MÉMOIRES DE LA SMF 103

FEUILLETAGES ET ACTIONS DE GROUPES SUR LES ESPACES PROJECTIFS

Julie Déserti
Dominique Cerveau

Société Mathématique de France 2005
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Déserti
IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France.
E-mail : `julie.deserti@univ-rennes1.fr`

D. Cerveau
IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France.
E-mail : `dominique.cerveau@univ-rennes1.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 37F75, 32M05, 32M17, 32M25, 32S65.

***Mots clefs*. —** Feuilletage holomorphe, action de groupes, théorie des invariants, calcul formel.

FEUILLETAGES ET ACTIONS DE GROUPES SUR LES ESPACES PROJECTIFS

Julie Déserti, Dominique Cerveau

***Résumé.* —** Un feuilletage holomorphe $\mathscr{F}$ sur une variété compacte complexe M est un $\mathscr{L}$-feuilletage s'il existe une action d'un groupe complexe G telle que les feuilles génériques de $\mathscr{F}$ soient les orbites de G. On s'intéresse essentiellement au cas de la codimension un sur les espaces projectifs dans l'esprit de la théorie des invariants qui ici peuvent être transcendants. On s'attache à présenter des exemples et des résultats de classification en petite dimension.

***Abstract* (Foliations and group actions on projective spaces). —** A holomorphic foliation $\mathscr{F}$ on a compact complex manifold M is said to be an $\mathscr{L}$-foliation if there exists an action of a complex Lie group G such that the generic leaf of $\mathscr{F}$ coincides with the generic orbit of G. We study $\mathscr{L}$-foliations of codimension one, in particular in projective space, in the spirit of classical invariant theory, but here the invariants are sometimes transcendental ones. We give a list of examples and general properties. Some classification results are obtained in low dimensions.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie classique des invariants, au sens où l'on peut l'entendre au XIX[e] siècle, propose étant donnée une action algébrique d'un groupe algébrique G sur une variété algébrique compacte M de décrire le corps des fonctions rationnelles R sur M invariantes sous l'action de G.

Parmi les pionniers de la théorie des invariants, on retiendra en particulier Sylvester et Hesse, puis Gordan et Noether qui font une approche que l'on qualifierait aujourd'hui d'effective. Ces travaux accompagnent le développement de l'algèbre linéaire, de la théorie des matrices et de la géométrie projective. Cette approche change radicalement, non sans polémique, avec les travaux de Hilbert et Hurwitz.

La géométrie classique produit tout un folklore d'exemples. Nous en rappelons certains, en liaison avec la classification des objets algébriques ; l'un des plus populaires est sans doute l'invariant j des courbes elliptiques que l'on peut voir de différentes manières : action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur :

$$\mathbf{C}\mathbb{P}(4) \simeq \{\text{quadruplets de points sur la sphère de Riemann}\}$$

ou action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ sur :

$$\mathbf{C}\mathbb{P}(9) \simeq \{\text{courbes de degré 3 dans } \mathbf{C}\mathbb{P}(2)\}$$

etc. Nous mentionnerons aussi l'exemple de Gordan-Noether en réponse à une affirmation de Hesse. L'ubiquité de cet exemple est tout à fait étonnante.

Dans tout le discours qui suit les objets sont définis sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Si $\mathrm{Aut}\, M$ désigne le groupe des automorphismes de M, on dispose d'un morphisme $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}\, M$ et R est invariante si :

$$R(\varphi(g) \cdot m) = R(m)$$

pour tout $m \in M$ et $g \in G$. Si $\chi(M)$ désigne l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur M, on sait, lorsque M est compacte, que $\chi(M)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre de Lie de dimension finie qui s'identifie naturellement à $\mathscr{L}ie(\mathrm{Aut}\, M)$. Par suite, φ induit un morphisme d'algèbres de Lie :

$$D\varphi\colon \mathscr{L}\!ie\, G \longrightarrow \mathscr{L}\!ie(\operatorname{Aut} M) \simeq \chi(M)$$

et produit une sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$: l'image de $D\varphi$. Notons que l'action de G sur M produit un « feuilletage » singulier $\mathscr{F}$ de la variété M. Nous dirons que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage ; nous noterons $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ la sous-algèbre de $\chi(M)$ associée à $\mathscr{F}$. Évidemment ce feuilletage peut être trivial, par exemple lorsque l'action est transitive ou à l'inverse lorsque G est un groupe discret. On s'intéressera au cas où ce feuilletage est de codimension 1 dans une situation générale, en particulier lorsque l'action n'est plus algébrique, c'est-à-dire lorsque les feuilles sont transcendantes. Sur une variété algébrique M compacte, un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 1 est associé à une 1-forme fermée rationnelle Ω. C'est une conséquence à peu près directe du fait que le groupe d'automorphismes de M est algébrique. Comme nous l'a signalé S. Cantat, ce résultat persiste si M est compacte kählerienne. Par contre ce n'est plus vrai dans le cas non kähler. L'exemple le plus standard est le suivant : soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ un sous-groupe discret cocompact. La variété $M = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$ est munie d'un $\mathscr{L}$-feuilletage correspondant à l'action du groupe triangulaire sur M. Ce feuilletage n'est pas défini par une 1-forme fermée mais est « transversalement projectif ». Il est probable que ce soit un fait général, ceci étant conforté par un résultat récent de [**4**].

Donnons maintenant quelques propriétés des $\mathscr{L}$-feuilletages de codimension 1 sur les espaces projectifs $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ (chapitre 1). Le degré d'un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ est majoré par $n-1$; lorsqu'il est maximal, on a alors $\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}} = n-1$ et on peut profiter pour n petit de la classification des algèbres de Lie pour donner une description des « invariants généralisés » de $\mathscr{F}$. Par invariant généralisé on entend une primitive de la forme fermée rationnelle Ω définissant $\mathscr{F}$ ou toute fonction « élémentaire » intégrale première de $\mathscr{F}$. Remarquons que les feuilles d'un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ sont dominées par $\mathbf{C}^{n-1}$; il suffit de choisir $n-1$ éléments génériques $X_1, \ldots, X_{n-1}$ dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et de considérer l'application :

$$(t_1, \ldots, t_{n-1}) \longmapsto \exp(t_1 X_1) \circ \cdots \circ \exp(t_{n-1} X_{n-1})(z)$$

qui est d'image dense dans la feuille passant par z. Ceci explique pourquoi les formes fermées Ω intervenant ici sont très spéciales ; par exemple le complément des pôles de Ω (les pôles sont invariants par $\mathscr{F}$) ne peut être Kobayashi hyperbolique. Les feuilles d'un $\mathscr{L}$-feuilletage peuvent être denses ou d'adhérence des variétés réelles Levi-plates singulières.

Nous montrons qu'un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, $n \geqslant 3$, possédant un point singulier isolé est nécessairement de degré 1 et que dans une carte affine ad-hoc les feuilles sont les niveaux d'une forme quadratique de rang maximum. C'est une conséquence plus ou moins directe du théorème de Frobenius singulier de B. Malgrange. Ce résultat devrait avoir un analogue en codimension supérieure.

Nous décrivons ensuite quelques propriétés des $\mathscr{L}$-feuilletages liées à la nature algébrique de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$. Par exemple si tous les éléments de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ sont nilpotents, le feuilletage associé possède une intégrale première rationnelle. Il faut cette hypothèse forte car même dans le cas abélien ce résultat ne persiste pas. Modulo des hypothèses de régularité naturelles et nécessaires, si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est résoluble, $\mathscr{F}$ possède un hyperplan invariant. Enfin si $[\mathscr{L}_{\mathscr{F}}, \mathscr{L}_{\mathscr{F}}] = \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, ce qui est le cas si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est semi-simple, alors $\mathscr{F}$ possède encore un invariant rationnel.

Le chapitre 2 est consacré à la description d'exemples, issus d'actions de groupes, pour la plupart classiques.

Dans le chapitre 3 nous montrons que les feuilletages de degrés 0 et 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ sont des $\mathscr{L}$-feuilletages. Nous donnons la liste des invariants généralisés correspondants. Nous présentons quelques exemples de $\mathscr{L}$-feuilletages de codimension supérieure à un.

Le chapitre 4 est consacré à la description complète des $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. De cette étude on peut déduire le théorème suivant :

Théorème 0.1. — *Soit G un groupe de Lie complexe connexe agissant sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. On est dans l'un des cas suivants :*

(i) *l'action est triviale,*

(ii) *il existe une orbite de dimension 3,*

(iii) *l'orbite générique est de dimension 2 et l'action de G possède un invariant généralisé (fonction constante sur les feuilles, éventuellement multivaluée) appartenant à conjugaison près à la liste qui suit :*

$$
\begin{aligned}
& z_0^{\lambda_0} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \quad \textit{où} \quad \sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 0, \quad z_0^{\lambda_0} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} z_3^{\lambda_3} \quad \textit{où} \quad \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 0, \quad \frac{z_0}{z_1}, \\
& \frac{z_1}{z_3} \exp\Big(\frac{z_0 z_3 + z_2 z_1}{z_1 z_3}\Big), \quad \frac{z_0}{z_3} \exp\Big(\frac{z_2^2 - z_1 z_3}{z_3^2}\Big), \quad \frac{z_0}{z_3} \exp\Big(\frac{z_2^2 - z_1 z_3}{z_0 z_3}\Big), \\
& \frac{z_1 z_3^{\kappa-1}}{z_0^{\kappa}} \exp\Big(\frac{z_2}{z_3}\Big), \quad \frac{z_0}{z_1} \exp\Big(\frac{z_2}{z_1}\Big), \quad \frac{z_3^2}{z_1 z_3 - z_2^2} \exp\Big(\frac{z_0}{z_3}\Big), \\
& \frac{z_2}{z_3} \exp\Big(\frac{z_0 z_3 - z_1 z_2}{z_3^2}\Big), \quad \frac{z_0 z_3 - z_1 z_2}{z_3^2} \exp\Big(\frac{z_2}{z_3}\Big), \\
& \frac{Q}{z_0^2} \ \textit{où } Q \textit{ est une forme quadratique}, \\
& \frac{z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3}{z_3^3}, \quad \frac{z_0^2 z_3^{2\kappa}}{z_3^2 (z_1 z_3 - z_2^2)^{\kappa}}, \quad \frac{z_0 z_3 + z_2 z_1}{z_1 z_3}, \\
& \frac{(z_0 z_3^2 - z_1 z_2 z_3 + \frac{z_2^3}{3})^2}{(z_1 z_3 - \frac{z_2^2}{2})^3} \quad \textit{et} \quad \frac{(z_0 z_3 - z_1 z_2)^{\kappa}}{z_2^{\kappa+1} z_3^{\kappa-1}} \quad \textit{avec } \kappa \neq \pm 1
\end{aligned}
$$

où κ et les λ_i désignent des nombres complexes non nuls.

(iv) *l'orbite générique est de dimension 1 ; le feuilletage associé est celui d'un champ de vecteurs linéaire.*

Ce théorème permet d'envisager une description topologique systématique des feuilles des $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$.

On note l'étrange fait suivant : toutes les surfaces invariantes qui apparaissent ci-dessus (ce sont les pôles de Ω) sont données par les zéros de polynômes à coefficients entiers.

Rappelons qu'un polynôme $P \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ est dit minimal s'il est à fibre générique connexe. Tout polynôme P se factorise comme suit : $P = p(Q)$ où $p \in \mathbf{C}[t]$ et Q est un polynôme minimal.

Du théorème précédent on déduit le :

Corollaire 0.2. — *Soit $P \in \mathbf{C}[z_1, z_2, z_3]$ un polynôme minimal ; notons :*

$$G^P := \{g \colon \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^3 \text{ affine}, P \circ g = P\}.$$

On suppose que l'orbite générique de G^P est de dimension 2, i.e. P est précisément l'invariant de G^P. Alors, à conjugaison, près P appartient à la liste qui suit :

$$z_0, \quad z_0^{p_0} z_1^{p_1} z_2^{p_2}, \quad z_0^{p_0} z_1^{p_1}, \quad Q, \quad z_0 + z_1 z_2 + z_2^3$$

où Q désigne un polynôme de degré 2 et les p_i des entiers premiers entre eux.

Le chapitre 5 est consacré aux $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 2. Actuellement nous n'en avons pas la description générale pour $n \geqslant 4$. On présente quelques exemples et on traite certains cas spéciaux.

Dans le chapitre 6 on propose ce qui devrait être la classification des $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Comme on l'a dit $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est ici de dimension 3. Nous avons utilisé le logiciel Maple pour décrire certaines sous-algèbres résolubles de dimension 3 de l'algèbre des matrices complexes 5×5. Une fois cette description, c'est-à-dire les différentes possibilités d'algèbres $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, obtenue, les calculs des invariants sont localement triviaux mais très lourds. Nous en avons présenté quelques-uns, même au risque de rebuter le lecteur... La taille des calculs explose de la dimension 3 à la dimension 4 et certains « résultats » ne seront finalement que des observations. Toutefois même si l'on ne peut prétendre obtenir des énoncés au sens classique, ceci permet de présenter une grande liste d'exemples que l'on peut espérer être exhaustive. Bien sûr, chaque fois qu'un énoncé dépend de l'utilisation de Maple, nous le signalerons.

Précisons tout de même quelques résultats sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ alors l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ fait partie de la liste suivante :

(1) $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$,
(2) $\mathbf{C}^3$,
(3) $\mathscr{L}_\alpha$ dont la présentation est $\{[X, Y] = Y, [X, Z] = \alpha Z, [Y, Z] = 0\}$,
(4) $\mathscr{L}_0 = \mathbf{C} \oplus A$ où A est l'algèbre de Lie du groupe affine.

On note qu'il manque ici quelques algèbres de dimension 3 ; en fait ce sont des dégénérescences des précédentes qui ne produisent pas de $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3. C'est le traitement des cas 3 et 4 qui a nécessité l'usage de Maple ; nous n'avons pas établi de programme spécifique mais seulement utilisé certaines commandes Maple.

Nous avons trouvé seize modèles dans l'éventualité (3) et neuf dans l'éventualité (4). L'étude des situations (1) et (2) se fait de façon classique. On obtient les deux résultats suivants :

THÉORÈME 0.3. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré* 3 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. *Si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est abélienne, alors le feuilletage $\mathscr{F}$ admet à conjugaison près l'une des intégrales premières suivantes :*

$$
\begin{aligned}
& z_0^{\kappa_0} z_1^{\kappa_1} z_2^{\kappa_2} z_3^{\kappa_3} z_4^{\kappa_4} \qquad \sum_{j=0}^{4} \kappa_j = 0,\\
& \frac{z_1^{\kappa+\xi+1}}{z_2^{\kappa} z_3^{\xi} z_4} \exp\Big(\frac{z_0}{z_1}\Big), \quad \frac{z_3^{\kappa} z_4}{z_1^{1+\kappa}} \exp\Big(\frac{z_1 z_2 - z_0 z_3}{z_1 z_3}\Big),\\
& \frac{z_0 z_4^2 - z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3^2}{z_1 z_4^2}, \quad \Big(\frac{z_1}{z_4}\Big) \exp\Big(\frac{z_0 z_4^2 - z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3^2}{z_1 z_4^2}\Big),\\
& \frac{z_1^{\kappa} z_4^{1-\kappa}}{z_0} \exp\Big(\frac{z_3^2 - z_2 z_4}{z_4^2}\Big), \quad \frac{z_0}{z_4} \exp\Big(\frac{z_1 z_4^2 + z_2 z_3 z_4 - z_3^3}{z_4^3}\Big),\\
& \frac{z_0 z_4^3 + z_1 z_3 z_4^2 - \frac{z_2^2 z_4^2}{2} - \frac{z_3^4}{4} + z_2 z_3^2 z_4}{z_4^4}.
\end{aligned}
$$

Les κ_i, κ et ξ sont des nombres complexes non nuls.

Dans le cas où $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ on montrera le :

THÉORÈME 0.4. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré* 3 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. *Si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est isomorphe à* $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, *alors le feuilletage $\mathscr{F}$ admet à conjugaison près l'une des intégrales premières suivantes :*

$$
\frac{z_3^2 z_4^2 - 4 z_2 z_4^3 - 4 z_3^3 z_5 + 18 z_2 z_3 z_4 z_5}{z_1^4}, \qquad \frac{\big(z_3 z_2^2 + z_5 z_1^2 - z_1 z_2 z_4\big)^2}{\big(z_3 z_5 - \frac{z_4^2}{4}\big)^3}
$$

ou la fonction j.

Notre classification est exprimée en termes de feuilletages, plus précisément en termes d'intégrales premières. Nous n'avons pas listé les actions de groupes ; mais dans le texte on trouvera les différentes sous-algèbres de Lie qui produisent des $\mathscr{L}$-feuilletages. On peut en déduire aisément les actions de groupes correspondantes.

Les $\mathscr{L}$-feuilletages jouent aussi un rôle important dans l'étude locale des singularités de feuilletages. En dimension 3, il existe une théorie de réduction des singularités ([**2**], [**1**]) ; les modèles locaux après réduction sont les $\mathscr{L}$-feuilletages associés à des algèbres de Lie abéliennes. Ils interviennent aussi de façon naturelle sur les variétés compactes complexes sans fonction méromorphe non constante mais possédant suffisamment d'automorphismes (tores généraux et plus généralement certains quotients de groupes de Lie par des réseaux cocompacts etc). Sur ces variétés M tout feuilletage est associé à la donnée d'une sous-algèbre de Lie de l'algèbre $\chi(M)$. Initialement nous avons entrepris cette étude pour la raison suivante. Il existe un feuilletage $\mathscr{F}_\Gamma$ dit exceptionnel ([**3**]) sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ associé à une action du groupe des transformations affines de la droite ; plus précisément on considère une cubique gauche Γ vue dans $\mathbf{C}^3 \subset \mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. Le groupe des automorphismes affines de $\mathbf{C}^3$ qui laissent invariant Γ est isomorphe au groupe des transformations affines de la droite et les feuilles de $\mathscr{F}_\Gamma$ (dans $\mathbf{C}^3$) sont les orbites de ce groupe. Ce feuilletage est « stable » et par conséquent l'adhérence de l'orbite de $\mathscr{F}_\Gamma$ sous l'action naturelle de $\operatorname{Aut}\mathbf{C}\mathbb{P}(3) \simeq \mathrm{PGL}(4,\mathbf{C})$ est une composante de l'espace des feuilletages de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. Les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}_\Gamma$ sont des surfaces de degré six, degré « anormalement » grand ; ce sont les niveaux de :

$$\frac{(z_0z_3^2 - z_1z_2z_3 + \frac{z_2^3}{3})^2}{(z_1z_3 - \frac{z_2^2}{2})^3}$$

intégrale première qui apparaît dans le théorème 0.1. La question est de savoir s'il existe d'autres feuilletages exceptionnels associés à des actions de groupe. Nous avons trouvé parmi les $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ un candidat à être exceptionnel ; il est de degré 3 et ses feuilles sont des hypersurfaces de degré douze. Elles sont données par les niveaux de la fonction rationnelle :

$$\frac{\left(z_0z_4^3 - (2z_1z_3 + z_2^2)z_4^2 + 2z_2z_3^2z_4 - \frac{z_3^4}{2}\right)^3}{\left(z_1z_4^2 - z_2z_3z_4 + \frac{z_3^3}{3}\right)^4}.$$

On conjecture que ce feuilletage est stable[(1)].

Nos résultats explicites peuvent présenter un autre intérêt, celui de construire des variétés compactes avec groupe d'automorphismes prescrit. Par exemple le fait suivant est bien connu. Soit $\Gamma \subset \mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ une cubique gauche ; le groupe G des automorphismes de $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ qui laissent invariant Γ est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$. La variété X obtenue par éclatement de $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ le long de Γ est une variété de Fano qui a pour groupe d'automorphismes le groupe $\widetilde{G}$ « éclaté de G ». Ainsi $\operatorname{Aut} X \simeq \mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$. Si maintenant, avant d'éclater Γ, on éclate un point O de Γ, on obtient une variété X' rationnelle dont le groupe d'automorphismes G' correspond aux éléments de G qui fixent O. Par suite G' est isomorphe au groupe affine et les orbites de G' sont les feuilles du feuilletage exceptionnel $\mathscr{F}_\Gamma$ (à transformation birationnelle près). En suivant cette idée, on construira à partir de nos exemples des variétés rationnelles à groupe d'automorphismes prescrit, en particulier en dimension 4.

L'essentiel du mémoire est « self-contained » ; nous avons laissé dans le texte des calculs explicites qui, bien que tous élémentaires, illustrent diverses techniques d'approche.

Nous remercions J.V. Pereira pour sa gentillesse et sa disponibilité permanentes. Merci à S. Lamy qui nous a signalé la construction de certaines variétés de Fano.

[(1)] F. Cukierman et J.V. Pereira ont récemment annoncé avoir prouvé cette conjecture.

