JEAN-PIERRE KAHANE

# Sur la distribution de certaines séries aléatoires

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 25 (1971), p. 119-122
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__119_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 119 à 122

# SUR LA DISTRIBUTION DE CERTAINES SERIES ALEATOIRES

par

J. P. KAHANE

-:-:-:-

Soit $0 < \xi < 1$ . On désigne par $\mu_\xi$ la convolution infinie des mesures $\frac{1}{2}(\delta_{\xi^n} + \delta_{-\xi^n})$ $(n=1,2,\dots)$ , c'est-à-dire la distribution de la variable aléatoire $X = \sum_1^\infty \pm \xi^n$ , où les signes + et - sont choisis au hasard, indépendamment les uns des autres, avec même probabilité 1/2 . On désigne par $\hat{\mu}_\xi(u)$ la transformée de Fourier de $\mu_\xi$ . On posera $\theta = \frac{1}{\xi}$ .

$\mu_\xi$ <u>est une mesure pure</u> (J.W. 1935, V.K. 1940). Cela veut dire que, pour toute classe $\mathcal{A}$ de boréliens sur $\mathbb{R}$ , invariante par translation et fermée pour la réunion dénombrable, on a l'alternative suivante : ou bien $\mu_\xi(A) = 0$ pour tout $A$ de $\mathcal{A}$ , ou bien $\mu_\xi(A) = 1$ pour un $A$ de $\mathcal{A}$ . La démonstration est une application facile de la loi du zéro-un : si $\mu_\xi(A) > 0$ pour un borélien $A$ , on a $\mu_\xi(A') = 1$ , $A'$ étant la somme algébrique de $A$ et du module engendré par les $\pm\ \xi^n$ .

En particulier, $\mu_\xi$ est soit absolument continue, soit singulière.

$\mu_\xi$ <u>est une mesure diffuse</u>. Pour $\xi < \frac{1}{2}$ , elle est portée par un ensemble fermé $E_\xi$ , totalement discontinu, de mesure de Lebesgue nulle et de dimension de Hausdorff $\frac{-\log 2}{\log \xi}$ (pour $\xi = \frac{1}{3}$ , c'est l'ensemble triadique de Cantor). Pour $\xi = \frac{1}{2}$ , $\mu_\xi$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur $[-1,1]$ , et nulle hors de cet intervalle. Pour $\xi > \frac{1}{2}$ , $\mu_\xi$ a pour support l'intervalle $[-\frac{\xi}{1-\xi}, \frac{\xi}{1-\xi}]$ (K.W. 1935).

L'étude des $\mu_\xi$ et de leurs transformées de Fourier

(1) $$\hat{\mu}_\xi(u) = \prod_1^\infty \cos \xi^n u$$

remonte aux années 1930, et elle n'a guère fait de progrès depuis 1962 (G. 1962). On va indiquer les principaux résultats connus, en insistant sur l'importante contributions d'Erdös (E. 1940).

<u>Si</u> $\xi = 2^{-1/h}$ , h <u>entier</u> $\geq 2$ , $\mu_\xi$ <u>admet une densité de classe</u> $C^{h-1}$ , <u>et</u> $\hat{\mu}_\xi(u) = 0(\frac{1}{u^h})$ $(u \to \infty)$ (W. 1935). C'est immédiat parce que $\mu_\xi$ est alors convolution de h mesures homothétiques de $\mu_{1/2}$ ce qui s'écrit aussi

(2) $$\hat{\mu}_\xi(u) = \hat{\mu}_{\xi^h}(u)\, \hat{\mu}_{\xi^h}(\xi\ u) \dots \hat{\mu}_{\xi^h}(\xi^{h-1} u)$$

Si $\xi = \frac{p}{q}$ irréductible, $p \neq 1$, $\hat{\mu}_\xi(u) = O\left(\frac{1}{(\log u)^\alpha}\right)$ $(u \to \infty)$ pour un $\alpha > 0$ convenable (K. 1936). Si $\xi = \frac{1}{q}$, $q$ entier $> 2$, $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}} |\hat{\mu}_\xi(u)| > 0$. La première partie nécessite un calcul. La seconde, plus anciennement connue, résulte aisément de la formule

$$(3) \qquad \hat{\mu}_\xi(\lambda\theta^N \pi) = \prod_0^{N-1} \cos(\lambda\theta^n \pi) \prod_1^\infty \cos(\lambda\xi^n \pi)$$

où $\theta = \frac{1}{\xi}$ (ici, on prend $\theta = q$ et $\lambda = 1$).

