur la frontière de Silov, le prolongement (unique) est nécessairement de norme inférieure ou égale à 1 . On peut alors énoncer :

<u>COROLLAIRE 4.1.</u> Soit H un sous-espace vectoriel de C(X) , fermé et auto-adjoint, séparant les points de X et contenant les constantes. Si ReH est un treillis pour son ordre propre, il existe un opérateur d'interpolation de Markov dont l'espace d'interpolation est H .

Le problème a_λ peut n'avoir aucune solution. De même a_λ peut avoir une solution sans que $a_{\lambda'}$ ait une solution pour $\lambda' < \lambda$. Prenons l'exemple suivant qui remonte à ARENS R. [1] et fut repris dans CORSON H.H.; LINDENTRAUSS J. [1]. On considère un ensemble discret non dénombrable A dont on prend le compactifié d'Alexandroff $\bar{A}$ et on se place sur l'espace $M(\bar{A})$, dual de $C(\bar{A})$. L'espace $\bar{A}$ est canoniquement injecté dans la boule unité $M_1(\bar{A})$ par la correspondance $x \to \delta_x$.

Pour tout nombre λ tel que $2n-1 \leq \lambda < 2n+1$, où n est un entier naturel, on peut construire une application vaguement continue P^* de $M(\bar{A})$ à valeurs dans $M_{2n+1}(\bar{A})$ et telle que $P^*(\delta_x) = \delta_x$ pour tout x dans A.

Par contre, pour tout $\lambda < 2n+1$, il est impossible de construire une application vaguement continue P^* de $M_{2n+1}(\bar{A})$ à valeurs dans $M_\lambda(\bar{A})$ et telle que l'on ait $P^*(\delta_x) = \delta_x$ pour tout x dans A.

Grâce au Théorème 4.1, cela montre que le problème a_λ n'a pas de solution pour le couple $(\bar{A}, M_{2n+1}(\bar{A}))$ lorsque $\lambda < 2n+1$, mais admet des solutions pour $2n+1 \leq \lambda < 2n+3$. Aucun problème a_λ n'a de solution pour $(\bar{A}, M(\bar{A}))$.

Pour tenter de résoudre le problème (a_1'), sans vouloir entrer dans la construction d'une algèbre de fonctions dont la frontière de Choquet coïncide avec Y, on peut utiliser une méthode de points extrémaux, susceptible de s'adapter à de nombreux autres cas. On commence par remarquer que :

<u>LEMME 4.3</u>. L'ensemble des opérateurs d'interpolation qui admettent un même interpolateur est un ensemble convexe.

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs d'interpolation ayant même interpolateur. Puisque $P_i(fP_jg) = P_i(fg)$ pour i et j valant 1 ou 2, on vérifie que

$$(\alpha P_1+(1-\alpha)P_2)(f(\alpha P_1+(1-\alpha)P_2)(g) = (\alpha P_1+(1-\alpha)P_2)(fg)$$

Nous utilisons maintenant une propriété bien connue des mesures spectrales :

<u>LEMME 4.4</u>. Soit X un espace compact et μ une mesure de Radon non nulle sur X telle que $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$. Alors μ est une mesure de Dirac.

Faisant $g = 1$, on constate que $\mu(1) = 1$ puisque μ n'est pas la mesure nulle. Soit f une fonction de $C(X)$ telle que $\|f\| \leq 1$. Pour tout λ complexe, tel que $|\lambda| > 1$, il existe une fonction continue g telle que $(\lambda - f)g = 1$. Donc $\mu(g)(\lambda-\mu(f)) = 1$, ce qui montre que $\mu(f) \neq \lambda$ donc $|\mu(f)| \leq 1$. Les deux conditions $\|\mu\| \leq 1$ et $\mu(1) = 1$ impliquent la positivité de μ (cf. Lemme 5.4). Supposons alors que le support de μ contienne deux points x_1 et x_2 . Comme X est normal, il existe deux voisinages fermés V_1 et V_2 de x_1 et x_2 et deux ouverts disjoints W_1 et W_2 tels que $W_i \subset V_i$. Par le Théorème d'Urysohn, on peut construire une fonction f_i continue $(i = 1, 2)$ dont le support est dans W_1 et qui prend la valeur 1 sur V_i . D'où $f_1 f_2 = 0$ et $\mu(f_1) > 0$ ainsi que $\mu(f_2) > 0$. Ceci contredit $\mu(f_1 f_2) = \mu(f_1)\mu(f_2)$ et implique $\mu = \lambda\delta_x$ mais la positivité jointe à $\mu(1) = 1$ fournit $\mu = \delta_x$.

Appelons $\mathcal{J}(Y)$ <u>l'ensemble des opérateurs d'interpolation de Markov admettant pour interpolateur un même ensemble fermé</u> Y . Cet ensemble est convexe d'après le Lemme 4.3 mais peut être vide d'après l'exemple final donné après le corollaire 4.1.

<u>PROPOSITION 4.4.</u> Un opérateur appartenant à $\mathcal{J}(Y)$ est extrémal si et seulement si cet opérateur est multiplicatif.

Puisque 1 appartient à l'image de $P, P(1) = 1$ et ceci, joint à $\|P\| = 1$, fournit la positivité de P (cf. Chapitre V, Lemme 5.4)

(<u>a</u>) La condition est suffisante. Supposons que $P(fg) = PfPg$ pour un opérateur P dans $\mathcal{J}(Y)$. Supposons en outre $P = \frac{P_1+P_2}{2}$ où $P_i (i = 1, 2)$ est dans $\mathcal{J}(Y)$. Il vient

$$P^*(\delta_x) = \frac{P_1^*(\delta_x)+P_2^*(\delta_x)}{2}$$

tandis que $\mu_x(P) = P^*(\delta_x)$ satisfait $\mu_x(fg) = \mu_x(f)\mu_x(g)$ et $\mu_x(1) = 1$. Le lemme 4.4. donne $\mu_x = \delta_y$. Mais comme $P_1^*(\delta_x)$ et $P_2^*(\delta_x)$ sont dans $S_1^+(X)$, l'extrémalité des mesures de Dirac dans $S_1^+(X)$ implique

$$P_1^*(\delta_x) = P_2^*(\delta_x) = P^*(\delta_x)$$

et ce pour tout x de X . D'où $P_1 = P_2 = P$ et P est extrémal dans $\mathcal{J}(Y)$.

(<u>b</u>) La condition est nécessaire. Fixons-nous deux nombres réels α et β , positifs, ($\alpha < \beta$) et dont la somme soit égale à 1 . Choisissons une fonction réelle g_o dans $C(X)$, minorée par α et majorée par β . Introduisons deux nouveaux opérateurs Q_1 et Q_2 sur $C(X)$:

$$Q_1(f) = \frac{P(fg_o)}{P(g_o)} \quad \text{et} \quad Q_2(f) = \frac{1}{\beta} P(f) - \frac{\alpha}{\beta} \frac{P(fg_o)}{P(g_o)}$$

Ces opérateurs sont bien définis, car $Pg_o \geq \alpha$, et sont linéaires sur $C(X)$. Visiblement, $Q_1(1) = Q_2(1) = 1$ tandis que $Q_1 \geq 0$ et $Q_2 \geq 0$. Pour ce dernier point, on vérifie que pour $f \geq 0$, l'inégalité $g_o \leq \beta$ donne $P(fg_o) \leq \beta Pf$ tandis que $\frac{1}{P(g_o)} \leq \frac{1}{\alpha}$. En effet on a :

$$0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \frac{P(fg_o)}{P(g_o)} \leq Pf$$

et la minoration $$\frac{1}{\beta} Pf - \frac{\alpha}{\beta}\frac{P(fg_o)}{P(g_o)} \geq \frac{\alpha}{\beta} Pf \geq 0.$$

Les opérateurs Q_i sont donc de norme égale à 1 , c'est-à-dire de Markov.

Ce sont des opérateurs d'interpolation dont Y est l'interpolateur. En effet :

$$Q_1^*(\delta_x) = \frac{g_o P^*(\delta_x)}{Pg(x)}$$

et de même $$Q_2^*(\delta_x) = \frac{\left(1-\alpha \frac{g_o}{Pg_o(x)}\right)}{\beta} P^*(\delta_x)$$

Si x est dans Y , $Q_i^*(\delta_x) = \delta_x$ tandis que Supp $Q_i^*(\delta_x) \subset Y$.

Enfin, par construction, $\alpha Q_1 + \beta Q_2 = P$. Puisque P est extrémal, on doit avoir $Q_1 = Q_2 = P$, c'est-à-dire (1) $P(g_o)P(f) = P(fg_o)$, pour toute fonction f de $C(X)$. Il est maintenant facile de passer à l'égalité $P(f)P(g) = P(fg)$ valable pour tous f et g dans $C(X)$. Il suffit en effet de prendre une fonction $g_o = \frac{\beta-\alpha}{2} \frac{g}{\|g\|} + \frac{\alpha+\beta}{2}$ et d'appliquer (1) à g_o pour en déduire la multiplicativité de P .

Ayant caractérisé les éléments extrémaux de $\mathcal{J}(Y)$, il convient d'examiner géométriquement la signification de la multiplicativité.

THEOREME 4.5. Sur l'algèbre $C(X)$, il existe un opérateur multiplicatif d'interpolation tel que $k(P) = \emptyset$ et dont l'interpolateur est Y si et seulement si Y est un retract de X .

Rappelons (cf. HU S.T. [1]) que Y est un retract de X si l'application identique de Y sur Y admet une extension continue de X sur Y . Si nous notons ϕ cette extension, l'opérateur Pf , défini selon $Pf(x) = f\circ\phi(x)$, est un opérateur multiplicatif d'interpolation positif, conservant les constantes et d'interpolateur Y (en effet, on a l'égalité $P^*(\delta_x) = \delta_{\phi(x)}$). De plus le sous-ensemble $k(P)$ est réduit à l'ensemble vide.

Réciproquement, soit P un opérateur multiplicatif idempotent sur $C(X)$, (ce dernier point est conséquence de nos hypothèses car l'unité est conservée par l'opérateur P), d'interpolateur Y. Pour tout x dans X, la mesure $\mu_x(P)$ satisfait la relation multiplicative $\mu_x(fg) = \mu_x(f)\mu_x(g)$ et ne peut être nulle puisque $k(P) = \emptyset$, donc le Lemme 4.4 assure l'existence d'un point, noté $\phi(x)$, tel que

$$P^*(\delta_x) = \delta_{\phi(x)}.$$

L'application $\phi : X \to X$ est en fait définie sur X et à valeurs dans Y. Elle est continue car supposons que x_α converge vers x et que $\phi(x_\alpha)$ ne converge pas vers $\phi(x)$, alors quitte à prendre un sous-filtre, $\phi(x_\alpha)$ converge vers un point z différent de $\phi(x)$. Il existe g dans $C(X)$ telle que $g(z) = 0$ et $g(\phi(x)) = 1$. Mais comme μ_{x_α} converge vaguement vers μ_x ; $\langle g,\mu_x\rangle = g(\phi(x_\alpha))$ converge vers $g(z) = 0$ et vers $g(x) = 1$, ce qui est impossible. Enfin, si x est dans Y, on a l'égalité $\phi(x) = x$ puisque par hypothèse $\mu_x = \delta_x$, ce qui établit que Y est bien un retract de X.

On sait notamment que tout ensemble convexe compact Y d'un espace de Fréchet est un retract absolu (cf. HU S.T. [1]) et par suite, ces ensembles sont des interpolateurs absolus. Plus généralement, chaque fois que la théorie de l'homotopie fournit un retract, cela entraîne la solution d'un problème (a_1') correspondant. Rappelons qu'une condition, nécessaire, d'ailleurs simple, pour qu'un sous-ensemble Y soit un retract de X, est que le groupe d'homologie d'ordre q, $H_q(Y)$, de l'espace Y, soit isomorphe à un facteur direct du groupe d'homologie correspondant $H_q(X)$.

Toutefois, le problème a_1' admet une solution même lorsque Y n'est pas un retract de X. Prenons la sphère S_{n-1}, frontière de la boule unité d'un espace euclidien de dimension n. La condition nécessaire d'homologie rappelée ci-dessus n'étant pas satisfaite, S_{n-1} n'est pas un retract de E_n, ni même, a fortiori, du compactifié de Cech βE_n de E_n. Pourtant, il existe un opérateur d'interpolation de Markov, d'interpolateur Y, défini sur βE_n, c'est-à-dire défini sur les fonctions continues bornées de E_n. Le couple $(Y = \beta Y, \beta E_n)$ satisfait donc a_1'. En effet, l'existence d'un tel opérateur résulte du Théorème suivant (cf. ARENS R. [1]), généralisant des résultats de DUGUNDJI J.

THEOREME 4.6. Soit Y un sous-ensemble fermé d'un espace compact X et f une fonction continue définie sur Y à valeurs dans un sous-espace métrique K, convexe et complet, d'un espace localement convexe. Il existe une extension $\tilde{f}$ de f à tout X dont les valeurs restent dans K, $\tilde{f}$ étant continue sur X.

Lorsque Y est un sous-ensemble fermé métrisable d'un espace compact X, l'application $x \to \delta_x$ est vaguement continue de Y dans $S_1^+(Y)$, espace convexe compact et métrisable (cf. DUNFORD-SCHWARTZ [1] (Théorème 1 § V, 5, 1)) pour la topologie vague. Donc il existe un prolongement $P^*(\delta_x)$, vaguement continu, de X dans $S_1^+(Y)$. Ce prolongement définit un opérateur d'interpolation P qui permet de résoudre le problème (a_1') pour Y.

COROLLAIRE 4.2. Tout ensemble métrisable compact est un interpolateur absolu markovien.

COROLLAIRE 4.3. Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit topologique de compacts et Y_i des sous-ensembles compacts métrisables de X_i. L'espace $\prod_{i \in I} Y_i$ est un interpolateur markovien de X.

Signalons que pour démontrer le Théorème 4.6, deux attitudes sont possibles : soit utiliser une partition judicieuse de l'unité (cf. ARENS R. [1]), soit utiliser directement un théorème de sélection continue (cf. MICHAEL E. [1] et [2]). Grâce à ce qui précède, nous disposons d'un moyen pour connaître qu'un couple (Y, X) satisfaisant le problème a_1' est tel que Y soit un retract de X.

THEOREME 4.7. Soit (Y, X) un couple résolvant le problème a_1', c'est-à-dire Y un interpolateur markovien relatif à l'espace compact X. La condition topologique -Y est un retract de X- est équivalente à la condition géométrique appelée condition C : L'ensemble $\mathcal{J}(Y)$ admet un point extrémal.

Il suffit d'appliquer la Proposition 4.3 et le Théorème 4.5 .

Une façon simple, sinon naturelle, pour assurer la condition C, est de découvrir un espace localement convexe dont $\mathcal{J}(Y)$ soit un sous-espace convexe compact puisque le théorème de Krein-Milman assure l'existence d'au moins un point extrémal. Nous donnerons au Chapitre V une utilisation de cette idée relative aux espaces compacts de Stone. Envisageons ici deux exemples dont le premier reprend d'ailleurs un cas déjà étudié :

Exemple 1. Soit $X = [-1, +1]$ et $Y = \{(-1), (+1)\}$. Il existe un opérateur d'interpolation sur $C(X)$ dont l'interpolateur est Y . Par exemple, en prenant $P^*(\delta_x) = x\delta_1$ si $x \geq 0$ et $|x|\delta_{-1}$ si $x \leq 0$. Pourtant $\mathcal{J}$ (Y) ne possède pas de points extrémaux.

Exemple 2. Posons $X = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ et $Y = \{(-1), (+1)\}$. Il existe des opérateurs d'interpolation dont l'interpolateur est Y et il existe un seul point extrémal de $\mathcal{J}$ (Y), défini par $P^*(\delta_x) = \delta_{+1}$ si $x \geq \frac{1}{2}$ et $P^*(\delta_x) = \delta_{-1}$ si $x \leq -\frac{1}{2}$. $\mathcal{J}$ (Y) n'est pas enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux, donc n'est compact pour aucune topologie compatible avec sa structure de convexe.

3. OPERATEURS SEMI-MULTIPLICATIFS SYMETRIQUES ET EXAVES LINEAIRES.

Comme pour les opérateurs d'interpolation, nous donnons d'abord un théorème caractéristique de représentation intégrale, lequel fait intervenir quelques objets essentiels. La relation $x \,\mathcal{P}\, y$, définie par l'égalité $Pf(x) = Pf(y)$ pour tout f dans $C(X)$, est une relation d'équivalence sur l'espace X . Les classes d'équivalence de cette relation sont fermées et induisent une partition semi-continue supérieurement de X . L'espace quotient $x/\mathcal{P}$ est alors séparé et quasi-compact, donc compact pour la topologie quotient. Nous appelons p l'application quotient et $\mathcal{P}(x)$ la classe d'équivalence du point x .

THEOREME 4.8. Sur l'algèbre $C(X)$, un opérateur continu P est semi-multiplicatif symétrique si et seulement le support de la mesure $P^*(\delta_x)$ est inclus dans $\mathcal{P}(x)$.

Lorsque Supp $P^*(\delta_x)$ est inclus dans $\mathcal{P}(x)$, comme Pg est constante sur (x) d'ailleurs égale à $Pg(x)$, on a $P(fPg)(x) = Pf(x)Pg(x)$.

Réciproquement, si $< fPg, P^*(\delta_x) > = < f, PgP^*(\delta_x) >$

$$= < PfPg, \delta_x > = Pg(x) < f, P^*(\delta_x) > ,$$

égalité valable pour tout f dans $C(X)$, on a $(Pg-Pg(x))P^*(\delta_x) = 0$ donc $Pg(y) = Pg(x)$ pour tout y de Supp $P^*(\delta_x)$ d'où Supp $P^*(\delta_x) \subset \mathcal{P}(x)$.

On dira qu'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'espace compact X est quasi-moyennante s'il existe un opérateur semi-multiplicatif symétrique P pour lequel $\mathcal{P}$ coïncide avec la relation $\mathcal{R}$ donnée. Une relation d'équivalence est moyennante si elle est quasi-moyennante pour un opérateur semi-multiplicatif symétrique de Markov, ce dernier opérateur étant alors appelé opérateur de moyenne (cf.

DHOMBRES J. [4]).

La relation d'équivalence $\mathfrak{N}$ joue, vis-à-vis d'un opérateur semi-multiplicatif, un rôle analogue à celui joué par l'interpolateur vis-à-vis d'un opérateur d'interpolation comme on peut d'ailleurs le constater sur la proposition suivante, pour laquelle nous avons besoin d'une définition préalable.

Tout sous-ensemble fermé Y d'un espace compact X , détermine une relation d'équivalence (fermée) $\mathfrak{T}$ dont les classes sont $\mathfrak{T}(x) = \{x\}$ lorsque x n'appartient pas à Y et $\mathfrak{T}(x) = Y$ lorsque x appartient à Y .

<u>PROPOSITION 4.5</u>. Pour que le sous-ensemble fermé Y soit un interpolateur dans l'espace compact X , il suffit que $\mathfrak{T}$ soit une relation d'équivalence quasi-moyennante.

A l'opérateur Q semi-multiplicatif et relatif à $\mathfrak{T}$, faisons correspondre un nouvel opérateur P défini à partir d'un point arbitraire y_o de Y

$$Pf(x) = f(x)-Qf(x)+Qf(y_o)$$

On calcule aussitôt :

$$P(fg)-P(fPg) = f(g-Pg)-Q(f(g-Pg))+Q(f(g-Pg))(y_o)$$

(<u>a</u>) Pour x dans Y , $Qg(x) = Qg(y_o)$ et $Pg(x) = g(x)$, donc on dispose de

$$P(fg)(x)-P(fPg)(x) = -Q(f(g-Pg))(y_o)+Q(f(g-Pg))(y_o) = 0.$$

(<u>b</u>) Pour x dans Y' , $Qg(x) = g(x)$ et $Pg(x) = Qg(y_o)$ donc on dispose de

$$P(fg)(x)-P(fPg)(x) = Q(f(g-Pg))(y_o) = Q(fQg)(y_o)-Qf(y_o)Qg(y_o) = 0$$

Finalement $P(fg) = P(fPg)$ et l'interpolateur de P est précisément Y .

Cependant la condition de la proposition 4.5 n'est pas nécessaire. Soit P un opérateur d'interpolation, dont l'interpolateur est Y , et soit y_o un point de Y . Définissons un opérateur Q par :

$$Qf = f-Pf+f(y_o)$$

Pour x dans Y , $Pf(x) = f(x)$ donc $Qf(x) = f(y_o)$, c'est-à-dire que Qf est constante sur Y . D'ailleurs, si f est constante sur Y , $Qf = f$. Donc Q est une projection de l'espace $C(X)$ sur les fonctions constantes sur Y . Mais une projection quelconque de ce type ne peut pas être un opérateur semi-multiplicatif symétrique dès que la frontière de Y possède au moins deux points distincts

y_1 et y_2 . Pour toute fonction f de $C(X)$, on devrait avoir

$$f(y_1) = Qf(y_1) = Qf(y_2) = f(y_2)$$

ce qui est impossible. Pourtant, il existe des interpolateurs dont la frontière a plus d'un point (cf. Théorème 4.6).

Relativement à une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur un espace compact X , on peut poser quelques problèmes analogues aux problèmes a_λ et b_λ .

<u>Problème</u> c_λ . Existe-t-il un opérateur semi-multiplicatif symétrique, de norme inférieure ou égale à λ , dont la relation d'équivalence associée coïncide avec $\mathcal{R}$?

<u>Problème</u> c_1' . Une relation d'équivalence donnée $\mathcal{R}$, est-elle moyennante ?

Pour que les deux problèmes précédents aient une solution, il est évidemment nécessaire que $\mathcal{R}$ soit une relation fermée, mais ce n'est pas une condition suffisante comme on a pu le constater sur le contre-exemple indiqué à la fin de la proposition 4.5.

Donnons d'abord une proposition dont la démonstration est sans doute trop contournée, et qui rapproche quelquefois le problème c_λ du problème c_1' .

<u>PROPOSITION 4.6</u>. Soit P un opérateur semi-multiplicatif symétrique réel et tel que pour tout point x_o de X , on puisse trouver g dans $C(X)$ pour laquelle $Pg(x_o)$ n'est pas nul. Il existe alors un opérateur semi-multiplicatif symétrique idempotent et conservant les constantes, déterminant une même relation d'équivalence que l'opérateur P .

Puisqu'en chaque point x_o , il existe g_o telle que $Pg_o(x_o)$ ne soit pas nul, la fonction $f_o = \bar{g}_o Pg_o$ satisfait $Pf_o(x_o) = |Pg(x_o)|^2$ et il existe donc un voisinage ouvert de x_o sur lequel Pf_o reste strictement positive. On recouvre de cette manière le compact X par des ouverts $\mathcal{O}\ (x_o)$ dont on peut extraire un recouvrement fini $\mathcal{O}\ (x_i)$, i variant de 1 à n . A ce recouvrement fini, on associe n fonctions f_i . Pour la fonction

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \ ,$$

Ph est strictement positif sur X . Définissons alors un opérateur Q par $Qf = \frac{P(fh)}{P(h)}$ et introduisons un espace intermédiaire $\mathcal{B}$ constitué par toutes les fonctions g satisfaisant $P(fg) = gPf$ pour toute fonction f de $C(X)$. Cet espace est une sous-algèbre fermée et auto-adjointe, dite <u>algèbre des scalaires de l'opérateur</u> P. Cette algèbre contient de plus l'image de P. Par suite, puisque $P(h)$ appartient à $\mathcal{B}$, le théorème de Stone-Weierstrass montre qu'il en est de même pour la fonction $\frac{1}{P(h)}$. Ce résultat permet d'établir la semi-multiplicativité de Q selon les égalités

$$Q(fQg) = \frac{1}{P(h)} P(fh \frac{P(gh)}{P(h)}) = P(\frac{fh}{P(h)} \frac{P(gh)}{P(h)})$$

$$= \frac{P(fh)}{P(h)} \frac{P(gh)}{P(h)} = Q(f)Q(g)$$

Comme $Q(1) = 1$, on obtient en outre l'idempotence de Q.

Montrons maintenant que l'algèbre $\mathcal{C}$ des scalaires de l'opérateur Q coïncide en fait avec l'image de Q. Si g est dans $\mathcal{C}$, $Q(gf) = gQf$ et on a

$$QgQf = Q(gQf) = Q^2(gf) = Q(gf) = gQf$$

donc $(g-Qg)Qf = 0$ soit $g = Qg$. Réciproquement, l'algèbre $\mathcal{C}$ contient l'image de Q d'où l'égalité $\mathrm{Im}Q = \mathcal{C}$

Il est bien clair que $x \mathcal{P} y$ implique $x \mathcal{Q} y$ mais l'égalité $\mathrm{Im}Q = \mathcal{C}$ et les inclusions $\mathcal{C} \supset \mathcal{B} \supset \mathrm{Im}P$ font que $x \mathcal{Q} y$ implique $x \mathcal{P} y$, ce qui termine la démonstration.

Occupons-nous maintenant du problème c_1'. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence fermée sur Y et r l'application quotient $X \to X/\mathcal{R} = Y$ Appelons $\tilde{S}(Y)$ le sous-espace (vaguement fermé) de $S_1^+(X)$ constitué par les mesures de Radon sur X dont le support est inclus dans une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$. Appelons R l'application de $\tilde{S}(Y)$ sur Y qui, à la mesure μ dans $\tilde{S}(Y)$, fait correspondre la classe d'équivalence à laquelle appartient son support. R est une application continue. En effet, si μ_i converge vaguement vers μ dans $\tilde{S}(Y)$ tandis que $R(\mu_i)$ ne converge pas vers $R(\mu)$, il existe un point y de Y et une sous-famille, encore notée par μ_i, telle que $R(\mu_i)$ converge vers y. Mais il existe une fonction positive continue f, nulle en $r^{-1}(R(\mu))$ et valant 1 sur $r^{-1}(U(y))$ où $U(y)$ est un voisinage ouvert de y dans Y. La famille de mesures $\mu_i(f)$ converge vers $\mu(f) = 0$ mais vaut constamment 1 pour i assez grand, ce qui établit la contradiction. En particulier, R est une application fermée puisque $\tilde{S}(Y)$ est compact et Y séparé. On peut alors énoncer :

<u>le problème c_1' a une solution, précisément la relation $\mathcal{R}$ est moyennante, si et seulement s'il existe un relèvement continu de</u> R.

Nous allons commencer par donner une condition permettant de ramener le problème $c_1^!$ au seul relèvement continu de r . Pour ce faire, on adapte la méthode de points extrémaux précédemment utilisée pour les opérateurs d'interpolation. Il me faut signaler que dans LLOYD S.P. [1], article dont je n'ai pris connaissance que très récemment, (cf. DHOMBRES J. [3]), on a déjà obtenu cette condition et envisagé de nombreux exemples. Définissons l'ensemble $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ comme l'ensemble des opérateurs semi-multiplicatifs symétriques de Markov qui déterminent la même relation d'équivalence $\mathcal{R}$. En remplaçant partout les mots "interpolateur markovien" par"relation d'équivalence moyennante", le lemme 4.3 et la proposition 4.3 restent valables, les démonstrations étant les mêmes mutatis mutandis. De fait, on peut même obtenir un théorème beaucoup plus général en faisant intervenir une notion de "linear exave", récemment introduite par PEŁCZYNSKI A. [1] et dont nous donnons ici une définition algébrique.