CHAPITRE 1

$\mathscr{L}$-FEUILLETAGES

1.1. Feuilletages de codimension 1 de $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ associés à une algèbre de Lie de champs de vecteurs ; premières propriétés

On note $\pi\colon \mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ la projection canonique. Si $\omega = \sum_{k=0}^{n} A_k dz_k$ est une 1-forme intégrable sur $\mathbf{C}^{n+1}$ avec A_k polynôme homogène de degré ν sur $\mathbf{C}^{n+1}$, on désigne par $\operatorname{Sing}\omega$ le lieu singulier de ω :

$$\operatorname{Sing}\omega := \{A_0 = \cdots = A_n = 0\}.$$

Dans toute la suite on suppose, quitte à diviser les A_i par $\operatorname{pgcd}(A_0, \ldots, A_n)$, que $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\omega \geqslant 2$. On dira que ν est le degré de ω. Le feuilletage associé à la 1-forme ω descend à $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} z_k A_k = 0$ et tout feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ est ainsi défini. Le feuilletage défini par ω sur $\mathbf{C}^{n+1}$ est noté $\widetilde{\mathscr{F}}$ mais on dira indifféremment que ω définit $\mathscr{F}$ ou $\widetilde{\mathscr{F}}$. L'égalité $\operatorname{Aut}\mathbf{C}\mathbb{P}(n) = \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{C})$ conduit à :

$$\chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(n)) = \mathscr{L}ie\operatorname{Aut}\mathbf{C}\mathbb{P}(n) \simeq \mathscr{M}(n+1, \mathbf{C})/\mathbf{C}\cdot\mathrm{Id}$$

où $\chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(n))$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs holomorphe sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ et $\mathscr{M}(n+1, \mathbf{C})$ l'espace des matrices complexes $(n+1)\times(n+1)$. Ainsi un champ de vecteurs holomorphe sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ peut être vu comme un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbf{C}^{n+1}$ modulo $\mathbf{C}\cdot R$ où R désigne le champ radial $R = \sum_{i=0}^{n} z_i \partial/\partial z_i$. Notons encore que l'identification champs-matrices est naturelle puisque le flot d'un champ linéaire X est du type $e^{tA}z$ où A est « la matrice » de X. On prendra garde au fait que si les matrices A et B correspondent aux champs X et Y, alors le crochet de Lie $[X, Y]$ correspond à : $BA - AB$.

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur l'espace projectif $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. On introduit la :

Définition. — On dit que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 1 s'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(n))$ telle qu'en tout point générique $z \in \mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ on ait la propriété :

$(*)$ $\mathfrak{g}(z)$ est l'espace tangent à la feuille de $\mathscr{F}$ en z.

En particulier, on a $\dim \mathfrak{g}(z) = \dim\{X(z), X \in \mathfrak{g}\} = n-1$ pour z générique.

Si ω définit le $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$, alors l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est l'algèbre maximale pour la propriété $(*)$.

On peut de même définir les $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}^n$: il suffit de demander que les éléments de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ soient des champs de vecteurs affines (on prend une définition rigide compatible avec la prise de carte affine).

On peut étendre la notion de $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ ou $\mathbf{C}^n$ à la codimension q ; dans ce cas $\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}}(z) = n-q$. Nous en verrons quelques exemples. Sauf mention expresse du contraire tous les $\mathscr{L}$-feuilletages seront de codimension 1 et on dira simplement $\mathscr{L}$-feuilletage.

Remarque 1. — Soit $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ la forme quadratique standard sur $\mathbf{C}^3$. Le feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ décrit dans la carte affine $\mathbf{C}^3 \subset \mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ par la forme dQ est un $\mathscr{L}$-feuilletage dont l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_Q$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$; une base de $\mathscr{L}_Q$ est :

$$X_{k,j} = z_k \frac{\partial}{\partial z_j} - z_j \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad 1 \leqslant k < j \leqslant 3.$$

En particulier l'algèbre $\mathscr{L}_Q$ est de dimension 3. En tout point m de $\mathbf{C}^3 \smallsetminus \{0\}$, la dimension ponctuelle de $\mathscr{L}_Q$ est deux car $\mathscr{L}_Q(m) = \langle X_{k,j}(m) \rangle$ coïncide avec le plan tangent à la fibre $Q^{-1}(m)$. Ainsi l'égalité $\dim \mathscr{L}_Q(m) = 2$ en tout point m générique n'entraîne pas $\dim \mathscr{L}_Q = 2$. Par ailleurs, $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et la sous-algèbre de dimension 2 :

$$\mathscr{L}_0 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbf{C} \right\} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$$

peut être vue dans $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$. Soit $\{X_1, X_2\}$ une base de $\mathscr{L}_0$. En un point générique m, les vecteurs $X_1(m)$ et $X_2(m)$ sont indépendants ; en particulier $\mathscr{L}_0 \subsetneq \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ produisent le même feuilletage. Dans les problèmes de classification rencontrés plus loin, on travaille avec les algèbres de Lie et non avec les formes définissant les feuilletages. La notion de maximalité s'avère alors importante.

Soit ω une 1-forme intégrable sur $\mathbf{C}^n$ définissant un feuilletage $\widetilde{\mathscr{F}}$; alors $d\omega$, si elle est non nulle, définit un feuilletage de codimension 2 « contenu dans le feuilletage $\mathscr{F}$ ». En effet le théorème de Frobenius assure qu'au voisinage d'un point régulier m, il existe des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ dans lesquelles la 1-forme ω s'écrit $g dx_1$ où $g \in \mathscr{O}^*(\mathbf{C}^n, m)$. Si $d\omega(m) \neq 0$, alors $dg \wedge dx_1$ est non nul ; on peut donc supposer que $g = 1 - x_2$, *i.e.* $\omega = (1-x_2)dx_1$ et $d\omega = dx_1 \wedge dx_2$. Ainsi localement l'espace des champs tangents au feuilletage défini par ω coïncide avec l'espace engendré par les champs :

$$\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

tandis que l'espace des champs tangents au feuilletage défini par $d\omega$ est engendré par :

$$\frac{\partial}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Supposons que $\mathscr{F}$ soit un $\mathscr{L}$-feuilletage de $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ et que $X_1, \dots, X_s$ soit une base de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$. On note $\widetilde{X_1}, \dots, \widetilde{X_s}$ des relevés de $X_1, \dots, X_s$ à $\mathbf{C}^{n+1}$. Les $\widetilde{X_k}$ sont des champs de vecteurs linéaires et le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par R et les $\widetilde{X_k}$ est une algèbre de Lie notée $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ de dimension $s+1$; l'application π induit un morphisme d'algèbres :

$$\pi_* \colon \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$$

satisfaisant :

$$\pi_* \widetilde{X_k} = X_k, \quad \pi_* R = 0 \quad \text{et} \quad \ker \pi_* = \mathbf{C}R.$$

On remarque que si $\widetilde{z} \in \mathbf{C}^{n+1}$ est un point générique alors $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}(\widetilde{z})$ est l'espace tangent à la feuille du feuilletage $\widetilde{\mathscr{F}}$, relevé de $\mathscr{F}$, passant par $\widetilde{z}$.

Introduisons la sous-algèbre de $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ définie par :

$$\mathscr{L}'_{\mathscr{F}} := \{\widetilde{X} \text{ champs linéaires sur } \mathbf{C}^{n+1} \mid i_{\widetilde{X}} d\omega = 0\}$$

où ω définit le feuilletage $\widetilde{\mathscr{F}}$. On note que R n'est pas un élément de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$; en effet, l'identité d'Euler assure que $i_R d\omega = (\nu+1)\omega \neq 0$ où l'entier ν désigne le degré des composantes de ω. On remarque que si $i_X d\omega = 0$, alors $i_X \omega = 0$; ainsi $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ est associée au $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 2 de $\mathbf{C}^{n+1}$ décrit par $d\omega$ et $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}} \subset \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$.

On désigne par $\Omega^q(X)$ l'ensemble des q-formes holomorphes sur l'espace X. Les deux énoncés suivants nous seront utiles :

Lemme 1.1 ([**14**]). — *Soient* $\alpha \in \Omega^1(\mathbf{C}^n, 0)$ *tel que* $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \alpha \geqslant p+1$ *et* $\beta \in \Omega^q(\mathbf{C}^n, 0)$ *avec* $q \leqslant p$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\alpha \wedge \beta = 0$,

(ii) *il existe* γ *dans* $\Omega^{q-1}(\mathbf{C}^n, 0)$ *tel que* $\beta = \alpha \wedge \gamma$.

En particulier si α *et* β *sont deux germes de* 1*-formes holomorphes en* 0 *tels que* $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \alpha \geqslant 2$ *et* $\beta \wedge \alpha = 0$. *Alors* β *s'écrit* $h\alpha$ *où* h *est une fonction holomorphe.*

Démonstration. — On fait la preuve pour $q = 1$. Écrivons $\alpha = \sum_{k=1}^n a_k dz_k$ et supposons d'abord que :

$$\operatorname{Sing} \alpha = \{a_1 = \cdots = a_n = 0\} = \varnothing,$$

i.e. par exemple $a_1(0) \neq 0$. Soit $X := \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial z_1}$; alors $i_X \alpha = 1$ et l'égalité $\alpha \wedge \beta = 0$ conduit à $i_X(\alpha \wedge \beta) = 0$. Ainsi $\gamma = -i_X \beta$ convient.

Si maintenant $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \alpha \geqslant 2$ alors pour tout $m \notin \operatorname{Sing} \alpha$, on a :

$$\beta(m) = h(m)\alpha(m)$$

où h est une fonction holomorphe sur $(\mathbf{C}^n \setminus \operatorname{Sing}\alpha, 0)$. Comme $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\alpha \geqslant 2$, le théorème de prolongement d'Hartogs assure que h s'étend en une fonction holomorphe sur $(\mathbf{C}^n, 0)$ encore notée h. Réciproquement, si $\beta = h\alpha$ alors $\alpha \wedge \beta = 0$.

Pour le cas général on renvoie le lecteur à [**14**]. □

Corollaire 1.2. — *Si α et β sont deux 1-formes homogènes de même degré telles que $\alpha \wedge \beta = 0$. Alors $\beta = h\alpha$ où h est une fonction rationnelle de degré 0. Si $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\alpha \geqslant 2$, la fonction h est constante.*

Le lemme 1.1 est connu sous le nom de lemme de Rham-Saito.

Proposition 1.3. — *Le morphisme π_* induit un isomorphisme de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ sur $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$.*

Démonstration. — Par la remarque qui précède, tout élément de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ descend en un élément de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$. Soient $X_1, \ldots, X_s$ une base de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_s$ des relevés de $X_1, \ldots, X_s$ à $\mathbf{C}^{n+1}$ par π. Les X_k forment une base de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ donc sont tangents au feuilletage ; par conséquent $\widetilde{X}_k$ est tangent à ω, *i.e.* $i_{\widetilde{X}_k}\omega = 0$. Puisque $\omega \wedge d\omega = 0$, on a :

$$i_{\widetilde{X}_k} d\omega \wedge \omega = 0$$

et le corollaire 1.2 assure que :

$$i_{\widetilde{X}_k} d\omega = \mu(\widetilde{X}_k)\omega$$

où $\mu(\widetilde{X}_k) \in \mathbf{C}$. Rappelons que la dérivée de Lie $L_X\omega$ de ω par le champ X est définie par : $L_X\omega = i_X d\omega + d(i_X\omega)$. Comme $L_R\omega = (\deg\omega + 1)\omega$, quitte à changer $\widetilde{X}_k$ en $\widetilde{X}_k - \frac{\mu(\widetilde{X}_k)}{\deg\omega+1}R$, on peut choisir $\widetilde{X}_k \in \mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ et la proposition est évidente. □

On rappelle la :

Définition. — Un feuilletage $\mathscr{F}$ est de degré ν sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ s'il est décrit en coordonnées homogènes par une 1-forme intégrable homogène ω de degré $\nu + 1$ satisfaisant $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\omega \geqslant 2$.

Donnons une interprétation géométrique du degré. Soient $\mathscr{F}$ un feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, $\mathscr{D}$ une droite générique de $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, z un point de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{F}_z$ la feuille de $\mathscr{F}$ passant par z ; le degré de $\mathscr{F}$ est égal au nombre de points z de $\mathscr{D}$ tels que l'hyperplan tangent à $\mathscr{F}_z$ en z contienne $\mathscr{D}$. En effet, soit ω une 1-forme de degré $\nu + 1$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$ définissant $\mathscr{F}$; alors ω s'écrit :

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} A_k dz_k$$

où les A_k sont des polynômes homogènes de degré $\nu + 1$. Dans la carte affine $z_0 = 1$, on note :

$$\omega_0 := \omega_{|z_0=1} = \sum_{k=1}^{n} A_k(1, z_1, \ldots, z_n) dz_k.$$

Supposons que la droite $\mathscr{D} := \{z_2 = \cdots = z_n = 0\}$ soit une droite générique ; dans la carte $z_0 = 1$ le fait que ω annule le champ radial se traduit sur $\mathscr{D}$ par :

$$A_0(1, z_1, 0, \ldots, 0) + z_1 A_1(1, z_1, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Comme génériquement (sur le choix de $\mathscr{D}$) le polynôme $A_0(1, z_1, 0, \ldots, 0)$ est de degré $\nu+1$, on trouve que $A_1(1, z_1, 0, \ldots, 0)$ est de degré ν. Or $\omega_{0_{|\mathscr{D}}} = A_1(1, z_1, 0, \ldots, 0) dz_1$, donc $\omega_{0_{|\mathscr{D}}}$ s'annule en ν points : le nombre de points de tangence entre le feuilletage et la droite d'équation $\{z_2 = \cdots = z_n = 0\}$ est ν.

La proposition suivante contrôle le degré d'un $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ ainsi que la dimension de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ en degré maximal :

Proposition 1.4. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré ν sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ défini par une 1-forme ω. Alors $\nu \leqslant n-1$. De plus, si $\nu = n-1$, alors $\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}} = n-1$.*

Démonstration. — Soient $X_1, \ldots, X_s$ une base de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et $\widetilde{X}_k$ des relevés des X_k. Soit m un point générique, *i.e.* $\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}}(m) = n-1$. On peut supposer, quitte à réindicer, que l'espace vectoriel engendré par :

$$R(\widetilde{m}), \widetilde{X}_1(\widetilde{m}), \ldots, \widetilde{X}_{n-1}(\widetilde{m})$$

(où $\pi(\widetilde{m}) = m$) est de dimension n, de sorte que la 1-forme $\overline{\omega}$ définie par :

$$\overline{\omega} = i_R i_{\widetilde{X}_1} \ldots i_{\widetilde{X}_{n-1}} dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

est homogène de degré n et non identiquement nulle ; de plus son noyau satisfait : $\ker \overline{\omega}(\widetilde{m}) = \langle R(\widetilde{m}), \widetilde{X}_1(\widetilde{m}), \ldots, \widetilde{X}_{n-1}(\widetilde{m})\rangle$. Par ailleurs, $\ker \omega(\widetilde{m})$ est l'hyperplan tangent à la feuille passant par m. Ainsi si $\widetilde{m}$ est un point générique, on a $\ker \omega(\widetilde{m}) = \ker \overline{\omega}(\widetilde{m})$: les deux 1-formes $\overline{\omega}$ et ω sont colinéaires. Le lemme de de Rham-Saito assure l'existence d'un polynôme homogène $f_{n-\nu-1}$ tel que $\overline{\omega} = f_{n-\nu-1}\omega$; comme ω est de degré $\nu+1$ et $\overline{\omega}$ de degré n, le polynôme homogène $f_{n-\nu-1}$ est de degré $n-\nu-1$ et $n-1 \geqslant \nu$.

Supposons maintenant que $\nu = n-1$; avec les notations précédentes, on a $f_{n-\nu-1} = f_0 \in \mathbf{C}^*$. Par suite les champs linéaires $R, \widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{n-1}$ sont linéairement indépendants en tout point $\widetilde{m}$ régulier pour $\widetilde{\mathscr{F}}$; ainsi les champs holomorphes $X_1(m), \ldots, X_{n-1}(m)$ sont linéairement indépendants en tout point $m \in \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \smallsetminus \operatorname{Sing} \mathscr{F}$. Soient $X \in \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et $m \in \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \smallsetminus \operatorname{Sing} \mathscr{F}$, on a :

$$X(m) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(m) X_k(m)$$

où les applications α_k sont holomorphes sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n) \smallsetminus \operatorname{Sing} \mathscr{F}$. Comme $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \mathscr{F} \geqslant 2$, le théorème de prolongement de Hartogs assure que les α_k s'étendent à $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ tout entier et sont donc constantes. $\square$

On déduit de la classification des algèbres de Lie de dimension deux le :

Corollaire 1.5. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. Alors $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est abélienne de dimension 2 ou isomorphe à l'algèbre du groupe des transformations affines.*

La classification des $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ résultera de celle de certaines sous-algèbres de Lie de dimension 2 de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$.

Définition. — Un feuilletage $\mathscr{F}$ décrit en coordonnées homogènes par la 1-forme ω possède un facteur intégrant s'il existe un polynôme homogène P non identiquement nul tel que la 1-forme ω/P soit fermée.

Proposition 1.6 ([**5**]). — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ donné en coordonnées homogènes par la 1-forme ω. Supposons que $\mathscr{F}$ possède un facteur intégrant P ; si $P = P_1^{n_1+1} \dots P_s^{n_s+1}$ est la décomposition de P en facteurs irréductibles, alors :*

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{P_1^{n_1+1} \dots P_s^{n_s+1}} &= \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{dP_k}{P_k} + d\Big(\frac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}}\Big) \\ &= d\Big(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \log P_k + \frac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}}\Big)\end{aligned}$$

où H désigne un polynôme homogène et les λ_k des éléments de $\mathbf{C}$.

Bien que techniquement difficile, l'énoncé est « essentiellement » le théorème de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à une variable. Il y a un énoncé analogue pour les germes holomorphes ([**5**]).

Remarques 2

(i) Le feuilletage associé à la forme ω/P a en général des singularités, les croisements $P_j = P_k = 0$ notamment. Les feuilles de ce feuilletage sont les composantes connexes des niveaux de la fonction multivaluée :

$$\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \log P_k + \frac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}}.$$

(ii) Si les λ_k sont tous nuls, le feuilletage $\mathscr{F}$ admet une intégrale première rationnelle $H/P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}$. Il suit de l'identité d'Euler $i_R\omega = 0$ que $H/P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}$ est homogène de degré 0. Finalement, $\deg(P) = \deg \omega + 1 = \nu + 2$.

(iii) Si l'un des λ_k est non nul, l'égalité :

$$\frac{\omega}{P} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{dP_k}{P_k} + d\left(\frac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}}\right)$$

conduit aussi à $\deg(P) = \deg \omega + 1 = \nu + 2$.

(iv) Il suit de (ii) et (iii) que ω/P définit une 1-forme fermée rationnelle sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$.

(v) Si le polynôme P est réduit, *i.e.* si n_k est nul pour tout k, alors, toujours pour des raisons d'homogénéité, le polynôme H est constant et on peut prendre $H = 0$. On dit alors que le feuilletage $\mathscr{F}$ défini par $\omega/P = d\,(\sum_{k=1}^{s} \log P_k)$ est logarithmique ; l'identité d'Euler implique que $\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \deg(P_k) = 0$.

(vi) À l'intégrale première $\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \log P_k + \dfrac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}}$ on préfère parfois son exponentielle $\prod_{k=1}^{s} P_k^{\lambda_k} \exp\Big(\dfrac{H}{P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}}\Big)$.

La proposition qui suit est bien classique ([**5**]) :

Proposition 1.7. — *Soient $\mathscr{F}$ un feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ décrit par la 1-forme ω, soit $X \in \chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(n))$ et $\exp(tX)$ le flot de X. Supposons que X ne soit pas tangent à $\mathscr{F}$ et que $\mathscr{F}$ soit invariant par X, i.e. $(\exp tX)^*\mathscr{F} = \mathscr{F}$. Alors $i_{\widetilde{X}}\omega$ est un facteur intégrant de $\mathscr{F}$, où $\widetilde{X}$ est un relevé de X.*

Démonstration. — Les hypothèses se traduisent par :

(i) $i_{\widetilde{X}}\omega = P$ est un polynôme homogène non identiquement nul,
(ii) $(\exp t\widetilde{X})^*\omega \wedge \omega = 0$.

En dérivant (ii), on obtient :

$$(L_{\widetilde{X}}\omega) \wedge \omega = 0$$

ou encore :

$$(i_{\widetilde{X}}d\omega + d(i_{\widetilde{X}}\omega)) \wedge \omega = 0.$$

Comme ω est intégrable, on a :

$$i_{\widetilde{X}}(\omega \wedge d\omega) = 0$$

soit :

$$(i_{\widetilde{X}}\omega)d\omega + i_{\widetilde{X}}d\omega \wedge \omega = 0$$

qui équivaut à :

$$d\Big(\frac{\omega}{P}\Big) = 0. \qquad \square$$

Définition. — Un champ de vecteurs X comme ci-dessus est appelé symétrie de $\mathscr{F}$.

Via la proposition précédente, on peut établir qu'un $\mathscr{L}$-feuilletage de $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ possède un facteur intégrant, c'est-à-dire est défini par une 1-forme fermée rationnelle :

Théorème 1.8. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. Alors $\mathscr{F}$ possède un facteur intégrant. Plus précisément, on a l'alternative :*

(i) *le feuilletage $\mathscr{F}$ possède une symétrie,*
(ii) *le feuilletage $\mathscr{F}$ possède une intégrale première rationnelle non triviale.*

En particulier $\mathscr{F}$ est défini par une 1-forme fermée rationnelle sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$.

Démonstration. — À l'image de [**12**], on introduit les deux sous-groupes de Aut $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ suivants :

$$G_1 := \langle \exp tY \mid Y \in \mathscr{L}_{\mathscr{F}} \rangle$$

le groupe analytique engendré par les flots des champs tangents à $\mathscr{F}$ et :

$$G_2 := \{\phi \in \operatorname{Aut} \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \mid \phi^* \mathscr{F} = \mathscr{F}\}.$$

Alors que G_2 est un sous-groupe algébrique de $\operatorname{Aut} \mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, il se peut que G_1 ne le soit pas. On a l'inclusion $G_1 \subset G_2$. Notons G_1^Z l'adhérence de Zariski de G_1 et G_2^0 la composante neutre de G_2 ; comme G_1 est connexe, G_1^Z aussi et $G_1^Z \subset G_2^0$. On a l'alternative :

– $\mathscr{L}ie\, G_1 \subsetneq \mathscr{L}ie\, G_1^Z \subset \mathscr{L}ie\, G_2$,
– $G_1 = G_1^Z$.