Si $\theta \in S$ (classe des nombres de Pisot), $\overline{\lim\limits_{u \to \infty}} |\hat{\mu}_\xi(u)| > 0$ (E. 1939). La démonstration, très simple, repose encore sur la formule (3).

COROLLAIRE. Si $\theta \in S$, $\mu_\xi$ est singulière.

Si $\theta \notin S$, $\lim\limits_{u\to\infty} \hat{\mu}_\xi(u) = 0$ (Salem 1941). La démonstration repose sur (3) et le théorème de Pisot. C'est ainsi qu'on montre que tous les ensembles $E_\xi$ $(0<\xi<\frac{1}{2}, \theta \notin S)$ sont de multiplicité au sens du développement trigonométrique (voir p. ex. S. 1963).

Si $\theta \in T$ (classe des nombres de Salem ; cf. S. 1963), $\overline{\lim\limits_{u \to\infty}} |\hat{\mu}_\xi(u)\, u^\varepsilon| = \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. Cela résulte encore de la formule (3) et du théorème suivant (Y. Meyer; voir aussi S. 1963, p. 27) : si $\theta \in T$ et $\delta > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $|\sin \pi \lambda\theta^n| < \delta$ pour tout entier $n \geq 1$.

En sens opposé, la méthode d'Erdös (E. 1940), que nous allons rapidement exposer dans un instant, donne ceci :

Sauf si $\xi$ appartient à un ensemble exceptionnel $E_0$, de dimension de Hansdorff nulle, on a $\hat{\mu}_\xi(u) = O\left(\frac{1}{u^\gamma}\right)$ $(u \to \infty)$ pour un $\gamma = \gamma(\xi)$ convenable. De plus, pour tout $\alpha > 0$, il existe un ensemble exceptionnel $E_\alpha$, de dimension de Hausdorff $\leq \alpha$, et une fonction $\gamma^*(x)$ définie sur $]0,1[$, croissant de $0$ à $\infty$, telle que $\hat{\mu}_\xi(u) = O\left(\frac{1}{u^{\gamma^*}}\right)$ $(u \to \infty$ ; $\gamma^* = \gamma^*(\xi))$ quand $\xi \in ]0,1[\setminus E_\alpha$.

Comme corollaire, il existe une suite $\eta_m > 0$, tendant vers $0$, telle que, pour presque tout $\xi$ de l'intervalle $]1-\eta_m, 1[$, la mesure $\mu_\xi$ ait une densité de classe $C^m$ (E. 1939).

La méthode est inspirée de celle qu'utilise Pisot (P. 1938) pour montrer que l'ensemble des $\theta$ tels que, pour un $\lambda > 0$ convenable, $\lambda\theta^n$ tende vers $0$ modulo 1 est dénombrable (cf. aussi S. 1963, p. 11). On peut brièvement la décrire ainsi. Posons $\lambda\theta^n = a_n + \varepsilon_n$, et soit $M_n$ le point de coordonnées $(a_n, a_{n+1})$. La droite $y = \theta x$ coupe chaque disque de centre $M_n$ et rayon $|\varepsilon_n| + |\varepsilon_{n+1}|$. Il s'ensuit que, si $|\varepsilon_n| + |\varepsilon_{n+1}| + |\varepsilon_{n+2}|$ est assez petit, $M_{n+1}$ est bien déterminé par $M_n$ , et que, en tous cas, le nombre des choix possibles de $M_{n+1}$ quand on connaît $M_n$ est borné. Si l'on impose $\theta \in [a,b]$ $(1<a<b)$ , $1 < \lambda < \theta$, et de plus $|\varepsilon_n| < \varepsilon = \varepsilon\,(a,b)$ pour au moins $N-\nu$ valeurs de $n$ entre $1$ et $N$ (avec $\nu < \frac{N}{10}$ ) , on vérifie que le nombre de chemins $M_1$ , $M_2$ .... $M_N$ possibles ne dépasse pas $\binom{N}{3\nu} A^{3\nu}$ , où $A$ ne dépend que de $a$ et $b$ . Il en résulte que, pour chaque $N$ et $\nu$ , il existe un ensemble $E_{N,\nu}$ , réunion de $\binom{N}{3\nu} A^{3\nu}$ intervalles de longueurs $O(b^{-N})$ , tel que pour $\theta \in [a,b] \setminus E_{N,\nu}$ et $1<\lambda<\theta$ , on a $|\varepsilon_n| \geq \varepsilon$ pour au moins $\nu$ valeurs de $n$ entre $1$ et $N$ . La formule (3) permet de conclure.