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux catégories et F un foncteur contravariant de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}_2$. Soit ϕ un morphisme de $\mathcal{C}_1$; $\phi : S \to T$

Un morphisme V de $\mathcal{C}_2$: $V : F(S) \to F(T)$ est <u>exave pour F selon le morphisme ϕ</u> si $F[\phi]\, V\, F[\phi] = F[\phi]$.

Prenons pour $\mathcal{C}_1$ la catégorie des espaces compacts dont les morphismes sont les applications continues et pour $\mathcal{C}_2$ la catégorie des espaces de Banach dont les morphismes sont les opérateurs bornés contractants. Soit ϕ un morphisme de $\mathcal{C}_1$ où $\phi : X \to Y$. Le foncteur contravariant F choisi fait correspondre à ϕ, $F[\phi]$ défini par $F[\phi](f) = f \circ \phi$ c'est-à-dire $F[\phi] : C(Y) \to C(X)$.

<u>Définition</u>. <u>Un exave linéaire selon ϕ est un opérateur linéaire continu R de C(X) dans C(Y) tel que le diagramme suivant soit commutatif</u> :

$$\begin{array}{ccc} C(Y) & \xrightarrow{F[\phi]} & C(X) \\ {\scriptstyle F[\phi]}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F[\phi]} \\ C(X) & \xrightarrow[R]{} & C(Y) \end{array}$$

Parmi les exaves linéaires, il y a deux cas extrêmes : le premier est directement lié à la notion d'opérateur semi-multiplicatif symétrique et le deuxième est relié à la notion d'opérateur d'interpolation. Pour le voir nous continuons de noter X et Y deux espaces topologiques compacts.

PROPOSITION 4.7. Soit ϕ une application injective continue de Y dans X. Il existe un exave linéaire selon ϕ si et seulement si $\phi(Y)$ est un interpolateur dans l'espace X.

D'une part, posons $P = RF[\phi]$. On dispose de la relation

$$P(fPg) = RF[\phi](fRF[\phi]g) = R(F[\phi](f)\, F[\phi]RF[\phi](g))$$
$$= RF[\phi](fg) = P(fg).$$

Si $x = \phi(y)$ est dans $\phi(Y)$, $RF[\phi](f)(x) = F[\phi]RF[\phi](f)(y) = F[\phi]f(y) = f(x)$ donc l'interpolateur de P contient $\phi(Y)$. Mais si x n'est pas dans $\phi(Y)$, il existe une fonction continue, nulle sur $\phi(Y)$ et valant 1 en x, donc $RF[\phi](f) = 0$ et $f(x) = 1$ d'où $f(x) \neq Pf(x)$ ce qui montre que x n'appartient pas à l'interpolateur de P.

D'autre part, soit f une fonction de $C(Y)$ et soit P un opérateur d'interpolation sur $C(X)$ d'interpolateur $\phi(Y)$. Soit $\tilde{f}$ un prolongement, construit par exemple par le Théorème de Tietze, de la fonction $f(\phi^{-1}(x))$ définie sur $\phi(Y)$. L'opérateur $Rf = P(\tilde{f})$ est un exave linéaire selon ϕ comme il est facile de le constater.

PROPOSITION 4.8. Soit ϕ une application surjective continue de X sur Y. Il existe un exave linéaire de Markov selon ϕ si et seulement si la relation d'équivalence déterminée par ϕ sur l'espace compact X est moyennante.

On utilise le Théorème de Stone-Weierstrass et le lemme 5.4 pour conduire la démonstration parallèlement à la précédente en utilisant les opérateurs $P = F[\phi]R$ et $R = F^{-1}[\phi]P$.

Soit maintenant ϕ une application continue $\phi : X \to Y$ et notons $\mathcal{J}(\phi)$ l'ensemble des exaves linéaires de Markov selon ϕ. Cet ensemble peut être vide mais la proposition 4.4 et le lemme 4.3 sont encore valables. Notamment

PROPOSITION 4.9. Un élément de l'ensemble convexe $\mathcal{J}(\phi)$ est extrémal si et seulement s'il s'agit d'un opérateur multiplicatif.

Pour vérifier que les démonstration précédentes sont généralisables, on peut utiliser un théorème de représentation intégrale, dont la démonstration est analogue à celle des Théorèmes 4.8 et 4.1 (PEŁCZYNSKI A. [1]).

THEOREME 4.9. Un opérateur linéaire continu $P : C(X) \to C(Y)$ est un exave linéaire de Markov relativement à l'application continue $\phi : X \to Y$ où X, Y sont deux espaces compacts si et seulement si

(a) $y \to P^*(\delta_y)$ est une application vaguement continue de Y dans $S_1^+(X)$

(b) Le support de la mesure de Radon $P^*(\delta_y)$ est inclus dans $\phi^{-1}(y)$ lorsque y appartient à l'espace $\phi(X)$.

En fait les opérateurs Q_1 et Q_2, construits lors de la proposition 4.4, ne font intervenir que les propriétés de P et conservent le support de $P^*(\delta_x)$. La proposition 4.9 se déduit donc de la même manière dans le cas des exaves linéaires de Markov que dans le cas particulier des opérateurs d'interpolation de Markov.

Caractérisons maintenant les exaves linéaires multiplicatifs.

THEOREME 4.10. Un exave linéaire R selon $\phi : X \to Y$ et tel que $k(R) = \emptyset$ est multiplicatif si et seulement s'il existe une application continue $\psi : Y \to X$ telle que $\phi \circ \psi$ soit l'identité sur $\phi(X)$.

D'un côté, si $RfRg = R(fg)$, de façon analogue à ce qui fut fait au Théorème 4.5 et en utilisant $k(R) = \emptyset$, on définit une application continue ψ définie sur Y et à valeurs dans X telle que $Rf(y) = f(\psi(y))$. Comme R est un exave linéaire, on doit avoir $F[\phi]f = F[\phi]f(\phi \circ \psi)$ pour toute fonction continue f sur Y. Comme les fonctions continues séparent les points de Y, on a $\phi(x) = \phi \circ \psi \circ \phi(x)$ pour tout x, donc $\phi \circ \psi$ est bien l'identité sur $\phi(X)$.

Réciproquement, si $\phi \circ \psi$ est l'identité sur $\phi(X)$, l'opérateur $Rf(y) = f(\psi(y))$ est un exave linéaire pour $\phi : X \to Y$, tel que $k(R) = \emptyset$.

Condition C. L'ensemble $\mathcal{J}(\phi)$ admet un point extrémal.

Grâce à la condition géométrique C, on peut relier la condition algébrique d'existence d'un exave linéaire selon ϕ à la condition topologique d'existence d'une fonction ψ relevant continuement ϕ.

THEOREME 4.11. Soit (X,Y) un couple d'espaces compacts et soit ϕ une application continue de X dans Y pour laquelle il existe un exave linéaire de Markov selon ϕ. L'ensemble $\mathcal{J}(\phi)$ satisfait la condition C si et seulement s'il

<u>existe une application continue</u> $\psi : Y \to X$ <u>telle que</u> $\phi \circ \psi$ <u>soit l'identité sur l'espace image</u> $\phi(X)$.

Dans le cas des opérateurs semi-multiplicatifs symétriques, le Théorème 4.11 s'énonce d'une manière intéressante. Définissons l'ensemble $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ associé à une relation d'équivalence (fermée) $\mathcal{R}$, construite sur un espace compact X , comme la famille des opérateurs idempotents de Markov dont l'image est l'algèbre des fonctions continues constantes sur les classes de $\mathcal{R}$.

<u>COROLLAIRE 4.4.</u> Supposons que $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ satisfasse la condition C . La relation est une relation d'équivalence moyennante si et seulement si $\mathcal{R}$ est fermée et admet un relèvement continu.

Nous démontrerons en effet (Corollaire 4.8), que l'ensemble convexe $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ est un ensemble d'opérateurs semi-multiplicatifs symétriques de Markov. Rappelons qu'une relation d'équivalence admet un relèvement continu (ou une section continue) lorsqu'il existe une application continue $r' : X/\mathcal{R} \to X$ qui, à toute classe d'équivalence fait correspondre un point dans cette classe. Le Théorème 4.11 donne alors le corollaire 4.4. en prenant $\phi = r : X \to X/\mathcal{R}$ et $r' = \psi$ puisque $r \circ r'$ est l'identité sur $X/\mathcal{R}$ (cf. Proposition 4.8).

Cependant, lorsque la condition C n'est pas vérifiée, l'existence d'un relèvement continu pour R n'implique pas l'existence d'un relèvement continu pour r , c'est-à-dire l'existence d'une section continue pour $\mathcal{R}$. Des exemples construits par LLYOD S.P. [1] montrent que $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ peut ne pas avoir de points extrémaux sans être vide, $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ peut avoir des points extrémaux sans en être l'enveloppe convexe fermée, $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ peut être enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux sans être compact. Avec de la patience et un peu d'imagination, on construit de tels exemples dans le cas général d'exaves linéaires de Markov.

Une condition de métrisabilité sur l'espace Y ne suffit pas pour obtenir le Corollaire 4.4. en omettant la condition C . En effet, appelons <u>espace dyadique</u> Y l'image continue d'un espace de Cantor généralisé $\{0,1\}^{\aleph} = X$. Un espace dyadique induit sur X , dont il est l'image continue, une relation d'équivalence fermée et l'on dit que Y <u>est de Milutin</u> lorsque cette relation est moyennante. Il y a déjà un certain temps, Milutin a démontré que $[0,1]$ était un tel espace tandis que PEŁCZYNSKI A. [1] a établi que le produit topologique d'espaces compacts de Milutin est de Milutin.

Une condition de métrisabilité de X est insuffisante mais si l'on suppose en outre que $\mathcal{R}$ est ouverte, alors le Corollaire 4.4 est exact, d'après un théorème de sélection de MICHAEL E. [1] . Cependant, cette dernière condition n'est pas nécessaire (cf. LLOYD S.P. [1]). Nous allons donner une généralisation de ce résultat aux exaves linéaires en utilisant une idée due à SINE R-JAMISON B. [1] . Auparavant, nous avons besoin de quelques lemmes directement inspirés de l'article cité. Nous leur donnons une forme assez générale car nous utiliserons plus tard ces lemmes (cf. §6 Chapitre V).

LEMME 4.4. Soient X un espace compact et Y un espace séparé. Pour toute fonction continue surjective $r : X \to Y$, on a l'équivalence des 3 propriétés suivantes :

(a) r est une application ouverte.

(b) Pour tout voisinage V d'un point x de X , il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant x et contenu dans V , tel que $r(\mathcal{O})$ soit un voisinage de $r(x)$.

(c) Pour tout x dans X et tout filtre $\mathcal{I}'$ qui converge vers $r(x)$, il existe un filtre $\mathcal{I}$ sur X , qui converge vers x et dont l'image par r engendre un filtre plus fin que le filtre des voisinages de $r(x)$ et moins fin que $\mathcal{I}'$.

L'équivalence de (a) et de (b) est facile.

(c) $\Longrightarrow$ (a) . S'il existe un voisinage ouvert V de x tel que $r(V)$ ne soit pas voisinage de $r(x)$, alors on peut construire un ultra filtre plus fin que le filtre des voisinages de $r(x)$ et ne contenant pas $r(V)$. Cet ultrafiltre ne peut être plus fin que le filtre engendré par l'image d'un quelconque filtre plus fin que le filtre des voisinages de X .

(a) $\Longrightarrow$ (c). Soient $\mathcal{I}'$ un filtre qui converge vers $r(x)$ et $\mathcal{O}$ un ouvert contenant x . L'ensemble $r(\mathcal{O})$ est ouvert,donc il existe un élément F de $\mathcal{I}'$ contenu dans $r(\mathcal{O})$ et $r^{-1}(F) \cap \mathcal{O} = F'$ n'est pas vide. On définit ainsi une base de filtre sur X , qui engendre un filtre plus fin que le filtre des voisinages de x et dont l'image par r engendre un filtre moins fin que $\mathcal{I}'$ mais plus fin que le filtre des voisinages de $r(x)$ car r est continue, donc fermée puisque X est compact.

Avec les notations utilisées après la proposition 4.6, on peut démontrer le lemme suivant :

LEMME 4.5. L'application $R : \tilde{S}(Y) \to Y$ est ouverte si et seulement si l'application $r : X \to Y$ est ouverte.

Supposons l'application R ouverte et soit $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert de X. Considérons l'ensemble $\mathcal{O}_1$ des mesures appartenant à $\tilde{S}(Y)$ dont le support a une intersection non vide avec $\mathcal{O}$. Le complémentaire de $\mathcal{O}_1$ est vaguement fermé, donc $\mathcal{O}_1$ est ouvert ainsi que $R(\mathcal{O}_1)$. De plus, $R(\mathcal{O}_1) = r(\mathcal{O})$, compte tenu de la définition de $\tilde{S}(Y)$, et par suite r est une application ouverte.

Supposons r ouverte et soit μ_x un point de $\tilde{S}(Y)$, tel que $R(\mu_x) = r(x)$. Soit $\mathcal{I}'$ un filtre sur Y qui converge vers $r(x)$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenant μ_x. Par densité, il existe une mesure discrète μ'_x appartenant à $\mathcal{O}$, telle que $R(\mu'_x) = r(x)$. On peut écrire :

$$\mu'_x = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i} \quad \text{où } r(x_i) = r(x) .$$

Mais par le lemme 4.4, il existe sur X des filtres $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n$ convergeant vers $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ et dont les images par r engendrent des filtres moins fins que $\mathcal{I}'$. Choisissons un ouvert $\hat{\mathcal{O}}$ contenant $r(x)$. Il existe des voisinages ouverts $\mathcal{O}_i$ de δ_{x_i} tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\mathcal{O}}_i$ appartienne encore à $\mathcal{O}$, et tels que $r(\mathcal{O}_i \cap X) \subset \hat{\mathcal{O}}$. Il existe donc des F_i dans $\mathcal{I}_i$ contenus dans $\mathcal{O}_i$. Prenons F dans $\mathcal{I}'$ égal à $\bigcap_{i=1}^{n} r(F_i)$. L'ensemble $R^{-1}(F) \cap \mathcal{O}$ n'est pas vide et tous les ensembles de ce type forment une base de filtre dans $\tilde{S}(Y)$, plus fine que la base de filtre des voisinages de μ_x et dont l'image par R est par construction moins fine que $\mathcal{I}'$. De plus, grâce au choix de $\hat{\mathcal{O}}$, ce filtre est plus fin que celui des voisinages de $r(x)$. Nous sommes dans la situation du lemme 4.4 vis-à-vis de R, donc R est une application ouverte.

Soit A une sous-algèbre de $C_R(X)$ et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence associée sur X. Nous notons par $\mathrm{Sup}_p f$ l'application définie sur X par $x \longrightarrow$

$$\mathrm{Sup}_p f(x) = \underset{x \mathcal{R} y}{\mathrm{Sup}}(f(y)) \quad \text{et par } \mathrm{Inf}_p f \text{ l'application définie selon}$$

$$x \longrightarrow \mathrm{Inf}_p f(x) = \underset{x \mathcal{R} y}{\mathrm{Inf}}\, f(y)$$

LEMME 4.6. Soit A une sous-algèbre fermée de $C_R(X)$. Il y a équivalence entre les 7 propriétés suivantes :

(1) La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est ouverte.

(2) $f \to \mathrm{Sup}_p f$ est une application continue, sous-additive, de $C(X)$ sur l'algèbre A.

(2bis) $f \to \mathrm{Inf}_p f$ est une application continue, sur-additive, de $C(X)$ sur l'algèbre A .

(3) Toute section commençante dans A relative à un élément de $C(X)$ contient sa borne inférieure dans A.

(3bis) Toute section finissante dans A relative à un élément de $C(X)$ contient sa borne supérieure dans A .

(4) L'intérieur d'un sous-ensemble saturé pour la relation $\mathcal{R}$ est saturé par cette relation.

(4bis) La fermeture d'un sous-ensemble saturé pour la relation $\mathcal{R}$ est saturée par cette relation.

(1) $\Longrightarrow$ (2) La fonction $\mathrm{Sup}_p f$ est une fonction semi-continue inférieurement. En effet, soient x un point et λ un nombre réel pour lequel $\mathrm{Sup}_p f(x) > \lambda$ et x_o un point équivalent à x pour lequel $f(x_o) = \mathrm{Sup}_{y\mathcal{R}x} f(y)$. Il existe un un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de x_o sur lequel $f(x) > \lambda$ et donc $\mathrm{Sup}_p f$ est strictement supérieur à λ sur le saturé de $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{R}$. Or, ce saturé est $p^{-1}(p(\mathcal{O}))$, lequel est un voisinage ouvert de x puisque $P(\mathcal{O})$ est ouvert. L'ensemble des x tels que $\mathrm{Sup}_p f(x) > \lambda$ est donc ouvert.

$\mathrm{Sup}_p f$ est une fonction semi-continue supérieurement. Soit $\mathcal{F}$ un filtre qui converge sur l'ensemble des x tels que $\mathrm{Sup}_p f(x) \geq \lambda$. Appelons x_o le point limite de $\mathcal{F}$. Faisons correspondre à un point x de X un sous-ensemble de $\mathcal{R}(x)$, le sous-ensemble fermé des points y tels que $f(y) = \mathrm{Sup}_p f(x)$. Par cette correspondance, on définit une base de filtre $\mathcal{F}'$ sur X , image du filtre $\mathcal{F}$. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{F}''$ plus fin que $\mathcal{F}'$, qui converge vers un point y grâce à l'argument de compacité. On a $p(y) = \lim_{\mathcal{F}''} p(x) = \lim_{\mathcal{F}} p(x) = p(x)$ tandis que $f(y) = \lim_{\mathcal{F}''} f(x) \geq \lambda$, soit $\mathrm{Sup}_p f(x) \geq \lambda$, donc l'ensemble des x tels que $\mathrm{Sup}_p f(x) \geq \lambda$ est un fermé. On remarquera que l'hypothèse (1) n'a pas été utilisée pour la démonstration de cette semi-continuité supérieure.

Finalement, l'application $\mathrm{Sup}_p f$ est une fonction continue et le Théorème de Stone-Weierstrass permet d'assurer que $\mathrm{Sup}_p f$ est un élément de A , que A soit du type $C(X/\mathcal{R})$ ou $C_o(X/\mathcal{R})$. Il est en outre clair que la correspondance $f \to \mathrm{Sup}_p f$ est sous-additive de $C(X)$ sur A , positivement homogène et, d'autre part, si $\|f\| \leq \varepsilon$, on a bien $\|\mathrm{Sup}_p f\| \leq \varepsilon$ ce qui assure la continuité de la correspondance $f \to \mathrm{Sup}_p f$.

(2)$\Longleftrightarrow$ (2bis) Par le changement de f en $-f$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Soit E un sous-ensemble de A admettant une borne inférieure f dans $C(X)$. La fonction $\mathrm{Sup}_p f$ est encore un minorant de l'ensemble E et comme $f \leq \mathrm{Sup}_p f$, on a nécessairement $f = \mathrm{Sup}_p f$. Il est alors bien assuré que f est une borne inférieure de E dans A . Mais on dispose d'un résultat plus fort. Si E_f est la <u>section commençante</u> de f relative à A , c'est-à-dire l'ensemble des h de A tels que $h \geq f$, l'application $\mathrm{Sup}_p f$ est un élément de A donc, puisqu'il minore les éléments de cette section commençante E_f , il s'agit de la borne inférieure dans A de E_f .

(3)$\Longleftrightarrow$ (3bis) Par le passage de f en $-f$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Soit un sous-ensemble de X saturé par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ c'est-à-dire de la forme $p^{-1}(E)$ où E est un sous-ensemble de $X/\mathcal{R}$. Si l'intérieur de l'ensemble $P^{-1}(E)$ est vide, le résultat est acquis. S'il existe x dans l'intérieur $p^{-1}(E)$, le théorème d'Urysohn fournit une fonction f de $C_R(X)$ satisfaisant $o \leq f \leq 1$ et telle que $f(x) = 1$ et f est nulle sur le complémentaire de l'intérieur de l'ensemble $P^{-1}(E)$. Considérons la section commençante E_f dans A dont la base est cette fonction f . D'après ce qui a été démontré dans l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) , on constate que $\mathrm{Sup}_p f$ est une fonction semi-continue supérieurement. En outre, par hypothèse, il existe une fonction g dans E_f , borne inférieure dans A de E_f . Il en résulte $g \geq \mathrm{Sup}_p f$. Appelons $P(g)$ et $P(\mathrm{Sup}_p f)$ les fonctions respectivement continues et semi-continues supérieurement, définies sur $X/\mathcal{R}$ par $g \circ p^{-1}$ et $(\mathrm{Sup}_p f) \circ p^{-1}$ Supposons que, sur $X/\mathcal{R}$, il existe un point y réalisant une inégalité stricte $P(g)(\dot{y}) > P(\mathrm{Sup}_p f)(\dot{y})$. On sait classiquement construire une fonction continue séparante h assurant les inégalités suivantes :

$$P(g) \geq h \geq P(\mathrm{Sup}_p f) \quad \text{et} \quad P(g)(\dot{y}) > h(\dot{y}) > P(\mathrm{Sup}_p f(\dot{y})).$$

On peut même s'arranger pour que h soit nulle à l'éventuel point de nullité de toutes les fonctions de la forme $P(f)$ où f est dans A . Par suite, $h \circ p$ est dans A grâce au Théorème de Stone-Weierstrass et est distincte de g , minore g et appartient à E_f ; Il y a contradiction puisque g est la borne inférieure de E_f dans A . Donc on doit avoir $g = \mathrm{Sup}_p f$. Au point x_o choisi dans l'intérieur de $p^{-1}(E)$, on a maintenant

$$g(x_o) = Pg(p(x_o)) = \mathrm{Sup}_p f(x_o) = 1 \ ,$$

tandis que sur

$$\big(\widehat{P(P^{-1}(\overset{\circ}{E}))}\big)' \supset E' \text{ , on a } Pg(\dot{x}) = P(\mathrm{Sup}_p f(\dot{x})) = 0 \text{ .}$$

Ce qui signifie notamment qu'autour du point $p(x_o)$, il existe un ouvert non vide inclus dans E , donc que $p(x_o)$ appartient à $\overset{\circ}{E}$ ou encore que x_o appartient à $p^{-1}(\overset{\circ}{E})$, c'est-à-dire $p^{-1}(\overset{\circ}{E}) = \widehat{p^{-1}(E)}$, établissant que tout intérieur d'un saturé par P est saturé.

(4) $\Longleftrightarrow$ (4 bis) par passage au complémentaire.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de X . L'ensemble $p^{-1}(p(\mathcal{O}))$ contient $\mathcal{O}$ en son intérieur et l'hypothèse implique que $p^{-1}(p(\mathcal{O}))$ a un intérieur saturé donc que $p^{-1}(p(\mathcal{O}))$ coïncide avec son intérieur, c'est-à-dire est ouvert. Dire que $p(\mathcal{O})$ est ouvert dans $X/\mathcal{R}$ pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de X revient à dire que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ouverte ou encore que p est une application ouverte.

Nous avons maintenant tout le matériel requis pour démontrer le :

<u>THEOREME 4.12.</u> <u>Soit</u> X <u>un espace compact métrisable et soit</u> ϕ <u>une application continue ouverte de</u> X <u>dans un espace compact</u> Z . <u>Il existe un exave linéaire de Markov selon</u> ϕ .

Posons $Y = \phi(X)$. L'espace topologique Y est un espace compact métrisable puisque Z est séparé et ϕ continue (cf. BOURBAKI N. [2], §2, n°10). En premier, montrons que l'on peut construire une application vaguement continue de $\phi(X)$ dans $\mathfrak{F}(Y)$. X étant métrisable, $S_1^+(X)$ est métrisable pour la topologie vague, comme nous l'avons déjà remarqué, et on sait construire une fonction continue réelle strictement convexe f sur $S_1^+(X)$ (cf.PHELPS R.R. [1]).

Appelons μ_y l'unique point de $\phi^{-1}(y)$ où f prend son maximum sur cet ensemble. La correspondance $P^* : y \to \mu_y$ est vaguement continue. En effet, soit $\mathfrak{X}$ un ultrafiltre sur Y dont le point limite est y . L'image par P^* du filtre $\mathfrak{X}$ induit un ultrafiltre sur $\mathfrak{F}(Y)$, lequel, par compacité admet un point limite μ'_y . Grâce à la continuité de R , on dispose de $R(\mu'_y) = \mathrm{Lim}\ x = y$. Le lemme 4.5 assure que R est ouverte puisque $r = \phi$ l'est et on peut appliquer le lemme 4.6 assurant la continuité de $\mathrm{Sup}_{u \in R^{-1}(y)} f(u)$. On a également

$$f(u_y) = \mathrm{Sup}_{u \in R^{-1}(y)} f(u) = \lim_{\mathfrak{X}} \mathrm{Sup}_{u \in R^{-1}(x)} (fu) = \lim_{\mathfrak{X}} f(u_y) = f(u'_y)$$

La stricte convexité de la fonction f donne $u_y = u'_y$ ce qui établit la continuité vague de u_y. Maintenant, on peut appliquer le théorème 4.6 permettant de prolonger $P^*(\delta_y)$ en une fonction vaguement continue, définie sur Z et prenant ses valeurs sur le convexe vaguement fermé engendré par $\tilde{S}(Y)$ lequel est un sous-ensemble de $S_1^+(X)$. Finalement, le théorème de représentation intégrale 4.9 permet de vérifier que l'opérateur P, défini par $Pf(z) = \langle f, P^*(\delta_z)\rangle$ pour tout z dans Z, est bien un exave linéaire de Markov relatif à ϕ, terminant ainsi la démonstration du théorème 4.12.

Corollaire 4.5. Une relation d'équivalence ouverte et fermée sur un espace compact métrisable est moyennable.

On peut déduire, à partir de la proposition 4.5, le résultat faible suivant :

Tout-ensemble à la fois ouvert et fermé d'un espace métrisable compact est un interpolateur markovien.

Corollaire 4.6. Soit P_i une famille d'exaves linéaires de Markov selon ϕ_i ou ϕ_i est une application continue ouverte définie sur un compact métrisable Y_i et à valeurs dans un compact X_i. Il existe un exave linéaire de Markov selon $\phi = \bigotimes_{i \in I} \phi_i$ relative au couple (X,Y) où $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ et $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Il suffit de vérifier que la mesure produit sur l'espace X

$$P^*(\delta_x) = \bigotimes_{i \in I} P_i^*(\delta_{x_i}) \quad \text{pour} \quad x = \bigotimes_{i \in I} x_i$$

permet de définir un exave linéaire de Markov selon $\bigotimes_{i \in I} \phi_i$ lorsque P_i est un exave linéaire de Markov selon $\phi_i : Y_i \to X_i$. On utilise la même méthode qu'au théorème 4.4 avec le théorème de représentation 4.9.

On disposerait bien sûr de théorèmes analogues en utilisant des limites projectives.