Dans le premier cas, si $X \in \mathscr{L}ie\, G_1^Z \smallsetminus \mathscr{L}ie\, G_1$, alors X est non tangent à $\mathscr{F}$ (maximalité de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$) et $\exp tX \in G_2^0$. Par suite X est une symétrie.

Dans le deuxième cas, le groupe G_1 est algébrique ; comme il agit sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ par action algébrique, l'adhérence ordinaire de toute orbite $G_1 \cdot m$ est algébrique comme adhérence de l'image d'un morphisme algébrique. Par suite toute feuille de $\mathscr{F}$ est d'adhérence algébrique. Il résulte du théorème de Darboux-Jouanolou ([**5**], [**10**]) que $\mathscr{F}$ possède une intégrale première rationnelle. □

Ainsi énoncé ce théorème est semblable à un résultat de J.V. Pereira et P. Sánchez ([**12**]). Il se généralise comme suit (la preuve est analogue) :

Théorème 1.9. — *Un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension un d'une variété algébrique est défini par une forme fermée rationnelle.*

Lemme 1.10. — *Soient $\mathscr{F}$ un feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ décrit par une 1-forme ω, X une symétrie et Y un champ tangent au feuilletage. Alors $i_{[X,Y]}\omega = 0$, i.e. $[X,Y]$ est tangent au feuilletage $\mathscr{F}$.*

Démonstration. — En un point régulier, le théorème de Frobenius assure que ω s'écrit udx_0 où u est une unité et x_0 une submersion. Si on complète les coordonnées à l'aide de $x_1, \ldots, x_n$ alors les champs locaux tangents à ω sont engendrés par $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Comme $X = \sum_{k=0}^n X_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ est une symétrie, la 1-forme $\frac{\omega}{i_X \omega}$ est fermée. Or $i_X\omega = uX_0$; donc $\frac{dx_0}{X_0}$ est fermée, *i.e.* :

$$X = \ell(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^n X_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Puisque le champ Y est tangent au feuilletage, il s'écrit $\sum_{k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial x_k}$; alors :

$$[X,Y] = \left[\ell(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^n X_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_{k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right]$$

et $[X,Y]$ annule ω. □

Remarque 3. — Le lemme précédent est évidemment de nature locale.

COROLLAIRE 1.11. — *Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ et X un champ de vecteurs non tangent au feuilletage $\mathscr{F}$. Le champ X est une symétrie de $\mathscr{F}$ si et seulement si $[X, \mathscr{L}_{\mathscr{F}}] \subset \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$.*

Démonstration. — Soit $Y \in \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, le lemme 1.10 assure que si X est une symétrie alors le champ $[X, Y]$ est tangent au feuilletage $\mathscr{F}$. Par maximalité de l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, le champ $[X, Y]$ est un élément de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$.

Réciproquement, le théorème de Frobenius assure que localement au voisinage d'un point régulier m la 1-forme ω décrivant $\mathscr{F}$ s'écrit $u dx_0$. L'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathscr{L}'_{\mathscr{F}} \oplus \mathbf{C}R$ est de dimension ponctuelle n. Le module des champs tangents en m au feuilletage coïncide avec le module engendré par $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ et avec le module engendré par $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$. Soit $\widetilde{X}$ un relevé de X ; la condition $[\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}] \subset \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ implique que, pour tout champ Y local tangent à $\widetilde{\mathscr{F}}$, le champ $[\widetilde{X}, Y]$ est tangent au feuilletage. En particulier, c'est le cas pour chaque $[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial x_i}]$, $i \geqslant 1$. Supposons que le champ $\widetilde{X}$ s'écrive :

$$\widetilde{X} = X_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \cdots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Comme la 1-forme ω annule :

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = -\frac{\partial X_0}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_0} + \ldots$$

on a $-\frac{\partial X_0}{\partial x_k} = 0$ pour tout $k \geqslant 1$; on note puisque X n'est pas tangent à $\widetilde{\mathscr{F}}$ que $X_0 = \ell(x_0) \neq 0$. Ainsi $\omega / i_X \omega = dx_0 / \ell(x_0)$ est fermée, ce qui implique que X est une symétrie. □

Les théorèmes qui suivent proposent un procédé de construction en cascade :

THÉORÈME 1.12. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré ν sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ défini en coordonnées homogènes sur $\mathbf{C}^{n+1}$ par la 1-forme ω de degré $\nu + 1$. Supposons que le $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ n'ait pas d'intégrale première rationnelle, alors $\widetilde{\mathscr{F}}$ a une symétrie linéaire Z sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Cette symétrie induit un facteur intégrant P de degré $\nu + 2$ dont les niveaux définissent un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré $\leqslant \nu + 1$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Ce feuilletage se prolonge en un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n+1)$.*

Démonstration. — Soit $X \in \mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$; puisque P est un facteur intégrant de ω on a :

$$i_X \left(d\omega - \frac{dP}{P} \wedge \omega \right) = 0$$

et comme $X \in \mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$, on a $i_X d\omega = i_X \omega = 0$. Par conséquent, on obtient : $i_X dP = 0$.

Soit $G \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{C})$ le groupe analytique de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$: c'est le groupe engendré par les flots des éléments de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$. Ce groupe n'est pas algébrique sinon les feuilles de $\mathscr{F}$ seraient algébriques et, par le théorème de Darboux-Jouanolou, le feuilletage $\mathscr{F}$ admettrait une intégrale première rationnelle ce qui est exclu. On considère alors

G^Z l'adhérence de Zariski de G ; on a : $\dim \mathscr{L}ie\, G < \dim \mathscr{L}ie\, G^Z$. Soit G^P le groupe algébrique défini par :

$$G^P = \{h \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{C}) \mid P \circ h = P\};$$

pour tout champ X de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$, le champ X annule P donc $P(\exp tX) = P$ autrement dit $G \subset G^P$. Ainsi $G^Z \subset G^P$ et :

$$\mathscr{L}'_{\mathscr{F}} = \mathscr{L}ie\, G \subsetneq \mathscr{L}ie\, G^Z \subset \mathscr{L}ie\, G^P.$$

Par maximalité de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ la dimension ponctuelle de $\mathscr{L}ie\, G^P$ est n ; en effet un champ linéaire qui appartient à $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ en tout point générique appartient à $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$. Le facteur intégrant P, de degré $\nu + 2$, apparaît donc comme invariant d'un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{C})$ à orbites génériques de dimension n ; le $\mathscr{L}$-feuilletage associé à P est un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 1 et de degré $\leqslant \nu + 1$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$ que l'on peut prolonger à $\mathbf{C}\mathbb{P}(n+1)$. □

Remarque 4. — L'inégalité « $\leqslant \nu + 1$ » est due au fait que l'on ne suppose pas le polynôme P réduit ; si $P = P_1^{n_1+1} \cdots P_s^{n_s+1}$ est de degré $\nu + 2$, la 1-forme :

$$P_1 \cdots P_s \sum_{k=1}^{s} (n_k + 1) \frac{dP_k}{P_k}$$

définissant le feuilletage associé à P est de degré strictement inférieur au degré de P dès que l'un des n_k est strictement positif. Un argument élémentaire utilisant le théorème de Puiseux dit que l'égalité est satisfaite lorsque les n_i sont nuls.

L'énoncé 1.12 a une réciproque lorsque le polynôme P est réduit :

Théorème 1.13. — *Soit P un polynôme homogène réduit de degré k sur $\mathbf{C}^{n+1}$ dont la décomposition en polynômes irréductibles s'écrit $P_1 \cdots P_s$ avec $s \geqslant 2$. Si P définit un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}^{n+1}$, il existe des $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ de degré $k-1$ ayant pour facteur intégrant P.*

Démonstration. — On définit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension ponctuelle n par :

$$\mathfrak{g} := \{X \text{ champs linéaires} \mid i_X dP = 0\}.$$

Si $X \in \mathfrak{g}$, le flot de X est tangent aux niveaux de P et en particulier tangent à $P^{-1}(0)$; d'où :

$$X(P_k) = \mu_k(X) P_k$$

avec $\mu_k \colon \mathfrak{g} \to \mathbf{C}$ linéaire. Soit $(\lambda_k)_{k=1,\dots,s}$ satisfaisant :

$$\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \deg(P_k) = 0,$$

alors la 1-forme $\Omega = \sum_{k=1}^{s} \lambda_i \frac{dP_k}{P_k}$ définit un $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}_\Omega$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. En effet, soit :

$$\mathfrak{g}' = \left\{X \in \mathfrak{g} \mid \textstyle\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mu_k(X) = 0\right\} \subset \mathfrak{g}.$$

Cette algèbre de Lie tangente au feuilletage logarithmique $\mathscr{F}_\Omega$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ et de dimension ponctuelle $n-1$. Comme P est un polynôme, ses niveaux (excepté $P^{-1}(0)$) n'adhèrent pas à l'origine donc $R \notin \mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathbf{C}R \oplus \mathfrak{g}'$ est de dimension ponctuelle n et tangente au feuilletage $\mathscr{F}_\Omega$. Pour $(\lambda_k)_{k=1,\dots,s}$ générique ([**5**]), la 1-forme $\omega = P\Omega$ satisfait $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \omega \geqslant 2$ et $\mathscr{F}_\Omega$ est de degré $k-1$. □

Remarque 5. — Si $s=1$, alors pour tout élément X de $\mathfrak{g}$ on a : $\mu_1(X) \equiv 0$.

Si $s \geqslant 2$, alors $\mu_i(X) \not\equiv 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$; en effet, si $\mu_i(X) \equiv 0$ on a $X(P_i) = 0$ pour tout champ X de $\mathfrak{g}$. Ainsi les feuilletages décrits par P_i et P coïncident et $s = i = 1$.

1.2. $\mathscr{L}$-feuilletages avec une singularité isolée en dimension $n \geqslant 3$

Rappelons la définition d'un feuilletage à singularité isolée.

Définition. — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On dit que $\mathscr{F}$ a une singularité isolée en m si m est isolé dans $\operatorname{Sing} \mathscr{F}$.

Remarque 6. — On démontre que si $\mathscr{F}$ est défini par la 1-forme $\omega = \sum_{k=1}^n a_k dz_k$ alors $\mathscr{F}$ est à singularité isolée en m si et seulement si le germe en m de l'ensemble $\{a_1 = \dots = a_n = 0\}$ est réduit à $\{m\}$.

On montre ici qu'un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ ayant une singularité isolée est associé à une forme quadratique de rang maximum. Les outils nécessaires sont le théorème de Frobenius de Malgrange ([**11**]) ainsi que le résultat suivant d'algèbre commutative :

Proposition 1.14 ([**15**]). — *Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathscr{O}(\mathbf{C}^n, 0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $\{a_1 = \dots = a_n = 0\} = \{0\}$

(ii) *le module des relations :*

$$M_a := \big\{(b_1, \dots, b_n) \mid \textstyle\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0, b_i \in \mathscr{O}(\mathbf{C}^n, 0)\big\}$$

est engendré par les relations triviales :

$$b_{kj} = (0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0, -a_k, 0, \dots, 0).$$

Le théorème de Frobenius singulier de Malgrange donne une condition géométrique d'existence d'intégrale première holomorphe pour un feuilletage singulier :

Théorème 1.15 ([**11**]). — *Soit ω un germe de 1-forme holomorphe intégrable en 0. Si $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \omega \geqslant 3$, il existe $f \in \mathscr{O}(\mathbf{C}^n, 0)$ et $g \in \mathscr{O}^*(\mathbf{C}^n, 0)$ tels que $\omega = g df$.*

Le théorème de Malgrange est inopérant en dimension 2 : la condition $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \omega \geqslant 3$ est satisfaite lorsque ω n'a pas de singularité et là il s'agit du théorème de Frobenius classique.

Énonçons le théorème principal de cette partie :

Théorème 1.16. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, $n \geqslant 3$, ayant un point singulier isolé. Alors $\mathscr{F}$ est de degré 1 et il existe une carte affine $\mathbf{C}^n \subset \mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ telle que $\mathscr{F}_{|\mathbf{C}^n}$ soit associé à une forme quadratique de rang maximum.*

Remarque 7. — L'énoncé n'exige pas que le lieu singulier soit réduit à un point mais qu'il existe un point singulier isolé.

Démonstration. — Supposons que le point singulier de $\mathscr{F}$ soit l'origine 0 d'une carte affine $\mathbf{C}^n \subset \mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. Si $X \in \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, on sait que dans la carte affine $\mathbf{C}^n \subset \mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ le champ X s'écrit :

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k(z)\frac{\partial}{\partial z_k} + \widetilde{\ell}(z)R$$

où $\widetilde{\ell}$ est linéaire, les a_k affines et R le champ radial de $\mathbf{C}^n$.

Le champ X s'annule en 0 sinon toute la trajectoire de X passant par l'origine serait singulière pour $\mathscr{F}$, ce qui contredirait l'hypothèse $\mathscr{F}$ admet une singularité isolée. Ainsi les a_k sont linéaires, *i.e.* X s'écrit :

$$X = X' + \ell(X)R$$

où $\ell\colon \mathscr{L}_{\mathscr{F}} \to (\mathbf{C}^n)^*$ est linéaire et X' un champ linéaire sur $\mathbf{C}^n$.

Soient $X_1, \ldots, X_{n-1}$ des éléments de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ tels que pour z générique, on ait :

$$\dim\langle X_1(z), \ldots, X_{n-1}(z)\rangle = n-1.$$

La 1-forme Ω sur $\mathbf{C}^n$ définie par :

$$\Omega = i_{X_1}\cdots i_{X_{n-1}} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

est intégrable et s'écrit :

$$\Omega = \Omega_{n-1} + \Omega_n$$

où les Ω_k sont homogènes de degré k,

$$\Omega_{n-1} = i_{X_1'}\cdots i_{X_{n-1}'} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

et $i_R\Omega_n = 0$. Il se peut que Ω s'annule sur une hypersurface et se laisse diviser par un polynôme ; c'est en fait le cas. Le feuilletage $\mathscr{F}$ est défini par une 1-forme à singularité isolée en l'origine ; le théorème de Malgrange assure l'existence d'un élément f de $\mathscr{O}(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que df définisse localement $\mathscr{F}$ en l'origine. Si $X = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial z_k} \in \mathscr{L}$, alors $X \cdot f = i_X df = 0$, autrement dit $\sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial f}{\partial z_k} = 0$. Comme nécessairement df est à singularité isolée, la proposition 1.14 assure que le module des relations des $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ est engendré par les relations triviales ; on a :

$$X = \sum \mu_{kj}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{1}$$

où les μ_{kj} désignent des éléments de $\mathscr{O}(\mathbf{C}^n, 0)$. Comme $\dim\langle X_1(z), \ldots, X_{n-1}(z)\rangle = n-1$ pour z générique, les X' ne sont pas tous identiquement nuls et puisque f a une singularité isolée à l'origine, f est non submersive. En calculant le 1-jet d'un élément X générique on constate via (1) que :

$$f = q + \text{ termes d'ordre supérieur}$$

où q est une forme quadratique non triviale. Comme $\Omega \wedge df = 0$, le lemme de de Rham-Saito assure l'existence de G de $\mathscr{O}(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que :

$$\Omega = \Omega_{n-1} + \Omega_n = Gdf = G(dq + \text{ termes d'ordre supérieur}).$$

Remarquons que $\Omega_{n-1} \neq 0$ sinon on aurait :

$$i_R\Omega = i_R\Omega_{n-1} + i_R\Omega_n = 0$$

qui impliquerait $i_R df = 0$, ce qui est absurde. Comme Ω est d'ordre $n-1$ et dq d'ordre 1, l'égalité :

$$\Omega = \Omega_{n-1} + \Omega_n = G(dq + \text{termes d'ordre supérieur})$$

entraîne que G est d'ordre $n-2 \geqslant 1$. On en déduit que G s'annule sur une hypersurface et par conséquent Ω aussi ; or Ω est polynomiale donc cette hypersurface est algébrique. Ainsi G s'écrit UP où U désigne un élément de $\mathscr{O}^*(\mathbf{C}^n, 0)$ et P un polynôme :

$$P = P_{n-2} + \cdots + P_N$$

avec P_i homogène de degré i et $P_{n-2} \neq 0$. Finalement Ω s'écrit :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_{n-1} + \Omega_n = Gdf = PUdf \\ &= (P_{n-2} + \cdots + P_N)(\omega_1 + \cdots + \omega_{N'}) = P\omega\end{aligned}$$

où les ω_k sont des 1-formes homogènes de degré k et $\omega_1 = dq$; on suppose que P_N et $\omega_{N'}$ sont non nuls.

Par identification, on a :

$$\begin{cases} \Omega_{n-1} = P_{n-2}dq \\ \Omega_n = P_{n-2}\omega_2 + P_{n-1}dq \\ 0 = P_{n-2}\omega_3 + P_{n-1}\omega_2 + P_n dq \\ \vdots \\ 0 = P_N\omega_{N'}. \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\begin{cases} N + N' = n \\ 1 \leqslant N' \\ n-2 \leqslant N \end{cases}$$

autrement dit on a l'alternative :

– $N' = 1$ et $N = n-1$
– $N' = 2$ et $N = n-2$.

Dans le premier cas, $P = P_{n-2} + P_{n-1}$, la 1-forme ω vaut ω_1 et $\mathscr{F}$ est un feuilletage de degré 1. Dans le second cas, $P = P_{n-2}$ et $\omega = \omega_1 + \omega_2$ avec $i_R\omega_2 = 0$ car $i_R\Omega_n = 0$. Ce qui signifie ici encore que $\mathscr{F}$ est de degré 1. La classification des feuilletages de degré 1 (que nous rappelons au chapitre 3) nous permet de trouver une carte affine dans laquelle $\omega_2 = 0$. Ainsi $\mathscr{F}$ est défini par dq où q est une forme quadratique nécessairement de rang maximum. □

Remarque 8. — Ce théorème n'est pas correct en dimension 2 ; sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ tous les feuilletages de degré 1 sont des $\mathscr{L}$-feuilletages et possèdent une singularité isolée (trois comptées avec multiplicité) sans toutefois être associés à une forme quadratique.

1.3. Théorèmes généraux

On rappelle quelques résultats élémentaires sur les algèbres de Lie et on présente leur traduction en terme de $\mathscr{L}$-feuilletages. On renvoie aux livres classiques pour ces résultats.

Proposition 1.17. — *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{M}(n, \mathbf{C})$ dont tous les éléments sont semi-simples. Alors $\mathfrak{g}$ est diagonalisable, i.e. conjuguée à une sous-algèbre de matrices diagonales.*

On en déduit aisément la :

Proposition 1.18. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de champs de vecteurs linéaires sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Si tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont semi-simples, alors $\mathfrak{g}$ est abélienne et* $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}(m)$ *pour $m \in \mathbf{C}^{n+1}$ générique.*

Démonstration. — La proposition 1.17 assure que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à une algèbre de matrices diagonales ; ainsi si $X_1, \ldots, X_s$ est une base de $\mathfrak{g}$, on peut trouver un système de coordonnées $z_0, \ldots, z_n$ tel que :

$$X_k = \sum_{j=0}^{n} \mu_{j,k} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Alors la matrice :

$$A = (\mu_{j,k})_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant s}}$$

a pour rang s la dimension de $\mathfrak{g}$. Évaluons l'élément $\sum_{k=1}^{s} \lambda_k X_k$ de l'algèbre $\mathfrak{g}$ au point générique $(1, \ldots, 1)$ (chaque $m = (m_1, \ldots, m_n)$, avec $m_j \neq 0$, se ramène à $(1, \ldots, 1)$ par un isomorphisme diagonal). Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mu_{0,k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mu_{n,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Par suite l'espace engendré par les $\sum_{k=1}^{s} \lambda_k X_k$ évalué en $(1, \ldots, 1)$ est de dimension s. □

On obtient comme conséquence directe :

Corollaire 1.19. — *Soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{L}$*-feuilletage sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$*. Si tous les éléments de* $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ *sont semi-simples, alors* $\mathscr{F}$ *est linéairement conjugué à un feuilletage logarithmique du type* $\overline{\omega}$ *:*

$$\overline{\omega} = z_0 \cdots z_n \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \frac{dz_j}{z_j}, \quad \lambda_j \in \mathbf{C}$$

où les z_j *sont des coordonnées homogènes et* $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 0$*.*

Démonstration. — Soit ω une 1-forme définissant le feuilletage $\mathscr{F}$. On identifie $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ à $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$. Par la proposition 1.17 il existe un système de coordonnées $z_0, \ldots, z_n$ dans lequel $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ est diagonale. Un élément X de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ s'écrit :

$$X = \sum_{j=0}^{n} \mu_j(X) z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

où $\mu_j(X) \in \mathbf{C}$. Alors l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par les champs $X_1, \ldots, X_{n-1}$, base de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$, et $X_0 = R$. Si $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ satisfait :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 0 \\ \sum_{j=0}^{n} \mu_j(X_k) \lambda_j = 0 \text{ pour } k = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

alors $\overline{\omega} = z_0 \cdots z_n \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \frac{dz_j}{z_j}$ définit $\mathscr{F}$. □

Remarques 9

(i) Comme nous le verrons plus loin, tous les $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ associés à une algèbre abélienne ne sont pas conjugués à un feuilletage logarithmique.

(ii) L'adhérence de l'ensemble des feuilletages conjugués aux feuilletages logarithmiques définis par :

$$\overline{\omega} = z_0 \cdots z_n \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{dz_k}{z_k}$$

forme une composante irréductible de l'adhérence de l'ensemble des feuilletages de degré $n-1$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ ([**3**]).