Voici quelques résultats ultérieurs.

<u>Pour avoir $\hat{\mu}_\xi \in L^2$ (c'est-à-dire $\mu_\xi$ absolument continue, avec une densité de carré sommable), il faut et il suffit que le nombre de choix possibles de signes</u> + <u>et</u> - <u>dans l'inégalité</u>

$$|\pm 1 \pm \theta \ldots \pm \theta^{n-1} - (\pm 1 \pm \theta \ldots \pm \theta^{n-1})| < 1$$

<u>soit</u> $O(4^n\,\xi^n)$ <u>quand</u> $n \to \infty$ . (K.S. 1958). Malheureusement, on ne sait pas utiliser cette condition.

Cependant, A. Garsia a donné une condition explicite pour que $\mu_\xi$ soit absolument continue, a densité bornée, qu'il a pu appliquer dans le cas particulier suivant :

<u>Si</u> $\theta$ <u>est un entier algébrique de norme</u> 2 <u>dont tous les conjugués sont hors du disque</u> $|z| \leq 1$ ,$\mu_\xi$ <u>est absolument continue</u>, <u>à densité bornée</u> (G. 1962)

Les résultats qui précèdent laissent ouvertes les questions suivantes.

1. - Pour quelles valeurs de $\xi$ la mesure $\mu_\xi$ est-elle absolument continue, et pour quelles valeurs est-elle singulière ? (On sait qu'elle est singulière pour $\theta \in S$ , et absolument continue, en général, quand $\xi$ est voisin de $1$ ).

2. - Quel est l'ensemble des $\theta$ pour lesquels il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $\hat{\mu}_\xi(u) = O(\frac{1}{u^\varepsilon})$ $(u \to \infty)$ ? (On sait qu'il est de dimension nulle, et qu'il contient $S \cup T$ ).

3. - Evaluer la fonction $g(\xi) = \sup \{\gamma \mid \hat{\mu}_\xi(u) = O(\frac{1}{u^\gamma})\}$. Est-il vrai qu'on ait presque-partout $g(\xi) = \frac{-\log 2}{2 \log \xi}$ ? (Il est facile de voir que, pour $\xi < \frac{1}{2}$ , on a $g(\xi) \leq \frac{-\log 2}{2\log \xi}$ ) .

4. - Pour $\theta \in S$ , évaluer la borne inférieure inférieure des $\alpha$ tel que $\mu_\xi$ soit concentrée sur un ensemble borélien de dimension de Hansdorff $\alpha$ . (On peut essayer d'appliquer les méthodes de G. 1962).

BIBLIOGRAPHIE

(J.W. 1935) JESSEN, A. WINTNER. - Distribution functions and the Riemann $\zeta$-function, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (19635), 48-88 (voir théorème 11).

(V.K. 1940) E.R. VAN KAMPEN. - Infinite product measures and infinite convolutions, Amer. J. Math. 62 (1940), 417-448.

(G. 1962) A.M. GARSIA. - Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. Trans. Amer. Math. Soc. 102-(1962) 407-432.

(K.W. 1935) KERSHNER - A. WINTNER. - On symmetric Bernoulli convolutions, Amer. J. Math. 57 (1935), 541-548.

(E. 1940) P. ERDOS. - On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions, Amer. J. Math. 62 (1940), 180-186.

(W. 1935) A. WINTNER. - On convergent Poisson convolutions. Amer. J. Math. 57 (1935), 827-838.

(K. 1936) R. KERSHNER. - On singular Fourier - Stieltjes transforms, Amer. J. Math. 58 (1936), 450-452.

(E. 1939) P. ERDOS. - On a family of symmetric Bernoulli convolutions. Amer. J. Math. 61 (1939), 974-976.

(S. 1963) R. SALEM. - Algebraic numbers and Fourier analysis, Heath 1963.

(P. 1938) Ch. PISOT. - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. Ann. Schola Norm. Sup. Pisa 2 (1938), 205-248.

(K.S. 1958) J.P. KAHANE. et R. SALEM. - Sur la convolution d'une infinité de distributions de Bernoulli. Colloq. Math. 6 (1958), 193-202.

-:-:-:-

Université de Paris
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91 - Orsay (France)