En particulier, en appliquant par exemple le corollaire 4.6 et la proposition 4.7, on dispose du résultat suivant :

Corollaire 4.7. Soient X un produit topologique compact et Y un sous-espace ouvert, sous-produit topologique de X dont les facteurs sont des espaces compacts métrisables. Y est alors un interpolateur markovien de X.

Mais de tels espaces n'épuisent pas la famille des interpolateurs markoviens.

A partir du résultat de Milutin sur l'espace $[0,1]$, on peut construire d'autres espaces de Milutin, par exemple : le produit topologique d'espaces compacts métrisables est de Milutin. Cependant, l'espace $[0,1]$ est un espace de Milutin pour lequel la relation d'équivalence associée n'est pas une relation ouverte.

Au terme de ce paragraphe, on constate que le problème subsiste de donner une caractérisation topologique des espaces markoviens absolus, des espaces de Milutin, voire des solutions des problèmes a_λ , b_λ , et c_λ etc... qui ne fassent pas intervenir une restriction superflue comme la condition C . On remarque la simplification apportée par l'hypothèse de Markov, laissant prévoir des situations pathologiques dans le cas général.

4. ROLE DE LA POSITIVITE.

Lorsqu'un opérateur multiplicativement lié conserve un cône de l'espace fonctionnel sur lequel il est défini, on peut étudier plus facilement sa structure. Prenons l'exemple d'un opérateur positif sur l'algèbre $C(X)$, c'est-à-dire un opérateur pour lequel $Pf(x) \geq 0$ dès que $f(x) \geq 0$ pour tout point x de l'espace topologique X .

THEOREME 4.13. Sur l'algèbre $C(X)$, un opérateur positif du type D est un opérateur d'interpolation.

Pour la démonstration, nous avons besoin d'un résultat intéressant en lui-même.

LEMME 4.8. Soit P un opérateur continu du type D supposé réel. P est idempotent si et seulement si $Im(I-P)$ est fermé.

Lorsque P est idempotent, il en est de même pour $I-P$ et cette dernière propriété implique évidemment la fermeture de l'image de $C(X)$ par l'opérateur $I-P$.

Réciproquement, supposons que l'image de $C(X)$ par $I-P$ soit fermée. Nous avons déjà noté les inclusions

$$Im(I-P) \times Im(I-P) \subset Ker P \subset Im(I-P) \quad \text{(cf.Proposition 3.4).}$$

Posons $A = Im(I-P)$. L'espace A est une algèbre auto-adjointe fermée qui détermine sur X une relation d'équivalence fermée $\mathfrak{R}$. Par le théorème de

Stone-Weierstrass, A est isométriquement isomorphe à $C(X/\mathfrak{U})$ ou à $C_o(X/\mathfrak{U})$, idéal maximal fermé de $C(X/\mathfrak{U})$. Or, ces deux algèbres possèdent la propriété de factorisation, ce qui donne $A \times A = A$, donc $\mathrm{KerP} = A$, ou encore l'égalité $\mathrm{Im}(I-P) = \mathrm{KerP}$, donc l'idempotence de P.

<u>LEMME 4.9.</u> Soit P un opérateur du type D supposé réel. L'espace $\mathrm{Im}(I-P)$ est alors fermé.

Considérons la fermeture $\bar{A}$ de l'algèbre auto-adjointe $A = \mathrm{Im}(I-P)$. L'espace $\bar{A}$ est une algèbre auto-adjointe et, de même que précédemment, on a $\bar{A} \times \bar{A} = \bar{A}$. Mais $A \times A$ est une sous-algèbre dense de l'algèbre (fermée) $\bar{A} \times \bar{A}$, comme il est facile de le constater. Par suite, $\overline{A \times A} = \bar{A}$, or $A \times A \subset \mathrm{KerP} \subset A$ et KerP est une algèbre fermée, d'où $\bar{A} \subset A$, soit $\bar{A} = A$ cqfd.

Nous pouvons démontrer le théorème 4.13, puisque la positivité de P implique que P est réel. Envisageons deux cas :

<u>1er cas</u> A est isométriquement isomorphe à $C(X/\mathfrak{U})$, c'est-à-dire que A est l'algèbre des fonctions constantes sur les classes d'équivalence $\mathfrak{U}$. Comme $0 = Pf(x) = < f, P^*(\delta_x) >$ et que $P^*(\delta_x)$ est une mesure positive, c'est que $P^*(\delta_x) = 0$ pour tout x, donc que P est nul.

<u>2ème cas</u> A est isométriquement isomorphe à $C_o(X/\mathfrak{U})$ et un raisonnement analogue montre que le support de $P^*(\delta_x)$ est nécessairement inclus dans la classe d'équivalence de nullité des fonctions de A. Notons Y cette classe (sous-ensemble fermé de X). Lorsque x est dans Y, $Pf(x) = f(x)$, tandis que $\mathrm{Supp}\, P^*(\delta_x) \subset Y$. Le théorème 4.1 assure que P est un opérateur d'interpolation dont l'interpolateur est Y précisément, ce qui termine la démonstration.

Le théorème 4.13 peut s'appliquer aux opérateurs de Baxter idempotents, lesquels jouent un certain rôle en théorie des files d'attente MG/1/1. (cf. KINGMAN J.F.C. [1]).

<u>REMARQUE.</u> Pour tout ce qui concerne ce chapitre, du moins pour les opérateurs positifs, on pourrait se placer sur des cônes réticulés et adaptés de fonctions continues, comme ceux qui interviennent en théorie du potentiel. Si X est un espace localement compact dénombrable à l'infini, on dit qu'un cône convexe C de fonction est <u>adapté</u>, d'une part s'il existe pour tout x une fonction f de C telle que $f(x) > 0$, d'autre part si pour tout f dans C, il existe g dans C telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il y ait un compact sur le complémentaire

duquel $|f(x)| \leq \varepsilon\, g(x)$. L'intérêt de ces cônes est que toute forme linéaire positive sur la différence C-C se représente par une mesure de Radon μ, généralement unique. Pour les exaves linéaires, les théorèmes de représentation intégrale restent valables, ce qui est essentiel pour notre théorie. Toutefois, faute de place nous ne donnerons ici aucun développement de cette sorte.

Reprenons les opérateurs semi-multiplicatifs symétriques. Remarquons que si P est idempotent, alors $P(1)$ est une fonction caractéristique dont le support est le complémentaire de $k(P)$ et réciproquement si P est positif et $P(1)$ une fonction caractéristique, alors grâce au théorème 4.8, P est idempotent.

Lorsque l'on désire connaître une condition assurant qu'une relation quasi-moyennante est moyennante, une idée naturelle est l'étude de la correspondance $x \longrightarrow |P^*(\delta_x)|$ où pour toute fonction $f \geq 0$ de $C(X)$, la mesure $|P^*(\delta_x)|$ est donnée par :

$$|P^*(\delta_x)|\ (f) = \sup_{0 \leq g \leq |f|} \langle g, P^*(\delta_x) \rangle$$

Comme $x \longrightarrow \langle f, P^*(\delta_x) \rangle$ est continue, $|P^*(\delta_x)|(f)$ est une fonction positive semi-continue inférieurement, en général non continue. Ainsi, sur le carré $[0,1]^2$, considérons l'opérateur P déterminé par l'égalité.

$$P^*(\delta_{x,y}) = \delta_{x,o} - \sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n \delta_{x,x-x_n}$$

où x_n est une suite de nombres distincts, dense dans $[0,1]$, et α_n une série à termes positifs convergente et de somme égale à 1. L'opérateur P est un opérateur semi-multiplicatif symétrique, d'ailleurs nilpotent, dont l'image est une sous-algèbre auto-adjointe, non fermée et séparante dans $C\ [0,1]$. Cependant $|P^*(\delta_{x,y})|(1)$ admet des discontinuités en chaque point de la suite x_n !

Pourtant, définissons pour $f \geq 0$, l'opérateur $|P|$ selon

$$|P|(f)(x) = \langle f, |P^*(\delta_x)| \rangle$$

Il est facile de constater, par extension de Lebesgue aux fonctions semi-continues inférieurement, que $|P|(f|P|(g)) = |P|(f)|P|(g)$ pour les fonctions positives et, par linéarité, pour toutes les fonctions. Plaçons-nous dans les conditions de la proposition 4.5 en supposant en outre, que la fonction $\ell(x) = |Q^*(\delta_x)|\ (1)$ soit semi-continue supérieurement. Visiblement $\ell(x)$ est alors continue et supérieure ou égale à 1. Sur l'algèbre $C(X)$, on définit alors

$$Rf(x) = (\ell(x))^{-1} Q(f)(x)$$

Comme dans la proposition 4.5 on peut établir $R(1) = 1$, $R(fRg) = RfRg$ et enfin montrer que R est un opérateur positif défini sur $C^+(X)$ à valeurs dans un cône convexe de fonction semi-continues inférieurement. De plus, la relation d'équivalence associée à R coïncide avec celle associée à P car R laisse invariante l'algèbre $\operatorname{Im}Q$. Il faudrait ajouter une condition pour que $R(C^+(X)) \subset \operatorname{Im}Q$, ce qui montrerait que P est moyennante. Peut-être convient-il de se placer sur un espace de Stone où l'on peut montrer que les fonctions semi-continues inférieurement diffèrent d'une fonction continue, au plus sur un ensemble maigre.

Dans un ordre d'idées plus géométriques, nous avons la caractérisation suivante. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence fermée sur X et P un opérateur linéaire de $\mathcal{L}(C(X))$ tel que $Pf(x)$ appartienne à l'enveloppe convexe fermée des valeurs $f(y)$ lorsque y parcourt l'espace $\mathcal{R}(x)$ et en outre, tel que $Pf(x)$ reste constante sur $\mathcal{R}(x)$.

D'une part, P est positif donc continu et $P(1) = 1$. De plus, si f est continue et constante sur chaque $\mathcal{R}(x)$, on a $Pf = f$ et comme $Pf(x)$ ne dépend que des valeurs prises par f sur $\mathcal{R}(x)$, on a bien la relation de semi-multiplicativité symétrique $P(fPg) = PfPg$.

Réciproquement, soit P un opérateur de moyenne sur $C(X)$, il est clair que $P^*(\delta_x)$ appartient à $S_1^+(X)$ donc, d'après le théorème usuel de convexité (cf. BOURBAKI N. [1]), la valeur $Pf(x)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée des $f(y)$ lorsque y parcourt $\mathcal{P}(x)$. On énonce :

THEOREME 4.14. <u>Pour un opérateur linéaire défini sur</u> $C(X)$ <u>et valeurs dans</u> $C(X)$, <u>il y a équivalence entre</u>

(1) P <u>est un opérateur de moyenne</u>
(2) <u>Il existe une partition de</u> X <u>en classes fermées</u>. Pf <u>est une fonction constante sur chaque classe et</u> $Pf(x)$ <u>appartient à l'enveloppe convexe fermée des valeurs prises par</u> f <u>sur la classe du point</u> x.

Un théorème de forme analogue existe pour les opérateurs d'interpolation de Markov, voire plus généralement pour les exaves linéaires de Markov.

5. RELATION ENTRE LES OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES ET LES PROJECTIONS DE NORME 1 SUR L'ALGEBRE C(X).

Dans ce paragraphe, nous allons établir que, sur $C(X)$, l'idempotence et une condition sur la norme d'un opérateur linéaire continu, impliquent dans certains cas que l'opérateur est multiplicativement lié. Divers auteurs ont obtenu des résultats voisins selon les hypothèses faites sur P. Ainsi le cas d'une projection positive sur une sous-algèbre fut envisagé dans KELLEY J.L. [1]. L'étude d'une C^*- algèbre non commutative fut envisagée par TOMIYAMA J. [1], en supposant que l'image par l'opérateur est une sous-C^*-algèbre unifère et la projection de norme 1. Pour ce qui est de $C(X)$, P est alors positif. Toutefois, l'hypothèse $P(1) = 1$ est en fait inutile (cf. DHOMBRES J. [1]). Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons une démarche plus générale de WULBERT D.E. [1].

Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $C(X)$, nous notons $B_r(E)$ la boule de rayon r du dual topologique de E et $S_1(E)$ la sphère unité. Soit T une forme linéaire extrémale du convexe $B_1(E)$, il existe au moins un point extrémal de $M_1(X)$ prolongeant T sur tout $C(X)$. Il suffit en effet de considérer le sous-ensemble non vide des mesures de Radon de $M_1(X)$ prolongeant T. Cet ensemble est un convexe compact et admet donc au moins un point extrémal μ. Or, cette mesure μ est extrémale dans $M_1(X)$ car si $2\mu = \mu_1+\mu_2$, on a $\mu_1(f) = \mu_2(f) = \mu(f)$ pour tout f dans E, donc $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Rappelons qu'un élément extrémal dans $M_1(X)$ est nécessairement de la forme $e^{i\alpha}\delta_x$ où α est un nombre réel et réciproquement (cf. DUNFORD N., SCHWARTZ J.T. [1] Chapitre V, § 8, n°6).

Nous dirons que E est un espace extrémement séparant lorsqu'une forme linéaire extrémale de $B_1(E)$ ne peut être prolongée que par une unique mesure de $M_1(X)$ ou, ce qui revient au même, qu'il existe une unique mesure extrémale de $M_1(X)$ prolongeant la forme linéaire extrémale de $B_1(E)$.

Exemple. Soit E un sous-ensemble fermé de $C(X)$, séparant les points de X. Supposons que E contienne une fonction f_o ne s'annulant pas et prenant toutes ses valeurs sur une demi-droite fixée du plan complexe. E est extrémement séparant, car s'il existe deux points x et x' et deux nombres réels α et α' tels que $e^{i\alpha}\delta_x = e^{i\alpha'}\delta_{x'}$, sur E, le scalaire α ne peut être égal à α' puisque E sépare X et il est impossible que $\mathrm{Arg} f_o = (\alpha-\alpha') + \mathrm{Arg} f_o$.

Lorsque E ne sépare pas les points de X, appelons $X/\mathfrak{E}$ l'espace quotient de X par la relation d'équivalence fermée déterminée par E. Il existe un isomorphisme isométrique entre $C(X/\mathfrak{S})$ et l'espace $\tilde{C}(X/\mathfrak{S})$ des fonctions continues sur X, constantes sur les classes d'équivalence de $\mathfrak{S}$. E peut ainsi être identifié à un sous-espace $\tilde{E}$ de $C(X/\mathfrak{S})$.

Nous dirons que E est un <u>espace extrémement séparant quotient</u> lorsque $\tilde{E}$ est extrémement séparant dans $C(X/\mathfrak{S})$.

<u>Exemple</u>. Si l'ensemble des modules des fonctions de E sépare les classes de $\mathfrak{S}$, E est extrémement séparant quotient.

Par le théorème de Stone, il est trivial que toute sous-algèbre fermée auto-adjointe de $C(X)$ forme un espace extrémement séparant quotient.

Soit P une projection qui conserve le cône des fonctions continues prenant leurs valeurs dans une demi-droite fixée issue de l'origine. $\mathrm{Im}P$ est alors un espace extrémement séparant quotient. L'opérateur P est en particulier positif, car si $f \geq 0$ et si θ désigne l'angle orienté de la demi-droite en jeu, $P(e^{i\theta}f) = e^{i\theta}Pf$ et par hypothèse, Pf est, soit nul, soit d'argument nul, donc $Pf \geq 0$. Dès lors, soit T une forme linéaire continue extrémale de $B_1(E)$ et supposons T prolongée par $e^{i\alpha}\delta_x$ et $e^{i\alpha'}\delta_{x'}$. Visiblement, la proposition sera acquise si nous construisons une fonction f dans l'image de P, telle que $f(x) > 0$ et $f(y) \geq 0$ pour tout y de X. Soit f dans $\mathrm{Im}P$ telle que $f(x)$ ne soit pas nulle. On décompose

$$f = ((\mathrm{Re}f)^+ - (\mathrm{Re}f)^-) + i\,((\mathrm{Im}f)^+ - (\mathrm{Im}f)^-)$$

et on peut toujours supposer que $f(x)$ est strictement positive au point x. La fonction $g(y) = P(\mathrm{Sup}(\mathrm{Re}(g),0))(y)$ convient car on a l'inégalité

$$\begin{aligned} P(\mathrm{Sup}(\mathrm{Re}f),0)(x) \geq \mathrm{Sup}(P(\mathrm{Re}f)(x),0) &= \mathrm{Sup}(\mathrm{Re}(Pf)(x),0) \\ &= \mathrm{Sup}(f(x),0) > 0 \end{aligned}$$

<u>THEOREME 4.15. Lorsque l'image d'un opérateur de projection de norme 1 sur l'algèbre $C(X)$ est un espace extrémement séparant quotient, cet opérateur est demi-multiplicatif symétrique.</u>

On déduira aussitôt de ce théorème le corollaire suivant :

<u>COROLLAIRE 4.8</u>. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre fermée auto-adjointe de $C(X)$ et P un opérateur de projection de norme 1 dont l'image est une sous-algèbre auto-

adjointe de $\mathcal{A}$. P est alors un opérateur semi-multiplicatif symétrique positif.

DEMONSTRATION DU THEOREME 4.15. Considérons un point y de la frontière de Choquet de $\tilde{E}$ dans $C(X/\mathfrak{F})$ où $E = \operatorname{Im}P$. D'après les hypothèses faites, δ_y est l'unique mesure de Radon de norme 1 sur $X/\mathfrak{F}$ qui prolonge δ_y sur $\tilde{E}$. Soit x un point de la classe d'équivalence contenant le point y et μ une mesure de Radon de norme 1 sur X qui prolonge δ_x sur E . Par l'isométrie canonique entre $\tilde{\mathcal{C}}(X/\mathfrak{F})$ et $C(X/\mathfrak{F})$, on constate que $\mu = \delta_x$ sur l'espace $\tilde{\mathcal{C}}(X/\mathfrak{F})$ et en particulier $\mu(1) = 1$, ce qui, joint à $\|\mu\| \leq 1$, implique la positivité de μ (cf. Lemme 5.4). Cette positivité permet de démontrer que le support de μ est nécessairement inclus dans $\mathfrak{F}(x)$. En effet, si z n'appartient pas à $\mathfrak{F}(x)$, il existe $f \geq 0$ dans $\tilde{\mathcal{C}}(X/\mathfrak{F})$ telle que $f(z) = 1$ et $f(\mathfrak{F}(x)) = 0$, mais $\mu(f) = 0$, donc z n'appartient pas au support de μ .

Considérons $P^*(\delta_x)$, pour un point x appartenant à la classe d'équivalence contenant le point y de la frontière de Choquet de $\tilde{E}$. Puisque P est une projection de norme 1, $P^*(\delta_x)$ prolonge δ_x sur E , donc est une mesure positive dont le support est inclus dans $\mathfrak{F}(x)$.

$$P(fPg(x) = \langle fPg, P^*(\delta_x) \rangle = Pg(x) \langle f, P^*(\delta_x)) =$$
$$= Pf(x)Pg(x)$$

puisque Pg est constante sur $\mathfrak{F}(x)$. Mais, en général, $PfPg$ n'est pas un élément de E , par contre $P(PfPg)$ en est un, et on a bien

$$P(fPg)(x) = P(PfPg)(x)$$

pour tous les x choisis ci-dessus. En outre $P(fPg)$ et $P(PfPg)$ sont des fonctions sur E dont les éléments correspondants sur $\tilde{E}$ sont égaux sur la frontière de Choquet de $\tilde{E}$, donc partout égaux (Il faut remarquer que si T est extrémale dans $M_1(X/\mathfrak{F})$, $T(T(1))^{-1}$ est de la forme δ_x , donc si deux fonctions de $M_1(X/\mathfrak{F})$ sont égales sur les points x telles que δ_x soit extrémale, ces fonctions ne séparent pas les points extrémaux de $M_1(X/\mathfrak{F})$, ni donc les éléments de $M_1(X/\mathfrak{F})$, c'est-à-dire sont égales partout).

Pour le corollaire 4.8, il reste seulement à démontrer la positivité de l'opérateur P . Mais puisque $E = \tilde{\mathcal{C}}(X/\mathfrak{F})$ ou $\tilde{\mathcal{C}}_0(X/\mathfrak{F})$, $P^*(\delta_x)$ est une mesure de Radon dans $S_1(X)$, prolongeant δ_x sur E et ceci pour tout x (sauf au plus un point) puisque la frontière de Choquet de E est $X/\mathfrak{F}$ sauf peut-être un point. $P^*(\delta_x)$ est donc positive comme nous l'avons établi au cours du théorème 4.15, ce qui assure la positivité de P .

THEOREME 4.16. Soit X un espace compact et P un opérateur de projection dans $C(X)$, de norme unité, dont l'image est une sous-algèbre auto-adjointe de $C(X)$. L'espace X est réunion de deux compacts disjoints X_1 et X_2 et P est un opérateur de moyenne sur $C(X_1)$, nul sur $C(X_2)$.

De $P(fPg) = PfPg$, on déduit que $k(P)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé. En effet, $k(P) = \bigcap_{f \in \mathrm{Im}P} \{x | f(x) = 0\}$ et $k(P) = \{x | P(1)(x) < 1\}$. On prend pour X_1 le complémentaire de $k(P)$ et on pose $X_2 = k(P)$. On a la décomposition en somme directe $C(X) = C(X_1) \oplus C(X_2)$ et $P(\chi_{X_1}) = \chi_{X_1}$, tandis que $P(\chi_{X_2}) = 0$. On en déduit facilement (Chapitre I § 3), que

$$P_{12} = P_{21} = P_{22} = 0$$

donc $P = P_{11}$ qui est de moyenne sur $C(X_1)$. En particulier, si X est un espace compact connexe, P est de moyenne ou nul.

COROLLAIRE 4.9. Soit P un opérateur linéaire réel n-potent sur $C(X)$, dont l'image est une sous-algèbre. Supposons que la norme de l'opérateur P^{n-1} soit inférieure ou égale à l'unité, alors $P^{n-1}(fPg) = P^{n-1}(f)Pg$.

COROLLAIRE 4.10. Un opérateur de projection positif sur $C(X)$ dont l'image est une sous-algèbre est un opérateur semi-multiplicatif symétrique.

Donnons deux exemples indiquant l'importance des hypothèses du théorème 4.15.

Exemple n°1. Lorsque $\|P\| > 1$, le corollaire 4.8 cesse d'être valable.
Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et définissons un opérateur P selon

$$P^*(\delta_{x_1}) = P^*(\delta_{x_2}) = \frac{\delta_{x_1}+\delta_{x_2}}{2} + \frac{\alpha}{2}(\delta_{x_3}-\delta_{x_4})$$

$$P^*(\delta_{x_3}) = P^*(\delta_{x_4}) = \frac{\delta_{x_3}+\delta_{x_4}}{2}.$$

On vérifie $P^2 = P$, $P(1) = 1$ et $\mathrm{Im}P$ est une algèbre. Mais l'opérateur P n'est pas semi-multiplicatif et $\|P\| = 1 + |\alpha|$.

Exemple n°2. Soit f_o une fonction prenant des valeurs positives et négatives sur un compact X. Par exemple, $f_o(x_1) = +1$ et $f_o(x_2) = -1$, $\|f_o\| \leq 1$. Soit E l'espace vectoriel engendré par f_o : ce n'est pas un espace extrêmement séparant quotient.

Posons

$$Pf = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}\, f_o .$$

P est idempotent puisque $Pf_o = f_o$ et $\|P\| = \frac{1}{2}$. Mais $P(1) = 0$ et si P était demi-multiplicatif symétrique, on aurait $P^2 = 0$ donc $P = 0$ (cf. Chapitre II ; tableau n°2).

6. THEOREMES DE DECOMPOSITION DE L'ESPACE SOUS-JACENT X.

Etant donné deux opérateurs semi-multiplicatifs sur l'algèbre $C(X)$, on peut en déduire une décomposition non triviale de l'espace X en un produit topologique $X_1 \times X_2$ lorsque quelques hypothèses naturelles sont satisfaites. Nous donnons trois définitions.

Définition. Deux opérateurs P_1 et P_2 sont dits mutuellement séparants sur $C(X)$ lorsque l'ensemble obtenu en prenant les produits de la forme $f_1 f_2$ où f_i est dans l'image de P_i et i un indice valant 1 ou 2 forme un espace qui sépare les points de X.

Définition. Deux opérateurs P_1 et P_2 sont dits mutuellement complémentaires sur $C(X)$ lorsque $P_1 \circ P_2$ et $P_2 \circ P_1$ sont des formes linéaires sur $C(X)$.

Définition. L'opérateur P_2 est dit P_1-productible s'il n'existe pas de fonction non nulle dans l'image de P_1 qui soit nulle sur la fermeture de la réunion des supports de $P_2^*(\delta_x)$ lorsque x parcourt X.

THEOREME 4.17. *Soient P_1 et P_2 deux opérateurs semi-multiplicatifs symétriques continus, réels, conservant les constantes, mutuellement séparants et complémentaires sur l'algèbre $C(X)$. Supposons que P_2 soit un opérateur P_1-productible (ou P_1 un opérateur P_2-productible). Alors, l'espace X est homéomorphe à un produit topologique. De plus*

$$P_1 f(x_1,x_2) = \int_{X_2} f(x_1,y_2)\,d\mu^1(y_2)$$

et

$$P_2 f(x_1,x_2) = \int_{X_1} f(y_1,x_2)\,d\mu^2(y_1)$$

où μ^1 (respectivement μ^2) est une mesure de Radon sur X_2 (respectivement X_1) le support de la mesure μ^2 étant X_1.

Remarquons que si $X = X_1 \times X_2$ et $x_i \longrightarrow \mu^i_{x_i}$ est une application vaguement continue de X_i dans $M(X_j)$ ($j \neq i$ valant 1 ou 2), les opérateurs P_i définis selon

$$P_i f(x_i, .) = \int_{X_1} f(x_i, y_j) d\mu^i_{x_i}(y_j)$$

sont semi-multiplicatifs symétriques, mais $P_i \circ P_j$ diffère de $P_j \circ P_i$ lorsque i diffère de j. Plus généralement, pour deux opérateurs semi-multiplicatifs symétriques, à partir des 6 hypothèses :

(a) P_1 et P_2 sont mutuellement complémentaires et (a') sa négation
(b) P_1 et P_2 sont mutuellement séparants et (b') sa négation
(c) P_1 et P_2 commutent et (c') sa négation.

on peut construire des exemples de réalisation des 7 combinaisons possibles, seule la conjonction (a), (b) et (c') étant impossible.

Pour démontrer le théorème 4.17, on utilise un lemme de décomposition :

<u>LEMME 4.10</u>. Soient A_1 et A_2 deux sous-algèbres fermées de $C(X)$, contenant les constantes et auto-adjointes. Supposons que :

(<u>1</u>) Le produit $A_1 \times A_2$ sépare les points de X
(<u>2</u>) $\|f_1 f_2\| = 0$ équivaut à $\|f_1\| \; \|f_2\| = 0$ pour tout f_1 dans A_1 et f_2 dans A_2.

Alors X est homéomorphe à un produit topologique $X_1 \times X_2$ et, selon cette homéomorphie, l'algèbre A_i est isomorphe à $C(X_i)$.

Désignons par a_i l'application quotient de X sur $X_i = X/\mathcal{U}_i$ où $\mathcal{U}_i$ désigne la relation d'équivalence fermée déterminée par A_i.