(iii) On note aussi que les limites de feuilletages définis par des 1-formes du type $\overline{\omega}$ ne sont pas nécessairement des $\mathscr{L}$-feuilletages ; soit $\mathscr{F}$ le feuilletage sur $\mathbf{C}^4 = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ décrit par la 1-forme :

$$\omega = z_0 z_1 (z_1 - z_0) z_3 \left(\kappa_0 \frac{dz_0}{z_0} + \kappa_1 \frac{dz_1}{z_1} + \kappa_2 \frac{d(z_1 - z_0)}{z_1 - z_0} + \kappa_3 \frac{dz_3}{z_3} \right)$$

avec $\sum_{i=0}^{3} \kappa_i = 0$. On remarque que ω apparaît comme $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega_\varepsilon$ où :

$$\omega_\varepsilon = z_0 z_1 (\varepsilon z_2 + z_1 - z_0) z_3 \left(\kappa_0 \frac{dz_0}{z_0} + \kappa_1 \frac{dz_1}{z_1} + \kappa_2 \frac{d(\varepsilon z_2 + z_1 - z_0)}{z_1 - z_0} + \kappa_3 \frac{dz_3}{z_3} \right)$$

avec $\sum_{i=0}^{3} \kappa_i = 0$; le feuilletage $\mathscr{F}$ est donc limite des $\mathscr{L}$-feuilletages $\mathscr{F}_\varepsilon$. On peut montrer que ω ne définit pas un $\mathscr{L}$-feuilletage de la façon suivante ; si :

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C}^4 \\ z &\longmapsto (\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)) \end{aligned}$$

est une application entière qui évite les hyperplans $z_0 = 0$, $z_1 = 0$ et $z_0 = z_1$, il résulte du théorème de Picard qu'il existe une relation non triviale :

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 = 0, \quad a_i \in \mathbf{C}.$$

En appliquant cette remarque aux flots des champs linéaires tangents à ω, on constate que la condition de dimension ponctuelle 3 ne peut être réalisée.

On rappelle la :

Définition. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, on note $(\mathfrak{g}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_{i+1} = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i].$$

On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble si $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ pour un certain p. Un idéal I d'une algèbre $\mathfrak{g}$ est dit résoluble s'il l'est en tant qu'algèbre.

Rappelons aussi le théorème de triangulation des algèbres de Lie résolubles :

Théorème 1.20. — *Toutes les algèbres de Lie complexes résolubles de matrices $\mathfrak{g}$ sont triangulables, i.e. il existe une matrice inversible P telle que $P\mathfrak{g}P^{-1}$ soit triangulaire.*

Définition. — Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. On dit que $\mathscr{F}$ est régulier si pour tout point $m \in \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \setminus \operatorname{Sing}\mathscr{F}$ la dimension ponctuelle de $\mathscr{L}_\mathscr{F}$ en m est $n-1$.

On remarque qu'un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré maximal $n-1$ est nécessairement régulier. C'est une conséquence de la preuve de la proposition 1.4.

On déduit du théorème précédent le :

Théorème 1.21. — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage régulier sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. Si $\mathscr{L}_\mathscr{F}$ est résoluble, alors $\mathscr{F}$ possède un hyperplan invariant H. En particulier, dans la carte affine $\mathbf{C}^n \simeq \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \setminus H$, les éléments de $\mathscr{L}_\mathscr{F}$ sont affines.*

Démonstration. — L'algèbre $\mathscr{L}'_\mathscr{F}$ est une algèbre de Lie résoluble isomorphe à une sous-algèbre de $\mathscr{M}(n+1, \mathbf{C})$. D'après le théorème 1.20 cette algèbre est triangulable et admet donc pour hyperplan invariant $\widetilde{H} := \{z_n = 0\}$, où $\{z_0, \ldots, z_n\}$ est un système de coordonnées triangularisant de $\mathbf{C}^{n+1}$. Puisque $\mathscr{F}$ est régulier, la dimension ponctuelle de $\mathscr{L}'_\mathscr{F}$ est $n-1$ en un point générique m de $\widetilde{H}$ et $\widetilde{H}$ est invariant par le feuilletage ; d'où l'existence via la projection canonique $\pi \colon \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ d'un hyperplan invariant pour $\mathscr{F}$.

Enfin, on montre facilement que si le feuilletage $\mathscr{F}$ admet un hyperplan invariant H, alors, dans la carte affine $\mathbf{C}\mathbb{P}(n) \setminus H$, les champs tangents à $\mathscr{F}$ sont affines. □

L'hypothèse de régularité est nécessaire. Nous détaillerons en 5.1.4 l'exemple d'un feuilletage non régulier de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ ayant une intégrale première de type Q_1/Q_2, où les Q_i sont quadratiques, associé à une algèbre de Lie résoluble maximale ; l'algèbre possède un hyperplan invariant, le feuilletage non.

On rappelle aussi les :

Définitions

(1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie ; il existe un unique idéal résoluble noté $\mathscr{R}(\mathfrak{g})$ appelé radical de $\mathfrak{g}$ contenant tous les idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$.

(2) Une algèbre $\mathfrak{g}$ est semi-simple si elle ne contient pas d'idéal résoluble non trivial ce qui est équivalent à $\mathscr{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Il est assez naturel de regarder les $\mathscr{L}$-feuilletages associés aux algèbres semi-simples :

Théorème 1.22. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. Si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est semi-simple, ou plus généralement si $[\mathscr{L}_{\mathscr{F}}, \mathscr{L}_{\mathscr{F}}] = \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$, alors $\mathscr{F}$ possède une intégrale première rationnelle.*

Démonstration. — Comme d'habitude on relève $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ à $\mathbf{C}^{n+1}$ en $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$. Le feuilletage $\mathscr{F}$ possède un facteur intégrant $P = P_1^{n_1+1}\cdots P_s^{n_s+1}$, avec $\mathrm{pgcd}(P_1,\ldots,P_s) = 1$, *i.e.* :

$$\frac{\omega}{P} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{dP_k}{P_k} + d\left(\frac{H}{P_1^{n_1}\cdots P_s^{n_s}}\right)$$

où ω définit $\mathscr{F}$. Si tous les λ_i sont nuls, le feuilletage $\mathscr{F}$ possède une intégrale première rationnelle ; si ce n'est pas le cas supposons par exemple que $\lambda_1 \neq 0$. Soit X un élément de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$; le champ X est tangent à $\widetilde{\mathscr{F}}$ et par suite tangent aux hypersurfaces invariantes par $\widetilde{\mathscr{F}}$. Or le lieu des zéros de P_k en est une pour $k = 1,\ldots,s$; ceci se traduit par :

$$X(P_k) = i_X dP_k = \mu_k(X) P_k.$$

A priori $\mu_k(X)$ est un élément de $\mathscr{O}(\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ mais P_k et $X(P_k)$ sont homogènes de même degré donc $\mu_k(X) \in \mathbf{C}$. On constate que si X est un commutateur, *i.e.* si X s'écrit $[Y,Z]$ où Y, Z désignent des éléments de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$, alors $\mu_k(X) = 0$. En fait chaque $\mu_k \colon \mathscr{L}'_{\mathscr{F}} \to \mathbf{C}$ est un morphisme d'algèbres de Lie donc trivial puisque $[\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}, \mathscr{L}'_{\mathscr{F}}] = \mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$. Il se trouve que P admet au moins deux facteurs premiers entre eux dans sa décomposition, *i.e.* $s \geqslant 2$. En effet supposons que $P = P_1^{n_1+1}$, alors :

$$\frac{\omega}{P} = \frac{\omega}{P_1^{n_1+1}} = \lambda_1 \frac{dP_1}{P_1} + d\left(\frac{H}{P_1^{n_1}}\right).$$

En particulier $\deg d\,(H/P_1^{n_1}) = -1$ et $\deg H/P_1^{n_1} = 0$. L'égalité $\deg H/P_1^{n_1} = 0$ et l'identité d'Euler impliquent que $\lambda_1 \deg P_1 = 0$ ou $\deg P_1 = 0$; ces deux possibilités sont exclues.

Finalement pour chaque $X \in \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ on a $X(P_1) = X(P_2) = 0$; si $\nu_i = \deg P_i$, la fonction rationnelle $P_1^{\nu_2}/P_2^{\nu_1}$ est homogène non constante de degré 0 donc passe à $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ et est intégrale première de tout élément de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ donc de $\mathscr{F}$. $\square$

Remarques 10

(i) La construction précédente donne une « construction à deux branches éventuellement multiples » : un $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ satisfaisant $[\mathscr{L}_{\mathscr{F}}, \mathscr{L}_{\mathscr{F}}] = \mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ admet une intégrale première du type $P_1^{\nu_2}/P_2^{\nu_1}$ avec P_1 et P_2 deux polynômes irréductibles et $\nu_i = \deg P_i$. On peut en effet lorsque les λ_i sont nuls adapter le raisonnement précédent.

(ii) Dans le cas où $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est semi-simple, on sait que $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ s'intègre en un groupe algébrique ce qui donne immédiatement le résultat. En fait l'énoncé donne plus que le cas semi-simple et donne le (i) de la remarque qui a un intérêt en soi.

Théorème 1.23. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ décrit par la 1-forme ω. Si tous les éléments de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ sont nilpotents, alors $\mathscr{F}$ possède une intégrale première rationnelle.*

Démonstration. — Comme toujours on relève l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ à $\mathbf{C}^{n+1}$ en l'algèbre $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$. Puisque tous les éléments de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ sont nilpotents, $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ est nilpotente et après triangulation les hyperplans $z_n = \text{cte}$ sont invariants par les éléments de $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$. Par conséquent, les feuilles du feuilletage $\mathscr{F}'$ sont contenues dans les hyperplans $z_n = \text{cte}$ et sont, puisque $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ produit un feuilletage de codimension 2, de codimension 1 dans ces hyperplans. La forme $d\omega_{|z_n=cte}$ est nulle sinon le feuilletage restreint serait de codimension 2. On a ainsi $d\omega \wedge dz_n = 0$ qui conduit à $d(\omega \wedge dz_n) = 0$; autrement dit ω est fermée dans les fibres $z_n = \text{cte}$ donc, par le lemme de Poincaré, exacte dans ces fibres. Par suite, la 1-forme ω s'écrit $Pdz_n + dH$. Par ailleurs, l'égalité $\deg H = \deg P + 1 = \deg \omega + 1$ et l'identité d'Euler $Pz_n + H \deg H = 0$ impliquent que $H = -\frac{Pz_n}{\deg \omega + 1}$; par suite, la 1-forme ω s'exprime comme suit :

$$\omega = (\deg \omega) P dz_n - z_n dP.$$

Ainsi le feuilletage $\mathscr{F}$ admet $P/z_n^{\deg \omega}$ comme intégrale première. $\square$

Remarque 11. — Dans la carte affine $z_n = 1$ le feuilletage admet pour intégrale première le polynôme P.

CHAPITRE 2

EXEMPLES DE $\mathscr{L}$-FEUILLETAGES

2.1. Principe de construction d'exemples

On va décrire un principe qui permet de construire des $\mathscr{L}$-feuilletages à partir d'exemples classiques venant en particulier de la théorie des invariants et des actions de $\mathbf{C}^{n-1}$ sur $\mathbf{C}^n$.

Soient n_k des entiers strictement positifs. Pour $k = 1, \dots, q$, on note $E_k := \mathbf{C}^{n_k+1}$ et $\mathbb{P}(E_k) \simeq \mathbf{C}\mathbb{P}(n_k)$. Sur $\mathbb{P}(E_k)$, on se donne un $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}_k$; pour $m_k \in \mathbb{P}(E_k)$, générique, on a :

$$\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}_k}(m_k) = n_k - 1.$$

On a vu que chaque $\mathscr{F}_k$ est défini par des formes rationnelles fermées :

$$\frac{\omega_k}{P_k} = \sum_{j=1}^{s_k} \lambda_{k,j} \frac{dP_{k,j}}{P_{k,j}} + d\Big(\frac{H_k}{P_{k,1}^{n_{k,1}} \cdots P_{k,s_k}^{n_{k,s_k}}}\Big)$$

avec les conditions $\sum_{j=1}^{s_k} \lambda_{k,j} \deg P_{k,j} = 0$ et $\deg(H_k) = \sum_{\ell=1}^{s_k} n_{k,\ell} \deg P_{k,\ell}$.

Posons $N = \sum_{k=1}^{q} n_k$; on considère sur $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q \simeq \mathbf{C}^{N+q}$ le feuilletage $\mathscr{F}_\mu$ associé à la 1-forme fermée :

$$\frac{\Omega}{P} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \frac{\omega_k}{P_k}$$

où $P = \prod_{k=1}^{q} P_k$ et les μ_k sont des complexes non nuls. On remarque que $\mathscr{F}_\mu$ descend sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(N+q-1)$. En effet, si R_k désigne le champ radial sur E_k, alors $R = \sum_{k=1}^{q} R_k$ est le champ radial sur $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$; comme chaque ω_k annule R_j pour $j = 1, \dots, q$, la 1-forme Ω annule R.

Proposition 2.1. — *Si chaque $\mathscr{F}_k$ possède une symétrie X_k, alors le feuilletage $\mathscr{F}_\mu$ descend en un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbb{P}(E_1 \oplus \cdots \oplus E_q)$.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{m} = (\widetilde{m}_1, \dots, \widetilde{m}_q)$ un point générique de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$. La sous-algèbre $\mathscr{L}^0 = \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_1}} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_q}}$ est formée de champs tangents à $\mathscr{F}_\mu$. On a :

$$\dim \mathscr{L}^0(\widetilde{m}) = \sum_{k=1}^{q} \dim \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_k}}(\widetilde{m_k}) = \sum_{k=1}^{q} n_k = N.$$

Soit $\widetilde{X}_k$ un relevé de X_k et $P_k = i_{\widetilde{X}_k}\omega_k$. Considérons maintenant un champ $\widetilde{X}_\alpha$ de la forme :

$$\widetilde{X}_\alpha = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \widetilde{X}_k$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbf{C}^q$ et $\langle \alpha, \mu\rangle = \sum \alpha_k \mu_k = 0$. On a :

$$i_{\widetilde{X}_\alpha} \frac{\Omega}{P} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \alpha_k \frac{i_{\widetilde{X}_\alpha}\omega_k}{P_k} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \alpha_k = 0.$$

On remarque que $\widetilde{X}_\alpha$ est tangent à $\mathscr{F}_\mu$. Soit $\widetilde{\mathscr{L}}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\mathscr{L}^0$ et les champs $\widetilde{X}_\alpha$; l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}}$ est formée de champs linéaires tangents à $\mathscr{F}_\mu$. De plus, en un point générique $\widetilde{m}$ de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$, on a :

$$\dim \widetilde{\mathscr{L}}(m) = \dim \mathscr{L}^0(\widetilde{m}) + q - 1 = \sum_{k=1}^{q} n_k + q - 1 = N + q - 1.$$

Par suite $\mathscr{F}_\mu$ induit un $\mathscr{L}$-feuilletage. $\square$

Il se peut que $\widetilde{\mathscr{L}}$ ne soit pas maximale alors que tous les $\mathscr{L}_{\mathscr{F}_k}$ le sont ; nous allons voir que, modulo une hypothèse d'irréductibilité, elle l'est.

Définition. — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ défini en coordonnées homogènes par $\omega = \sum_{k=0}^{n} a_k dz_k$. On dit que $\mathscr{F}$ est irréductible si ω n'annule pas de champ constant non trivial.

Remarquons que si $\mathscr{F}$ n'est pas irréductible, alors $\mathscr{F}$ est le pull-back linéaire d'un feuilletage $\mathscr{F}'$ sur un $\mathbf{C}\mathbb{P}(\ell)$ avec $\ell < n$.

Soient $\mathscr{F}_\mu$, $\mathscr{F}_k$, $\mathscr{L}^0$ et $\widetilde{\mathscr{L}}$ comme ci-dessus ; on a la :

Proposition 2.2. — *Si chaque $\mathscr{F}_k$ est irréductible, alors $\widetilde{\mathscr{L}}$ est maximale, i.e. $\widetilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L}_{\mathscr{F}_\mu}$. De plus, si on note :*

$$\mathfrak{g} = \left\{ \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \widetilde{X}_k \mid \langle \alpha, \mu\rangle = 0 \right\},$$

on a : $\widetilde{\mathscr{L}} = \mathfrak{g} \oplus \mathscr{L}^0$ et $[\mathfrak{g}, \mathscr{L}^0] \subset \mathscr{L}^0$.

Démonstration. — Soit Y un champ de vecteurs linéaire tangent à $\widetilde{\mathscr{F}}_\mu$. Montrons que $Y \in \widetilde{\mathscr{L}}$; le champ Y s'écrit :

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_q$$

où chaque Y_i est un champ linéaire sur $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ et parallèle au facteur E_i. L'égalité :

$$i_Y \frac{\Omega}{P} = 0$$

conduit à :

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_k}{P_k} i_Y \omega_k = 0 \qquad \text{et :} \quad \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_k}{P_k} i_{Y_k} \omega_k = 0.$$

Par suite, $i_{Y_k}\omega_k$ est divisible par P_k ; comme Y_k est linéaire, on a $i_{Y_k}\omega_k = c_k P_k$ où c_k appartient à $\mathbf{C}$ et $\sum_{k=1}^q \mu_k c_k = 0$. Puisque $i_{\widetilde{X}_k}\omega_k = P_k$, le champ $\widetilde{Y}_k := Y_k - c_k\widetilde{X}_k$ est annulé par ω_k. Les composantes de $\widetilde{Y}_k$ pourraient dépendre de variables autres que celles de E_k ; montrons qu'en fait ce n'est pas le cas. Soient $u = (u_1, \dots, u_s)$ des coordonnées de E_k et $v = (v_{s+1}, \dots, v_r)$ des coordonnées de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_{k-1} \oplus E_{k+1} \oplus \cdots \oplus E_q$. Le champ $\widetilde{Y}_k$ s'écrit :

$$\widetilde{Y}_k = \sum_{j=1}^s a_j(u)\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j=1}^s b_j(v)\frac{\partial}{\partial u_j}$$

où les a_j et b_j sont linéaires respectivement en u et v. L'égalité $i_{\widetilde{Y}_k}\omega_k = 0$ conduit à :

$$i_Z\omega_i = 0$$

où $Z = \sum_{j=1}^s b_j \frac{\partial}{\partial u_j}$. Pour v général fixé ceci produit un champ de vecteurs constant non nul, dès que l'un des b_j est non trivial; ce champ est tangent à $\mathscr{F}_k$ ce qui est exclu puisque le feuilletage $\mathscr{F}_k$ est supposé irréductible. Finalement, $\widetilde{Y}_k$ s'écrit :

$$\widetilde{Y}_k = \sum_{j=1}^s a_j(u)\frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Or l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_k}}$ est par hypothèse maximale donc $\widetilde{Y}_k$ appartient à $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_k}}$. De sorte que :

$$Y = \sum_{k=1}^q Y_k = \sum_{k=1}^q c_k\widetilde{X}_k + \widetilde{Y}$$

avec $\widetilde{Y} = \sum_{k=1}^q \widetilde{Y}_k \in \mathscr{L}^0$.

Pour terminer il suffit de montrer que $[\widetilde{X}_k, \mathscr{L}^0] \subset \mathscr{L}^0$; pour cela on vérifie que les champs linéaires $[\widetilde{X}_k, Z_k]$, où $Z_k \in \widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_k}}$, annulent ω_k et sont donc dans $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_k}}$. Mais comme $\widetilde{X}_k$ est une symétrie linéaire de $\mathscr{F}_k$ et $i_{Z_k}\omega_k = 0$, on a $i_{[\widetilde{X}_k, Z_k]}\omega_k = 0$. □

Plus généralement on montre de la même manière la :

Proposition 2.3. — *Soit ω_k une 1-forme intégrable homogène définissant un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}^{n_k}$ admettant une symétrie X_k et $P_k = i_{X_k}\omega_k$. Si les $\mu_k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ satisfont $\sum_{k=1}^q \mu_k i_{R_k}\omega_k/P_k = 0$, alors la 1-forme $\Omega = P_1 \cdots P_q \sum_{k=1}^q \mu_k\omega_k/P_k$ définit un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbb{P}(\mathbf{C}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}^{n_q})$.*

Remarques 12

1. Notons bien que l'on ne demande pas que les ω_k définissent un feuilletage projectif. Si $i_{R_k}\omega_k$ est non nul, on a une symétrie automatique $X_k = R_k$ et dans ce cas $i_{R_k}\frac{\omega_k}{P_k} = 1$.

2. Si $i_{R_k}\omega_k$ est non nul, alors $Q_k = i_{R_k}\omega_k$ et P_k sont des facteurs intégrants de ω_k. Si la 1-forme ω_k n'a pas d'intégrale première rationnelle, alors $Q_k =$ cte P_k.

2.2. Exemples logarithmiques

Les exemples logarithmiques vus en 1.3 s'obtiennent trivialement via le principe précédent.

On considère sur $E_k = \mathbf{C}$ la 1-forme $\omega_k = dz_k$, le polynôme $P_k = z_k$ et $\mathscr{L}_{\mathscr{F}_k} = \{0\}$; le « feuilletage » $\mathscr{F}_k$ en points est décrit par la 1-forme :

$$\frac{\omega_k}{P_k} = \frac{dz_k}{z_k}.$$

On construit sur $E_1 \oplus \cdots \oplus E_{n+1}$ le feuilletage logarithmique $\mathscr{F}$ décrit par la 1-forme :

$$z_1 \cdots z_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \frac{dz_k}{z_k},$$

$\mu_k \neq 0$, qui descend sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ dès que $\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k = 0$. Ici $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est isomorphe à $\mathbf{C}^{n-1}$.

Les feuilles, qui sont les composantes connexes des niveaux de la fonction multivaluée $\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \log z_k$, sont en général denses pour $n \geqslant 3$. On remarque que tout champ $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \mu_k \neq 0$ est une symétrie.

2.3. Exemples associés aux formes quadratiques

Sur $\mathbf{C}^{n_j}$ on considère une forme quadratique Q_j de rang maximal, *i.e.* quitte à composer par un isomorphisme on peut supposer que $Q_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} z_{j,k}^2$.