Soient x_1 un point de X_1 et x_2 un point de X_2. L'ensemble

$$a_1^{-1}(x_1) \cap a_2^{-1}(x_2)$$

n'est pas vide. En effet, considérons un voisinage fermé V_2 de x_2 et l'ensemble Y_1 des points de X_1 tels que $a_1^{-1}(x) \cap a_2^{-1}(V_2)$ ne soit pas vide. Cet ensemble est égal à $a_1(a_2^{-1}(V_2))$ donc est un ensemble fermé non vide. Soit x_o un point de X_1 n'appartenant pas à Y_1, et soit V un voisinage fermé quelconque de x_o . Il existe une fonction f_1 continue sur X , et dans A_1 , telle que $f_1(a^{-1}(x_o)) = 1$ et dont le support soit inclus dans $a_1^{-1}(V)$ puisque X_1 est un espace normal. De même, il existe f_2 dans A_2 telle que $f(a_2^{-1}(x_2)) = 1$ et dont le support est dans $a_2^{-1}(V_2)$. D'après l'hypothèse (2) l'intersection des supports de f_1 et f_2 ne peut être vide, donc

$$a_1^{-1}(U) \cap a_2^{-1}(V) \neq \emptyset$$

ce qui s'interprète en disant que x_o est adhérent à Y_1 , donc est dans Y_1 , puisque les voisinages fermés de x_o forment une base de voisinages. Finalement $X_1 = Y_1$.

Mais le filtre des voisinages V_2 de x_2 détermine une base de filtre sur $a_1^{-1}(x_1)$ selon les ensembles non vides $a_1^{-1}(x_1) \cap a_2^{-1}(V\ )$ et, par compacité, il existe un point adhérent ce qui donne $a_1^{-1}(x_1) \cap a_2^{-1}(x_2) \neq \emptyset$.

L'hypothèse (1) de séparation est alors introduite pour assurer qu'il existe au plus un point dans l'ensemble non vide $a_1^{-1}(x_1) \cap a_2^{-1}(x_2)$.

Ceci étant, la correspondance $x \longrightarrow (a_1(x), a_2(x))$ est une application bijective et bicontinue de X sur le produit topologique $X_1 \times X_2$ et, pour f dans A_i , la correspondance $g \longrightarrow f$ où $f(x) = g(a_i(x))$, établit un isomorphisme isométrique entre $C(X_i)$ et A_i .

Pour démontrer le théorème 4.17, assurons-nous que $\mathrm{Im}P_1$ et $\mathrm{Im}P_2$ satisfont les conditions du lemme 4.10. Il suffit de vérifier (2), les autres hypothèses étant plus faciles. Or, si f_i est dans $\mathrm{Im}P_i$,

$$\|P_1(f_1f_2)\| = |P_1(f_2)|\ \|f_1\| \leq \|P_1\|\quad \|f_1f_2\|$$

et

$$\|P_2(f_1f_2)\| = |P_2(f_1)|\ \|f_2\| \leq \|P_2\|\quad \|f_1f_2\|$$

Donc on a (2) sauf pour le cas douteux où simultanément

$$\|f_1f_2\| = P_1(f_2) = P_2(f_1) = 0.$$

Plaçons-nous dans les conditions de ce cas douteux et notons ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions, la première appartenant à $\mathrm{Im}P_1$ et la deuxième à $\mathrm{Im}P_2$.

$$P_2P_1(f_1\phi_1\phi_2) = P_2(f_1\phi_1)P_1(\phi_2)$$

D'après les hypothèses faites, de la relation $P_2(f_1\phi_1f_2) = 0$, on déduit

$$f_2P_2(f_1\phi_1) = 0 \text{ donc } \|f_2\| = 0$$

sauf si $P_2(f_1\phi_1) = 0$ et ceci pour toute fonction ϕ_1 dans $\mathrm{Im}P_1$.

Le cas douteux est donc réduit au cas où $P_2(f_1\phi_1) = 0$ d'où l'on déduit $P_2P_1(f_1\phi_1\phi_2) = 0$. En agissant de la même façon avec la fonction f_2 , le cas où l'on ne peut pas assurer $\|f_1\| = 0$ implique $P_1P_2\,(f_2\phi_1\phi_2) = 0$ pour toute fonction ϕ_1 dans $\mathrm{Im}P_1$ et ϕ_2 dans $\mathrm{Im}P_2$. Cependant, le produit des deux algèbres $\mathrm{Im}P_1$ et $\mathrm{Im}P_2$ est dense dans l'algèbre $C(X)$, ce qui permet d'obtenir:

$$P_2P_1(f_1f) = 0 \qquad \text{pour toute fonction } f \text{ de } C(X)$$

et de même

$$P_1P_2(f_2f) = 0 \qquad \text{pour toute fonction } f \text{ de } C(X).$$

Supposons, par exemple, que l'opérateur P_2 soit P_1-productible. On écrit $P_1(f) = \phi_1$ et donc $P_2(f_1\phi_1) = 0$ pour tout ϕ_1 dans $\mathrm{Im}P_1$. Introduisant encore ϕ_2 , on obtient facilement par densité :

$$P_2(f_1f) = 0 \qquad \text{pour toute fonction } f \text{ dans } C(X).$$

Mais ce résultat implique la nullité de f_1 sur la réunion des supports des mesures $P^*(\delta_x)$ lorsque x parcourt X , donc sur leur fermeture grâce à la continuité de f_1 . Par suite $f_1 = 0$ partout, ce qui termine la démonstration.

On obtiendrait le résultat $f_2 = 0$ en supposant que l'opérateur P_1 est P_2-productible.

Remarquons, en passant, que les opérateurs P_1 et P_2 commutent. En effet $P_2P_1(f_1'f_2') = P_1(f_2')P_2(f_1') = P_1P_2(f_1'f_2')$. Par densité du produit des deux algèbres images dans $C(X)$, on déduit bien la relation de commutation $P_1P_2 = P_2P_1$.

Le lemme 4.10 peut donc jouer en posant $A_1 = \mathrm{Im}P_1$ et $A_2 = \mathrm{Im}P_2$. Par suite, l'espace topologique X est homéomorphe à un produit topologique $X_1 \times X_2$ selon $x \longrightarrow (p_1(x),p_2(x))$ et en prenant les foncteurs contravariants associés à $p_1(x)$ et $p_2(x)$, on constate que $\mathrm{Im}P_i$ est isométriquement isomorphe à $C(X_i)$. D'ailleurs on vérifie que

$$X_i = X/\mathcal{P}_i.$$

En outre, $\mathrm{Supp}\,P_i^*(\delta_x) \subset \mathcal{P}_{i+1}(x)$ et l'image de $\mathcal{P}_i(x)$ par P_i est réduite à un seul point. (Ici, i est un indice dans $Z/2$) .

On remarque que les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont des relations d'équivalence ouvertes, puisque, si $\mathcal{O}$ est ouvert dans X, le saturé de $\mathcal{O}$ par $\mathcal{R}_i$ est de la forme $a_i^{-1}(a_i(\mathcal{O}))$, lequel est un ouvert de X grâce aux propriétés de la topologie produit. Le lemme 4.4 permet de conclure.

En identifiant X au produit topologique $X_1 \times X_2$ l'ensemble $\mathcal{R}_i(x)$ est homéomorphe à X_{i+1}, donc $P_i^*(\delta_x)$ est une mesure de Radon sur X_{i+1}. Cependant, les opérateurs P_1 et P_2 étant mutuellement complémentaires, on vérifie que $P_i^*(\delta_x)$ est une mesure indépendante du point x. Posons $\mu^i = P_i^*(\delta_x)$. Lorsque l'opérateur P_2 est P_1-productible, on montre que $\operatorname{Supp} \mu_2 = X_1$, c'est-à-dire que le support de $P_2^*(\delta_x)$ est exactement $\mathcal{R}_2(x)$ pour tout point x de X. Pour terminer, énonçons un théorème combinant les résultats de ce paragraphe et ceux du paragraphe précédent.

THEOREME 4.18. Soient P_1 et P_2 deux opérateurs réels de projection sur $C(X)$ de norme 1 et dont les images son+ des sous-algèbres. Supposons P_1 et P_2 mutuellement séparants, mutuellement complémentaires et supposons que P_2 soit un opérateur P_1-productible. X est alors un produit topologique et il existe deux mesures de Radon positives, μ^1 portée par X_2 et μ^2 dont le support est X_1, telles que

$$P_1 f(x_1\ ,\ .) = \int_{X_2} f(x_1, y_2)\,d\mu^1(y_2)$$

$$P_2 f(\ .\ , x_2) = \int_{X_1} f(y_1, x_2)\,d\mu^2(y_1)$$

7. AUTRES OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES SUR $C(X)$.

Soit P un opérateur multiplicativement lié et borné sur $C(X)$. Désignons par S_x le support de la mesure $P^*(\delta_x)$ et par $\mathcal{R}(S_x)$ le sous-espace fermé saturé de S_x par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ déterminée par P. Nous dirons que $x \succ y$ lorsque $S_x \subset S_y$. La relation de préordre ainsi définie sur X est compatible avec la topologie de X puisque toute section commençante est fermée. Lorsque P est un opérateur semi-multiplicatif, la relation $\succ$ est une relation d'ordre sur l'espace quotient $S/\mathcal{R}$.

PROPOSITION 4.10.

(a) Pour un opérateur multiplicativement lié tel que $B = C = E = 0$, ou encore pour un opérateur multiplicativement symétrique, $y \succ x$ pour tout y dans S_x.

(b) Si P est un opérateur multiplicativement lié tel que $E = 0$ et si P possède la propriété suivante : $f(x_o) \neq 0$, on a également $Pf(x_o) \neq 0$, alors $y \succ x$ pour tout y dans S_x .

Ce lemme concerne notamment les opérateurs de Baxter, les opérateurs semi-multiplicatifs ou de quasi-interpolation. Supposons que g ait son support dans le complémentaire de S_x lorsque $B = C = E = 0$, on a l'égalité caractéristique en utilisant la dualité $< C(X) , M(X) >$.

$$< fPg, P^*(\delta_x) > + < gPf, P^*(\delta_x) > = APf(x) < g, P^*(\delta_x) > + D < fg, P^*(\delta_x) >$$

donc $<fPg, P^*(\delta_x)> = 0$ pour tout f , ce qui donne $Pg = 0$ sur S_x , soit l'inclusion $S_y \subset S_x$ pour tout y dans S_x .

Lorsque l'on a seulement $E = 0$, mais avec la propriété supplémentaire (b) du lemme, on constate facilement que x appartient à S_x et que les termes $g(x)Pf(x)$, $f(x)g(x)$ sont nuls, de même que $f(x)Pg(x)$. La conclusion s'en déduit comme précédemment en (a).

Sous les deux conditions (a) ou (b) de la proposition 4.10, mais en imposant de plus $k(P) = \emptyset$, on constate qu'une section commençante de base x à savoir $E_x = \{y | y \succ x\}$ est un ensemble inductif, puisque tout sous-ensemble totalement préordonné de E_x admet un majorant. En effet, si x_i est une telle famille, S_{x_i} est une famille décroissante de compacts non vides (ici intervient l'hypothèse $k(P) = \emptyset$) , donc $\bigcap_{i \in I} S_{x_i}$ n'est pas vide et pour tout y dans cet ensemble, on a $y \succ x_i \succ x$ d'après la proposition 4.10. Le théorème de Zorn indique qu'il existe dans E_x un élément maximal x_o . Soit z un élément de S_{x_o} , on a, selon la proposition 4.10, $z \succ x_o$ donc $x_o \succ z$, c'est-à-dire, $S_z = S_{x_o}$ pour tout z dans S_{x_o} . En particulier, lorsque $\succ$ est une relation d'ordre sur $X/\mathcal{R}$, sous les conditions de la proposition 4.10,il existe un élément x_o pour lequel $P(fPg)(x_o) = Pf(x_o)Pg(x_o)$, c'est-à-dire la condition de semi-multiplicativité symétrique.

Considérons un opérateur d'extension E , non linéaire en général, associant à une fonction continue sur $C(\mathcal{R}(S_x))$ un prolongement continu sur tout X et considérons l'opérateur R de restriction à $\mathcal{R}(S_x)$. Par $Q_x = RPE$, on définit un opérateur Q_x sur l'algèbre $C(\mathcal{R}(S_x))$. Sous les conditions de la proposition 4.10, cet opérateur est linéaire et ne dépend pas de l'opérateur d'extension choisi et nous permet d'obtenir un résultat de localisation.

PROPOSITION 4.11. Sous les conditions (a) ou (b) de la proposition 4.10, l'opérateur Q_x est du même type multiplicativement lié que l'opérateur P .

Par exemple, pour le cas d'un opérateur multiplicativement symétrique, on a les relations multiplicatives suivantes :

$$\begin{aligned} Q_x(fQ_xg) &= RPE(fRPE(g)) = RP(E(f)PE(g)) = RP(E(g)PE(f)) \\ &= RPE(gEPE(f)) = Q_x(gQ_xf) \end{aligned}$$

Les autres démonstrations concernant la proposition sont analogues.

La proposition suivante généralise une propriété des opérateurs multiplicativement symétriques dans le cadre des algèbres de dimension finie (Théorème 3.1).

PROPOSITION 4.12. Lorsque P est un opérateur multiplicativement symétrique, Q_x est un opérateur semi-multiplicatif symétrique pour tout x .

On part de $P(hP(fPg)) = P(fPgPh) = P(gP(fPh))$

$$= P(gP(hPf)) = P(hPfPg)$$

pour tout h dans $C(X)$, soit encore la relation

$$< h,P(fPg)P^*(\delta_x) > = < h,PfPg\ P^*(\delta_x) >$$

d'où

$$Q_x(fQ_xg) = Q_x(f)Q_x(g)$$

On peut montrer que si $P^{-1}(S_x) = X$ pour au moins un point x dans X , il y a équivalence entre $P(1) = 1$ et $P^2 = P$ lorsque P est multiplicativement symétrique. Convenons d'une définition:

Pour un opérateur continu sur $C(X)$, nous dirons que P est <u>auto-supportant</u> lorsque $\bigcup_{x \in X} P^{-1}(S_x)$ coïncide avec l'espace compact X .

THEOREME 4.19. <u>Pour un opérateur linéaire continu sur l'algèbre $C(X)$ et auto-supportant, il y a équivalence entre la propriété de symétrie multiplicative et celle de semi-multiplicativité symétrique.</u>

De la même manière, donnons deux résultats relatifs aux opérateurs semi-multiplicatifs et demi-multiplicatifs qui généralisent des théorèmes obtenus au chapitre III.

<u>THEOREME 4.20. Un opérateur linéaire continu semi-multiplicatif sur l'algèbre $C(X)$ est semi-multiplicatif symétrique.</u>

Appliquons l'identité de définition aux fonctions fPg et h puis gPf et h et additionnons les égalités obtenues

$$2P(hPfPg) + P(fPgPh) + P(gPfPh) = 4PfPgPh$$

En utilisant la symétrie du membre de droite par rapport aux trois fonctions f , g et h , on dispose successivement des égalités

$$P(hPfPg) = P(fPhPg)$$

$$P(hPfPg) = PfPgPh.$$

En particulier, $< h, PfPg\, P^*(\delta_x) > \, = \, < h, Pf(x)Pg(x)P^*(\delta_x) >$ pour tout h dans $C(X)$, donc $Pf(y)Pg(y) = Pf(x)Pg(x)$ pour tout point y de S_x et notamment $(Pf(y))^2 = (Pf(x))^2$. On peut décomposer S_x en deux sous-ensembles fermés disjoints S_x^1 et S_x^2 dont les fonctions caractéristiques sont notés χ_1 et χ_2 les sous-ensembles sont tels que pour tout f dans $C(X)$ on a

$$Pf(y) = Pf(x) \text{ sur } S_x^1$$

$$Pf(y) = -Pf(x) \text{ sur } S_x^2$$

Mais on dispose de la relation $P(fPf)(x) = (Pf)^2(x)$ laquelle fournit

$$Pf(x)P(f(\chi_1 - \chi_2))(x) = (Pf(x))^2$$

(a) Si $Pf(x) \neq 0$, $P(f(\chi_1 - \chi_2))(x) = P(f(\chi_1 + \chi_2))(x)$ d'où $P(f\chi_2)(x) = 0$

(b) Si $Pf(x) = 0$, il vient $Pg(x)P(f(\chi_1 - \chi_2))(x) = 0$ pour tout g dans $C(X)$ donc $P(f(\chi_1 - \chi_2))(x) = 0$ et $P(f(\chi_1 + \chi_2)(x) = 0$, soit également $P(f\chi_2)(x) = 0$, ce qui assure finalement $S_x^2 = \emptyset$ et donc $Pf(y) = Pf(x)$ pour tout y dans S_x et toute fonction f de $C(X)$. D'où $S_x \subset \mathcal{P}(x)$ et le théorème de représentation intégrale 4.8 termine la démonstration.

<u>PROPOSITION 4.13</u>. Un opérateur linéaire continu demi-multiplicatif dont l'image est une algèbre auto-adjointe fermée est un opérateur multiplicativement symétrique.

On part de la relation $P(hP(fPg)) + P(fPgPh) = 2P(P(fPg)Ph)$, laquelle donne par symétrisation en f et g

$$2P(hP(PfPg)) + P(fPgPh) + P(gPfPh) = 4P(P(PfPg)Ph)$$
$$= 2P(PfPgPh) + 2P(hP(PfPg)$$

Soit $P(fPgPh) + P(gPfPh) = 2P(PfPgPh)$ et donc par symétrie

$$P(fPgPh) = P(hPgPf) = P(gPfPh)$$

Ce qui conduit finalement à

$$P(fPgPh) = P(PfPgPh)$$

Cependant, si ImP est une algèbre auto-adjointe fermée, on a

$$\mathrm{Im}P = C_o(\frac{X}{\mathcal{R}}) \text{ ou } C(\frac{X}{\mathcal{R}})$$

et le raisonnement suivi lors de la démonstration du théorème 4.13 montre que pour toute fonction j on a la décomposition de Pj en un produit $PgPh$. Donc $P(fPj) = P(PfPj)$ pour tout f et tout j dans $C(X)$.

Dans le chapitre suivant, nous allons considérer des opérateurs définis sur des espaces du type L^P et notamment des opérateurs sur L^∞ . La théorie de la représentation des C^*-algèbres commutatives va nous permettre d'utiliser les résultats établis dans ce chapitre sur $C(X)$. Rappelons que nous négligeons volontairement dans ce texte le cas des C^*-algèbres non commutatives. Il va de soi que des progrès sérieux pourraient être faits en ce qui concerne notamment les opérateurs d'interpolation sur des sous-algèbres de $C(X)$, avec $X = \mathbb{R}^n$, en particulier par utilisation du théorème de Whitney pour le cas d'algèbres de fonctions différentiables. Nous ne donnons aucun résultat de ce type dans ce travail.

CHAPITRE V

OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES DANS LES ESPACES FONCTIONNELS DE BANACH REGULIERS.

1. ESPACES FONCTIONNELS DE BANACH REGULIERS.

Soit $(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ le triplet d'un espace mesuré où μ est une mesure positive sur une tribu $\mathcal{F}$ construite sur un ensemble Ω . Nous supposons que la tribu $\mathcal{F}$ a été préalablement complétée. Pour simplifier les démonstration et les énoncés de ce chapitre, nous supposons en outre que l'ensemble Ω est de mesure finie en normalisant selon $\mu(\Omega) = 1$.

Une application N définie sur l'ensemble des fonctions μ-mesurables positives sur Ω et dont les valeurs sont positives (finies ou infinies) est une norme fonctionnelle lorsque l'on a les quatres propriétés suivantes :

(1) $N(f)$ est nul si et seulement si f est nulle μ-presque partout

(2) N est positivement homogène et sous-additive

(3) N est croissante : si $0 \leq f \leq g$, on a $0 \leq N(f) \leq N(g)$

(4) Si f_n est une suite croissante de fonctions mesurables qui converge μ-presque partout vers une fonction f , alors $N(f_n)$ converge vers $N(f)$.

On appelle $L^N(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$, en abrégé L^N , l'espace des classes de fonctions mesurables et à valeurs complexes pour lesquelles $N(|f|)$ est finie. Cet espace est normé par $N(|f|)$ que nous noterons désormais plus simplement $N(f)$. De nombreux auteurs ont contribué à l'étude de tels espaces, dont la structure contient en particulier celle des espaces $L^p(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ pour $+\infty \geq p \geq 1$ ou plus généralement celle des espaces d'Orlicz ou des espaces de Lorentz G.G. définis à partir du réarrangement d'une fonction intégrable. On trouvera des références détaillées dans les publications conjointes de Mme Luxemburg W.A.J et Zaanen A.C., publiées sur une période allant de 1956 à 1965 dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Hollande. Citons notamment LUXEMBURG W.A.J. [1] et ZAANEN A.C. [2] . Un résumé substantiel des propriétés de ces espaces peut être trouvé dans ZAANEN A.C. [1] et dans les références citées. On trouvera également des énoncés plus faibles que les propriétés (1)-(4), mais qui ne changent pas les propriétés essentielles de l'espace L^N . On peut également définir des espaces $L^N(\Omega , \mathcal{F} , \mu , B)$, où B est un espace de Banach, comme l'espace des fonctions mesurables définies sur Ω et à valeurs dans un espace de Banach B pour lesquelles $N(\|f\|_B)$ est finie. Pour l'étude des opérateurs multiplicativement liés, il conviendra de choisir une algèbre de Banach B commutative et unifère. Par souçi d'économie nous sommes restés dans ce texte sur le plan complexe.

Remarquons tout de suite que $L^N(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ constitue un module sur $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ grâce aux propriétés (2) et (3). Pour éviter des complications ultérieures, nous faisons quelques hypothèses supplémentaires (non classiques) sur L_N .

(5) L'espace $L^N(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ contient l'espace $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ constitué par les fonctions μ-mesurables, μ-essentiellement bornées puisque $\mu(\Omega) = 1$ et nous imposons une condition de normalisation par la relation $N(1) = 1$.

(6) L'espace $L^N(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ et nous imposons de façon précise

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq N(f) \text{ pour tout } f \text{ dans } L^N .$$

De plus, l'égalité ne peut avoir lieu pour des fonctions positives que si f est une fonction constante, du moins lorsque L^N ne coïncide pas avec l'espace $L^1(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$.

(7) Pour toute famille d'ensembles mesurables E_α telle que $\mu(E_\alpha)$ converge vers 0, $N(f\chi_{E_\alpha})$ converge vers 0 . Cette dernière propriété est connue sous le nom d'absolue continuité de la norme fonctionnelle. On peut exprimer de diverses façons équivalentes cette propriété d'absolue continuité mais nous nous contenterons de cette formulation.

Les propriétés (5) et (6), de même que la relation $\mu(\Omega) \leq 1$ qui en résulte, ne sont pas essentielles pour les théorèmes de ce chapitre et peuvent être considérablement affaiblies, par exemple en utilisant une mesure μ σ-finie, mais il convient d'introduire alors une fonction f_o strictement positive et invariante par les opérateurs considérés plus loin. Par contre, la propriété (7) semble indispensable. Pour $p \geq 1$, les espaces $L^p(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ sur un espace de probabilité, vérifient les 7 propriétés (1)-(7), mais l'espace $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ vérifie seulement (1)-(6)

D'autres espaces comme les espaces $L^{p,q}$ de Lorentz G.G. ou certains espaces d'Orlicz pour des fonctions convexes de Young convenables, possèdent les propriétés (1)-(7) (cf. ZYGMUND A. [1]).

Pour simplifier, introduisons une nouvelle terminologie en appelant espace fonctionnel de Banach régulier, un espace satisfaisant les propriétés (1)-(7) . Nous allons étudier les opérateurs multiplicativement liés sur de tels espaces. Comme il ne s'agit pas d'algèbres, une définition ad hoc est indispensable, faisant jouer un rôle au fait que L^N est un module sur L^∞ .

2. OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES.

Sur un espace fonctionnel de Banach régulier L^N , un opérateur multiplicativement lié est un opérateur linéaire tel que pour tout f dans L^N et g dans L^∞ , fPg appartienne à L^N , et d'autre part, tel que la relation (1) soit satisfaite

(1) $$P(fPg+gPf) = APfPg+B(fPg+gPf)+Cfg+DP(fg)+EP(PfPg)$$

THEOREME 5.1. Soit P un opérateur semi-multiplicatif borné sur un espace fonctionnel de Banach régulier. L'opérateur P est semi-multiplicatif borné sur L^∞ et sa norme sur l'espace L^∞ n'est pas supérieure à sa norme sur l'espace L^N .

COROLLAIRE 5.1 Soit P un opérateur semi-multiplicatif borné sur un espace $L^p(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ pour $p \geq 1$. L'opérateur P est alors borné, sans augmentation de la norme, et du même type, pour tout espace fonctionnel $L^{p'}(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ où p' est un nombre, fini ou infini, supérieur ou égal à p .

Grâce aux propriétés (2) et (3), on dispose pour tout f dans L^∞ et tout g dans L^N de :

$$N(fg) \leq \|f\|_\infty N(g)$$

En outre, l'espace L^∞ est dense dans L^N . Prenons en effet une fonction f de L^N et définissons la fonction tronquée de f à l'ordre n par

$$f_n = f \quad \text{si} \quad |f(x)| \leq n$$

et

$$f_n = n \frac{f(x)}{|f(x)|} \quad \text{si} \quad |f(x)| > n .$$

La suite $g_n = |f-f_n|$ est une suite décroissante de fonctions mesurables et cette suite converge presque partout vers 0 par construction. Cependant, la propriété (7) permet un analogue du théorème de la convergence dominée de

Lebesgue dans les espaces L^N . Pour $\varepsilon > 0$, soit E_n l'ensemble des x tels que $g_n(x) > \varepsilon$. La suite d'ensembles E_n est décroissante et tend vers un ensemble de mesure nulle. Grâce à (7), et par un raisonnement classique, on peut trouver un nombre $\eta > 0$ tel que $\mu(E) < \eta$ implique $N(f\chi_E) < \varepsilon$, donc pour $n > n_o$ tel que $\mu(E_{n_o}) < \eta$, on a $N(f\chi_{E_n}) < \varepsilon$, d'où l'estimation de $N(g_n)$ selon

$$N(g_n) = N(g_n\chi_{E_n}+g_n\chi_{E'_n}) \leq \varepsilon N(\chi_{E'_n})+N(g_n\chi_{E_n})$$

$$\leq \varepsilon N(1)+N(|f|\chi_{E_n}) \leq 2\varepsilon$$

donc la relation $\lim\limits_{n\to\infty} N(f-f_n) = 0$.

LEMME 5.1. Soit f une fonction (mesurable) telle que fg appartienne à L^N pour toute fonction g dans L^N . La fonction f est nécessairement μ-essentiellement bornée.

On pose $g \longrightarrow gf_n = Q_n(g)$ et $Q(g) = gf$ où f_n est la fonction tronquée de f à l'ordre de n . L'opérateur Q_n est linéaire et continu sur L^N puisque $N(Q_n(g)) \leq nN(g)$. De plus, $\lim\limits_{n\infty} Q_n(g) = Q(g)$ μ-presque partout et $Q(g)$ appartient à L^N . Comme ci-dessus, la propriété (7) permet d'établir que $\lim\limits_{n\infty} Q_n(g) = Qg$ au sens de L^N . Le théorème de Banach-Steinhaus indique alors que Q est un opérateur linéaire continu sur L^N de norme $\|Q\|$. Supposons maintenant que pour tout entier n , il existe un ensemble μ-mesurable E_n , dont la mesure soit positive, et sur lequel on ait la minoration $|f|(x) \geq n$ μ-presque partout. En choisissant une fonction g dans L^N dont le support est dans E_n , par exemple la fonction caractéristique de E_n , on obtient la suite d'inégalités

$$\|Q\| \, N(g) \geq N(fg) \geq N(\chi_{E_n} fg) \geq nN(\chi_{E_n} g) = nN(g)$$

imposant $N(g) = 0$ c'est-à-dire $\mu(E_{n_o}) = 0$ pour un certain entier n_o , ce qui signifie que la fonction f est μ-essentiellement bornée.

Soit p un nombre réel supérieur à 1 . Définissons $N_p(f) = (N(f^p))^{1/p}$ ce qui va nous permettre d'atteindre L^∞ .

LEMME 5.2. N_p est une norme fonctionnelle sur $(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$. En outre, pour des exposants p et q conjugués $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ on a la relation de Hölder :

$$N(fg) \leq N_p(f)N_q(g)$$

La propriété (1) est acquise ainsi que l'homogénéité de N_p . Posons

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{N_p(f)} \quad \text{et} \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{N_q(g)}$$

pour des fonctions f et g positives, μ-essentiellement bornées, non μ-presque partout nulles. Or, on a

$$f\,(x)g\,(x) \leq \frac{1}{p}\ \frac{f^p(x)}{N(f^p)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N(g^q)} \quad \mu\text{-presque partout,}$$

donc

$$N(f_1g_1) \leq 1,$$

ce qui fournit bien

$$N(fg) \leq N_p(f)N_q(g)\ .$$

On en déduit classiquement, en appliquant cette inégalité à $N(f(f+g)^{p-1}$, l'inégalité du type de Minkowski :

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g) \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ dans } L^\infty(\Omega\ , \mathcal{F}\ , \mu).$$

<u>LEMME 5.3</u>. Si f est une fonction μ-essentiellement bornée, pour toute suite p_n , croissante et non bornée de nombres réels, on a le résultat limite

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Lim}_{n\ \infty} N_{P_n}(f)$$

Si f est une fonction μ-essentiellement bornée, des relations

$$N(fg) \leq \|f\|_\infty N(g)$$

et $N(1) = 1$, on déduit que $N(f) \leq \|f\|_\infty$ donc que $N_p(f) \leq \|f\|_\infty$. Pour tout ε avec $0 < \varepsilon < 1$, il existe un sous-ensemble E de mesure μ positive, sur lequel $|f|(x) \geq \|f\|_\infty(1-\varepsilon)$. Dès lors, on obtient les minorations :

$$N(|f|^{P_n}) \geq N(\chi_E|f|^{P_n}) \geq \|f\|_\infty^{P_n}(1-\varepsilon)^{P_n}N(\chi_E)$$

$$N_{P_n}(f) \geq \|f\|_\infty(1-\varepsilon)(N(\chi_E))^{1/P_n},$$

ce qui donne à la limite $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} N_{P_n}(f) = \|f\|_\infty$ puisque $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(N(\chi_E))^{1/P_n} = 1$.

Soit maintenant P un opérateur borné, semi-multiplicatif sur $L^N(\Omega\ , \mathcal{F}\ , \mu)$ dont la norme est notée $\|P\|$. Puisque pour tout f dans L^N , le produit fPg appartient à L^N lorsque g est dans L^∞ , le lemme 5.1 enseigne que Pg est dans L^∞ . Ceci montre que l'image de L^∞ par P est incluse dans L^∞ . Par conséquent, pour f et g dans L^∞ , $P(fPg) = P(gPf) = PfPg$. Calculons $N_2(Pf)$

pour f dans L^∞ , sans d'ailleurs utiliser la symétrie de l'opérateur P :

$$(N_2(Pf))^2 = N(Pf)^2 = N(PfPf) = N(P(fPf)) \leq \|P\| \quad N(fPf)$$
$$\leq \|P\| \quad N_2(f)N_2(Pf)$$

ce qui donne la majoration $N_2(Pf) \leq \|P\| \; N_2(f)$.

Plus généralement, on obtient par récurrence pour tout entier p ,

$$N_{2^k p}(Pf) \leq \|P\| \; N_{2^k p}(f)$$

et le lemme 5.3 nous donne la majoration $\|Pf\|_\infty \leq \|P\| \quad \|f\|_\infty$ ce qui termine la démonstration du théorème 5.1.

Notons que nous n'avons pas utilisé la propriété (6).

Pour le corollaire 5.1, on a facilement $N_{2^k p}(Pf) \leq \|P\| \; N_{2^k p}(f)$ puis on utilise le théorème classique d'interpolation de M. Riesz-O.Thorin entre les espaces de Lebesgue L^p et L^∞ pour obtenir la conclusion du corollaire.

La réciproque du corollaire 5.1 est en général inexacte. Soit g une fonction mesurable positive et non essentiellement bornée, appartenant à l'espace L^q $[0,1]$. Sur l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur le carré $[0,1]^2$, posons

$$Pf(x_1 \; , \; .) = \int_0^1 f(x_1,y_2)g(y_2)dy_2$$

P est un opérateur continu en norme L^p (où les nombres p et q sont conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) , satisfaisant les conditions du corollaire 5.1 et pourtant P n'est pas continu en norme L^1 . Toutefois, on dispose d'un théorème réciproque lorsque P conserve les constantes et possède une norme inférieure ou égale à 1. Un tel opérateur sera dit de Markov sur L^N: $N(Pf) \leq N(f)$; et $P(1) = 1$.

Annonçons auparavant un autre corollaire que l'on pourrait aussi transcrire dans le cas d'un espace localement compact.

COROLLAIRE 5.2. Soient X un espace compact et μ une mesure positive de Radon de norme 1 dont le support est X . Supposons que P soit un opérateur linéaire, semi-multiplicatif (symétrique) sur $C(X)$, continu pour une norme fonctionnelle associée à μ . P est alors continu pour la norme uniforme, sans augmentation de la norme de l'opérateur.

THEOREME 5.2. Soit P un opérateur linéaire de Markov et multiplicativement symétrique sur un espace fonctionnel de Banach régulier. P est alors un opérateur positif semi-multiplicatif symétrique, continu et de Markov pour tout espace $L^{p'}$ où p' est un nombre réel, fini ou infini, supérieur ou égal à 1.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons quelques propriétés de dualité relatives aux espaces L^N car la considération de l'adjoint de l'opérateur P va ici jouer un grand rôle. Pour toute fonction mesurable, définie sur Ω et à valeurs réelles, considérons l'expression

$$N'(f) = \sup_{N(g)\leq 1} \int |fg|\,d\mu$$

Il est facile de montrer que N' constitue une norme fonctionnelle possédant les propriétés (1), (2), (3) et (4), ce qui permet de définir un espace $L^{N'}$. La propriété (5) est encore maintenue puisque si f est μ-essentiellement bornée, on a la majoration

$$\sup_{N(g)\leq 1} \int |fg|\,d\mu \leq \|f\|_\infty \sup_{N(g)\leq 1} \int_\Omega |g|\,d\mu \leq \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(1) = 1.$$

La propriété (6) est également satisfaite puisque

$$\int_\Omega |f|\,d\mu \leq N'(f)N(1) = N'(f)$$

sauf peut-être en ce qui concerne le cas d'égalité. Par contre, la propriété (7) n'est pas exacte en général (prendre par exemple $N(f) = \int_\Omega |f|\,d\mu$). Toutefois, pour la norme N'' que l'on déduit de N' comme N' se déduit de N, on peut établir l'égalité $N = N''$, donc l'identité des espaces L^N et $L^{N''}$.

Par la dualité $f \longrightarrow \langle f,g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x)$ où f est dans L^N et g dans $L^{N'}$, on constate que L^N peut s'identifier à un sous-espace vectoriel fermé du dual topologique fort de L_N. La propriété (7) permet d'assurer qu'en fait on obtient ainsi tout le dual topologique de $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Nous pouvons donc considérer l'opérateur adjoint P^* comme opérateur linéaire et continu sur $L^{N'}$. On vérifie les deux relations :

$$\langle 1, P^*(1) \rangle = \int_\Omega P^*(1)(x)d\mu(x) = 1$$

et

$$N'(P^*(1)) \leq \|P^*\|\, N'(1) \leq 1$$

ce qui donne la majoration

$$\int_\Omega |P^*(1)g|\,d\mu \leq \int_\Omega P^*(1)d\mu = 1 = \int_\Omega d\mu$$

pour tout g tel que $N(g) \leq 1$.

En faisant $g = 1$, on constate que $P^*(1)$ est positif, puis appliquant l'hypothèse (6) du début de ce chapitre, on déduit $P^*(1) = 1$ μ-presque partout.

Soit maintenant h un élément de $L^{N'}$, puis g et f deux fonctions μ-essentiellement bornées. La symétrie multiplicative fournit les égalités

$$< P(fPg),h > = < fPg,P^*(h) > = < f,PgP^*h >$$

$$= < P(gPf),h > = < f,P^*(gP^*h) >$$

donc $PgP^*h = P^*(gP^*h)$ et en particulier en prenant $h = 1$, l'égalité $Pg = P^*g$. Par suite, lorsque h est dans L^∞ , on obtient l'identité $PgPh = P(gPh)$. Ceci établit que P est un opérateur semi-multiplicatif symétrique sur L^∞ et, puisque P est continu en norme L^N , il en résulte que P est un opérateur semi-multiplicatif symétrique sur l'espace L^N . On peut appliquer maintenant le théorème 5.1 établissant que P est un opérateur continu sur L^∞ . La positivité de P sur $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ provient alors d'un lemme dont nous avons déjà eu besoin précédemment et qui s'énonce selon :

<u>LEMME 5.4</u>. Un opérateur linéaire de Markov sur $L^\infty(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ est positif.

$L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ est une C^*-algèbre, isométriquement isomorphe à l'algèbre $C(X)$ où X est un espace compact hyperstonien (cf. Chapitre V § 6). En outre, les propriétés de l'ordre sont conservées dans cette correspondance. Par suite, il suffit de se placer sur l'algèbre $C(X)$. Un opérateur P , linéaire et continu, se représente comme $Pf(x) =< f,P^*(\delta_x) >$ et on dispose par hypothèse de $< 1, P^*(\delta_x) > = 1$ et $\|P^*(\delta_x)\| \leq 1$. Le théorème est donc acquis à partir du résultat classique suivant : Une mesure μ de Radon telle que $\mu(1) = 1$ et $\|\mu\| \leq 1$, est une mesure positive.

Poursuivant la démonstration du théorème, la positivité de l'opérateur P sur L^N est facile à déduire. Il nous reste, pour terminer la démonstration, à établir que l'opérateur P est continu en norme L^1 car cette continuité implique la continuité en norme L^P comme nous l'avons déjà remarqué. Pour ce faire, donnons un lemme :

<u>LEMME 5.5</u>. Un opérateur positif P sur l'algèbre $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ vérifie μ-presque partout, pour tout f dans L^∞ , la relation

$$|Pf| \leq P(|f|)$$

En effet, l'expression $< f_1,f_2 > = P(f_1f_2)$ constitue un produit scalaire généralisé sur $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$ auquel l'inégalité de Schwarz est applicable.

$$|P(f_1\bar{f}_2)| \leq (\sqrt{P(|f_1|^2)})(\sqrt{P(|f_2|^2)})$$

En particulier, si f est dans $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$, les fonctions $f_1 = \sqrt{|f|}$ et $f_2 = \frac{f}{|f|}\sqrt{|f|}$ appartiennent encore à $L^\infty(\Omega , \mathcal{F} ,\mu)$ et permettent d'obtenir l'inégalité souhaitée selon :

$$|P(f_1\bar{f}_2)| = |Pf| \leq \sqrt{P(|f|)}\ \sqrt{P(|f|)} = P(|f|)$$

Pour toute fonction f dans L^N , nous avons la relation

$$\int_\Omega Pf d\mu = < f,P^*(1) > = \int_\Omega f d\mu$$

Grâce à la majoration acquise dans le lemme 5.5, majoration qui se transmet à tout l'espace L^N , on dispose de

$$\int_\Omega |Pf| d\mu \leq \int_\Omega P(|f|) d\mu = \int_\Omega |f| d\mu$$

On en conclut que P est un opérateur linéaire de Markov dans l'espace $L(\Omega , \mathcal{F} , \mu)$. Ce point termine la démonstration du théorème 5.2.

Le théorème 5.2 se généralise à des situations fonctionnelles plus générales moyennant l'idempotence de l'opérateur P . Dans ANDÔ T. [1], ce dernier montre qu'un projecteur de Markov dans L^p , pour tout $p \neq 2$, est continu et de norme 1 sur l'espace L^1 , donc positif, mais sa démonstration originale semble trop utiliser les propriétés de L^p pour pouvoir s'étendre au cas des espaces fonctionnels de Banach réguliers et non réflexifs. Le problème reste ouvert de trouver une condition nécessaire et suffisante sur l'espace fonctionnel pour la validité du lemme 5.4 relatif à un projecteur.

On peut énoncer différemment le théorème 5.2, en utilisant le langage des espérances conditionnelles et généraliser ainsi des résultats de MOY S.T.C. [1] et ROTA G.C. [1] . D'ailleurs, de nombreux auteurs ont consacré des travaux à des problèmes fonctionnels voisins : MAHARAM D. [1], ZIDÁK Z. [1], BAHADUR R.R. [1] GROTHENDIECK A. [1], DOUGLAS R.G. [1], RAO M.M. [1] . Le texte de (1) ANDÔ T. donne les résultats les plus précis.

<u>THEOREME 5.3</u>. <u>Soient</u> L^N <u>un espace fonctionnel de Banach régulier et</u> P <u>un opérateur multiplicativement symétrique de Markov sur</u> L^N . <u>Il existe une sous-tribu</u> $\mathcal{G}$ <u>de</u> $\mathcal{F}$ <u>telle que</u> Pf <u>soit mesurable pour</u> $\mathcal{G}$ <u>et coïncide avec l'espérance conditionnelle de</u> f <u>relativement à</u> $(\Omega , \mathcal{G} , \mu')$ <u>où</u> μ' <u>est la restriction de</u> μ <u>à</u> $\mathcal{G}$, <u>c'est-à-dire satisfait</u> :

$$\int_A Pf d\mu = \int_A f d\mu \quad \text{pour tout } A \text{ dans } \mathcal{G}$$

D'après le théorème 5.2, l'opérateur P est positif, semi-multiplicatif symétrique et continu de norme 1 sur L^∞. Par la transformation de Gelfand, l'algèbre $L^\infty(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ est isométriquement isomorphe à un espace $C(X)$ où X est un espace compact (d'ailleurs hyperstonien) . Nous connaissons bien la structure de P sur $C(X)$ par les théorèmes du chapitre IV et le sous-espace ImP de $C(X)$ est une algèbre de la forme $\mathcal{C}(X/\mathcal{P})$ selon les notations de ce même chapitre. La sous-algèbre correspondance de $L^\infty(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ est une algèbre $L^\infty(\Omega , \mathcal{G}, \mu')$ où $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ car $X/\mathcal{P}$ est encore un espace de Stone. Cependant, l'opérateur P est également continu sur l'espace $L^2(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ et son image est fermée pour cette topologie $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ puisque P est un projecteur. Cette image contient $L^\infty(\Omega , \mathcal{G}, \mu')$ donc coïncide avec $L^2(\Omega , \mathcal{G}, \mu')$. D'après le théorème de projection sur un espace de Hilbert, il existe une unique projection contractante sur $L^2(\Omega , \mathcal{G}, \mu')$, celle déterminée par l'espérance conditionnelle usuelle relative à la tribu $\mathcal{G}$: notée selon l'usage $E(. \mid \mathcal{G})$, dont c'est une définition commode lorsqu'on veut éviter le théorème de Radon-Nikodym . D'ailleurs, $E(. \mid \mathcal{G})$ possède toutes les propriétés requises pour P . En particulier la relation

$$\int_A Pf d\mu = \int_A E(f \mid \mathcal{G}) d\mu = \int_A f d\mu$$

pour tout ensemble A appartenant à la tribu $\mathcal{G}$ et tout f dans L^2 . Par densité, on déduit pour toute fonction f de $L^N(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$:

$$\int_A Pf d\mu = \int_A f d\mu$$

ce qui termine la démonstration.

3. CAS DE L'IDEMPOTENCE DE L'OPERATEUR P.

Pour un opérateur idempotent de Markov, on peut obtenir des résultats analogues aux théorèmes précédents. Nous avons d'abord le :

THEOREME 5.4. Soit P un opérateur idempotent, positif et de Markov, sur un espace fonctionnel de Banach régulier $L^N(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$. L'opérateur P est alors l'espérance conditionnelle sur $L^N(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ relative à une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. Réciproquement, un opérateur linéaire d'espérance conditionnelle sur $L^N(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$ est un opérateur semi-multiplicatif symétrique positif et continu sur $L^N(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$

P est un opérateur positif et de norme 1 sur l'espace $L^\infty(\Omega , \mathcal{F}, \mu)$. Soit P

l'opérateur déterminé sur $C(X)$ par $\hat{P}(\hat{f}) = (Pf)\hat{}$ où $f \to \hat{f}$ est la correspondance de Gelfand entre $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $C(X)$. D'après le théorème 4.15, $\hat{P}$ est un opérateur demi-multiplicatif symétrique $P(fPg) = P(PfPg) = P(gPf)$, puisque P est positif donc que l'espace image de $C(X)$ par $\hat{P}$ est extrémement séparant quotient. Il en est de même pour P sur L^∞, donc, par continuité, sur $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Le théorème 5.3 est alors applicable et fournit la première partie de ce théorème 5.4.

Réciproquement, soit P un opérateur linéaire, défini sur $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et tel que $\int_A Pfd\mu = \int_A fd\mu$ pour tout ensemble A appartenant à une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle les Pf sont mesurables. On a tout d'abord $P(1) = 1$ μ-presque partout. Montrons la positivité de l'opérateur P. Soit f une fonction positive μ-presque partout. Soit ε un nombre positif et E_ε l'ensemble des x de Ω tels que $Pf(x) < -\varepsilon$. L'ensemble E_ε est un sous-ensemble mesurable relatif au triplet $(\Omega, \mathcal{G}, \mu')$, par suite, il contient un ensemble A_ε de la tribu $\mathcal{G}$ dont la mesure $\mu'(A_\varepsilon)$ n'est pas nulle lorsque celle de E_ε ne l'est pas. Donc $\int_A Pfd\mu < 0$ tandis que $\int_A fd\mu \geq 0$. Il y a donc contradiction. En utilisant l'inégalité finale de la démonstration du théorème 5.2, on déduit que P est de Markov sur $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et même sur tout $L^P(\Omega, \mathcal{F}, \xi)$ pour $p \geq 1$.

Par passage à l'espace L^2, on peut déduire que $P(fPg) = PfPg$, mais un calcul direct est possible. On a $\int_\Omega \chi_B \chi_A Pfd\mu = \int_\Omega \chi_B \chi_A fd\mu$ pour A et B dans $\mathcal{G}$. Donc lorsque f est dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

$$\int_\Omega \chi_A PgPfd\mu = \int fPg\chi_A d\mu$$

pour toute g dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ puisque Pg est dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu')$ et est limite dans $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu')$, de fonctions en escalier sur cet espace. En particulier :

$$\int_A PfPgd\mu = \int_A fPgd\mu = \int_A P(fPg)d\mu$$

Mais $PfPg$ et $P(fPg)$ sont mesurables vis-à-vis de $(\Omega, \mathcal{G}, \mu')$ donc ces deux fonctions sont égales μ'-presque partout. En outre, P est continu sur tout $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. En effet, si f_n converge vers f et Pf_n vers g, au sens de l'espace de Banach $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, f_n converge vers f et Pf_n vers g au sens de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, donc, puisque P est continu sur $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $Pf = g$ μ-presque partout, ce qui donne $Pf = g$ dans $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et le théorème du graphe fermé permet de conclure à la continuité de l'opérateur P. Par densité de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on constate que P est un opérateur semi-multiplicatif symétrique sur $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

4. ROLE DE L'HERMITICITE DE L'OPERATEUR P .

Sur un espace fonctionnel de Banach régulier $L^N(\Omega, \mathcal{F},\mu)$, nous disons que P est hermitien lorsque P coïncide avec P^* sur l'espace $L^\infty(\Omega, \mathcal{F},\mu)$, lequel est à la fois inclus dans les espaces L^N et $L^{N'}$ qui, d'ailleurs, sont des modules sur L^∞ . L'hermiticité d'un opérateur multiplicativement lié procure une relation algébrique supplémentaire permettant une réduction. Nous allons fournir quelques exemples.

THEOREME 5.6. Soit P un opérateur hermitien sur un espace fonctionnel de Banach régulier. Si P est de l'un des types suivants : multiplicativement symétrique, semi-multiplicatif, demi-multiplicatif, U-idempotent ou de Reynolds, alors P est un opérateur semi-multiplicatif symétrique, d'ailleurs idempotent dans le dernier cas.

PROPOSITION 5.1. Soit P un opérateur hermitien sur un espace fonctionnel de Banach régulier. Si P est du type $B(\alpha)$, pour $\alpha \neq 1$, l'opérateur $\frac{\alpha I-P}{\alpha-1}$ est semi-multiplicatif symétrique; pour $\alpha = 1$, l'opérateur $I-P$ est semi-multiplicatif symétrique idempotent. Si P est hémi-multiplicatif, ou de Baxter, P est un centralisateur symétrique, idempotent dans le dernier cas.

PROPOSITION 5.2. Soit P un opérateur multiplicativement symétrique tel que $P(1) = 1$ et tel que P^* soit également multiplicativement symétrique. P est alors un opérateur hermitien, semi-multiplicatif symétrique idempotent.

Commençons par la démonstration de cette dernière proposition : pour f et g dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F},\mu)$, on dispose des deux relations :

$$< P(fPg),h > = < f,PgP^*h >$$

$$< P(gPf),h > = < f,P^*(hP^*g) >$$

donc $PgP^*h = P^*(hP^*g)$ et cette expression est égale à $P^*(gP^*h)$ par hypothèse , donc à P^*gPh . Jouant sur les rôles similaires de P et P^*, on a donc la relation $P^*(gP^*h) = P(gPh)$ et sur L^∞ en particulier $(P^*)^2 = P^2$. Mais comme $P(1) = 1$, on a $(P^*)^2 = P^*$ et $P^2 = P$ d'où $P = P^*$ et le théorème 5.6 est applicable. On pourrait raffiner la proposition précédente en ne supposant pas que $P(1) = 1$ mais seulement que $(P(1))^{-1}$ est définie dans $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

Donnons uniquement la démonstration concernant un opérateur de Baxter dans la proposition 5.1 . Pour f, g et h dans l'espace des fonctions μ-essentiellement bornées, on dispose des relations :

$$< f, PgP^{*}h + P^{*}(gP^{*}h) > = < f, gP^{*}h > + < f, P^{*}(hPg >$$

Lorsque P est hermitien, on peut donc calculer

$$P(gPh) + P(hPg) = P(hg) + PhPg \text{ et } P(gPh)-P(hPg) = gPh = PgPh$$

donc

$$2P(gPh) = P(hg) + gPh$$

et

$$2P(hg) + 2PhPg = 2P(hg) + gPh + hPg$$

ce qui donne

$$2PgPh = gPh + hPg \text{ et } P^2(1) = P(1).$$

On en déduit

$$2PgP(1) = gP(1) + Pg \text{ , soit } PgP(1) = gP(1) \text{ d'où } Pg = gP(1)$$

pour tout g dans L^{∞} , ce qui définit bien un centralisateur symétrique, par ailleurs idempotent.

En ce qui concerne le théorème 5.6, choisissons de démontrer ce qui a trait au cas d'un opérateur de Reynolds. Il vient pour f, g et h dans $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$:

$$PgP^{*}h + P^{*}(gP^{*}h) = P^{*}(hPg) + P^{*}(PgP^{*}h)$$

donc facilement $PgPh = P(PgPh)$, relation qui donne un opérateur U-idempotent et le tableau 1 montre qu'il s'agit en fait d'un opérateur semi-multiplicatif symétrique idempotent.

Pour les autres cas du théorème 5.6, les calculs sont analogues en utilisant les tableaux du chapitre 2.

5. <u>CAS PARTICULIER DES OPERATEURS DU TYPE</u> $D(\alpha)$.

Proposons-nous d'abord le cas des opérateurs P , continus sur $C(X)$, et du type $D(\alpha)$ dont l'inverse existe et est continu.

$$P(fPg+gPf) = \alpha P(fg) + (1-\alpha)PfPg + P(PfPg)$$

Un calcul simple montre que l'opérateur $M = (1-\alpha)^{-1}(I-\alpha P^{-1})$ est multiplicatif, c'est-à-dire satisfait $M(fg) = MfMg$. Par suite, il existe une application continue $\phi : X \longrightarrow X$ telle que $Mf = f \circ \phi$ ce qui permet d'écrire :

$$Pf(x)-\alpha f(x) = (1-\alpha)f \circ \phi(x)$$

Lorsque $0 < \alpha < 1$, l'équation précédente possède la solution développée :

(1) $$Pf = \alpha \sum_{n=o}^{\infty} (1-\alpha)^n f \circ \phi^n$$

On remarque que $P(f \circ \phi) = Pf \circ \phi$ (cf. par analogie le Chapitre III § 5). Réciproquement on peut vérifier directement que P , défini selon (1), est un opérateur positif, inversible, satisfaisant l'identité des opérateurs $D(\alpha)$.

Plus généralement, soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative et soit M un opérateur multiplicatif continu appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. On dispose d'un résultat concernant le résolvant de l'opérateur M :

PROPOSITION 5.3. Si λ n'appartient pas au spectre d'un opérateur multiplicatif borné M , l'opérateur $P = (1-\lambda)(I-\lambda M)^{-1}$ est du type $D(1-\lambda)$.

Bien entendu, tout opérateur du type $D(\alpha)$ n'est pas de cette forme particulière.

Pour les cas extrèmes $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour un opérateur de Reynolds ou pour un opérateur du type D , la proposition 5.3 est sans intérêt, mais on dispose d'un résultat déjà envisagé par MILLER J.B. [3] pour le cas $\lambda = 1$. Pour énoncer ce résultat, il nous faut rappeler brièvement quelques définitions relatives aux familles d'opérateurs (cf. HILLE E. ; PHILIPPS R.S. [1]).

On dit qu'une famille d'opérateurs $\{P_\lambda\}$, sur une algèbre de Banach commutative $\mathcal{A}$, forme une sous-résolvante lorsque pour λ et μ parcourant un certain domaine Δ de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, on dispose de la relation :

$$\mu P_\lambda - \lambda P_\mu = (\mu-\lambda)P_\lambda P_\mu$$

Si pour un certain λ_0 , on a en plus $P_\lambda^2 = P_\lambda$, alors P_λ est indépendant de λ auquel cas on dit que la famille sous-résolvante est dégénérée.

Réciproquement, si $P_\lambda = P_\mu$, pour λ différent de μ , alors la famille sous-résolvante est dégénérée et l'unique élément est idempotent.