Soit $\mathscr{F}_j$ le $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}^{n_j}$ défini par la 1-forme dQ_j ; on note que $\mathscr{L}_{\mathscr{F}_j}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(n_j, \mathbf{C})$. Le champ radial R_j de $\mathbf{C}^{n_j}$ est une symétrie de $\mathscr{F}_j$: c'est l'identité d'Euler.

On construit sur $\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_q}$ le feuilletage $\mathscr{F}$ décrit par :

$$Q_1 \cdots Q_q \sum_{j=1}^{q} \mu_j \frac{dQ_j}{Q_j}$$

(qui descend en un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(N-1)$ dès que $\sum_{j=1}^{q} \mu_j = 0$). La proposition 2.2 assure que ce dernier est associé à l'algèbre :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathscr{F}} &= \Big\{ \textstyle\sum_{j=1}^{q} \kappa_j R_j \mid \langle \kappa, \mu \rangle = 0 \Big\} \oplus \mathfrak{so}(Q_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}(Q_q) \\ &\simeq \mathbf{C}^{q-1} \oplus \mathfrak{so}(n_1, \mathbf{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}(n_q, \mathbf{C}). \end{aligned}$$

En considérant $\mathbf{C}^N$ comme une carte affine de $\mathbf{C}\mathbb{P}(N)$ on constate que ce feuilletage s'étend à $\mathbf{C}\mathbb{P}(N)$ et que ce prolongement est associé à l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$.

Si $q \geqslant 3$, les feuilles sont en général denses. Si les μ_j sont dans $\mathbf{Z}$, on obtient des exemples avec intégrales premières rationnelles.

On peut aussi recoller des feuilletages logarithmiques avec des feuilletages associés à des formes quadratiques ; considérons par exemple la 1-forme :

$$\omega = \frac{d(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} - \kappa \frac{dz_0}{z_0}.$$

On note $R_1 = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}$. Soit Z un champ annulant ω ; visiblement Z s'écrit $\mu z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + Z'$ avec $Z' \in \langle\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}\rangle$. Alors $Z - \mu(z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\kappa}{2}R_1)$ est dans le noyau de ω et n'a pas de composante en $\frac{\partial}{\partial z_0}$; en particulier il annule :

$$\frac{d(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

La 1-forme ω décrit donc un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 et de codimension 1 sur $\mathbf{C}^4$ associé à $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C}) \oplus \mathbf{C}$. Ce feuilletage s'étend en un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ décrit par la 1-forme :

$$\frac{d(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} - \kappa\frac{dz_0}{z_0} + (\kappa - 2)\frac{dz_4}{z_4}.$$

2.4. Exemples issus d'actions classiques

On présente quelques exemples d'actions classiques qui peuvent être des bases pour le principe de construction d'exemples ; la plupart de ces exemples se trouvent dans les livres ([**9**], [**13**], [**6**]). Il est plus commode ici de présenter les groupes eux-mêmes que les sous-algèbres de Lie correspondantes.

2.4.1. Action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ **sur** $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ **et construction d'un** $\mathscr{L}$**-feuilletage sur** $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$**.** — On note V_4 l'ensemble des polynômes homogènes de degré 3 en deux variables et de manière plus générale V_k l'ensemble des polynômes homogènes de degré $k-1$ en deux variables. Le groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ agit sur V_k :

$$g \cdot P = P \circ g^{-1}$$

où $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_k$ et $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$. Soient λ, $\mu \in \mathbf{C}^*$, on a :

$$(\lambda g) \cdot (\mu P) = \mu P\Big(\frac{1}{\lambda}g^{-1}\Big) = \frac{\mu}{\lambda^k}Pg^{-1} = \frac{\mu}{\lambda^k}g \cdot P.$$

L'action de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ sur V_k induit donc une action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) \simeq \mathbf{C}\mathbb{P}(k-1)$. Or un élément de $\mathbf{C}\mathbb{P}(3) \simeq \mathrm{P}(\mathrm{V}_4)$ est la donnée d'un polynôme P de degré 3, à multiplication par un scalaire près, autrement dit la donnée de trois droites vectorielles Δ_1, Δ_2 et Δ_3 dans $\mathbf{C}^2$ non numérotées (les zéros de P), soit encore la donnée de trois points de $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$. Ainsi l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ correspond à l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \simeq \mathrm{Aut}\,\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$ sur les triplets de points de $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$.

Décrivons les orbites de cette action. On compte trois orbites : l'orbite des triplets de points distincts, l'orbite des triplets de points dont deux seulement sont confondus et l'orbite des points triples.

On commence tout d'abord par s'intéresser au sous-ensemble de $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ correspondant aux points triples ; un point triple c'est la donnée d'un polynôme homogène P de degré 3 qui est un cube :

$$P(z_0, z_1) = (\beta z_0 - \alpha z_1)^3,$$

c'est encore la donnée du point $[\alpha:\beta]\in\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$. On peut donc paramétrer les points triples par :

$$(\alpha,\beta)\longmapsto(\beta z_0-\alpha z_1)^3=\beta^3z_0^3-3\beta^2\alpha z_0^2z_1+3\beta\alpha^2z_0z_1^2-\alpha^3z_1^3$$

qui induit l'application :

$$[\alpha:\beta]\longmapsto[\beta^3:-3\beta^2\alpha:3\beta\alpha^2:-\alpha^3]$$

dont l'image est « la » cubique gauche de $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ notée Γ.

Décrivons maintenant l'orbite des triplets de points formés d'un point double et d'un point simple. On considère le polynôme z_0^3, c'est le point $m=[1:0:0:\ 0]$ de Γ. La tangente à Γ en m est donnée par :

$$t\longmapsto(1,0,0,0)+t\frac{\partial}{\partial\alpha}(1,-3\alpha,3\alpha^2,-\alpha^3)_{|\alpha=0}=(1,-3t,0,0)$$

qui correspond au polynôme $z_0^2(z_0-3tz_1)$; pour $t\neq0$, ce polynôme est le modèle à conjugaison près de tout polynôme de degré 3 ayant un terme carré.

On remarque que si m est un élément de Γ et φ un élément de $\operatorname{Aut}\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ laissant Γ invariante, l'image par φ de la tangente à Γ en m est la droite tangente à Γ en $\varphi(m)$.

Ainsi l'orbite des polynômes, dont le lieu des zéros est une droite double et une droite simple, est l'ensemble des tangentes Σ à la cubique Γ privé de Γ. La surface $\Sigma\smallsetminus\Gamma$ est invariante sous l'action de $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$; elle est paramétrée par l'application :

$$(\alpha,t)\longmapsto(-3\alpha,3\alpha^2,-\alpha^3)+t(-3,6\alpha,-3\alpha^2)$$

et est de degré 4 ([**9**]). On vérifie facilement que dans une carte affine ad-hoc, Σ est isomorphe à un cylindre cuspidal $(T,s)\mapsto(T,s^2,s^3)$.

L'action de $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ produit une unique orbite générique $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)\smallsetminus\Sigma$ et par conséquent ne produit pas de feuilletage. Toutefois elle nous sera utile plus loin. Par contre l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur V_4 admet un invariant D (le discriminant). On obtient ainsi un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}^4$ dont une intégrale première est :

$$\begin{aligned}D(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\ :&=D(\alpha_0z_0^3+\alpha_1z_0^2z_1+\alpha_2z_0z_1^2+\alpha_3z_1^3)\\&=\alpha_1^2\alpha_2^2-4\alpha_0\alpha_2^3-4\alpha_1^3\alpha_3-27\alpha_0^2\alpha_3^2+18\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3.\end{aligned}$$

On le prolonge de façon naturelle à $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Ce feuilletage est associé à une sous-algèbre de $\chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(4))$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$; il est de degré 3.

2.4.2. Action de $\mathrm{PGL}(3,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(5)$ et construction d'un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(6)$. — Le groupe $\mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$ agit sur l'espace des matrices symétriques $\mathrm{Sym}(3,\mathbf{C})\simeq\mathbf{C}^6$ comme suit :

$$g\cdot P={}^{\mathrm{t}}g^{-1}Pg^{-1}$$

où $P \in \mathrm{Sym}(3, \mathbf{C})$ et $g \in \mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$. Cette action correspond à l'action naturelle de $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ sur les formes quadratiques. Soient λ, $\mu \in \mathbf{C}^*$; on a :

$$(\lambda g) \cdot (\mu P) = \frac{\mu}{\lambda^2}\, {}^{\mathrm{t}}g^{-1} P g^{-1}.$$

Ainsi $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ agit sur $\mathrm{P\,Sym}(3, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}\mathbb{P}(5)$.

Décrivons les orbites de cette action. Comme $\mathbf{C}\mathbb{P}(5)$ s'identifie à l'espace des coniques de $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$, l'étude des orbites se ramène à celle des droites doubles, des paires de droites distinctes et des coniques lisses. L'orbite des droites doubles est l'image de l'application de Véronèse :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbb{P}(2) &\longrightarrow \mathbf{C}\mathbb{P}(5) \\ [z_0 : z_1 : z_2] &\longmapsto [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2] \end{aligned}$$

appelée surface de Véronèse ; l'orbite des paires de droites distinctes est la variété sécante à la surface de Véronèse (c'est l'hypersurface constituée des droites qui coupent cette surface en deux points) privée de celle-ci. Enfin l'orbite des coniques lisses est l'ouvert dense de $\mathbf{C}\mathbb{P}(5)$:

$$\mathbf{C}\mathbb{P}(5) \smallsetminus S$$

où S désigne la variété sécante à la surface de Véronèse. Pour obtenir un feuilletage de codimension 1 on considère comme précédemment l'action de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$ sur $\mathrm{Sym}(3, \mathbf{C})$: deux matrices A et B de $\mathrm{Sym}(3, \mathbf{C})$ sont conjuguées si et seulement s'il existe P dans $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}PAP = B$ c'est-à-dire si et seulement si $\det A = \det B$. Donc :

$$\delta(z) = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_5 & z_6 \end{pmatrix} = z_1 z_4 z_6 - z_1 z_5^2 - z_2^2 z_6 + 2 z_2 z_3 z_5 - z_3^2 z_4$$

est un invariant de degré 3 de l'action de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$ sur $\mathrm{Sym}(3, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^6$. En prolongeant δ à $\mathbf{C}\mathbb{P}(6)$, on définit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 et de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(6)$ dont une intégrale première est :

$$\frac{z_1 z_4 z_6 - z_1 z_5^2 - z_2^2 z_6 + 2 z_2 z_3 z_5 - z_3^2 z_4}{z_0^3}.$$

Ce $\mathscr{L}$-feuilletage est associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ qui est de dimension 8.

Plus généralement l'action de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ sur $\mathrm{Sym}(n, \mathbf{C})$ produit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré $n-1$ et de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}\big(\frac{n(n+1)}{2}\big)$ associé à l'algèbre $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$; la fonction :

$$\frac{\det A}{z_0^n}$$

en est une intégrale première.

2.4.3. Action de $\mathrm{PGL}(3,\mathbf{C})$ **sur** $\mathbf{C}\mathbb{P}(9)$ **et construction d'un** $\mathscr{L}$**-feuilletage sur** $\mathbf{C}\mathbb{P}(9)$**.** — Soit W_{10} l'ensemble des polynômes homogènes de degré 3 en trois variables. Le groupe $\mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$ agit sur W_{10} :

$$g\cdot P=P\circ g^{-1}$$

où P désigne un élément de W_{10} et g un élément de $\mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$. Comme précédemment cette action de $\mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$ sur W_{10} se laisse projectiviser en une action de $\mathrm{PGL}(3,\mathbf{C})$ sur $\mathrm{P}\,\mathrm{W}_{10}\simeq\mathbf{C}\mathbb{P}(9)$.

Il y a huit orbites spéciales : celle des droites triples, de l'union d'une droite double et d'une droite, de l'union de trois droites en position générale, de l'union de trois droites concourantes, d'une conique et d'une droite en position générale, d'une conique et d'une droite tangente, des cubiques cuspidales et des cubiques à point double.

Les orbites génériques sont celles des courbes elliptiques. Une courbe elliptique E_λ s'écrit à composition par un automorphisme près :

$$z_1^2z_2=z_0(z_0-z_2)(z_0-\lambda z_2).$$

On constate que deux courbes elliptiques E_λ et $E_{\lambda'}$ sont équivalentes si et seulement si les ensembles :

$$\Lambda=\left\{\lambda,\frac{1}{\lambda},1-\lambda,\frac{1}{1-\lambda},\frac{\lambda}{1-\lambda},\frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$$

(orbite de λ sous l'action du groupe engendré par $z\mapsto\frac{1}{z}$ et $z\mapsto 1-z$) et :

$$\Lambda'=\left\{\lambda',\frac{1}{\lambda'},1-\lambda',\frac{1}{1-\lambda'},\frac{\lambda'}{1-\lambda'},\frac{\lambda'}{\lambda'-1}\right\}$$

coïncident ; autrement dit si et seulement si $j(\lambda)=j(\lambda')$ où j désigne la fonction :

$$j\colon\lambda\longmapsto 256\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}.$$

En effet, $j(1/\lambda)=j(\lambda)$ et $j(1-\lambda)=j(\lambda)$. La fonction j est donc bien définie sur les quadruplets de points de $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$ et induit une fonction rationnelle $J\colon\mathbf{C}\mathbb{P}(9)\dashrightarrow\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$ qui est la composition de j avec λ. Ceci est relié au fait que l'on peut voir la donnée d'une courbe elliptique comme celle d'un revêtement double au dessus de $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$ ramifié en quatre points, ce que nous précisons dans le paragraphe suivant. L'adhérence de l'orbite d'une courbe elliptique est une fibre de J. C'est une hypersurface de degré 6 sauf pour les deux valeurs critiques de j qui sont 0 et 1728 (les points critiques de j, qui sont 2, $\frac{1}{2}$, 1 de multiplicité 1 et $-\mathrm{j}$, $-\mathrm{j}^2$ de multiplicité 2, correspondent aux réseaux spéciaux $\mathbb{Z}\oplus\mathrm{i}\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}\oplus\mathrm{j}\mathbb{Z}$).

Les orbites des cubiques singulières satisfont des conditions d'incidence ; par exemple l'adhérence de l'orbite d'une courbe elliptique contient le lieu des cubiques cuspidales.

L'action de $\mathrm{PGL}(3,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(9)$ produit donc un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 8 et de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(9)$ associé à l'algèbre $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$. Le calcul du degré n'est pas si facile et a été effectué par J.V. Pereira (communication personnelle) en utilisant une méthode due à Darboux. Les descriptions des feuilles et du lieu singulier s'obtiennent à partir des considérations précédentes sur les orbites.

On trouvera la formule explicite de la fonction J dans le livre de Dolgachev ([**6**], page 160).

2.4.4. Action de $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ **sur** $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$**.** — Comme on l'a dit précédemment $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ agit sur $\mathrm{P}(\mathrm{V}_5) \simeq \mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ qui s'identifie à l'espace des quadruplets de points sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$. On retrouve et on précise les résultats du paragraphe ci-dessus.

On compte cinq cas de figures différents : les quadruplets de points tous distincts, les paires de points doubles, les quadruplets formés d'un point triple et d'un point double, les quadruplets formés d'une paire de points doubles et d'une paire de points simples et enfin les points quadruples.

Les quatre dernières configurations produisent quatre orbites. En effet, une homographie permet d'échanger deux triplets de points donnés mais envoie quatre points distincts z_i sur 0, 1, ∞ et le birapport λ des z_i. Toutefois le calcul du birapport tient compte de l'ordre dans lequel on s'est donné les z_i ; permuter ces quatre points a pour effet de changer le birapport λ en $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ ou $\frac{\lambda}{\lambda-1}$. Ainsi deux quadruplets de points distincts non numérotés peuvent être envoyés l'un sur l'autre par un élément de $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ si et seulement si les ensembles Λ et Λ' coïncident. C'est le cas si et seulement si $j(\lambda) = j(\lambda')$. On retrouve ainsi la situation du 2.4.3.

Décrivons par exemple l'orbite d'un point quadruple. Se donner un point quadruple revient à se donner un polynôme homogène de degré 4 de la forme :

$$P(z_0, z_1) = (\beta z_0 - \alpha z_1)^4$$

ce qui détermine un point $[\alpha : \beta]$ de $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$. On peut donc paramétrer les points quadruples par :

$$(\alpha,\beta) \longmapsto (\beta z_0 - \alpha z_1)^4 = \beta^4 z_0^4 - 4\beta^3\alpha z_0^3 z_1 + 6\beta^2\alpha^2 z_0^2 z_1^2 - 4\beta\alpha^3 z_0 z_1^3 + \alpha^4\beta^4$$

qui induit l'application de $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$ dans $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$:

$$[\alpha : \beta] \longmapsto [\beta^4 : -4\beta^3\alpha : 6\beta^2\alpha^2 : -4\beta\alpha^3 : \alpha^4\beta^4].$$

Son image est une courbe de degré 4 appelée courbe de Véronèse.

L'action de $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ induit un $\mathscr{L}$-feuilletage associé à $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$. On cherche une expression de l'intégrale première de ce $\mathscr{L}$-feuilletage; on profite de l'existence d'invariants de l'action de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ sur V_5. Il existe deux tels invariants homogènes de degré respectivement 2 et 3 ([**13**]) :

$$P(\alpha_0 z_0^4 + \alpha_1 z_0^3 z_1 + \alpha_2 z_0^2 z_1^2 + \alpha_3 z_0 z_1^3 + \alpha_4 z_1^4) = \alpha_0\alpha_4 - \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_3 + \frac{1}{12}\alpha_2^2$$

et :

$$H(\alpha_0 z_0^4 + \alpha_1 z_0^3 z_1 + \alpha_2 z_0^2 z_1^2 + \alpha_3 z_0 z_1^3 + \alpha_4 z_1^4) = \det \begin{pmatrix} \alpha_0 & \frac{\alpha_1}{4} & \frac{\alpha_2}{6} \\ \frac{\alpha_1}{4} & \frac{\alpha_2}{6} & \frac{\alpha_3}{4} \\ \frac{\alpha_2}{6} & \frac{\alpha_3}{4} & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha_0\alpha_2\alpha_4}{6} - \frac{\alpha_0\alpha_3^2}{16} - \frac{\alpha_1^2\alpha_2}{16} + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{96} + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{96} - \frac{\alpha_2^3}{216}.$$

Ainsi on trouve que P^3/Δ, où $\Delta = 2^8(P^3 - 27H^2)$, est une intégrale première du $\mathscr{L}$-feuilletage induit par l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. On en déduit que P^3/Δ est une fonction linéaire de l'invariant j :

$$\frac{P^3}{\Delta} = \frac{1}{1728} j.$$

2.4.5. Action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ **sur** $\mathbf{C}\mathbb{P}(7)$. — On considère l'espace V des formes différentielles :

$$\omega = \sum_{k=0}^{2} A_k dz_k$$

où les A_k sont des polynômes homogènes de degré 2 tels que $\sum_{k=0}^{2} A_k z_k = 0$. Cet espace est de dimension 8 ; un élément générique de V, *i.e.* un élément tel que $\mathrm{pgcd}(A_0, A_1, A_2) = 1$, représente un feuilletage de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ (*cf.* chapitre 3).

Le groupe $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ agit sur V de façon naturelle :

$$g \cdot \omega = g^* \omega$$

où $\omega \in V$ et $g \in \mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$. Soient λ, $\mu \in \mathbf{C}^*$; on a :

$$(\lambda g) \cdot (\mu\omega) = \frac{\mu^2}{\lambda} g \cdot \omega$$

et l'action de $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ sur V induit donc une action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ sur $\mathrm{P(V)} \simeq \mathbf{C}\mathbb{P}(7)$.

Donnons une brève description de cette action.

Commençons par nous intéresser aux éléments ω non génériques de V, *i.e.* aux éléments tels que $\mathrm{pgcd}(A_0, A_1, A_2) \neq 1$; la 1-forme ω s'écrit :

$$\omega = L \left(\sum_{k=0}^{2} L_k dz_k \right)$$

où les L_k, L sont linéaires et $\sum_{k=0}^{2} L_k z_k = 0$. On remarque que $\sum_{k=0}^{2} L_k dz_k$ est linéairement conjugué à :

$$z_1 dz_2 - z_2 dz_1.$$

Par suite, les 1-formes $\omega_{n,g}$ sont linéairement conjuguées à des formes du type :

$$L(z_1 dz_2 - z_2 dz_1).$$

Si L dépend seulement de (z_1, z_2), on se ramène au modèle :

$$\omega_1 = z_1(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$$

et sinon à :

$$\omega_0 = z_0(z_1 dz_2 - z_2 dz_1).$$

On note $[\omega_i]$ la classe de ω_i dans l'espace projectif des formes de degré 3 et $\mathscr{O}rb[\omega_i]$ l'orbite de $[\omega_i]$. On vérifie facilement que $\dim \mathscr{O}rb[\omega_0] = 4$ et $\dim \mathscr{O}rb[\omega_1] = 3$.