Les théorèmes classiques de Hille E. et Philipps R.S. sur les pseudo-résolvantes permettent de déterminer la forme générale des familles sous-résolvantes maximales, c'est-à-dire pour lesquelles on ne peut agrandir le domaine des λ . En simplifiant il existe un opérateur P continu tel que $P_\lambda = \lambda P(I-(1-\lambda)P)^{-1}$. Le domaine Δ des λ possibles est défini par les nombres complexes λ non nuls tels que, soit $\lambda = 1$, soit $(1-\lambda)^{-1}$ appartient au résolvant de P , c'est-à-dire au complémentaire du spectre de P . En remarquant que $\lambda P = P_\lambda-(1-\lambda)P_\lambda P$ et en posant $F = f-(1-\lambda)Pf$ donc

$$P_\lambda(F) = \lambda Pf = P_\lambda(f)-(1-\lambda)P_\lambda(Pf)$$

et de même à partir de la fonction g , on peut obtenir, au terme d'un calcul facile mais un peu long, la proposition suivante dont les notations sont celles des explications précédentes :

PROPOSITION 5.4. Lorsque P est un opérateur de Reynolds, respectivement un opérateur du type D , l'opérateur P_λ est de Reynolds (respectivement du type D), pour tout nombre complexe λ appartenant à Δ .

En particulier, si un élément P_λ d'une sous-résolvante est de l'un des types de cette dernière proposition, tous les opérateurs de la sous-résolvante sont de ce type, ce que l'on décrit en disant que les propriétés R ou D sont "contagieuses" sur une sous-résolvante. Cette proposition 5.4 permet une représentation d'un opérateur de Reynolds (ou d'un opérateur du type D) lorsque l'on suppose que le résolvant de cet opérateur contient un domaine annulaire (cf. MILLER J.B. [3]). Des raisonnements voisins sont adaptables aux opérateurs D(1) mais nous ne donnerons ici aucun détail.

6. CAS DES ESPACES COMPACTS HYPERSTONIENS.

Soit $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ l'espace des fonctions μ-essentiellement bornées et à valeurs complexes sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. L'algèbre $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ constitue une C^*-algèbre commutative unifère lorsque l'on choisi comme involution la conjugaison ordinaire. Elle se représente, par la transformée de Gelfand: $f \to \hat{f}$, comme l'algèbre des fonctions continues et à valeurs complexes sur un espace compact X . Il est facile de noter que les cônes d'ordre de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et de $C(X)$ sont en correspondance biunivoque puisque f est positif ou nul au sens de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si et seulement si $f = g\overline{g}$ où g est dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Par suite, les propriétés de l'ordre sur les fonctions réelles de L^∞ et de $C(X)$ sont identiques, donc X constitue un espace particulier de Stone, quelquefois appelé espace hyperstonien. Si P est un opérateur linéaire continu sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, nous convenons de noter par $\hat{P}$ l'opérateur défini sur $C(X)$ à partir de $\hat{P}(\hat{f}) = (Pf)\hat{}$. Grâce à cette représentation, certains théorèmes établis au chapitre IV sur l'algèbre $C(X)$ se propagent ainsi aux espaces fonctionnels L^N . Par exemple :

THEOREME 5.7. Un opérateur continu de type semi-multiplicatif dans un espace fonctionnel de Banach régulier est semi-multiplicatif symétrique.

La continuité de P en norme $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ s'obtient d'après le raisonnement du théorème 5.1 . Par suite, $\hat{P}$ est un opérateur semi-multiplicatif symétrique d'après le résultat du théorème 4.20. Il en est de même pour P sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, donc pour P sur $L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ par densité.

Dans un autre ordre d'idées, et afin de généraliser les théorèmes d'existence du chapitre IV, nous allons d'abord démontrer le résultat suivant :

LEMME 5.6. L'espace convexe $\mathcal{E}$ des opérateurs de Markov sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace compact pour une certaine topologie d'espace vectoriel.

Considérons l'espace L^∞_σ, c'est-à-dire l'espace $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ muni de la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$ pour la dualité entre $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Considérons $\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty_\sigma)$, espace des opérateurs linéaires continus définis sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pour la topologie normée à valeurs dans L^∞_σ. Nous le munissons de la topologie de la convergence simple que nous notons $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$. L'ensemble convexe $\mathcal{E}$ des opérateurs de Markov sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$, d'ailleurs fermé pour cette topologie. En effet, si P_α est une famille dans $\mathcal{E}$ qui converge dans $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$ vers un opérateur P, on a, pour tout g dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, de norme inférieure ou égale à 1 :

$$\left|\int_\Omega (P_\alpha f) g\, d\mu\right| \leq \|f\|_\infty \quad \text{donc} \quad \left|\int_\Omega (Pf) g\, d\mu\right| \leq \|f\|_\infty$$

c'est-à-dire $\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. En outre, l'ensemble est un ensemble équicontinu de $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$ puisque si n fonction g_i déterminent un voisinage fondamental de zéro dans L^∞_σ, l'image des fonctions f de L^∞ telle que

$$\|f\|_\infty \leq \eta_i \left(\sup_{i=1,\dots,n} \|g_i\|\right)^{-1}$$

est incluse dans ce voisinage fondamental. De plus, l'ensemble Pf, lorsque f est fixée dans L^∞ et P parcourt $\mathcal{E}$, décrit un sous-ensemble borné de L^∞ donc relativement compact pour la topologie faible L^∞_σ. Grâce à un théorème classique (cf. BOURBAKI N. [3], Chapitre III, § 3, cor. de la proposition 4.) l'ensemble $\mathcal{E}$ est relativement compact et fermé donc compact pour $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$, ce qui termine la démonstration du lemme 5.6.

Soient alors P un opérateur semi-multiplicatif de Markov sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{J}$ l'espace des opérateurs idempotents de Markov sur l'algèbre $C(X)$ dont l'espace image coïncide avec l'espace $\hat{P}(C(X))$. D'après le corollaire 4.10, puisqu'un opérateur de Markov est positif (lemme 5.4), l'espace $\mathcal{J}$ coïncide avec l'espace convexe $\mathcal{J}$ défini au chapitre IV § 3. Muni de la topologie que l'on peut déduire de la topologie de $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$, l'ensemble $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fermé de l'ensemble $\mathcal{E}$. En effet, si P_α converge vers P pour cette topologie $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$, alors Pf appartient à l'image commune des P_α et vérifie $P_\alpha(Pf) = Pf$, lequel coïncide donc avec P^2f . D'après le lemme 5.6, $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble compact pour $\mathcal{L}_s(L^\infty, L^\infty_\sigma)$. Le théorème de Krein-Milman (cf. BOURBAKI N. [3] Chapitre II, § 4, Théorème 1) assure l'existence d'au moins un élément extrémal pour ce convexe compact $\mathcal{J}$ et la condition C du chapitre IV est ainsi satisfaite. La proposition 4.9 permet d'obtenir :

<u>THEOREME 5.8.</u> <u>Pour qu'un sous-espace fermé</u> E <u>de</u> $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ <u>soit l'image d'un opérateur de Markov semi-multiplicatif, il faut et il suffit que</u> E <u>soit l'image d'un opérateur multiplicatif idempotent de Markov sur</u> L^∞ .

De la même façon, on obtiendrait :

<u>THEOREME 5.9.</u> <u>Pour qu'un sous-espace fermé</u> E <u>de</u> $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ <u>soit le noyau d'un opérateur de Markov d'interpolation, il faut et il suffit que</u> E <u>soit le noyau d'un opérateur multiplicatif idempotent de Markov sur</u> $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Bien entendu, les opérateurs multiplicatifs ainsi obtenus ne sont en général pas continus pour une norme fonctionnelle N .

Dans ce chapitre, nous venons de montrer que les opérateurs de Markov multiplicativement symétriques apparaissent comme les bons opérateurs de moyenne sur les espaces fonctionnels de Banach réguliers puisqu'ils correspondent aux différents conditionnements par toutes les sous-tribus de $\mathcal{F}$. On peut alors envisager des familles de tels opérateurs et considérer leurs limites pour généraliser, en prenant quelques précautions, les théorèmes classiques de convergence ses martingales, obtenus dans les espaces $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ou encore certains théorèmes ergodiques. Des théorèmes analogues sur l'algèbres C(X) , munie de la topologie de la convergence uniforme, cessent d'être valides en général, mais une étude des cas de validité se révèle intéressante. Nous n'exposerons pas ici les théorèmes obtenus préférant les développer dans un travail indépendant.

Dans le prochain chapitre, nous allons essayer de mieux encore dégager le rôle de moyenne joué par les opérateurs multiplicativement symétriques P lorsque l'on dispose d'un semi-groupe d'opérateurs qui commutent avec l'opérateur P . Au lieu toutefois de se placer dans un système dynamique général, nous particulariserons notre intérêt au cas du groupe des opérateurs de translation, engendré par un groupe topologique abélien localement compact G , et opérant sur des espaces fonctionnels naturels construits sur le groupe G .

CHAPITRE VI

OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES COMMUTANT AVEC LES TRANSLATIONS.

1. ALGEBRES DE FONCTIONS PRESQUE-PERIODIQUES ET OPERATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIES.

Soit G un groupe topologique abélien, noté additivement, et supposé localement compact. Nous notons additivement le groupe dual $G^{\wedge}$ de G, c'est-à-dire l'ensemble des caractères de G muni de la topologie de la convergence compacte. $G^{\wedge}$ désigne donc à la fois l'ensemble et sa topologie. La dualité entre G et $G^{\wedge}$ est notée $< x,\hat{x} >_{G,G^{\wedge}}$ ou $< x,\hat{x} >$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté. Soit m_G une mesure de Haar du groupe G, mesure que l'on normalise par $m_G(G) = 1$ lorsque G est compact. Sur certaines algèbres de fonctions définies sur G, nous nous proposons l'étude des opérateurs multiplicativement liés qui commutent avec les translations définies par les éléments du groupe G. Pour un élément h du groupe G et une fonction f sur G, $U_h f = f_h$ désigne la fonction $x \to f(x-h)$ et U_h est l'opérateur de translation de pas h. Un opérateur <u>commute avec les translations</u> lorsque $P \circ U_h = U_h \circ P$ pour tout élément h de G.

Comme algèbre de départ, il est naturel de choisir l'algèbre $A(G)$ des <u>fonctions presque-périodiques de Bohr</u>, que l'on peut définir comme la fermeture, au sens de la topologie de la norme uniforme sur les fonctions continues bornées de G, du sous-espace des polynômes trigonométriques généralisés P sur G :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i < x,\hat{x}_i > \text{ où } \hat{x}_i \text{ est un élément de } G^{\wedge}.$$

$A(G)$ est une C^*-algèbre dont le spectre s'identifie au compactifié de Bohr $\bar{G}$ du groupe G. Rappelons que $(\bar{G})^{\wedge} = G^{\wedge}_d$ ou $G^{\wedge}_d$ est l'ensemble $G^{\wedge}$ muni de la topologie discrète, tandis que $(G^{\wedge})^{\wedge} = G$ d'après le théorème de dualité de PONTRYAGIN L.S. (cf. HEWITT E - ROSS K.A. [1] ou LOOMIS H.H. [1]).D'ailleurs, on a résumé les propriétés utiles du groupe de Bohr de G dans DHOMBRES J. [2] .

Le premier théorème concerne les opérateurs multiplicativement symétriques sur l'algèbre des fonctions presque-périodiques. Pour alléger, nous n'avons pris que des fonctions à valeurs complexes, mais l'étude se mène pour des fonctions presque périodiques à valeurs dans une algèbre commutative de Banach (cf. DHOMBRES J. [3]).

THEOREME 6.1. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des opérateurs non nuls sur $A(G)$ définis à une homothétie près, multiplicativement symétriques continus et qui commutent avec les translations, et l'ensemble des sous-groupes du dual de G.

Nous allons préciser cette correspondance au cours de la démonstration.

(a) Soit Q un opérateur du type décrit par l'énoncé du théorème 6.1 et soit $\hat{x}$ un caractère de G. La commutation avec les translations implique

$$Q(\hat{x}) = k'(\hat{x})\hat{x}$$

où $k'(\hat{x})$ est une fonction définie sur $G^{\wedge}$ et à valeurs complexes. En effet,

$$Q(U_h(\hat{x})) = < -h,\hat{x} > Q(\hat{x}) = U_h(Q(\hat{x}))$$

$$Q(\hat{x}) = Q(\hat{x})(\hat{o})\hat{x} = k'(\hat{x})\hat{x}$$

En particulier, $Q(\hat{o}) = k'(\hat{o})0^{\wedge}$ où $0^{\wedge}$ est le caractère unité valant 1 sur tout G. L'identité de symétrie multiplicative fournit une équation fonctionnelle quant à k' :

$$k'(\hat{x}_2)k'(\hat{x}_1+\hat{x}_2) = k'(\hat{x}_1)k'(\hat{x}_1+\hat{x}_2)$$

Si $k'(\hat{o})$ est nul, il vient $(k'(\hat{x}_2))^2 = 0$ pour tout $\hat{x}_2$ dans $G^{\wedge}$ donc $Q = 0$. Nous éliminons ce cas dans l'énoncé du théorème 5.1.

Si $k'(\hat{o})$ est différent de 0, en posant $P = (k'(\hat{o}))^{-1}Q$, on trouve un opérateur P possédant les propriétés de Q et tel que $P(\hat{o}) = \hat{o}$. Avec la relation $k(\hat{x}) = k'(\hat{x})(k'(\hat{o}))^{-1}$, on note que $k^2(\hat{x}) = k(\hat{x})$. Le sous-ensemble Λ du groupe $G^{\wedge}$, défini comme ensemble des caractères $\hat{x}$ tels que $k(\hat{x}) = 1$, forme un sous-groupe. En effet, si $k(\hat{x}_1)$ diffère de $k(\hat{x}_2)$, alors $k(\hat{x}_1+\hat{x}_2) = 0$. En particulier, si $k(\hat{x})$ diffère de $k(\hat{o}) = 1$, alors $k(\hat{x}) = 0$. En outre, $k(\hat{x}_1) = k(-\hat{x}_1)$ puisque $k(\hat{o}) = 1$. Si donc $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ sont dans Λ tandis que $\hat{x}_1+\hat{x}_2$ n'appartient pas à Λ, $\hat{x}_1 = (\hat{x}_1+\hat{x}_2)-\hat{x}_2$ ne peut appartenir à Λ, ce qui est contradictoire.

Si maintenant f est un polynôme trigonométrique généralisé $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i < x,\hat{x}_i >$, l'action de P sur f se calcule selon $Pf = \sum_{i=1}^{n} a_i P(\hat{x}_i)$ donc

$$Pf(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ \hat{x}_i \in \Lambda}}^{n} a_i < x,\hat{x}_i >$$

Par densité, l'opérateur continu P est donc déterminé par le sous-groupe Λ .

(b) Réciproquement, soit Λ un sous-groupe de $G^\wedge$. Nous allons construire un opérateur P ayant les propriétés requises par le théorème 6.1 et dont le sous-groupe associé est précisément Λ . Considérons l'annihilateur H de Λ défini comme sous-ensemble du compactifié de Bohr $\bar{G}$ de G et constitué des éléments $\bar{x}$ de $\bar{G}$ tels que $< \hat{x}, \bar{x} >_{G^\wedge, \bar{G}} = 1$ pour tout $\hat{x}$ dans Λ . L'ensemble H est un sous groupe fermé, donc compact dans $\bar{G}$, qui possède une mesure de Haar normalise m_H que l'on peut prolonger canoniquement en une mesure de Radon positive et de norme 1 sur $\bar{G}$, notée M_H :

$$\int_{\bar{G}} f(\bar{x})dM_H(\bar{x}) = \int_H f(\bar{x})dm_H(\bar{x}).$$

En particulier l'annihilateur du sous-groupe $\{0\}$ est $\bar{G}$, tandis que l'annihilateur de $G^\wedge$ est réduit à $\{0\}$.

La transformée de Fourier de la mesure M_H est une fonction définie sur $G^\wedge$ qui n'est autre que la fonction caractéristique du sous-groupe Λ , c'est-à-dire la fonction valant 1 sur Λ et 0 sur Λ' . On a en effet :

$$M_H^\wedge(\hat{x}) = \int_{\bar{G}} < \hat{x},\bar{x} >_{G_d^\wedge, \bar{G}} dM_H(\bar{x}) = \int_H < \hat{x},\bar{x} >_{G_d^\wedge,\bar{G}} dm_H(\bar{x})$$

Si $\bar{x}$ est dans Λ , la normalisation de la mesure m_H sur H fournit $(M_H)^\wedge(\hat{x}) = 1$.

Si $\hat{x}$ n'appartient pas à Λ , supposons que $(M_H)^\wedge(\hat{x}) = \alpha$. Puisque m_H est la mesure de Haar de H , pour tout $\bar{y}$ dans H , on a

$$\begin{aligned} \alpha = \int_H < \hat{x},\bar{x} >_{G_d^\wedge,\bar{G}} dm_H(\bar{x}) &= \int_H < \hat{x},\bar{x}+\bar{y} >_{G_d^\wedge,G} dm_H(\bar{x}) \\ &= < \hat{x},\bar{y} > \int_H < \hat{x},\bar{x} >_{G_d^\wedge,\bar{G}} dm_H(\bar{x}) \\ &= < \hat{x},\bar{y} > \alpha \end{aligned}$$

soit $\alpha(1-<\hat{x},\bar{y}>) = 0$ pour tout $\bar{y}$ dans H . Mais comme $<\hat{x},\bar{y}>$ est différent de 1 pour au moins un tel $\bar{y}$, c'est que $\alpha = 0$.

Soit f un élément de A(G) . Par la transformation de Gelfand, la fonction de Bohr f se prolonge en une fonction continue ϕ sur le compactifié $\bar{G}$. Considérons l'application linéaire $\phi \to \phi \circledast M_H = R(\phi)$ où la convolution s'entend sur $C(\bar{G})$ relativement à la mesure de Haar prolongée de H . Cette fonction $\phi \circledast M_H$ est continue sur $\bar{G}$, donc fournit une fonction presque-périodique de Bohr sur G , notée Pf . Cette dernière s'obtient d'ailleurs par restriction des

des valeurs de $R(\phi)$ à G . La correspondance entre f et Pf est linéaire, continue ($\| P \| \leq 1$) et conserve l'unité $P(1) = 1$. En particulier, P est un opérateur positif. P commute également avec les translations puisque $U_h\phi = \phi \circledast \delta_h$ où δ_h est la mesure de Dirac au point h de $\bar{G}$, donc $(\phi \circledast \delta_h) \circledast M_H = (\phi \circledast M_H) \circledast \delta_h$. En outre, P est multiplicativement symétrique.

Nous allons même montrer que P est un opérateur semi-multiplicatif symétrique. Il suffit, bien sûr, de se placer sur $C(\bar{G})$. On pose :

$$M_1 = R(\phi R(\psi)) \quad \text{et} \quad M_2 = (R\phi)(R\psi)$$

et l'on prend les transformées de Fourier de ces deux fonctions M_1 et M_2 . Grâce aux propriétés opératoires classiques

$$\hat{M}_2(\hat{y}) = (\phi \circledast M_H)^\wedge * (\psi \circledast M_H)^\wedge = \hat{\phi}\hat{M}_H * (\psi \circledast M_H)^\wedge$$

$$(R\psi)^\wedge(\hat{y}-\hat{x}) = (\psi \circledast M_H)^\wedge(\hat{y}-\hat{x}) = \hat{\psi}(\hat{y}-\hat{x})\hat{M}_H(\hat{y}-\hat{x})$$

Comme Λ est un sous-groupe de $G^\wedge$, $\hat{y}-\hat{x}$ appartient à Λ , pour $\hat{x}$ dans Λ , si et seulement si $\hat{y}$ appartient à Λ . Donc,

$$\hat{M}_2(\hat{y}) = \hat{M}_H(\hat{y}) \int_\Lambda \hat{\phi}(\hat{x})(R\psi)^\wedge(\hat{y}-\hat{x})dm_{G^\wedge}(\hat{x})$$

D'autre part :

$$\hat{M}_1(\hat{y}) = \hat{M}_H(\hat{y}) \int_{G^\wedge} \hat{\phi}(\hat{x})(R\psi)^\wedge(\hat{y}-\hat{x})dm_{G^\wedge}(\hat{x}) = \hat{M}_2(\hat{y})$$

Comme la transformation de Fourier est injective, les fonctions $R(\phi R\psi)$ et $(R\phi)(R\psi)$ sont égales, d'où $P(fPg) = PfPg$ pour tous f et g dans l'algèbre $A(G)$.

Pour terminer la démonstration, il convient de vérifier que le sous-groupe associé à P par le procédé de (1) est bien le sous-groupe Λ . En effet, la fonction $\hat{x}$ se prolonge sur $\bar{G}$ par $\phi(\bar{x}) = \langle \hat{x},\bar{x} \rangle_{\hat{G}_d,\bar{G}}$

$$\phi \circledast M_H(y) = \int_{\bar{G}} \langle \bar{y}-\bar{x},\hat{x} \rangle_{\bar{G},\hat{G}_d} dM_H(\bar{x}) = \langle \bar{y},\hat{x} \rangle \hat{M}_H(\hat{x})$$

$$= \begin{cases} \langle \bar{y},\hat{x} \rangle & \text{si } \hat{x} \in \Lambda \\ 0 & \text{si } \hat{x} \notin \Lambda \end{cases}$$

Finalement, à la famille des homothétiques d'un opérateur multiplicativement symétrique satisfaisant les conditions du théorème 6.1, on fait correspondre un sous-groupe Λ de $G^\wedge$ et réciproquement à un sous-groupe de $G^\wedge$ correspond un opérateur multiplicativement symétrique vérifiant les conditions du théorème 6.1 et tel que $P(1) = 1$. La correspondance est surjective, elle est visiblement injective donc biunivoque. En particulier, nous avons démontré un énoncé plus précis et une propriété intéressante.

Propriété 6.1. Un opérateur multiplicativement symétrique continu, conservant l'unité et commutant avec les translations sur $A(G)$, est un opérateur de moyenne, c'est-à-dire semi-multiplicatif symétrique positif et de norme 1.

THEOREME 6.2. A tout sous-groupe Λ de $G^\wedge$ correspond un opérateur semi-multiplicatif symétrique non nul sur $A(G)$, borné, commutant avec les translations. Réciproquement un tel opérateur correspond à un sous-groupe Λ de $G^\wedge$. Lorsque la série de Fourier associée à f s'écrit

$$f \sim \sum_{\hat{x} \in G^\wedge} a(\hat{x})\hat{x}$$

la série de Fourier associée à Pf s'écrit

$$Pf \sim \sum_{\hat{x} \in \Lambda} a(\hat{x})\hat{x}$$

COROLLAIRE 6.1. Un opérateur semi-multiplicatif continu, commutant avec les translations sur $A(G)$. est l'homothétique d'un opérateur de moyenne.

Il suffit d'appliquer le théorème 4.20 à l'algèbre $C(\bar{G})$ laquelle est isométriquement isomorphe à l'algèbre $A(G)$ des fonctions presque-périodiques. On obtient la symétrie multiplicative et on applique le théorème 6.1.

COROLLAIRE 6.2. Un opérateur non nul, demi-multiplicatif, continu sur $A(G)$ et commutant avec les translations, est un opérateur de moyenne.

En effet, on dispose relativement à la fonction k, définie précédemment sur $\hat{G}$ de l'équation fonctionnelle

$$k(\hat{x}_1+\hat{x}_2)(k(\hat{x}_1)+k(\hat{x}_2)) = 2k(\hat{x}_1)k(\hat{x}_2)k(\hat{x}_1+\hat{x}_2)$$

On en tire $k^2(\hat{o}) = k^3(\hat{o})$ et on distingue deux cas :

Si $k(\hat{o}) = 0$, on constate que $P = 0$.

Au contraire, $k(\hat{o}) = 1$ implique l'idempotence de P (tableau n°3) et on peut appliquer la propriété 6.1.

2. ESPACES FONCTIONNELS DE BANACH.

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que le groupe abélien G est compact. Soit L^N un espace fonctionnel de Banach (cf. Chapitre V), construit sur

$(G, \mathcal{T}, m_G)$ où $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne complétée vis-à-vis de la mesure de Haar m_G, normalisée dans G. Nous supposons en outre que L^N est stable par l'opérateur U_h et même que U_h détermine une isométrie sur L_N : soit pour tout h dans G la relation:

$$N(U_h f) = N(f).$$

Un tel espace L^N sera simplement dit un <u>espace fonctionnel de Banach sur un groupe</u>.

<u>THEOREME 6.3. Soit</u> P <u>un opérateur linéaire et continu, commutant avec les translations sur un espace fonctionnel de Banach régulier sur un groupe compact. P est un opérateur multiplicativement symétrique sur $L^N(G)$ si et seulement s'il existe un sous-groupe fermé H de G et une constante complexe a telle que</u>

$$Pf = a(f * M_H)$$

La condition est nécessaire : d'après le chapitre V, $L^\infty(G)$ est stable par l'opérateur P et même P est continu selon la norme $L^\infty(G)$. Ceci est une conséquence faible du théorème 5.1 lorsque P est semi-multiplicatif, ou du théorème du graphe fermé dans le cas général. En effet, si f_n converge vers f et Pf_n converge vers g au sens de $L^\infty(G)$, puisque P est continu en norme N, Pf_n converge vers Pf dans $L^N(G)$, ce qui donne $Pf = g$, m_G-presque partout, donc $Pf = g$ au sens de $L^\infty(G)$. En outre, si f est une fonction continue sur G, elle est uniformément continue, c'est-à-dire $0 = \lim_{h\to o} \| U_h(f)-f \|$. Par suite, grâce à $P \circ U_h = U_h \circ P$, $\lim_{h\to o} \| P(U_h f)-P(f) \| = 0$. C'est-à-dire que

$$P(C(G)) \subset C(G).$$

Sur un groupe compact, $A(G) = C(G)$ et le théorème 6.1 est applicable, assurant que $Pf = a(f * M_H)$ pour toute fonction continue f avec $P(1) = a$.

Soit maintenant g un élément quelconque de $L^{N'}(G)$ (Chapitre V § 2). Pour la dualité entre $L^N(G)$ et $L^{N'}(G)$, on dispose de :

$$< f * M_H, g > = \int_G g(x) \int_G f(x-y) dM_H(y) dm_G(x)$$

Puisque f et g sont absolument intégrables, le théorème de Fubini permet d'écrire successivement

$$< f * M_H, g > = \iint_{G\times G} f(x-y) g(x) dM_H(y) dm_G(x)$$

$$| < U_y f, g > | = | \int_G f(x-y) g(x) dm_G(x) | \leq N(U_y f) N'(g) = N(f) N'(g)$$

ce qui montre que, pour f continue, la convolution est continue par rapport à la norme de l'espace fonctionnel $L^N(G)$:

$$N(f * M_H) \leq N(f).$$

Cette inégalité termine la démonstration de la nécessité du théorème 6.2 et donne sans peine la suffisance de ce même théorème.

COROLLAIRE 6.2. Un opérateur non nul, demi-multiplicatif continu et commutant avec les translations sur un espace fonctionnel de Banach régulier sur un groupe abélien compact, est un opérateur de moyenne.

Lorsque $P(1) = 1$, on constate qu'un opérateur satisfaisant les propriétés du théorème 6.3 est positif et de norme 1 . Sur l'algèbre du groupe $L^1(G)$, un opérateur continu qui commute avec les translations est la convolution par une mesure de Radon bornée u . Lorsque P est idempotent, u est alors égale à son carré de convolution et on montre que u appartient à l'espace stable par les opérations : $u * \lambda$, $u+\lambda-u * \lambda$ et δ_o-u , engendré par les mesures de Haar $u = M_H$ associées à des sous-groupes de G dont l'annihiliteur Λ est ouvert dans $G\hat{}$ (cf. RUDIN W. [1] et une démonstration notablement simplifiée dans ITO T. et AMEMIYA I. [1]). De ce fait, si $\|P\| = 1$ (et $P(1) = 1$) , alors $Pf = f * m_H$, sinon $\|P\| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Par suite, la propriété algébrique de liaison multiplicative limite la norme à 1 . Nous avons d'ailleurs déjà noté le rôle particulier joué par les opérateurs de Markov.

3. CAS DES OPERATEURS DE BAXTER.

Nous supposons à nouveau que G est un groupe localement compact abélien. Par $T(G)$ nous représentons les polynômes trigonométriques généralisés définis sur G . Si f est dans $T(G)$ et $\hat{x}_i$ dans $G\hat{}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i < x,\hat{x}_i >_{G,G\hat{}}$$

Le polynôme trigonométrique généralisé f se prolonge en une fonction continue sur le compactifié de Bohr $\bar{G}$:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i < \hat{x}_i,\bar{x} >_{\hat{G_d},G}$$

Sur $T(G)$, nous pouvons définir une norme fonctionnelle, notée M_p , selon

$$M_p(f) = \left(\int_{\bar{G}} |f(\bar{x})|^P dm_{\bar{G}}(\bar{x})\right)^{1/P} \qquad \text{pour } +\infty > P \geq 1$$

et

$$M_\infty(f) = \sup_{\bar{x} \in \bar{G}} |f(\bar{x})| = \|f\|_\infty \qquad \text{pour } P = +\infty$$

On trouvera une interprétation différente de ces normes M_P au paragraphe suivant.

Nous nous proposons l'étude des opérateurs de Baxter, continus au sens de la norme M_p, et qui commutent avec les translations définies par le groupe G sur l'algèbre $T(G)$. Comme précédemment $P(\hat{x}) = k(\hat{x})\hat{x}$ et l'identité de Baxter fournit une équation fonctionnelle relative à la fonction k définie sur $G^\wedge$:

$$k(\hat{x}_1+\hat{x}_2)(k(\hat{x}_1)+k(\hat{x}_2)) = k(\hat{x}_1+\hat{x}_2)+k(\hat{x}_1)k(\hat{x}_2)$$

donc en particulier $k^2(\hat{o}) = k(\hat{o})$. Si $k(\hat{o}) = 0$, l'opérateur $Q = I-P$ est de Baxter et $Qe = e$. Sans perdre de généralité, on peut donc supposer que $k(\hat{o}) = 1$. Mais ceci implique l'idempotence de l'opérateur P (tableau n°3), donc $k^2(\hat{x}) = k(\hat{x})$. Définissons par Λ le sous-ensemble des éléments de $G^\wedge$ pour lesquels $k(\hat{x}) = 1$. L'équation fonctionnelle que vérifie k permet d'établir que Λ est un semi-groupe inclus dans $G^\wedge$, contenant $o^\wedge$, et que le complémentaire Λ' du sous-groupe Λ est également un semi-groupe inclus dans $G^\wedge$ (on en déduit en particulier $-(\Lambda)' \subset \Lambda$). Nous disposons d'un premier résultat lorsque $G = \mathbb{T}$, c'est-à-dire le tore à une dimension.

<u>PROPOSITION 6.2.</u>

Il n'existe que deux opérateurs de Baxter non triviaux sur $T(\mathbb{T})$, continus en norme $L^P(Q)$ et commutant avec les translations pour $+\infty > p > +1$. Il n'existe pas de tel opérateur continu pour $p = 1$ et $p = +\infty$.

(Par opérateur non trivial, on exclut le cas de l'opérateur identique et celui de l'opérateur nul).

Soient $\lambda = pq^{-1}$ un nombre rationnel compris entre 0 et 1, x et y deux éléments de $\Lambda \subset Z$ et supposons que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ soit dans Z. L'élément z appartient à Λ car sinon z est dans Λ' donc qz appartient à la fois à Λ et à Λ' ; ce qui est impossible. On a une propriété identique pour x et y dans $-\Lambda$. Posons $G_o = (\Lambda) \cap (-\Lambda)$. L'ensemble G_o est un sous-groupe de Z, donc de la forme αZ où α est un nombre entier relatif. Si α n'est pas nul comme 0 et α sont dans Λ et dans $-\Lambda$, $1 = \alpha\alpha^{-1}$ est dans $G_o = Z$ et $(\Lambda)' = \emptyset$. Par contre, si $\alpha = 0$, on a $\Lambda' \cup \{\hat{o}\} = -\Lambda$. En particulier $(\Lambda) \cap (-\Lambda) = \{\hat{o}\}$ et ce qui précède montre que pour deux points x et y de Λ, les points de $Z \cap [x,y]$ sont encore dans Λ , donc que

$$\Lambda = N \cup \{\hat{o}\} \quad \text{ou} \quad \Lambda = (-N) \cup \{\hat{o}\}.$$

Finalement, en dehors de l'identité et de l'opérateur nul, si f est un polynôme trigonométrique :

$$f(x) = \sum_{n_k \in Z} a_{n_k} e^{in_k x} \; : \quad \begin{aligned} P_1 f(x) &= \sum_{n_k \geq 0} a_{n_k} e^{in_k x} \\ P_2 f(x) &= \sum_{n_k \leq 0} a_{n_k} e^{in_k x} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $P_1 f$ est la contraction analytique de f.

Le théorème classique de M. Riesz enseigne que $\|Pf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ pour tout p tel que $+\infty > p > 1$, (cf. ZYGMUND A. [1]). Mais on ne peut avoir la continuité en norme uniforme car sinon la contraction analytique d'une fonction continue serait continue. Or

$$\sum_{n>1} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2n \operatorname{Log} n}$$

est une fonction continue, mais non $\displaystyle\sum_{n>1} \frac{e^{inx}}{2n \operatorname{Log} n}$. Par dualité, l'opérateur de contraction analytique P ne peut être continu en norme L^1 !

Dans le cas d'un groupe plus général, convenons de dire qu'un opérateur est analytique lorsque f et $\bar{f}$ ne peuvent simultanément appartenir à l'image de P tant que f n'est pas une constante.

THEOREME 6.4. Soit $T(G)$ l'algèbre des polynômes trigonométriques généralisés sur un groupe abélien localement compact. Il y a une correspondance biunivoque entre les opérateurs de Baxter analytiques, continus en norme $M^p (+\infty > p > 1)$, commutant avec les translations, et les semi-groupes de $G^\wedge$ qui déterminent un ordre sur $G^\wedge$. Pour $p = 1$ ou $p = +\infty$, il n'existe pas de tels opérateurs.

Montrons que $G_o = (\Lambda) \cap (-\Lambda) = \{\hat{o}\}$. En effet, si x est dans G_o , on a $P(\hat{x}) = \hat{x}$ et $P(-\hat{x}) = -\hat{x}$. Mais $< x,-\hat{x} >_{G,G^\wedge} = \overline{< x,\hat{x} >}_{G,G^\wedge}$ et l'analyticité de P implique $\hat{x} = \hat{o}$. Le semi-groupe Λ constitue alors le cône positif d'une relation d'ordre sur $G^{\wedge}$ selon : $x \geq y$ si et seulement si $x-y$ est dans Λ . La relation est transitive et $x \geq y, y \geq x$ implique $y = x$ par $G_o = \{\hat{o}\}$. Le théorème de M. Riesz se généralise dans cette situation (cf. RUDIN W. [1]) permettant d'obtenir le théorème 6.3 sans difficulté.

Pour les opérateurs de Baxter non analytiques, G_o est un semi-groupe non réduit à $\{\hat{o}\}$. Par exemple, en prenant $G = R^n$ et pour Λ un demi-espace fermé de R^n , la fonction caractéristique de Λ est un multiplicateur continu en norme L^P pour $+\infty > p > 1$ (cf. RUDIN W. [1]) . Cet opérateur satisfait l'identité de Baxter.

<u>Remarque</u>. Si l'on suppose que la fonction $k(\hat{x})$ est semi-continue inférieurement sur G^n , la proposition 6.2 est encore valable dans le cas particulier où $G = R$.

4. CARACTERISATIONS GEOMETRIQUES.

Nous nous plaçons toujours sur un espace fonctionnel de Banach régulier L^N , défini sur un groupe topologique abélien compact G . Soit P un opérateur multiplicativement symétrique, continu sur L^N et qui commute avec les translations définies par les éléments du groupe. Nous notons H l'annihilateur du sous-groupe Λ de $G^{\wedge}$ associé à P par le théorème 6.1 . Lorsque $P(1) = 1$, nous convenons d'appeler Pf <u>la moyenne de la fonction</u> f <u>suivant</u> H (cf. Corollaire 6.1).

L'ensemble $E_H^N(f)$ désigne la fermeture (au sens de L^N) de l'enveloppe convexe des translatées de f suivant le sous-groupe H , c'est-à-dire de l'ensemble des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{n} c_i f_{h_i}$ où $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ et $c_i \geq 0$, tandis que les h_i sont des éléments de H . On dispose alors d'une caractérisation de Pf généralisant aux espaces L^N et aux moyennes non stationnaires, la caractérisation de la moyenne (constante) d'une fonction presque-périodique obtenue par VON NEUMANN J. (cf. LOOMIS H.H. [1]). Nous fixons donc un opérateur P du type décrit:

<u>THEOREME 6.5</u>. <u>La moyenne de la fonction</u> f <u>suivant</u> H <u>est l'unique fonction de l'enveloppe convexe fermée (au sens de</u> L^N) <u>des translatées de</u> f <u>suivant</u> H , <u>admettant</u> H <u>comme sous-groupe des périodes</u>.

Une formulation voisine donne le théorème suivant :

THEOREME 6.6. La moyenne de la fonction f suivant H est l'unique fonction de l'enveloppe convexe fermée (au sens de L^N) des translatées de f suivant H invariante par l'opérateur P .

Grâce au théorème 6.3, le théorème 6.5 est une conséquence du théorème 6.6. Montrons d'abord que Pf est un élément de $E_H^N(f)$. Pour tout f dans L^N , on a un résultat limite : $\lim_{h\to o} N(U_h f-f) = 0$. Il suffit de remarquer que $\lim_{h\to o} U_h f = f$, m_G-presque partout et d'utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue que l'on peut déduire de (7) (cf. Chapitre V) dans les espaces fonctionnels de Banach réguliers. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert U de l'élément neutre tel que $N(U_h f-f) \leq \varepsilon$ lorsque h est dans U . Pour le groupe G , il existe un recouvrement ouvert fini a_i+U où i varie de 1 à n, auquel on associe une partition de l'unité, c'est-à-dire des fonctions $g_i(x)$, continues et à valeurs réelles sur G , telles que

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1,\ 0 \leq g_i \leq 1,\ \text{et Supp } g_i \subset a_i + U .$$

Calculons la norme N de la fonction :

$$h(y) = Pf(y) - \sum_{i=1}^{n} f(y-a_i) \int_G g_i(x)dM_H(x)$$

Par dualité, on utilise une fonction h' de L'_N et le théorème de Fubini pour justifier l'interversion des signes $\int$ dans ce qui suit :

$$\begin{aligned}
|<h,h'>| &= \left|\int_G h'(y)\Big(\int_G \sum_{i=1}^{n} (U_x f(y) - U_{a_i} f(y))g_i(x)dM_H(x)\Big)dm_G(y)\right| \\
&= \left|\int_G \Big(\sum_{i=1}^{n}\int_G (f(y-x)-f(y-a_i))h'(y)dm_G(y)\Big)g_i(x)\Big)dM_H(x)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{a_i+U} g_i(x)\Big(\int_G |f(y-x)-f(y-a_i)|\,|h'(y)|dm_G(y)\Big)dM_H(x)
\end{aligned}$$

Mais on a la majoration

$$\int_G |f(y-x)-f(y-a_i)|\,|h'(y)|dm_G(y) \leq N(U_{x-a_i}(f)-f)N'(h')$$

et pour x dans a_i+U , cette expression est inférieure à $\varepsilon N'(h')$. D'où

$$\begin{aligned}
|<h,h'>| &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} N'(h')\int_{a_i+U} g_i(x)dM_H(x) \\
&\leq \varepsilon N'(h')
\end{aligned}$$

ce qui donne $N(h) \leq \varepsilon$. Or, en posant $c_i = \int_G g_i(x)dm_G(x)$, on note que $c_i \geq 0$ et que $\sum_{i=1}^{i=n} c_i = 1$. Finalement, Pf appartient bien à E_f^N .

En outre, puisque P est un opérateur idempotent, il est clair que Pf est un point fixe de E_f^N pour l'opérateur P , ou, ce qui revient au même, admet le sous-groupe H comme sous-groupe de périodes. Montrons maintenant que Pf est l'unique fonction de E_f^N invariante par l'opérateur P ; Supposons qu'une fonction F soit dans E_f^N et soit invariante selon P . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n nombres c_i positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, et des éléments h_i de H assurant que $h(y) = F(y) - \sum_{i=1}^{n} c_i f(y-h_i)$ a une norme fonctionnelle N inférieure ou égale à ε . L'invariance par P s'écrit $\int_G F(y-x)dM_H(x) = F(y)$. Calculons la norme de Ph où $Ph = P(F- \sum_{i=1}^{n} c_i U_{h_i}(f))$:

$$N(Ph) = N[F(y) - \sum_{i=1}^{n} c_i \int_G f(y-x-h_i)dM_H(x)]$$

Mais puisque les éléments h_i sont dans le groupe H :

$$\int_G f(y-x-h_i)dM_H(x) = \int_G f(y-x)dM_H(x)$$

soit $N(Ph) = N(F-Pf)$. Mais on sait que $N(h) \leq \varepsilon$ donc

$$N(F-Pf) \leq \|P\| \; N(h) \leq \varepsilon$$

ce qui donne bien $F = Pf$ au sens de L^N .

La caractérisation géométrique qui précède, permet de démontrer divers résultats d'approximation sur les fonctions presque-périodiques (cf. DHOMBRES J. [2]). Notamment :

<u>PROPOSITION 6.3</u>. La limite de Césaro des translatées suivant $\{\theta Z\}$ d'une fonction presque périodique continue sur l'axe réel est uniformément atteinte, périodique et de période θ .

La limite de Césaro des translatées suivant $\{\theta Z\}$ désigne :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{p=-n}^{p=+n} f(x+p\theta)$$

Soit G un groupe topologique abélien localement compact possédant la propriété suivante : il existe une famille dénombrable $\{\mathcal{O}_n\}$ de sous-ensembles de G satisfaisant :

(1) $\mathcal{O}_n$ est un ouvert relativement compact et $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathcal{O}_n) = G$

(2) $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_{n+1}$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m_G[(x+\mathcal{O}_n) \cap (\mathcal{O}_n)']}{m_G(\mathcal{O}_n)} = 0$ pour tout x dans G .

D'après HEWITT E., ROSS K.A. [1], tout groupe abélien topologique, localement compact dénombrable à l'infini, possède cette propriété. On peut alors définir l'espace de Besicovitch-Marcinkiewicz $\mathcal{M}^P(G)$ comme espace des fonctions mesurables définies sur G et à valeurs complexes, telles que l'expression

$$\operatorname{Lim}_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}\left(\frac{1}{m_G(\mathcal{O}_n)} \int_{\mathcal{O}_n} |f(x)|^P dm_G(x)\right)^{1/P} = \mathcal{M}^P(f)$$

soit finie.

Pour $p \geq 1$, $\mathcal{M}^P$ constitue une semi-norme et l'espace quotient par le noyau de cette semi-norme est un espace de Banach. La norme est invariante par translations pour les fonctions f bornées. L'étude de ces espaces, en fait essentiellement celle des sous-espaces séparables, est faite dans BERTRANDIAS J.P. [1] dans le cas où $G = R$ ou VO-KHAC K [1] dans le cas plus général d'un groupe G au moyen des techniques d'ergodicité et de compacité faible de EBERLEIN W.F. ([1], [2]).

Pour une fonction presque périodique continue de Bohr, une propriété caractéristique est que l'ensemble des translatées de f constitue un ensemble relativement compact dans $C_b(G)$, espace des fonctions continues bornées sur G muni de la norme uniforme. $E_G(f)$ est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble précédent, donc est compact d'après le théorème de Mazur. Mais l'opérateur P laisse stable $E_G(f)$ donc admet un point fixe d'après le théorème de MARKOV-KAKUTANI (cf. DUNFORD, N., SCHWARTZ J.T. [1]). Nous avons démontré l'unicité de ce point fixe. En particulier, pour une fonction de Bohr, lorsque $p \geq 1$:

$$\operatorname{Lim}_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{m_G(\mathcal{O}_n)} \int_{\mathcal{O}_n} |f(x)|^P dm_G(x)\right)^{1/P} = \mathcal{M}^P(f) = \left(\int_{\bar{G}} |f(\bar{x})|^P dm_{\bar{G}}(\bar{x})\right)^{1/P}$$

Notamment, en appelant $A_p(G)$ la fermeture, au sens de $\mathcal{M}^p$, des polynômes trigonométriques généralisés sur G, on dispose d'un théorème analogue au théorème 6.2. On peut également donner des théorèmes beaucoup plus généraux sur les opérateurs linéaires sur $\mathcal{M}^p(G)$, commutant avec les translations, en particulier pour les opérateurs multiplicativement liés. Pour ne pas alourdir le texte, nous ne donnerons aucun développement de cet ordre dans ce travail.

Remarque. Sur l'algèbre $A(G)$ des fonctions continues presque périodiques de Bohr, on peut définir une opération de convolution selon $f \circledast g(x) = F * G(i(x))$ où F désigne le prolongement de f en une fonction continue sur G et i l'injection canonique de G dans $\bar{G}$.

PROPOSITION 6.4. Pour que P soit un opérateur linéaire et continu sur $A(G)$, commutant avec les translations, il est nécessaire et suffisant que P commute avec l'opération $\circledast$

D'une part, si g est un polynôme trigonométrique, on calcule facilement $P(f \circledast g) = f \circledast Pg = g \circledast Pf$ et on peut conclure grâce à la densité de $T(G)$ dans $A(G)$.

Réciproquement, la continuité de P provient du théorème du graphe fermé, car si f_n converge vers f et Pf_n vers g, la suite $Pf_n \circledast \hat{x} = f_n \circledast P(\hat{x})$ converge vers $g \circledast \hat{x} = f \circledast P(\hat{x}) = Pf \circledast \hat{x}$ et pour tout $\hat{x}$ dans G^n, on a $Pf \circledast \hat{x} = g \circledast \hat{x}$ donc $Pf = g$. La commutation avec les translations s'obtient à partir d'une approximation $\{g_\alpha\}$ de l'unité dans $\bar{G}$, formée par des polynômes trigonométriques généralisés (comme ceux de Bochner-Féjer dans $\bar{R}$). On note que $f \circledast g_\alpha$ converge uniformément vers f donc $P(U_h(f \circledast g_\alpha))$ converge uniformément vers $P(U_h f)$ tandis que $P(U_h(f \circledast g_\alpha)) = P(f \circledast U_h(g_\alpha)) = Pf \circledast U_h(g_\alpha) =$
$= U_h(Pf \circledast g_\alpha)$ qui converge uniformément vers $U_h(Pf)$.

Remarque. Dans le cas des fonctions faiblement presque périodiques (cf. EBERLEIN W.F. [1]), l'étude des opérateurs multiplicativement liés qui commutent avec les translations est moins précise. Toutefois, on peut montrer qu'un opérateur semi-multiplicatif continu est multiplicativement symétrique et se décompose en somme directe de deux tels opérateurs, l'un agissant sur les fonctions presque périodiques de Bohr, l'autre opérant dans l'espace des "Fluchtvektoren".

5. MESURES ASYMPTOTIQUES ET OPERATEURS DE MOYENNE SUR $A(R)$.

Pour étudier la répartition des valeurs prises par certaines fonctions, on peut introduire une notion de mesure asymptotique jouant le rôle d'une fonction de répartition. Cette idée fut introduite par TORTRAT A. [1]. Nous donnerons ici une présentation différente relative aux fonctions de $\mathfrak{M}^1(R)$, espace de Besicovitch-Marcinkiewicz des fonctions à valeurs réelles, construit sur R à partir du système $\mathcal{O}_n =]-n, +n[$. Précisément, on pose :

$$\mathfrak{M}_1(f) = \operatorname{Lim\,Sup}_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |f(t)|dt \quad \text{et} \quad M_T(f) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt$$

On notera M la limite de M_T lorsqu'elle existe. L'espace des classes de fonctions $\mathfrak{M}^1$ est un espace de Banach.

PROPOSITION 6.5. A toute fonction f de $\mathfrak{M}^1(R)$ correspond une famille $((u_f))$ de mesures de Radon, positives et de norme 1 sur l'axe réel. A toute mesure u_f de cette famille est associée une suite croissante non bornée de nombres positifs T_k de sorte que

$$\operatorname{Lim}_{T_k\to+\infty} \frac{1}{2T_k}\int_{-T_k}^{+T_k} e^{i\omega f(t)}dt = \int_R e^{i\omega t}du_f(t)$$

Soit R' un sous-ensemble dénombrable dense dans R . Puisque $|M_T(e^{i\omega f})| \leq 1$, par le procédé diagonal, on peut extraire une suite croissante et non bornée de nombres positifs T_k de sorte que $\lim_{k\to+\infty} M_{T_k}(e^{i\omega f})$ existe pour tout nombre ω dans R' . Mais on établit facilement la majoration

$$|M_{T_k}(e^{i\omega f}) - M_{T_k}(e^{i\omega' f})| \leq |\omega-\omega'|\,\mathfrak{M}_1(f)$$

laquelle assure que $\lim_{k\to+\infty} M_{T_k}(e^{i\omega f}) = M_f(\omega)$ existe pour tout ω réel d'une part, et d'autre part est une fonction lipschitzienne d'ordre 1 donc continue sur l'axe réel.

En outre cette fonction est définie positive puisque

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} \xi_k\bar{\xi}_\ell M_f(\omega_k-\omega_\ell) = \operatorname{Lim}_{k\to+\infty} M_{T_k}\Big(\big|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{i\omega_k f}\big|^2\Big) \geq 0$$

Le théorème de Bochner (cf. RUDIN W. [1]) assure l'existence d'une mesure de Radon u_f , positive et de norme 1 puisque $M(1) = 1$, telle que

$$M_f(\omega) = \int_R e^{it\omega}du_f(t) = \hat{u}_f(\omega)$$

(D'ailleurs, on note que pour $f = a \cos \alpha t$, $M_f(\omega) = J_o(a\omega)$ où J_o est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0 . En particulier

$$\chi_a(t) \frac{dt}{\pi\sqrt{a^2-t^2}} = du_f(t)$$

où $\chi_a(t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-a,+a]$).

Le calcul de l'intégrale $\frac{T}{4}.\int_{-\frac{2}{T}}^{+\frac{2}{T}} M_f(\omega)d\omega = .\int_R \frac{\sin\frac{2t}{T}}{\frac{2t}{T}} du_f(t)$ permet de connaître le comportement de u_f à l'infini en majorant $\left|\frac{\sin\frac{2t}{T}}{\frac{2t}{T}}\right|$ par 1 sur $[-T,+T]$ et par $\frac{1}{2}$ sur l'ensemble complémentaire. On obtient :

$$\frac{1}{2} u_f([-T,+T]') \leq \left(1 - \left|\frac{T}{4}.\int_{-\frac{2}{T}}^{+\frac{2}{T}} M_f(\omega)d\omega\right|\right) \leq \frac{T}{4}.\int_{-\frac{2}{T}}^{+\frac{2}{T}} |1-M_f(\omega)|d\omega$$

Or, $|1-M_f(\omega)| \leq |\omega| \mathcal{M}^1(f)$ donc on a l'estimation importante

$$(1) \qquad u_f([-T,+T]') \leq \left(\frac{T}{2}.\int_{-\frac{2}{T}}^{+\frac{2}{T}} |\omega|du\right)\mathcal{M}^1(f) \leq \frac{2}{T}\mathcal{M}^1(f)$$

La famille de mesures ainsi associée à une fonction f de $\mathcal{M}^1$ est équi-intégrable à l'infini et on peut montrer qu'il s'agit d'un ensemble de mesures compact pour la topologie de la convergence étroite. Cet ensemble est en outre invariant par une translation ou une dilatation portant sur la fonction f . Cependant, dans ce travail, nous allons nous restreindre à un cas où cette famille est réduite à une seule mesure. (Pour d'autres utilisations des mesures asymptotiques PHAM P.H. [1]).

Plus précisément, nous prenons l'algèbre $A(R)$ des fonctions presque périodiques de Bohr à valeurs réelles sur l'axe réel. On sait que si f appartient à l'algèbre $A(R)$, il en est de même pour $e^{i\omega f}$ donc

$$M_f(\omega) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \exp(i\omega f(t))dt$$

existe pour tout nombre ω réel. Remarquons que nous disposons ici de la majoration :

(2) $$|M_f(\omega) - M_g(\omega)| \leq |\omega| \mathcal{M}^1(f-g) \leq |\omega| \; \|f-g\|_\infty$$

En utilisant le vocabulaire des probabilités, nous disons que deux fonctions réelles presque-périodiques f et g sont complètement asymptotiquement indépendantes lorsque pour tous nombres réels a et b, ℓ et m, on a la relation :

(3) $$M_{aU_\ell(f)+bU_m(g)}(\omega) = M_{U_\ell(f)}(a\omega)M_{U_m(g)}(b\omega)$$

Cette définition revient à dire

(4) $$\mu_{aU_\ell(f)+bU_m(g)} = \mu_{af} * \mu_{bg}$$

Rappelons que le <u>spectre</u> d'une fonction presque périodique continue est constitué d'un ensemble dénombrable de nombres réels pour lesquels

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

n'est pas nul. Nous appelons $\Lambda(f)$ le <u>sous-groupe spectral</u> de R engendré par le spectre de la fonction presque périodique f.

<u>PROPOSITION 6.6</u>. Deux fonctions presque périodiques réelles f et g sont complètement asymptotiquement indépendantes lorsque leurs sous-groupes spectraux ont une intersection réduite à $\{0\}$.