On constate que $\mathscr{O}rb[\omega_1] \subset \overline{\mathscr{O}rb[\omega_0]}$ et que $\overline{\mathscr{O}rb[\omega_0]}$ est biholomorphe à :

$$\mathbf{C}\mathbb{P}(2) \times \mathbf{C}\check{\mathbb{P}}(2) \simeq \mathbf{C}\mathbb{P}(2) \times \mathbf{C}\mathbb{P}(2),$$

où $\mathbf{C}\check{\mathbb{P}}(2)$ désigne l'espace projectif dual. Dans $\mathbf{C}\mathbb{P}(2) \times \mathbf{C}\check{\mathbb{P}}(2)$, l'orbite de $[\omega_1]$ s'identifie à la variété d'incidence :

$$\{(x, \mathscr{D}) \in \mathbf{C}\mathbb{P}(2) \times \mathbf{C}\check{\mathbb{P}}(2) \mid x \in \mathscr{D}\}$$

i.e. à : $\quad \{([z_0 : z_1 : z_2], [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2]) \in \mathbf{C}\mathbb{P}(2) \times \mathbf{C}\check{\mathbb{P}}(2), z_0\alpha_0 + z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 = 0\}.$

Soit ω un élément générique de V ; le feuilletage $\mathscr{F}$ défini par ω a alors 3 points singuliers. Il laisse donc trois droites distinctes invariantes (les droites joignant les trois points singuliers) que l'on peut supposer être, quitte à faire une transformation linéaire, les droites d'équation $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. Dans la carte affine $z_0 = 1$, la 1-forme ω s'écrit :

$$\omega = B_1(1, z_1, z_2)dz_1 + B_2(1, z_1, z_2)dz_2 + B_3(1, z_1, z_2)(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$$

où B_1 et B_2 désignent des fonctions affines et B_3 une fonction linéaire. La droite d'équation $z_1 = 0$ étant invariante par le feuilletage, la fonction affine B_2 est divisible par z_1 donc s'écrit $\mathrm{cte}\cdot z_1$; de même, on obtient que B_1 s'écrit $\mathrm{cte}\cdot z_2$. Enfin l'invariance de la droite à l'infini par le feuilletage implique que $B_3 = 0$. Finalement ω s'écrit :

$$\omega_\lambda = z_2 dz_1 - \lambda z_1 dz_2.$$

En considérant :

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbf{C}^2 &\longrightarrow \mathbf{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (z_2, z_1) \end{aligned}$$

on constate que $\mathscr{O}rb[\omega_\lambda] = \mathscr{O}rb[\omega_{1/\lambda}]$; dit autrement les feuilletages $\mathscr{F}_\lambda$ et $\mathscr{F}_{1/\lambda}$ décrits respectivement par ω_λ et $\omega_{1/\lambda}$ sont conjugués. En permutant les droites invariantes entre elles, on obtient : les deux feuilletages $\mathscr{F}_\lambda$ et $\mathscr{F}_{\lambda'}$ sont conjugués si et seulement si $\Lambda = \Lambda'$ autrement dit si et seulement si $j(\lambda) = j(\lambda')$ avec les notations habituelles.

Comme les orbites génériques sont de dimension 6, cette action produit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 et de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(7)$ associé à $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$. Le calcul du degré a aussi été effectué par J.V. Pereira en utilisant encore la méthode de Darboux. On constate, mais ce n'est pas nouveau, l'ubiquité de la fonction j.

2.4.6. Action de $\mathrm{SL}(2n,\mathbf{C})$ **sur l'espace** $\mathrm{Asym}(2n,\mathbf{C})$**.** — On note $\mathrm{Asym}(2n,\mathbf{C})$ l'espace des matrices $2n\times 2n$ antisymétriques à coefficients complexes. Soit A un élément de $\mathrm{Asym}(2n,\mathbf{C})$, alors $\det A$ est un polynôme de degré $2n$ en les coefficients de A qui s'avère être un carré. Il se trouve que $\sqrt{\det}$ est l'unique invariant de l'action de $\mathrm{SL}(2n,\mathbf{C})$ sur $\mathrm{Asym}(2n,\mathbf{C})$ ce qui produit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré $n-1$ sur $\mathbf{C}^{n(2n-1)}$ dont les feuilles sont les niveaux génériques de $\sqrt{\det}$. On peut prolonger ce feuilletage à $\mathbf{C}\mathbb{P}(n(2n-1))$. Pour $n=3$ on construit ainsi un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(15)$.

2.4.7. Action de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ **sur** V_5**.** — L'action naturelle de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ sur V_5 possède l'invariant homogène de degré 2 suivant ([**13**]) :

$$\begin{aligned} H(\alpha_0 z_0^4+\alpha_1 z_0^3 z_1+\alpha_2 z_0^2 z_1^2+\alpha_3 z_0 z_1^3+\alpha_4 z_1^4) &= \det\begin{pmatrix} \alpha_0 & \frac{\alpha_1}{4} & \frac{\alpha_2}{6} \\ \frac{\alpha_1}{4} & \frac{\alpha_2}{6} & \frac{\alpha_3}{4} \\ \frac{\alpha_2}{6} & \frac{\alpha_3}{4} & \alpha_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha_0\alpha_2\alpha_4}{6}-\frac{\alpha_0\alpha_3^2}{16}-\frac{\alpha_1^2\alpha_4}{16}+\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{144}+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{216}-\frac{\alpha_2^3}{216}. \end{aligned}$$

Cette action induit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 et de codimension 1 sur $\mathbf{C}^5$ qui se prolonge à $\mathbf{C}\mathbb{P}(5)$.

2.4.8. Feuilletage exceptionnel. — Soit Γ la cubique gauche de $\mathbf{C}^3$ paramétrée par :

$$t \longmapsto \Big(t,\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{6}\Big).$$

On note $\mathrm{Aut}_\Gamma\,\mathbf{C}^3$ les automorphismes affines de $\mathbf{C}^3$ laissant Γ invariante. En fait $\mathrm{Aut}_\Gamma\,\mathbf{C}^3$ est isomorphe au groupe affine de la droite.

L'orbite d'un point m sous l'action de $\mathrm{Aut}_\Gamma\,\mathbf{C}^3$ est une variété d'adhérence algébrique. Cette action induit donc un $\mathscr{L}$-feuilletage, noté $\mathscr{F}_\Gamma$, sur $\mathbf{C}^3$ dont le lieu singulier est Γ. En redressant Γ par l'automorphisme polynomial :

$$\phi\colon (x,y,z)\longmapsto \Big(x,y-\frac{x^2}{2},z-\frac{x^3}{3}\Big),$$

on constate que $\phi^*\Gamma$ est une droite et $\phi^*\mathscr{F}_\Gamma$ est un feuilletage dont les feuilles sont des cylindres cuspidaux. On peut prolonger ce feuilletage en un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 et de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$; son lieu singulier est l'union de Γ, d'une droite et d'une conique. L'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}_\Gamma}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des transformations affines. Le théorème de Darboux-Jouanolou assure que le feuilletage $\mathscr{F}_\Gamma$ a une intégrale première rationnelle qui se calcule en fait explicitement ([**3**]) :

$$\frac{\big(z_0 z_3^2 - z_1 z_2 z_3 + \frac{z_2^3}{3}\big)^2}{\big(z_1 z_3 - \frac{z_2^2}{2}\big)^3}.$$

On note ω_Γ une 1-forme définissant le feuilletage $\mathscr{F}_\Gamma$. On dit que le feuilletage $\mathscr{F}'$ de degré 2 défini par $[\omega']$ est voisin de $\mathscr{F}_\Gamma$ si $[\omega']$ est proche de $[\omega_\Gamma]$. Si $\mathscr{F}'$ est un feuilletage de degré 2 voisin de $\mathscr{F}_\Gamma$ alors $\mathscr{F}'$ s'écrit $\sigma^*\mathscr{F}_\Gamma$ où σ est un automorphisme de $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ (voir [**3**]). On dit que le feuilletage $\mathscr{F}_\Gamma$ est stable ; on l'appelle feuilletage exceptionnel. De la stabilité résulte que la variété algébrique :

$$\overline{\{\sigma^*\mathscr{F}_\Gamma, \sigma \in \operatorname{Aut}\mathbf{C}\mathbb{P}(3)\}}$$

est une composante irréductible de l'espace des feuilletages de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ (voir [**3**]).

Le feuilletage exceptionnel apparaît aussi lorsqu'on considère l'action naturelle du groupe triangulaire :

$$\mathscr{T}_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1/\alpha \end{smallmatrix}\right) \mid \alpha \in \mathbf{C}^*, \beta \in \mathbf{C} \right\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$$

sur V_4. Elle induit une action de $\mathrm{P}\,\mathscr{T}_2$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ dont les orbites sont de dimension deux, autrement dit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 et de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ associé à l'algèbre du groupe des transformations affines. On peut montrer que c'est le feuilletage exceptionnel.

Il y a encore une autre façon de voir le feuilletage exceptionnel. On considère l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$, l'espace des quadruplets de points sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(1)$. L'invariant de cette action est l'invariant j des courbes elliptiques ; fixer la position d'un des quatre points revient à se donner un hyperplan $\mathbf{C}\mathbb{P}(3) \subset \mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Le feuilletage induit par les fibres de la restriction de j à ce $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ est encore le feuilletage exceptionnel.

2.5. Exemple de Gordan-Noether

Hesse affirme que si P est un polynôme homogène en les variables $z_1, \ldots, z_n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\det \operatorname{Hess} P = 0$,
(ii) le polynôme P « dépend de moins de n variables ».

Bien sûr $\operatorname{Hess} P$ désigne la matrice hessienne de P.

Sylvester commence par corriger l'affirmation de Hesse ; si P est un polynôme homogène en $z_1, \ldots, z_n$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

a. Il existe $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbf{C}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial P}{\partial z_j} = 0$,
b. le polynôme P « dépend de moins de n variables ».

Puis Gordan et Noether donnent un contre-exemple à l'affirmation de Hesse ; le polynôme homogène de degré 3 sur $\mathbf{C}^5$:

$$P(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_5$$

vérifie (i) mais pas (ii). Il se trouve que P définit un $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}_{GN}$ sur $\mathbf{C}^5$. Les champs :

$$X_1 = z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - z_1\frac{\partial}{\partial z_4}, \quad X_2 = z_2\frac{\partial}{\partial z_4} - z_1\frac{\partial}{\partial z_5},$$
$$X_3 = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_3\frac{\partial}{\partial z_3} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4} \quad \text{et} \quad X_4 = z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4} - 2z_5\frac{\partial}{\partial z_5}$$

annulent P, sont linéairement indépendants et vérifient les relations :

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = -2X_1, \quad [X_1, X_4] = -X_1,$$
$$[X_2, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_4] = -2X_2 \quad \text{et} \quad [X_3, X_4] = 0.$$

Ils engendrent une algèbre de Lie maximale qui est ponctuellement de dimension 4. Le $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}_{GN}$ se prolonge en un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(5)$ dont une intégrale première est :

$$\frac{z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_5}{z_0^3}.$$

Dans ce feuilletage il y a un sous-feuilletage en 2-plans qui admet pour intégrales premières :

$$z_1 = \text{cte}, \quad z_2 = \text{cte}, \quad z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_5 = \text{cte}.$$

Ce feuilletage en 2-plans produit un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension 3 sur $\mathbf{C}^5$ et $\mathbf{C}\mathbb{P}(5)$. L'algèbre correspondante est engendrée par les champs X_1 et X_2.

Il produit aussi un $\mathscr{L}$-feuilletage de codimension deux sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ d'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}} = \langle X_1, X_2, R\rangle$ avec pour intégrales premières :

$$\frac{z_1}{z_2} \quad \text{et} \quad \frac{P}{z_1^3}.$$

Il est donc défini en coordonnées homogènes par la 2-forme de degré 3 :

$$z_1 dz_2 \wedge dP - z_2 dz_1 \wedge dP + 3P dz_1 \wedge dz_2.$$

Il s'obtient comme « intersection » de deux feuilletages ; cependant la 2-forme Ω n'est pas du type $\Omega = \alpha \wedge \beta$ avec α et β deux 1-formes homogènes.

Revenons au polynôme de Gordan-Noether ; le lieu singulier de P est l'intersection des deux hyperplans $\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$, *i.e.* un espace linéaire de codimension 2 dans $\mathbf{C}^5$.

Soit f un polynôme homogène de degré 3 sur $\mathbf{C}^n$ dont le lieu singulier est l'espace linéaire de codimension 2 défini par $\{z_1 = z_2 = 0\}$. Alors $f = z_1 A + z_2 B$; comme le lieu des zéros de :

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = A + z_1\frac{\partial A}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial B}{\partial z_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = z_1\frac{\partial A}{\partial z_2} + B + z_2\frac{\partial B}{\partial z_2}$$

est $\{z_1 = z_2 = 0\}$, le polynôme f s'écrit :

$$f = \alpha z_1^2 + \beta z_1 z_2 + \gamma z_2^2$$

où α, β et γ sont des formes linéaires. Lorsque z_1, z_2, α, β et γ sont indépendantes, f est conjugué au polynôme de Gordan-Noether ; ceci n'arrive qu'à partir de la dimension 5. D'où la :

PROPOSITION 2.4. — *Soient n un entier supérieur ou égal à 5 et f un polynôme homogène de degré 3 sur $\mathbf{C}^n$. Supposons que* Sing f *soit un espace linéaire de codimension 2. Alors génériquement f est linéairement conjugué à l'exemple de Gordan et Noether. En particulier le feuilletage associé à f est un $\mathscr{L}$-feuilletage.*

CHAPITRE 3

$\mathscr{L}$-FEUILLETAGES DE PETITS DEGRÉS SUR $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ ET COMPLÉMENTS

3.1. Feuilletages de degré 0 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$

La proposition suivante donne une description des feuilletages de degré 0 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$:

PROPOSITION 3.1. — *Un feuilletage $\mathscr{F}$ de degré 0 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ est associé à un pinceau d'hyperplans, i.e. possède une intégrale première ℓ_1/ℓ_2 où ℓ_1 et ℓ_2 sont des formes linéaires indépendantes. En particulier, $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage.*

Démonstration. — Soient ω une 1-forme définissant le feuilletage $\mathscr{F}$ et $m \notin \operatorname{Sing}\omega$. D'après le théorème de Frobenius il existe au voisinage du point m une submersion z_1 et une unité u que l'on peut écrire $\mathrm{cte} - z_2$ telles que :

$$\omega = (\mathrm{cte} - z_2)dz_1$$

d'où l'égalité :

$$d\omega = dz_1 \wedge dz_2.$$

Mais comme $d\omega$ est une 2-forme « constante », un développement de Taylor au voisinage d'un point m générique assure l'existence de deux formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 telles que $d\omega = d\ell_1 \wedge d\ell_2$.

Il en résulte que $\omega = \frac{1}{2}(\ell_1 d\ell_2 - \ell_2 d\ell_1) + dQ$ où Q est une forme quadratique. Comme ω annule le champ radial, la forme quadratique Q est nulle.

Autrement dit, à conjugaison près par un automorphisme de $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, il y a un unique feuilletage $\mathscr{F}_0$ de degré 0 dans $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, le feuilletage associé à :

$$\omega_0 = z_0 dz_1 - z_1 dz_0$$

i.e. au pinceau d'hyperplans $z_1/z_0 = \mathrm{cte}$.

Soit $\widetilde{\mathscr{L}}_{\mathscr{F}_0}$ l'algèbre de Lie des champs linéaires sur $\mathbf{C}^{n+1}$ annulés par la 1-forme :

$$z_0 dz_1 - z_1 dz_0.$$

On constate que le champ radial R et les :

$$z_j\frac{\partial}{\partial z_i}\quad i\geqslant 2,\quad j\geqslant 0,$$

forment une base de $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_0}}$ qui est visiblement maximale. On peut évidemment préciser la nature algébrique de $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}_0}}$ et donc de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}_0}$: l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}_0}$ s'identifie à celle des matrices $(n+1)\times(n+1)$ dont les deux premières lignes sont nulles. $\square$

3.2. Feuilletages de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$

On commence par rappeler qu'un feuilletage de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ possède une intégrale première de l'un des trois types suivants :

$$z_0^{\lambda_0}z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\ \text{où}\ \lambda_i\in\mathbf{C}^*\ \text{et}\ \sum_{i=0}^{2}\lambda_i=0,\qquad \frac{z_0}{z_1}\exp\left(\frac{z_2}{z_1}\right),\qquad \frac{Q}{z_0^2}$$

où Q désigne une forme quadratique de rang maximum.

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ décrit par la 1-forme ω. Le feuilletage $\mathscr{F}$ admet trois points singuliers donc une droite invariante. En effet supposons que ces trois points ne soient pas confondus, alors la droite passant par deux points singuliers distincts est invariante car a deux points de contact avec le feuilletage qui est de degré 1. Si les trois points singuliers sont confondus, alors chaque droite passant par le point singulier triple a un contact d'ordre 3 donc est invariante. Le feuilletage est donc un pinceau d'hyperplans, *i.e.* de degré 0 ce qui est exclu.

Si les trois points singuliers du feuilletage $\mathscr{F}$ sont distincts et non alignés, notons $\mathscr{D}$ une droite passant par deux de ces points ; dans la carte affine $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)\smallsetminus\mathscr{D}$, le feuilletage $\mathscr{F}$ est décrit par la 1-forme :

$$\omega_{|\mathbf{C}\mathbb{P}(2)\smallsetminus\mathscr{D}}=f(z_1,z_2)dz_1+g(z_1,z_2)dz_2$$

avec f et g affines. Si on prend comme origine le troisième point singulier de $\mathscr{F}$, le feuilletage $\mathscr{F}$ est alors décrit dans la carte affine par la 1-forme :

$$\widetilde{\omega}=(\alpha z_1+\beta z_2)dz_1+(\gamma z_1+\delta z_2)dz_2$$

avec α, β, γ, $\delta\in\mathbf{C}$. On constate alors que le feuilletage est invariant sous l'action du flot du champ radial :

$$(z_1,z_2)\longmapsto(e^tz_1,e^tz_2)$$

autrement dit R est une symétrie et $P=i_R\widetilde{\omega}$ est un facteur intégrant. On a alors, à conjugaison près, l'alternative $P=z_0z_1$ ou $P=z_0^2$. Si $P=z_0z_1$, le feuilletage $\mathscr{F}$ admet une intégrale première de type $z_0^{\lambda_0}z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}$; dans le second cas le feuilletage a pour intégrale première : $\frac{z_1}{z_0}\exp(\frac{z_2}{z_1})$. En fait, dans cette situation, on vérifie que $\mathscr{F}$ n'a que deux points singuliers.

Si les trois points singuliers du feuilletage sont distincts et alignés, on se donne, pour tout t dans $\mathbf{C}$, une 1-forme ω_t définissant un feuilletage $\mathscr{F}_t$ dont les trois points singuliers ne sont pas alignés et telle que $\lim_{t\to 0}\omega_t = \omega$. Par ce qui précède le feuilletage $\mathscr{F}_t$ possède un facteur intégrant P_t ; par compacité, $\lim_{t\to 0}[P_t]$ a un sens et produit un facteur intégrant P de ω. L'identité d'Euler assure que le polynôme P est réductible, donc appartient, à conjugaison près, à la liste suivante :

$$z_0^3, \quad z_0 z_1 z_2, \quad z_0 z_1^2, \quad z_0 Q$$

où Q est une forme quadratique de rang maximum. Si $P = z_0 Q$, alors :

$$\frac{\omega}{P} = \lambda_0 \frac{dz_0}{z_0} + \lambda_1 \frac{dQ}{Q}$$

avec $\lambda_0 + 2\lambda_1 = 0$. Quitte à prendre $\lambda_0 = 2$ et $\lambda_1 = -1$, on obtient :

$$\frac{\omega}{P} = d\left(\frac{Q}{z_0^2}\right).$$

Lorsque $P = z_0^3$; on a :

$$\frac{\omega}{P} = d\left(\frac{q}{z_0^2}\right).$$

Si $P = z_0 z_1 z_2$, alors $\mathscr{F}$ est un feuilletage logarithmique déjà rencontré ; enfin si $P = z_0 z_1^2$, le feuilletage $\mathscr{F}$ admet pour intégrale première :

$$\frac{z_0}{z_1}\exp\left(\frac{z_2}{z_1}\right).$$

Rappelons le résultat suivant classifiant les feuilletages de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, $n \geqslant 3$. Il est probablement dû à G. Reeb, en tout cas dans le contexte affine ; on le trouve dans [**10**].

Théorème 3.2. — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$; on a l'alternative suivante :*

(i) *Il existe une projection $\tau\colon \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \dashrightarrow \mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ et un feuilletage $\mathscr{F}_1$ de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ tels que $\mathscr{F} = \tau^*\mathscr{F}_1$.*

(ii) *Le feuilletage $\mathscr{F}$ possède une intégrale première rationnelle du type Q/L^2 avec $\deg(Q) = 2$ et $\deg(L) = 1$.*

Cet énoncé permet de montrer que l'espace des feuilletages de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ a deux composantes irréductibles correspondant aux deux possibilités de l'alternative.

Corollaire 3.3. — *Tout feuilletage $\mathscr{F}$ de degré 1 possède un hyperplan H invariant par $\mathscr{F}$, autrement dit un hyperplan H tel que $H \smallsetminus \operatorname{Sing}\mathscr{F}$ soit une feuille de $\mathscr{F}$.*

On en déduit la :

Proposition 3.4. — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ possédant une intégrale première de type Q/L^2. Alors $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage.*

Si Q est générique, l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(n,\mathbf{C})$.

Démonstration. — On prend l'hyperplan invariant $H=(L=0)$ comme hyperplan à l'infini. Sur $(\mathbf{C}\mathbb{P}(n)\smallsetminus H)\simeq \mathbf{C}^n$, le feuilletage $\mathscr{F}$ a pour intégrale première le polynôme :

$$Q=q_0+q_1(z)+q_2(z)$$

où les q_i sont homogènes de degré i. Si q_2 est de rang maximum, alors quitte à composer par une translation à la source et une au but, on peut supposer que q_0 et q_1 sont nuls. Ainsi $Q=q_2$ et l'algèbre des champs affines qui annulent Q est en fait une algèbre de champs linéaires car 0 est singularité isolée de Q ; cette algèbre est $\mathfrak{so}(Q)\simeq\mathfrak{so}(n,\mathbf{C})$.