Commençons par établir que pour deux nombres α et β linéairement indépendants sur Q, les fonctions $f(t) = \cos \alpha t$ et $g(t) = \sin \beta t$ sont complètement asymptotiquement indépendantes. Grâce à la relation (2), on a pour la topologie de la convergence compacte sur les fonctions entières :

$$M_{aU_\ell(f)}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} a^n M(f^n) \text{ car } M(U_\ell(f)) = M(f)$$

$$M_{bU_m(g)}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} b^n M(g^n)$$

et en posant $h^{n,k}_{\ell,m} = U_\ell(f^k)U_m(g^{n-k})$

$$M_{aU_\ell(f)+bU_m(g)}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} M(h^{n,k}_{\ell,m})$$

<u>LEMME 6.1</u>. Soient α et β deux nombres réels. Lorsque l'on n'a pas de relations de la forme $\ell'\alpha = \pm k'\beta$ où $0 \leq \ell' \leq \ell$ et $0 \leq k' \leq k$; ℓ, ℓ', k et k' étant

des nombres entiers, il vient :

$$M(f^k g^\ell) = M(f^k)M(g^\ell)$$

pour $f(t) = \cos \alpha t$ ou $\sin \alpha t$ et $g(t) = \cos \beta t$ ou $\sin \beta t$.

La démonstration est simple par récurrence. $M(fg) = M(f)M(g)$ sauf si $\alpha = \pm\beta$. Supposons le lemme exact jusqu'à l'ordre k et ℓ . Vérifions le pour $k+1$ et ℓ.

On a $\cos^{k+1}\alpha t = \sum_{m=o}^{k+1} \lambda_m \cos(m\alpha t)$

$$M(f^{k+1}g^\ell) = \sum_{m=o}^{k+1} \lambda_m M(\cos(m\alpha t)g^\ell(t))$$

$$= \sum_{m=o}^{k+1} \lambda_m M(\cos(m\alpha t))M(g^\ell) = M(f^{k+1})M(g^\ell)$$

Compte tenu de l'indépendance supposée de α et β sur Q , on a, puisque $\cos^k(\alpha t+\alpha\ell)$ est un polynôme en $\cos^{k'}\alpha t$ et $\sin^{k'}\alpha t$ pour $0 \leq k' \leq k$:

$$M_{aU_\ell(f)+bU_m(g)}(\omega) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} \sum_{k=o}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} M(f^k)M(g^{n-k})$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} i^n\omega^n \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{n-k!} a^k b^{n-k} M(f^k)M(g^{n-k})$$

$$= \left(\sum_{n=o}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} a^n M(f^n)\right) \left(\sum_{n=o}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} b^n M(g^n)\right)$$

Choisissons maintenant pour f un polynôme trigonométrique tel que $\Lambda(f)$ intersecte au plus βZ en $\{0\}$ et gardons $g = \cos \beta t$.

$$M_{aU_\ell(f)+bU_m(g)}(\omega) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} M(aU_\ell(f)+bU_m(g))^n$$

Mais on a

$$M(aU_\ell(f)+b\,U_m(g))^n = \sum_{k=o}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} M(f^k)M(g^{n-k})$$

car f_ℓ^k est un polynôme du type $\sum \lambda_p \cos \alpha_p t + \lambda'_p \sin \alpha_p t$ où les α_p sont dans $\Lambda(f)$. Finalement :

$$M_{aU_\ell(f) + bU_m(g)}(\omega) = M_f(a\omega)M_g(b\omega)$$

En prenant deux polynômes trigonométriques f et g tels que $\Lambda(f) \cap \Lambda(g) = \{0\}$ on a donc $M_{aU_\ell(f) + bU_m(g)}(\omega) = M_f(a\omega)M_g(b\omega)$. Or, l'on peut approcher uniformément toute fonction presque-périodique f de Bohr par des polynômes trigonométriques dont le spectre reste inclus dans le spectre de f . On peut utiliser par exemple les polynômes généralisés de Bochner-Fejer (cf. FAVARD J. [1]). En outre, si f_n converge vers f uniformément, $M_{f_n}(\omega)$ converge vers $M_f(\omega)$ pour la topologie de la convergence compacte. On termine alors sans peine la démonstration de la proposition 6.6 par passage à la limite. (En particulier, si f est une fonction presque périodique dont le spectre est composé de nombres réels indépendants sur Q

$$M_f(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} J_o(a_i\omega)J_o(b_i\omega) \quad \text{où} \quad f \sim \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos \omega_i x + b_i \sin \omega_i x\right)\Big)$$

<u>THEOREME 6.7. Sur l'algèbre des fonctions presque périodiques réelles et continues de Bohr, deux opérateurs linéaires et continus P_1 et P_2 , multiplicativement symétriques et qui commutent avec les translations sont mutuellement complémentaires si et seulement si pour toute f , les fonctions P_1f et P_2f sont complètement asymptotiquement indépendantes.</u>

En effet, P_1 et P_2 sont mutuellement complémentaires si et seulement si les sous-groupes Λ_1 et Λ_2 associés par le théorème 6.2 sont disjoints. Par suite, comme $\Lambda(P_1f) \subset \Lambda_1$ et $\Lambda(P_2f) \subset \Lambda_2$, on a bien la nécessité du théorème grâce à la proposition 6.6.

Réciproquement, soient f et g deux fonctions complètement asymptotiquement indépendantes. On a

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} M(aU_\ell(f) + bU_m(g))^n = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{i^n\omega^n}{n!} \sum_{k=o}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} M(f^k)M(g^{n-k})$$

donc par identification

$$\sum_{k=o}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} M(U_\ell(f^k)U_m(g^{n-k})) = \sum_{k=o}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} M(f^k)M(g^{n-k})$$

ce qui fournit pour $n \geq k \geq 1$

$$M(U_\ell(f^k))M(U_m(g^{n-k})) = M(f^k)M(g^{n-k}) = M(U_\ell(f^k)U_m(g^{n-k}))$$

donc $M(P(f))M(Q(g)) = M(P(U_\ell f)Q(U_m g))$ pour tous les polynômes réels P et Q .

Si ω appartient au spectre de f , il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{k} a_i f_{h_i}$ qui approche $e^{i\omega x}$ au sens de la topologie $\mathcal{M}^2$. En particulier, compte tenu de la majoration $\mathcal{M}_1(f) \leq \mathcal{M}_2(f) \leq \|f\|_\infty$ on dispose de

$$M(e^{i\omega x})M(g) = M(e^{i\omega x}g(x))$$

Si ω n'est pas nul, $M(e^{i\omega x}) = 0$ donc ω ne peut appartenir au spectre de g . De la même façon, un nombre réel non nul appartenant au spectre de Pf ne peut appartenir au spectre de Qg pour tous polynômes réels P et Q . Dès lors, si $P_1 f$ et $P_2 f$ sont complètement asymptotiquement indépendants, on a l'inclusion $Sp(P_1 f) \cap Sp(P_2 f) \subset \{0\}$. Or, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_3$ où P_3 est un opérateur du même type auquel est associé $\Lambda_3 = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ d'après le théorème 6.2. Si f est dans l'image de P_3 , $P_1 f = f$ et $P_2 f = f$, donc $Spf \subset \{0\}$, c'est-à-dire que f est une fonction constante, ce qui assure la mutuelle complémentarité des opérateurs P_1 et P_2 .

La notion de famille de mesures asymptotiques peut naturellement se définir sur un groupe abélien localement compact dénombrable à l'infini et s'interpréter comme limite de moyennes dans le cas d'un groupe satisfaisant les conditions énoncées au paragraphe 4. Pour des espaces fonctionnels convenables, on peut transcrire quelques résultats probabililistes. En outre, la classe $\mathcal{Q}_f$ des sous-ensembles D pour lesquels

$$u_f(D) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{m_G(\mathcal{O}_n)} m_G\{x \mid x \in \mathcal{O}_n, \ f(x) \in D\}$$

ne constitue pas une tribu dans G . Selon des conditions restrictives apportées à f , on peut donner des conditions nécessaires ou suffisantes pour que la classe $\mathcal{Q}_f$ contienne l'algèbre engendrée par les intervalles ou la tribu borélienne. Mais nous ne développons pas ces techniques dans ce travail.

x x x x x

x x x

x

INDEX DES DEFINITIONS

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

ENSEMBLES, ESPACES et ALGÈBRES.

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels positifs, 0 exclu.
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	espace topologique des nombres réels, complexes.
$T = R/Z$	tore ou espace topologique quotient des nombres réels modulo 1.
G	groupe abélien localement compact.
$G^\wedge$	groupe dual muni de sa topologie de dualité.
Λ	sous-groupe de $G^\wedge$.
$\bar{G}$	groupe compactifié de Bohr de G.
H	sous-groupe fermé de G, annihilateur du sous-groupe Λ.
$G^\wedge_d$	groupe $G^\wedge$ muni de la topologie discrète.
$A(G) = C(\bar{G})$	algèbre des fonctions presque-périodiques de Bohr sur G.
$T(G)$	algèbre des polynômes trigonométriques généralisés sur G.
$X, Y, \dots$	espaces topologiques compacts.
Y'	complémentaire du sous-espace Y dans l'espace X.
(X,Y)	couple de deux espaces topologiques compacts, $Y \subset X$.
βX	compactifié de Čech d'un espace topologique régulier.
$C(X)$	algèbre des fonctions continues et à valeurs complexes définies sur l'espace topologique compact X.
$C_o(X)$	idéal maximal de C(X).
$C_R(X)$	sous-algèbre de C(X) des fonctions à valeurs réelles.
$S_1(X), S_1^+(X)$	espace des mesures de Radon sur X de norme égale à 1, positives.
$M_r(X), M_r^+(X)$	espace des mesures de Radon sur X de norme inférieure ou égale à r, positives.
$\tilde{E}$	sous-espace de $C(X/\mathcal{R})$ associé à un sous-espace E de C(X).
$\mathcal{J}(Y), \mathcal{J}(\phi), \mathcal{J}(\mathfrak{M})$	sous-ensembles convexes . Chap IV §2, §3
$H_q(X)$	groupe d'homologie de X d'ordre q .
$\mathcal{R}(S_x)$	saturé de l'ensemble S_x par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Chap IV § 7
S_x	Supp μ_x = Supp $P^*(\delta_x)$ " "
$\mathcal{R}(x)$	classe d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ contenant le point x
$X/\mathcal{R}$	espace topologique quotient de X par la relation $\mathcal{R}$
Suppμ	support de la mesure de Radon μ.
p	application canonique $X \to X/\mathcal{R}$
$k(P)$	ensemble des points de nullité de l'opérateur P, c'est-à-dire ensemble des points x de X tels que $P(f)(x) = 0$ pour toute fonction f dans l'algèbre fonctionnelle $\mathcal{A}$ construite sur X.

$Re(ImP) = (ImP)_R$	espace des fonctions réelles appartenant à ImP.	
$Sp(f)$	spectre d'une fonction presque-périodique.	Chap VI § 5
$\Lambda(f)$	sous-groupe engendré par le spectre d'une fonction presque périodique.	Chap VI § 5
$\mathcal{A}$	algèbre commutative unifère sur le corps des nombres complexes.	
$\tilde{\mathcal{A}}$	(algèbre $\mathcal{A}$ munie d'un élément unité extérieur).	Chap II § 2.
$\mathcal{L}(\mathcal{A})$	algèbre des opérateurs linéaires sur $\mathcal{A}$.	
e	élément unité de l'algèbre unifère.	
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	tribus sur un ensemble Ω.	
μ	mesure positive sur une tribu complète $\mathcal{F}$.	
$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	espace mesuré (on supposera $\mu(X) = 1$, $\mu \geq 0$).	Chap V § 1
$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	espace des classes de fonctions à valeurs complexes, $\mathcal{F}$ mesurables, μ-essentiellement bornées.	
$L^N(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	espace fonctionnel de Banach régulier.	Chap V § 1
$L^{N'}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	espace fonctionnel de Banach dual.	Chap V § 1
$\mathcal{M}^P(G)$	espace de Besicovitch-Marcinkiewicz.	Chap VI § 4
$E_H^N(f)$	enveloppe convexe fermée dans l'espace L^N des translatées de la fonction f suivant le sous-groupe H.	
$E_{\bar{G}}^\infty(f)$	enveloppe convexe fermée dans l'espace L^∞ de toutes les translatées de la fonction f suivant $\bar{G}$.	
E_f	section commençante de base f.	Chap IV § 6
E_x	section commençante de base x	Chap IV & 7
$\mathcal{O}_f$	classe d'ensembles.	Chap VI § 5

RELATIONS et APPLICATIONS.

$\prec$	relation d'ordre sur X associé à un opérateur P.	Chap IV § 7
$\mathcal{R}$	relation d'équivalence fermée sur un espace topologique X.	
r	application surjective $X \to Y$; X et Y sont compacts.	Chap IV & 3
R	application $\tilde{S}(Y) \to Y$.	Chap IV § 3
$\mathrm{Sup}_p f$, $\mathrm{Inf}_p f$	voir le lemme 4.6.	Chap VI § 6
$\mathcal{Y}$	relation d'équivalence associée à un fermé Y de X.	Chap IV § 3
$\mathfrak{A}$	relation d'équivalence associée à une sous-algèbre A de C(X).	Chap IV § 6
$\langle\ ,\ \rangle_{G,\hat{G}}$	dualité entre G et $\hat{G}$.	

$< , >$	dualité entre $L^N(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ et $L^{N'}(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$.	
$<f,\mu> = \int_X f(x)d\mu(x) = \mu(f)$	intégrale de f selon la mesure μ.	
$\mathcal{G}$	relation d'équivalence associée à E.	Chap IV § 5
μ_f	mesure asymptotique de la fonction f.	Chap VI § 5
$*$	opérateur de convolution sur le groupe G.	
$\circledast$	opérateur de convolution sur l'algèbre A(G).	
ϕ	application continue $X \to Y$; X et Y sont compacts.	
$F(\phi)$	application continue $C(Y) \to C(X)$ donnée par $F(\phi)(f) = f \circ \phi$	Chap IV § 3
χ_E	fonction caractéristique d'ensembles E, de même $\chi_1, \chi_2, \ldots$	

OPERATEURS

P	opérateur linéaire sur l'algèbre $\mathcal{A}$.	
I	opérateur identique (noté Id dans les tableaux 1,2,3 ou 4)	
P^*	adjoint de l'opérateur P.	
$A(\alpha,\beta)$, $B(\alpha,\beta)$, $B(\alpha)$ $C(\alpha,\beta)$, $D(\alpha)$, $D'(\alpha)$	types d'opérateurs multiplicativement liés.	Chap II §1
$E(\alpha)$, $F(\alpha,\beta)$		"
DM, SM, HM; DMS, SMS	" "	"
MS, MAS		"
I, QI, D, Ba, R, PP	" "	"
UN, U2, MN, CS, C	"	"
nN, nI		"
M	opérateur de type multiplicatif.	"
$P_{ij}(f) = \chi_i P(\chi_j f)$		Chap I § 3
$p_{ij} = P(\delta_{x_i})(x_j)$		" III §1
[L], [L'], [M], [C]	matrices introduites au	" III §2
$\hat{P}$	opérateur transmué de P par la transformation de Gelfand.	Chap V § 6
Q_x	opérateur associé à l'opérateur P.	Chap IV § 7
R_Y	opérateur de restriction à un sous-espace Y.	Chap IV § 1

$\mathcal{P}$ relation d'équivalence associée à un opérateur P. Chap IV §3

m_G mesure de Haar de G, normalisée lorsque G est compact.

M_H prolongement à C(G) de la mesure de Haar de H.

NORMES & FONCTIONS SOUS-ADDITIVES.

N	norme fonctionnelle.	Chap V § 1
N'	norme fonctionnelle duale.	" § 2
N_p	norme fonctionnelle N d'ordre p.	" § 2
$\Vert f \Vert_\upsilon$, $\Vert f \Vert_{QU}$	normes de l'ordre.	"III § 5
$M_\infty(f) = \Vert f \Vert_\infty$	norme de la convergence uniforme.	
$\Vert f \Vert_p$	norme de l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.	" V § 1

$$\mathcal{M}_p(f) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \operatorname{Sup}\left(\frac{1}{m_G(\mathcal{O}_n)} \int_{\mathcal{O}_n} |f(x)|^p dm_G(x)\right)^{1/p}$$

$\mathcal{M}_p$	semi-norme de l'espace de Besicovitch-Marcinkiewicz.	" VI § 3
M_p	norme sur l'algèbre A(G).	

$$M_p^p(f) = \operatorname*{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x)|^p dx = \int_{\bar{R}} |f(\bar{x})|^p dm_{\bar{R}}(\bar{x})$$ " VI § 5

$$M_f(\omega) = \operatorname*{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{i\omega f(t)} dt = \int_R e^{i\omega t} d\mu_f(t)$$ " VI § 5

$$M(f) = \operatorname*{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)dt = \operatorname*{Lim}_{T\to\infty} M_T(f)$$ " VI § 5

BIBLIOGRAPHIE

ANDÔ T. [1] Contractive projections in L^P-spaces.
Pacific. J. Math. 17 (1966) p 391-405.

ARBAULT J. [1] Transformations de Reynolds sur les ensembles finis.
Centro Internationale di Mat. Estivo.Varenna.Settember (1957).

[2] Nouvelles propriétés des transformations de Reynolds.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 239 (1954) p.858-860.

ARENS R. [1] Extensions of functions on fully normal spaces.
Pacific J. Math. 2 (1952) p 11-22.

ATKINSON F.V. [1] Some aspects of Baxter's functional equations.
J. Math. Anal. and Appl. 7 (1963) p 1-30.

BAHADUR R.R. [1] Measurable subspaces and subalgebras.
Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955) p 565-570.

BAUER H.H. [1] Silovscher Rand und Dirichletsches Problem.
Ann. Inst. Fourier II (1961) p 89-136.

BASS J. [1] Suites stationnaires dans l'espace de Hilbert. Moyennes temporelles. Moyennes abstraites.
J. Math. Pures et Appl. 9ème Série 43 (1964) p 321-352.

[2] Moyennes de fonctions (avec DHOMBRES J.).
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 262 (1966) p.29-31.

[3] Les fonctions pseudo-aléatoires.
Mémorial des Sc. Math. Fasc 153 (1962).

BERTRANDIAS J.P. [1] Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p (Thèse).
Bull. Soc. Math. France (1966) Mémoire n°5 106 p.

BILLIK M.
ROTA G.C. [1] On Reynolds operators in finite dimensional algebras.
J. of Math. and Mech. 9 (1960) p 927-932.

BIRKHOFF G. [1] Moyennes de fonctions bornées.
Algèbre et théorie des nombres - Coll. Intern. C.N.R.S. 24 (1950) p. 143-153.

BOURBAKI N. [1] Intégration. Chap. 1,2,3 et 4 Hermann 1965.

[2] Topologie générale. Chap. 9 Hermann 1958.

[3] Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1,5 Hermann 1966.

BRAINERD B. [1] On the structure of averaging operators.
J. Math. Anal. and Appl. 5 (1962) p.347-377.

CORSON H.H.
LINDENSTRAUSS J. [1] On simultaneous extensions of continuous functions.
Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) p. 542-545.

DAY M.M. [1] Normed linear spaces.
Springer Verlag 1962 (2nd edition).

DHOMBRES J. [1] Caractérisation d'une classe de transformations semi-multiplicatives.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 264 (1967) p 1 3-116.

[2] Sur une classe de moyennes.
Ann. Inst. Fourier 57 (1967) p 135-156.

[3] Opérateurs semi-multiplicatifs.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 265 (1967) p 776-778.

[4] Opérateurs semi-multiplicatifs de norme unité.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 266 (1968) p 1046-1049.

[5] Sur des opérateurs d'un type multiplicatif.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 270 (1970) p 106-109.

[6] Sur les opérateurs multiplicativement liés dans les algèbres de dimension finie.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 270 (1970) p 444-447.

[7] Rôle de la symétrie multiplicative.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 270 (1970) p 942-945.

[8] Sur l'équation fonctionnelle $f(xf(y)) = f(yf(x))$ (à paraître)

[9] Opérateurs multiplicativement liés dans les algèbres finies (à paraître)

[10] Opérateurs multiplicativement liés sur C(X).
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 271 (1970) p 260-263.

[11] Famille de mesures asymptotiques associée à une fonction (à paraître).

DOUGLAS R.G. [1] Contractive projection on a L^1-space.
Pacific J. Math. 15 (1965) p 443-462.

Mme DUBREIL M.L.-JACOTIN [1] Etude algébrique des transformations de Reynolds.
Coll. d'algèbre supérieure Bruxelles 1956 (et autres références).

DUNFORD N., SCHWARTZ J.T. [1] Linear operators. Part I
Interscience Publ. 1967.

EBERLEIN W.F. [1] Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions.
Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1969) p 217-240.

[2] The spectrum of weakly almost periodic functions.
Michigan J. Math. 3 (1956) p 137-139.

FAVARD J. [1] Leçons sur les fonctions presque périodiques. Gauthier-Villars 1933.

GOODNER D.B. [1] Projections on normed linear spaces.
Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950) p 89-108.

GROTHENDIECK A. [1] Une caractérisation vectorielle métrique des espaces L^1 Canad. J. Math. 7 (1955) p 552-561.

HEWITT F., ROSS K.A. [1] Abstract harmonic analysis I. Springer Verlag 1963.

[2] Abstract harmonic analysis II Springer Verlag 1969.

HILLE E., PHILIPPS R.S. [1] Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. (1948). Coll. Publ. 31.

HU S.T. [1] Homotopy theory. Academic Press New-York 1959.

ITO T., AMEMIYA I. [1] A simple proof of the theorem by P.J. COHEN. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) p 774-776.

JAMISON B., SINE R. [1] Irreducible almost periodic Markov operators. J. Math. and Mech. 18 (1969) p 1043-1057.

KAMPE DE FERIET J. [1] Sur un problème d'algèbre abstraite posé par la définition de la moyenne dans la théorie de la turbulence. Ann. Soc. Sc. Bruxelles Sér. 1 63 (1949) p 165-180.

[2] La notion de moyenne dans la théorie de la turbulence. Rend. Semin. Math. Fis. di Milano 27 (1955-1956).

[3] L'état actuel du problème de la turbulence (I et II) La Science aéronautique 3 et 4 (1934).

KELLEY J.L. [1] Averaging operators on $C_\infty(X)$ Ill. J. Math. 2 (1958) p 214-223.

[2] Banach spaces with extension property. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952) p 323-326.

KINGMAN J.F.C. [1] On the algebra of queues. J. of Appl. Prob. 3 (1966) p 285-326.

KOLMOGOROFF A. [1] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Springer Verlag Berlin 1933.

LLYOD S.P. [1] On extreme averaging operators. Pacific J. Math. 14 (1963) p 305-310.

LARSEN R. [1] The multiplier problem. Lectures Notes in Math. 105 Springer Verlag 1969.

LUXEMBURG W.A.J., ZAANEN A.C. [1] Some remarks on Banach functions spaces. Nederl. Akad. van Wetenschappen Proc. Ser A 59 (1956) p 110-119.

[2] Compactness of integral operators in Banach functions spaces. Math. Ann. (1963) p 150-180.

[3] Notes on Banach functions spaces. Nederl. Akad. van Wetenschappen Note I 66 (1963) p 135-147 jusqu'à la Note XVI 68 (1965) p 646-667.

PHAM P.H. [1] Fonctions admettant une répartition asymptotique des valeurs. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 267 (1968) p 803-806.

MAHARAM D. [1] On a theorem of Von Neumann. Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958) p 987-994.

MENDES-FRANCE M. [1] Calcul des moyennes des fonctions aléatoires ou pseudo-aléatoires par échantillonnage. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 16 (1962).

MICHAEL E. [1] A linear mapping between function spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) p 407-409.

[2] Three mapping theorems. Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) p 410-415.

[3] Continuous selections.
Ann. of Math. 63 (1956) p 361-382.
Ann. of Math. 64 (1956) p 562-580.
Ann. of Math. 65 (1957) p 375-390.

MILLER J.B. [1] Some properties of Baxter operators. Acta Math. 17 (1966) p 387-400.

[2] Averaging operators and Reynolds operators in Banach algebras. J. Math. Anal. and Appl. 14 n°3 (1966) p 527-548.

MILUTIN A.A. [1] Homomorphism of spaces of continuous functions on compact of power continuum. Tieroia funct., Funct. Anal. i Pril. (Kharkov) 2 (1966) p 150-156.

MOY S.T.C. [1] Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces. Pacific J. Math. 4 (1954) p 47-63.

PEŁCZYNSKI A. [1] Linear extensions, linear averagings and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions. Dissertationes Mathematicae, Warszawa 58 (1968).

PHELPS R.R. [1] Lectures on Choquet's theorem.Van Nostrand 1966.

[2] Extreme positive operators and homomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc. (1963) p 265-274.

PICARD E. [1] Leçons sur quelques équations fonctionnelles. Cahiers Scientifiques 1950.

POINCARE H. [1] Oeuvres complètes Paris Gauthier-Villars 1952. Tome VIII Mécanique céleste et astronomie.

RAO M.M. [1] Conditional expectations and closed projections. Koninklighe Ned. Akad. Wettenschappen Série A 78 (1965) p 100-112.

REYNOLDS O. [1] On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion.
Trans. Roy. Phil. Soc. Ser. A 186 (1894) p 123-164.

ROTA G.C. [1] On the representation of averaging operators.
Rend. Sem. Math. della Univ. di Padova 30 (1960) 52-64.

[2] Reynolds operators.
Proc. of Symp. in Appl. Math. 16 (1964) p 70-83.

[3] Baxter algebras and combinatorial identities, I et II,
Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) p 325-329 et 330-334.

[4] Une théorie unifiée des martingales et des moyennes ergodiques.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 251 (1960) p 624-626.
" " " " " 252 (1960) p 2064-2066.

RUDIN W. [1] Fourier analysis on groups, Interscience Publ. 1962.

SAKAÏ S. [1] Derivations on W^*-algebras.
Ann. Math. 83 (1966) p 273-279.

SINGER I.N.
WERMER J. [1] Derivations on commutative normed algebras.
Math. Ann. Bd 129 (1955) p 260-264.

SPITZER F. [1] A combinatorial lemma and its applications to probability theory.
Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1960) p 731-762.

TOMIYAMA J. [1] On the projection of norm one in W^*-algebra.
Proc. Jap. Acad. 33 (1957) p 608-612.
日本学士院紀要

TORTRAT A. [1] Répartition asymptotique des fonctions presque périodiques de Besicovitch.
Trans. of the third Prague conf. (1962) p 725-741.

TZAFRIRI L. [1] Remarks on contractive projections in L^p-spaces.
Israel J. Math. 7 (1969) p 9-15.

UMEGAKI H. [1] Conditional expectation in an operator algebra.
Tôhoku Math. J. (2) 6 (1954) p 177-181
東北数学雑誌

[2] Tôhoku Math. J. (2) 8 (1956) p 86-100.

VO-KHAC K [1] Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles (Thèse).
Bull. Soc. Math. France Mémoire n°6 (1966) (175 p).

WULBERT D.E. [1] Averaging Operators.
Ill. J. of Math.

[2] Some complemented function spaces in C(X).
Pacific J. Math. 24 (1968) p 589-602.

ZAANEN A.C. [1] Banach function spaces.
Proc. of the Intern. Symp. on linear spaces , Jerusalem (1960) p 448-452.

ZIDÁK Z. [1] On relations between strict sense and wide sense conditional expectations. 2 (1957) p 283-288.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ZYGMUND A. [1] Trigonometric series Cambridge (2nd ed.) 1968.

(Texte définitif reçu le 2 Avril 1971)

Jean G. DHOMBRES
Institut de Mathématique
pure et appliquée
Tour 46
11 quai Saint-Bernard
75 - PARIS 05

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne -22-10-1971- n° 4171