Dans les cas où q_2 n'est pas de rang maximum, alors le polynôme Q est conjugué à $z_0^2+\cdots+z_k^2+q_1(z)$, avec q_1 affine. Si q_1 est fonction de $z_0,\ldots,z_k$, alors Q est conjugué à $z_0^2+\cdots+z_k^2$; le feuilletage $\mathscr{F}$ est associé à l'algèbre engendrée par les champs :

$$z_i\frac{\partial}{\partial z_j}-z_j\frac{\partial}{\partial z_i},\ 0\leqslant i<j\leqslant k,\quad z_\ell\frac{\partial}{\partial z_p},\ \ell\geqslant 0,\ p\geqslant k+1\quad\text{et}\quad \frac{\partial}{\partial z_m}, m\geqslant k+1.$$

Si q_1 n'est pas une fonction de $z_0,\ldots,z_k$, alors le polynôme Q s'écrit à conjugaison près : $Q=z_0^2+\cdots+z_k^2+z_{k+1}$; le feuilletage est associé à l'algèbre engendrée par les champs :

$$z_i\frac{\partial}{\partial z_j}-z_j\frac{\partial}{\partial z_i},\ 1\leqslant i<j\leqslant k,\quad z_\ell\frac{\partial}{\partial z_p},\ \ell\geqslant 1,\ p\geqslant k+2,$$
$$\frac{\partial}{\partial z_m},\ m\geqslant k+2\quad\text{et}\quad 2z_r\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}-\frac{\partial}{\partial z_r},\ r\neq k+1. \qquad \square$$

Lorsque $\mathscr{F}$ est de type « pull-back » on a la :

PROPOSITION 3.5. — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ du type $\mathscr{F}=\tau^*\mathscr{F}_1$, où $\tau\colon \mathbf{C}\mathbb{P}(n)\dashrightarrow\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ est linéaire et $\mathscr{F}_1$ un feuilletage de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$. Alors $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{D}$ une droite invariante par $\mathscr{F}_1$ et $H=\tau^{-1}(\mathscr{D})$; l'hyperplan H est invariant par $\mathscr{F}$. Dans les cartes affines $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)\smallsetminus H=\{z_1,\ldots,z_n\}$ et $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)\smallsetminus\mathscr{D}=\{z_1,z_2\}$, l'application τ est de la forme :

$$(z_1,\ldots,z_n)\longmapsto(z_1,z_2).$$

Le feuilletage $\mathscr{F}_1$ est décrit dans la carte affine $\{z_1,z_2\}$ par :

$$\omega_1=a(z_1,z_2)dz_1+b(z_1,z_2)dz_2$$

avec a et b affines. Alors $\mathscr{F}=\tau^*(\mathscr{F}_1)$ est donné par :

$$\omega=\tau^*\omega_1=a(z_1,z_2)dz_1+b(z_1,z_2)dz_2.$$

Dans cette même carte, on constate que la 1-forme ω annule les champs affines :

$$b(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_1}-a(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_2},\ \frac{\partial}{\partial z_3},\ldots,\ \frac{\partial}{\partial z_n},\ z_j\frac{\partial}{\partial z_k}$$

pour $3\leqslant k\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant n$. $\square$

On en déduit le :

THÉORÈME 3.6. — *Tout feuilletage de degré* 1 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ *est un* $\mathscr{L}$*-feuilletage.*

La proposition 3.5 ne se généralise pas en degré supérieur :

PROPOSITION 3.7. — *Soit* $\mathscr{F}$ *du type* $\mathscr{F} = \tau^*\mathscr{F}_1$ *où* $\tau\colon \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \dashrightarrow \mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ *est linéaire et* $\mathscr{F}_1$ *un feuilletage de degré plus grand que* 2 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$. *Alors* $\mathscr{F}$ *n'est pas un* $\mathscr{L}$*-feuilletage.*

Démonstration. — Comme dans la preuve de la proposition 3.5, on constate que $\mathscr{F}$ est décrit par :

$$\omega = A_0(z_0,z_1,z_2)dz_0 + A_1(z_0,z_1,z_2)dz_1 + A_2(z_0,z_1,z_2)dz_2$$

où les A_i sont de degré $\geqslant 3$. On remarque que ω annule le champ radial et les champs $z_j\frac{\partial}{\partial z_k}$ pour $k \geqslant 3$ et $j = 0,\ldots,n$. Supposons que pour z générique :

$$\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}}(z) = \dim\{X(z) \mid X \in \mathscr{L}_{\mathscr{F}}\} = n-1.$$

Alors il existe X champ linéaire qui annule ω et tel que la 1-forme $\overline{\omega}$ de degré 2 définie par :

$$\overline{\omega} = i_R i_X dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2$$

soit non identiquement nulle. En un point m générique, on a $\ker\omega(m) = \ker\overline{\omega}(m)$, autrement dit ω et $\overline{\omega}$ sont colinéaires. La 1-forme $\overline{\omega}$ s'écrit $Q\overline{\omega}'$ où $\operatorname{Sing}\overline{\omega}'$ est de codimension 2 et $\deg\overline{\omega}' \leqslant 2$. La colinéarité de ω et $\overline{\omega}$ entraîne celle de ω et $\overline{\omega}'$; ainsi ω s'écrit $P\overline{\omega}'$ avec $\deg P \geqslant 1$ et ω s'annule sur l'hypersurface définie par le lieu des zéros de P ce qui viole la condition $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\omega \geqslant 2$. □

3.3. Compléments

Dans cette partie, on étudie les $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 0 et de codimension quelconque sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$.

Par définition, un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 0 et de codimension p sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ est associé au champ de p-plans défini par une p-forme homogène Ω de degré 1 sur $\mathbf{C}^{n+1}$ annulant le champ radial R. Plus précisément une telle 1-forme s'écrit :

$$\Omega = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_p)} L_I dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$$

où L_I désigne une forme linéaire. On demande que $i_R\Omega \neq 0$. L'intégrabilité de Ω implique qu'en tout point générique m de $\mathbf{C}^{n+1}$ la 1-forme Ω s'écrit localement :

$$\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$$

où les ω_i sont des 1-formes locales telles que le système de Pfaff engendré par les ω_i soit intégrable :

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge d\omega_i = 0 \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,p\}.$$

THÉORÈME 3.8. — *Un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension p et de degré 0 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage.*

Démonstration. — Elle résulte de la description des formes Ω qui suit.

Si $p = n-1$, la condition $i_R\Omega = 0$ implique l'existence d'un champ X_0 tel que :

$$\Omega = i_{X_0} i_R dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

Comme $\deg \Omega = 1$, on peut prendre pour X_0 un champ constant, par exemple $\frac{\partial}{\partial z_0}$. Visiblement, $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage et l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par le champ radial et les :

$$z_j \frac{\partial}{\partial z_0}, j = 0, \ldots, n+1.$$

Les z_i/z_j, $1 \leqslant i \leqslant j$, sont des intégrales premières de $\mathscr{F}$. Dans la carte affine $z_0 = 1$, le feuilletage est associé au champ radial $\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ de $\mathbf{C}^n$.

On suppose que $p < n-1$. Soit m un point générique de $\mathbf{C}^{n+1}$, la 1-forme Ω s'écrit :

$$\Omega = \omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1}$$

où ω_i désigne une 1-forme locale en m. Le théorème de Frobenius classique assure l'existence de submersions $f_0, \ldots, f_{p-1}$ indépendantes telles que :

$$\Omega \wedge df_i = 0.$$

On peut supposer, pour tout $i = 0, \ldots, p-1$, que $f_i = z_i +$ termes de degré supérieur. On a l'égalité $d\Omega \wedge df_i = 0$ qui, comme la 1-forme $d\Omega$ est à coefficients constants, conduit pour $i = 0, \ldots, p-1$ à :

$$d\Omega \wedge dz_i = 0.$$

En résulte que :

$$\Omega = dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_{p-1} \wedge \eta$$

où η est une 1-forme à coefficients constants ; il existe une forme linéaire L telle que $\eta = dL$. Comme Ω est non nulle, on peut supposer que $L = z_p$; on obtient alors :

$$\begin{aligned} \Omega &= i_R(dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_p) \\ &= z_0 dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_p - z_1 dz_0 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_p + \cdots \end{aligned}$$

On remarque que les champs de vecteurs :

$$z_j \frac{\partial}{\partial z_\ell} \quad \text{et} \quad R_{ij} = z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + z_j \frac{\partial}{\partial z_j},$$

où $\ell \geqslant p+1$ et $i < j \leqslant p$, annulent Ω. Ceci démontre que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage ; il possède comme intégrales premières :

$$\frac{z_i}{z_j}$$

pour $i < j \leqslant p$. Les feuilles régulières sont d'adhérence des p-plans. □

Rappelons que lors de l'étude de l'exemple de Gordan-Noether nous avons rencontré des $\mathscr{L}$-feuilletages de codimensions différentes de 1 ; les feuilletages de degré 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ de codimension p, avec $1 < p < n-1$, ne sont actuellement pas classifiés. Voici quelques exemples de feuilletages de codimension 2 obtenus par intersection de feuilletages de codimension 1 par exemple dans $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. On généralisera facilement.

Comme on l'a vu l'intersection de deux pinceaux d'hyperplans $z_0/z_1 =$ cte et $z_0/z_2 =$ cte définit un feuilletage de degré 0 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Ce feuilletage peut être vu comme dégénérescence de l'intersection de deux pinceaux d'hyperplans génériques $z_0/z_1 =$ cte et $z_2/z_3 =$ cte qui, lui aussi, est un $\mathscr{L}$-feuilletage, de degré 1 cette fois.

Considérons maintenant un feuilletage logarithmique $\mathscr{F}_{\overline{\omega}}$, de degré 1, donné par :

$$\overline{\omega} = z_0 z_1 z_2 \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \frac{dz_i}{z_i}$$

où $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Nous allons l'intersecter avec un pinceau d'hyperplans ; le degré du feuilletage associé sera 1 ou 2 suivant que la position du pinceau d'hyperplans est générique ou non par rapport à $\overline{\omega}$. Par exemple le feuilletage de codimension 2 obtenu par intersection de $\mathscr{F}_{\overline{\omega}}$ et de $z_3/z_4 =$ cte définit un feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Il possède les deux intégrales premières $z_0^{\lambda_0} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2}$ et z_2/z_3. On peut faire dégénérer ce pinceau sur le suivant $z_0/z_3 =$ cte et obtenir ainsi un feuilletage de degré 1. Ces deux feuilletages sont des $\mathscr{L}$-feuilletages. Si l'on considère un autre type de dégénérescence du pinceau, par exemple le pinceau $(z_0 + z_1)/z_3 =$ cte, on obtient un feuilletage de degré 2 et de codimension 2 qui n'est pas un $\mathscr{L}$-feuilletage.

CHAPITRE 4

$\mathscr{L}$-FEUILLETAGES EN DIMENSION 3

4.1. Feuilletages de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$

On rappelle d'abord la description de l'espace des feuilletages de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ (voir [**3**]). Puis on dégage quelques obstructions à ce qu'un tel feuilletage soit un $\mathscr{L}$-feuilletage. On note $\Omega^1_p(\mathbf{C}^n)$ l'espace des 1-formes homogènes de degré p sur $\mathbf{C}^n$. Si Θ est un sous-ensemble de $\Omega^1_p(\mathbf{C}^n)$, on pose :

$$\Theta^* := \{[\omega] \in \Theta \mid \operatorname{codim} \operatorname{Sing} \omega \geqslant 2\}.$$

(i) Considérons l'ensemble :

$$\Sigma(1,1,1,1;3) = \big\{\ell_0\ell_1\ell_2\ell_3 \textstyle\sum_{k=0}^3 \lambda_k \frac{d\ell_k}{\ell_k} \mid \lambda_k \in \mathbf{C}^*,\ \sum_{k=0}^3 \lambda_k = 0\big\}$$

où les ℓ_i sont des formes linéaires non nulles. On considère l'adhérence ordinaire $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,1,1,1;3)}$ de $\mathrm{P}\,\Sigma(1,1,1,1;3)$ dans $\mathrm{P}\,\Omega^1_3(\mathbf{C}^4)$. Un élément $[\omega] \in \overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,1,1,1;3)}^*$ définit un feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. Ils constituent un ouvert de Zariski de la sous-variété unirationnelle $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,1,1,1;3)}$.

(ii) On introduit l'ouvert de Zariski $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,1,2;3)}^*$ de la variété unirationnelle $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,1,2;3)}$ avec :

$$\Sigma(1,1,2;3) = \big\{\ell_0\ell_1 Q\big(\lambda_0 \tfrac{d\ell_0}{\ell_0} + \lambda_1 \tfrac{d\ell_1}{\ell_1} + \lambda_2 \tfrac{dQ}{Q}\big) \mid \lambda_i \in \mathbf{C}^*,\ \lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\big\},$$

les ℓ_i sont des formes linéaires non nulles et Q une forme quadratique non triviale.

(iii) On définit l'ouvert de Zariski $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,3;3)}^*$ de la variété unirationnelle $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,3;3)}$ où :

$$\Sigma(1,3;3) = \big\{\ell C\big(\lambda_0 \tfrac{d\ell}{\ell} + \lambda_1 \tfrac{dC}{C}\big) \mid \lambda_i \in \mathbf{C}^*,\ \lambda_0 + 3\lambda_1 = 0\big\}$$

avec ℓ forme linéaire non nulle et C de degré 3.

(iv) On note $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(2,2;3)}^*$ l'ouvert de Zariski de la variété unirationnelle $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(2,2;3)}$ adhérence de :

$$\Sigma(2,2;3) = \big\{Q_0Q_1\big(\lambda_0\tfrac{dQ_0}{Q_0} + \lambda_1\tfrac{dQ_1}{Q_1}\big) \mid \lambda_i \in \mathbf{C}^*, \lambda_0 + \lambda_1 = 0\big\}$$

où les Q_i sont des formes quadratiques.

On définit ensuite $\mathrm{PB}(2;3)$ l'ensemble des pull back linéaires comme suit :

$$\mathrm{PB}(2;3) = \{\tau^*\widetilde{\omega} \mid \tau\colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3 \text{ linéaire, } \widetilde{\omega} \in \Omega^1_3(\mathbf{C}^3),\ i_R\widetilde{\omega} = 0\}$$

et l'ouvert de Zariski $\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{PB}(2;3)}^*$ de la sous-variété unirationnelle $\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{PB}(2;3)}$.

On termine par l'adhérence de l'orbite du feuilletage exceptionnel :

$$\mathrm{Excep}(2,3) = \overline{\mathrm{PGL}(4,\mathbf{C}) \cdot \omega_\Gamma} \cap \{[\omega] \mid \operatorname{codim}\operatorname{Sing}\omega \geqslant 2\}$$

où ω_Γ désigne la 1-forme définissant le feuilletage exceptionnel. Par construction, les éléments génériques de $\mathrm{Excep}(2,3)$ sont conjugués et correspondent à un $\mathscr{L}$-feuilletage associé à l'algèbre du groupe des transformations affines comme nous l'avons vu dans 2.4.8.

On peut maintenant énoncer le :

Théorème 4.1 ([**3**]). — *Les ensembles* $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(.;3)}^*$, $\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{PB}(2;3)}^*$ *et* $\mathrm{Excep}(2;3)$ *sont les composantes irréductibles de l'espace des feuilletages de degré* 2 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$.

Ce théorème se généralise en toute dimension ([**3**]).

Pour se convaincre que tous les feuilletages de degré 2 ne sont pas des $\mathscr{L}$-feuilletages nous allons voir des obstructions plus ou moins évidentes à ce qu'ils le soient ; ces obstructions sont utilisées pour vérifier certains calculs.

Lemme 4.2. — *Un élément générique de* $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(1,3;3)}^*$ *ne définit pas un* $\mathscr{L}$*-feuilletage de degré* 2 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ le feuilletage décrit par la 1-forme :

$$\omega = \ell C\left(\lambda_0\frac{d\ell}{\ell} + \lambda_1\frac{dC}{C}\right)$$

avec $\lambda_0 + 3\lambda_1 = 0$. Il a pour intégrale première C/ℓ^3 ; ainsi dans la carte affine $\mathbf{C}^3 = \mathbf{C}\mathbb{P}(3) \smallsetminus (\ell = 0)$, les feuilles de $\mathscr{F}$ sont les niveaux du polynôme C de degré 3 privés des points singuliers. On suppose que C est général autrement dit que les niveaux de C sont des surfaces cubiques générales ; une telle surface contient 27 droites ([**8**]). Soit $X \in \chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(3))$ un champ tangent à $\mathscr{F}$, alors X laisse l'hyperplan d'équation $\ell = 0$ invariant et par suite est affine dans la carte $\mathbf{C}^3$. Un tel X est nécessairement tangent aux 27 droites de chaque niveau générique. Si $\mathscr{F}$ était un $\mathscr{L}$-feuilletage, il existerait deux champs affines X et Y tels que :

$$\omega_{|\mathbf{C}^3} = \mathrm{cte}\ i_X i_Y dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2.$$

En particulier X et Y seraient colinéaires le long d'un nombre fini de courbes. Or on vient de voir que dans chaque fibre générique de C, les champs X et Y sont colinéaires le long de 27 droites. $\square$

De même on a le :

Lemme 4.3. — *Un élément générique de* $\overline{\mathrm{P}\,\Sigma(2,2;3)}^*$ *ne définit pas un* $\mathscr{L}$*-feuilletage de degré* 2 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ décrit par :

$$\omega = Q_0Q_1\left(\frac{dQ_0}{Q_0} - \frac{dQ_1}{Q_1}\right).$$

Si Q_0 et Q_1 sont des formes quadratiques génériques, alors $(Q_0 = Q_1 = 0)$ est une courbe elliptique $\mathscr{E}$ non plane (quartique). Soit X un champ tangent au feuilletage $\mathscr{F}$; comme $\mathscr{E} \subset \operatorname{Sing}\mathscr{F}$, le champ X est tangent à $\mathscr{E}$. Si X est non identiquement nul sur $\mathscr{E}$, il induit un champ de vecteurs $X_{\mathscr{E}}$ sur $\mathscr{E}$. Donc $X_{\mathscr{E}}$ est constant et en particulier n'admet pas de singularité. Par suite $\mathscr{E}$ est une trajectoire de X. La classification des champs linéaires dit que les seules trajectoires compactes sont les points singuliers ; ainsi $X_{\mathscr{E}} = 0$. Le lieu des zéros d'un champ linéaire étant une sous-variété linéaire, on obtient finalement que $X = 0$. $\square$

Le lemme suivant a été prouvé au chapitre 3 :

Lemme 4.4. — *Un élément générique de* $\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{PB}(2;3)}^*$ *n'est pas un* $\mathscr{L}$*-feuilletage de degré* 2 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$.

4.2. $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$

On s'intéresse à la classification des $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$. Dans le chapitre précédent, on a vu que les feuilletages de degrés 0 et 1 sont des $\mathscr{L}$-feuilletages.

La proposition 1.4 assure qu'un $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ est associé à une algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ de dimension 2. D'après la classification des algèbres de Lie complexes de dimension 2, l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est soit abélienne, soit isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des transformations affines $\langle z \mapsto az + b \mid a \in \mathbf{C}^*, b \in \mathbf{C}\rangle$.

La liste des $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ est donnée par le théorème suivant ; dans l'énoncé (z_0, z_1, z_2, z_3) désigne un système de coordonnées. Les symboles Ab et Af distinguent les cas abéliens et affines.

THÉORÈME 4.5. — *Un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré* 2 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ *possède, à conjugaison près, l'une des intégrales premières suivantes :*

$$
\begin{array}{llll}
Ab(i) & z_0^{\lambda_0} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} z_3^{\lambda_3}, & Ab(ii) & \dfrac{z_1 z_2 + z_0 z_3}{z_1 z_3} \\[2ex]
Ab'(ii) & \dfrac{z_1}{z_3} \exp\left(\dfrac{z_0 z_3 + z_2 z_1}{z_1 z_3}\right), & Ab(iii) & \dfrac{z_0}{z_3} \exp\left(\dfrac{z_2^2 - z_1 z_3}{z_3^2}\right) \\[2ex]
Ab(iv) & \dfrac{z_1 z_3^{\kappa-1}}{z_0^{\kappa}} \exp\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right), & Ab(v) & \dfrac{z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3}{z_3^3} \\[2ex]
Af(i) & \dfrac{\left(z_0 z_3^2 - z_1 z_2 z_3 + \frac{z_2^3}{3}\right)^2}{\left(z_1 z_3 - \frac{z_2^2}{2}\right)^3}, & Af(ii) & \dfrac{z_0^2 z_3^{2(\kappa-1)}}{(z_1 z_3 - z_2^2)^{\kappa}} \\[2ex]
Af(iii) & \dfrac{z_3^2}{z_1 z_3 - z_2^2} \exp\left(\dfrac{z_0}{z_3}\right), & Af(iv) & \dfrac{z_0}{z_3} \exp\left(\dfrac{z_2^2 - z_1 z_3}{z_0 z_3}\right) \\[2ex]
Af(v) & \dfrac{z_2}{z_3} \exp\left(\dfrac{z_0 z_3 - z_1 z_2}{z_3^2}\right), & Af(vi) & \dfrac{(z_0 z_3 - z_1 z_2)^{\kappa}}{z_2^{\kappa+1} z_3^{\kappa-1}} \\[2ex]
Af(vii) & \dfrac{z_0 z_3 - z_1 z_2}{z_3^2} \exp\left(-\dfrac{z_2}{z_3}\right) & &
\end{array}
$$

où κ *et* $\lambda_i \in \mathbf{C}^*$.

En particulier, on obtient le théorème 0.1 annoncé dans l'introduction. On déduit de la liste les 1-formes qui définissent les feuilletages en prenant les dérivées logarithmiques des intégrales premières.

La démonstration du théorème 4.5 se fait en plusieurs étapes suivant la nature de l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$. Elle procède par classification effective des sous-algèbres de matrices de dimension deux.

Bien que cela n'apparaisse pas directement dans le texte nous avons souvent utilisé le lemme suivant qui permet d'éliminer certaines configurations :

LEMME 4.6. — *Soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{L}$*-feuilletage sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$. *Supposons qu'il existe un élément* X *de* $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ *dont la matrice associée est de rang* 1. *Alors* $\deg \mathscr{F} < n-1$ *et il existe une projection* $\tau \colon \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \dashrightarrow \mathbf{C}\mathbb{P}(n-1)$, *un feuilletage* $\mathscr{F}'$ *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(n-1)$ *tels que* $\mathscr{F} = \tau^* \mathscr{F}'$.

Démonstration. — Soient $X_1 = X, X_2, \ldots, X_{n-1}$ des éléments de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ tels qu'en un point générique m, les champs $R(m)$, $X_1(m), \ldots, X_{n-1}(m)$ soient indépendants. La condition sur le rang entraîne que le champ X s'écrit :

$$X = \ell X_0$$

où ℓ est une forme linéaire et X_0 un champ constant.

On peut choisir des coordonnées dans lesquelles le champ X_0 est de la forme $\partial/\partial z_0$; on a alors :

$$i_R i_{X_0} \dots i_{X_{n-1}} dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n = P\omega$$

où P est un polynôme homogène éventuellement constant et ω une 1-forme définissant $\mathscr{F}$. On constate que $\deg \omega < n-1$ et que ω ne dépend pas de z_0. □

4.2.1. Cas abélien. — Si A est une matrice carrée on écrit $A = A_S + A_N$ où A_S est semi-simple, A_N nilpotente et $[A_S, A_N] = 0$. Si A et B commutent, alors

$$[A_S, B_S] = [A_N, B_N] = [A_S, B_N] = [A_N, B_S] = 0 :$$

c'est la « jordanisation simultanée ».

Par Jordanisation simultanée des matrices, on établit la :

Proposition 4.7. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ associé à une algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ abélienne. On est à conjugaison près dans l'une des configurations suivantes :*

(i) *l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est diagonale,*
l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par les champs :

(ii) $$z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_2+z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}, \quad (z_2+\kappa z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3} \quad \textit{et } R,$$

(iii) $$\kappa z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} \quad \textit{et } R,$$

(iv) $$z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + \kappa z_1\frac{\partial}{\partial z_1} \quad \textit{et } R,$$

(v) $$z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad (z_2+\kappa z_3)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} \quad \textit{et } R.$$

Démonstration. — On décrit par jordanisation toutes les algèbres $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathbf{C}R \oplus \mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ avec $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ abélienne ; si une telle algèbre contient un élément de rang 1 on ne la retient pas (lemme 4.6). L'étude se fait « à la main » en examinant la nature du spectre d'un élément générique de $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$. Tous calculs faits on obtient les algèbres suivantes générées par :

$$R \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$$

et les matrices X et Y avec :

$$(\mathbf{i})\quad X=\begin{pmatrix}\alpha_0&0&0&0\\0&\alpha_1&0&0\\0&0&\alpha_2&0\\0&0&0&\alpha_3\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}\beta_0&0&0&0\\0&\beta_1&0&0\\0&0&\beta_2&0\\0&0&0&\beta_3\end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{ii})\quad X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&\kappa&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \kappa\neq 1,$$

$$(\mathbf{iii})\quad X=\begin{pmatrix}\kappa&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \kappa\neq 1,$$

$$(\mathbf{iv})\quad X=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\kappa&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \kappa\neq 0,$$

$$(\mathbf{v})\quad X=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}0&0&1&\kappa\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

où les α_i, β_i et κ sont dans $\mathbf{C}^*$.

En prenant les champs de vecteurs associés à ces cinq configurations on obtient la liste annoncée dans la proposition. □

On note $\mathfrak{g}_\alpha$ l'algèbre de Lie engendrée par R et les champs X et Y correspondant à la ligne $\alpha \in \{(\mathbf{i}),\ldots,(\mathbf{v})\}$.

Nous allons maintenant présenter la liste des intégrales premières des feuilletages associés à ces cinq algèbres.

(i) Cas où $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(i)}$ est diagonale.

Avec les notations précédentes on a :

$$X=\sum_{k=0}^{3}\alpha_k z_k\frac{\partial}{\partial z_k},\quad Y=\sum_{k=0}^{3}\beta_k z_k\frac{\partial}{\partial z_k}\quad \text{et}\quad R.$$

Le feuilletage $\mathscr{F}$ est décrit par :

$$i_R i_X i_Y dz_0\wedge dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3 = z_0z_1z_2z_3\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\frac{dz_k}{z_k}$$

avec $\sum_{k=0}^3\lambda_k\alpha_k=\sum_{k=0}^3\lambda_k\beta_k=\sum_{k=0}^3\lambda_k=0$. C'est le cas Ab (i) du théorème 4.5.

(ii) Traitons le cas où $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(ii)}$.

L'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par les trois champs :

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + (z_2 + z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad (z_2 + \kappa z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \quad \text{et } R, \quad \kappa \neq 1.$$

La 1-forme ω annulée par ces trois champs s'écrit :

$$\omega = (1-\kappa) z_1 z_3^2 dz_0 + ((\kappa - 1)z_0 - \kappa z_1) z_3^2 dz_1 - z_1^2 z_3 dz_2 + (z_2 + \kappa z_3) z_1^2 dz_3.$$

On constate que si $\kappa = 0$, alors :

$$\frac{\omega}{z_1^2 z_3^2} = d\left(\frac{z_0}{z_1} - \frac{z_2}{z_3}\right)$$

qui correspond au cas de Ab (ii) du théorème 4.5.

En fait, pour tout $\kappa \neq 1$, le polynôme $z_1^2 z_3^2$ est un facteur intégrant de ω. On vérifie que pour tout $\kappa \neq 1$ on a :

$$-\frac{\omega}{z_1^2 z_3^2} = (\kappa - 1) d\left(\frac{z_0}{z_1}\right) + d\left(\frac{z_2}{z_3}\right) + \kappa\left(\frac{dz_1}{z_1} - \frac{dz_3}{z_3}\right).$$

C'est le cas Ab' (ii) du théorème 4.5. Une intégrale première du feuilletage décrit par ω est :

$$(\kappa - 1)\frac{z_0}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} + \kappa \log\left(\frac{z_1}{z_3}\right)$$

ou son exponentielle ; autrement dit, à conjugaison près, on a :

$$\frac{z_1 z_2 - z_0 z_3}{z_1 z_3} \quad \text{si } \kappa = 0$$

et

$$\frac{z_1}{z_3} \exp\left(\frac{z_0 z_3 + z_2 z_1}{z_1 z_3}\right) \quad \text{si } \kappa \neq 0, 1.$$

On note que lorsque $\kappa = 1$ le feuilletage correspondant est de degré 1.

(iii) Cas où $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(iii)}$.

Les trois champs :

$$\kappa z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{et } R$$

engendrent $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$. La 1-forme ω annulée par ces trois champs s'écrit à multiplication près :

$$\begin{aligned}\omega = -z_3^3 dz_0 + z_0 z_3^2 dz_1 + (\kappa z_0 z_3 - z_0 z_2) z_3 dz_2 \\ + (z_0 z_3^2 - \kappa z_0 z_2 z_3 - z_0 z_1 z_3 + z_0 z_2^2) dz_3.\end{aligned}$$

Ici encore on trouve un facteur intégrant de ω évident : $z_0 z_3^3$. On a :

$$\frac{\omega}{z_0 z_3^3} = \frac{dz_0}{z_0} - \frac{dz_3}{z_3} + d\left(\frac{z_2^2 - 2\kappa z_2 z_3 - 2 z_1 z_3}{2 z_3^2}\right).$$

Une intégrale première de cette forme est donnée par :

$$\frac{z_0}{z_3}\exp\left(\frac{z_2^2-2z_1z_3-2\kappa z_2z_3}{2z_3^2}\right)$$

soit à conjugaison près :

$$\frac{z_0}{z_3}\exp\left(\frac{z_2^2-z_1z_3}{z_3^2}\right).$$

C'est le cas Ab (iii).

(iv) Cas où $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}=\mathfrak{g}_{(iv)}$.

L'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par les trois champs :

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2},\quad z_0\frac{\partial}{\partial z_0}+\kappa z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\quad \text{et } R.$$

La 1-forme ω annulée par ces trois champs s'écrit à multiplication près :

$$\omega=-\kappa z_1z_3^2dz_0+z_0z_3^2dz_1-z_0z_1z_3dz_2+z_0z_1((\kappa-1)z_3+z_2)dz_3.$$

En cherchant une famille d'applications linéaires laissant le feuilletage invariant, on construit une symétrie et on trouve que la 1-forme ω admet pour facteur intégrant $z_0z_1z_3^2$; ce que l'on peut constater de visu :

$$\frac{\omega}{z_0z_1z_3^2}=-\kappa\frac{dz_0}{z_0}+\frac{dz_1}{z_1}+(\kappa-1)\frac{dz_3}{z_3}-d\left(\frac{z_2}{z_3}\right).$$

Elle décrit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ dont une intégrale première est :

$$\frac{z_1z_3^{\kappa-1}}{z_0^{\kappa}}\exp\left(\frac{z_2}{z_3}\right).$$

Il s'agit du cas Ab (iv).

(v) Cas où $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}=\mathfrak{g}_{(v)}$.

Les trois champs :

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_2\frac{\partial}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2},\quad (z_2+\kappa z_3)\frac{\partial}{\partial z_0}+z_3\frac{\partial}{\partial z_1}\quad \text{et } R$$

engendrent notre algèbre. La 1-forme ω annulée par ces trois champs s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega=-z_3^3dz_0+z_3^2(z_2+\kappa z_3)dz_1+z_3(z_1z_3-z_2^2-\kappa z_2z_3)dz_2\\ +(z_0z_3^2-2z_1z_2z_3+z_2^3+\kappa z_2^2z_3-\kappa z_1z_3^2)dz_3.\end{aligned}$$

Le polynôme z_3^4 est un facteur intégrant de ω et :

$$\frac{\omega}{z_3^4}=d\left(-\frac{z_0}{z_3}+\kappa\frac{z_1}{z_3}-\kappa\frac{z_2^2}{2z_3^2}-\frac{z_2^3}{3z_3^3}+\frac{z_1z_2}{z_3^2}\right).$$

Cette forme décrit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ dont le lieu singulier est une droite :

$$\operatorname{Sing}\mathscr{F}=(z_2=z_3=0)$$

et d'intégrale première :

$$\frac{-z_0z_3^2+\kappa z_1z_3^2+z_1z_2z_3-\frac{z_2^3}{3}-\frac{\kappa z_2^2z_3}{2}}{z_3^3}.$$

Celle-ci s'écrit à conjugaison et composition à gauche par une homographie près :

$$\frac{z_0z_3^2+z_1z_2z_3+z_2^3}{z_3^3}.$$

C'est le cas Ab (v).

Dans la carte affine $z_3=1$, cette intégrale première s'écrit :

$$C(z_0,z_1,z_2)=z_0+z_1z_2+z_2^3$$

ce qui nous donne un polynôme de degré 3 induisant un $\mathscr{L}$-feuilletage dans $\mathbf{C}^3$. On constate que, pour tout $\rho\in\mathbf{C}$, on a :

$$C(\rho^3z_0,\rho^2z_1,\rho z_2)=\rho^3C(z_0,z_1,z_2),$$

en particulier pour $\rho=e^t$, on a :

$$C(e^{3t}z_0,e^{2t}z_1,e^tz_2)=e^{3t}C(z_0,z_1,z_2).$$

Autrement dit le champ linéaire :

$$3z_0\frac{\partial}{\partial z_0}+2z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

est une symétrie du feuilletage $\mathscr{F}$: il admet à la fois une intégrale première rationnelle non triviale et une symétrie. Chaque cubique $z_0+z_1z_2+z_2^3=\mathrm{cte}$ est une surface réglée ; les droites d'équations :

$$\begin{cases} z_2=\mu\\ z_0+\alpha z_1=\lambda\end{cases}$$

sont contenues dans cette surface. Lorsqu'on coupe $\mathbf{C}\mathbb{P}(5)$ par le 2-plan d'équation $\{z_5=z_2,z_1=z_3\}$, on constate que le polynôme de Gordan-Noether homogénéisé :

$$\frac{z_0z_1^2+z_1z_2z_4+z_2^2z_5}{z_3^3}$$

coïncide avec l'intégrale première du $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$. Outre le fait que le lieu singulier soit une droite exactement ce dernier fait est remarquable.

Problème. — Classifier les $\mathscr{L}$-feuilletages de $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ qui ont pour ensemble singulier un sous-espace linéaire de codimension 2. Les feuilletages de degré 0 en font partie ; pour $n=3$, y a-t-il d'autres exemples que le précédent ?

4.2.2. Cas affine. — Pour classifier les feuilletages de degré 2 associés à une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre du groupe des transformations affines, on va classifier les algèbres de Lie engendrées par deux champs linéaires X et Y de $\mathbf{C}^4$ satisfaisant $[X, Y] = Y$. Comme l'algèbre $\langle X, Y\rangle$ est résoluble, par triangulation on constate que Y est nilpotent. Notons $-A$ la matrice de X et B celle de Y. D'après le lemme 4.6 le rang de B est 2 ou 3, le cas où B est de rang 1 n'est donc pas retenu.

Commençons par supposer que le rang de B est 3. Comme B est nilpotente de rang 3 elle s'écrit à conjugaison près :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfait $A_0B - BA_0 = B$; par suite $A - A_0$ commute à B. Du calcul direct du commutateur de B, on déduit que A est du type :

$$\begin{pmatrix} \lambda+3 & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ 0 & \lambda+2 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En particulier A est diagonalisable donc s'écrit à conjugaison près :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Une matrice B satisfaisant $AB - BA = B$ est alors de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme B est supposée être de rang 3, les β_i sont non nuls donc égaux à 1 à conjugaison près. Finalement le $\mathscr{L}$-feuilletage correspondant est dans des coordonnées homogènes bien choisies tangent aux champs :

$$R = \sum_{i=0}^{3} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad X = 3z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$$

$$\text{et} \quad Y = z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Il s'agit du feuilletage exceptionnel qui admet pour intégrale première :

$$\frac{\left(z_0 z_3^2 - z_1 z_2 z_3 + \frac{z_2^3}{3}\right)^2}{\left(z_1 z_3 - \frac{z_2^2}{2}\right)^3}.$$

C'est le cas Af (i).

Supposons maintenant que B soit de rang 2. Il y a, à conjugaison près, deux types de matrices $(4,4)$ nilpotentes de rang 2 :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.2.1. Cas $B = B_1$. — L'égalité $[A, B] = B$ entraîne que A est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \kappa_4 \\ \kappa_5 & 2+\lambda & \kappa_7 & \kappa_8 \\ 0 & 0 & 1+\lambda & \kappa_7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Puisqu'on s'intéresse à l'algèbre engendrée par les champs X, Y et R on peut supposer que $\kappa_7 = 0$. Remarquons qu'avec les notations habituelles un changement de base $e_0 \to e_0 + \alpha e_1$ n'altère pas la matrice B. Par suite si $\lambda_1 \neq 2 + \lambda$, on peut supposer que A est du type :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \kappa_4 \\ 0 & 2+\lambda & 0 & \kappa_8 \\ 0 & 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et sinon du type :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & \kappa_4 \\ \kappa_5 & 2+\lambda & 0 & \kappa_8 \\ 0 & 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a. Si $\lambda_1 \neq 2 + \lambda$, on fait le changement de base

$$e_3 \longmapsto e_3 + a e_0 + b e_1 = e_3'$$

(qui n'altère pas B) pour obtenir $Ae'_4 = \lambda e'_4$ soit encore :

$$a(\lambda_1 - \lambda) + \kappa_4 = 0, \quad 2b + \kappa_8 = 0.$$

Ainsi si $\lambda \neq \lambda_1$, on peut par conjugaison éliminer κ_4 et κ_8, sinon on peut éliminer κ_8.

a.1. Si $\lambda \neq \lambda_1$, on se ramène à une algèbre du type :

$$\Big\langle R, \quad Y = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad X = \kappa z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + 2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \Big\rangle.$$

Les hyperplans $z_3 =$ cte sont invariants par les deux champs X et Y qui engendrent donc le feuilletage restreint à la carte affine $z_3 = 1$. Ils s'écrivent :

$$\widetilde{X} = X_{|z_3=1} = \kappa z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + 2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$
$$\widetilde{Y} = Y_{|z_3=1} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Le champ $\widetilde{Y}$ a une « partie constante » ; nous allons essayer de le redresser par un automorphisme polynomial. Le flot de $\widetilde{Y}$ est :

$$\varphi \colon (z; t) \longmapsto (z_0, z_1 + z_2 t + \frac{t^2}{2}, z_2 + t).$$

On définit maintenant le difféomorphisme :

$$H \colon (z_0, z_1, z_2) \longmapsto \varphi(z_0, z_1, 0; z_2) = (z_0, z_1 + \frac{z_2^2}{2}, z_2).$$

Par construction H conjugue $\partial/\partial z_2$ à $\widetilde{Y}$. Le feuilletage $\mathscr{F}'$, associé à l'algèbre engendrée par les champs $H_*^{-1}\widetilde{X}$ et $H_*^{-1}\widetilde{Y}$, est décrit par une 1-forme Ω' qui, en particulier, annule le champ $H_*^{-1}\widetilde{Y} = \partial/\partial z_2$, donc s'écrit :

$$A'(z_0, z_1) dz_0 + B'(z_0, z_1) dz_1.$$

Le difféomorphisme H laisse le plan $z_2 = 0$ invariant point par point. On constate que le champ :

$$\widetilde{X}_{|z_2=0} = \kappa z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + 2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

est tangent au feuilletage et au plan $z_2 = 0$; il décrit donc le feuilletage en restriction à ce plan. On déduit une intégrale première du champ $\widetilde{X}$:

$$\frac{z_0^2}{z_1^\kappa}$$

et donc de $\mathscr{F}'$. Après composition par H^{-1} et homogénéisation on obtient l'intégrale première de $\mathscr{F}$:

$$\frac{z_0^2 z_3^{2(\kappa-1)}}{\left(z_1 z_3 - \frac{z_2^2}{2}\right)^\kappa}.$$

C'est le cas Af (ii).

a.2. Si $\lambda = \lambda_1$, l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par :

$$R, \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{et} \quad \kappa_4 z_3\frac{\partial}{\partial z_0} + 2z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Lorsque κ_4 est nul, les champs $\partial/\partial z_1$ et $\partial/\partial z_2$ sont tangents au feuilletage qui ne peut donc être de degré 2 ; par homothétie on peut donc se ramener à $\kappa_4 = 1$.

Par la même méthode que précédemment (en redressant $z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2}$ dans la carte affine $z_3 = 1$) on montre que le feuilletage $\mathscr{F}$ admet pour intégrale première :

$$\frac{z_3^2}{2z_1z_3 - z_2^2}\exp\left(\frac{2z_0}{z_3}\right);$$

ce qui donne le cas Af (iii) à conjugaison près.

b. Si $\lambda_1 = 2 + \lambda$, par un changement de base :

$$e_3 \longmapsto e_3 + ae_0 + be_1$$

on peut supposer que κ_4 et κ_8 sont nuls. En effet :

$$A_2(e_3 + ae_0 + be_1) = 0$$

équivaut à :

$$a = -\frac{\kappa_4}{2}, \quad b = \frac{a\kappa_4\kappa_5 - 2\kappa_8}{4}.$$

Par homothétie on se ramène à $\kappa_5 = 0$ ou 1.

Commençons par traiter le cas où κ_5 est nul ; alors l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par les champs :

$$R, \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{et} \quad 2z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + 2z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

qui est un cas particulier du cas **a.1** ($\kappa = 2$).

Finalement traitons le cas où κ_5 vaut 1 ; l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est du type :

$$\Big\langle R, \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{et} \quad 2z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_0 + 2z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\Big\rangle.$$

Toujours par la même méthode (qui consiste à redresser le champ $z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2}$ dans la carte affine $z_3 = 1$) on montre que le feuilletage $\mathscr{F}$ admet pour intégrale première :

$$\frac{z_0}{z_3}\exp\left(\frac{z_2^2 - 2z_1z_3}{z_0z_3}\right);$$

on obtient le cas Af (iv) à conjugaison près.

4.2.2.2. Cas $B = B_2$. — Ce cas est caractérisé par $\ker B = \operatorname{Im} B$ et B est un isomorphisme de $\langle e_2, e_3\rangle$ dans $\langle e_0, e_1\rangle$. En particulier pour chaque base (f_0, f_1) de $\ker B$, il existe une base (f_2, f_3) de $\langle e_2, e_3\rangle$ telle que $Bf_2 = f_0$ et $Bf_3 = f_1$. L'égalité $AB - BA = B$ implique que $\ker B$ est invariant par A. On peut donc supposer que l'on a une base (e_0, e_1, e_2, e_3) dans laquelle A et B sont du type suivant (on jordanise la restriction de A à $\ker B$) :

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ ou } A = A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & * & * \\ 0 & \lambda & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

On remarque que, par homothétie, on se ramène à $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

a. Cas $A = A_1$.

On a :

$$ABe_3 - BAe_3 = Be_3$$

ce qui équivaut à :

$$BAe_3 = (\lambda_2 - 1)Be_3.$$

Il en résulte que :

$$Ae_3 = \kappa_3 e_0 + \kappa_5 e_1 + (\lambda_2 - 1)e_3.$$

De la même façon, on obtient :

$$Ae_2 = \kappa_2 e_0 + \kappa_4 e_1 + (\lambda_1 - 1)e_2$$

et :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ 0 & \lambda_2 & \kappa_4 & \kappa_5 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

On note que les changements de base du type :

$$e_2 \longmapsto e_2 + \alpha e_0 + \beta e_1 = \underline{e_2}$$
$$e_3 \longmapsto e_3 + \gamma e_0 + \delta e_1 = \underline{e_3}$$

n'altèrent ni B, ni la forme de A. On a avec les notations précédentes :

$$A\underline{e_2} - (\lambda_1 - 1)\underline{e_2} = (\kappa_2 + \alpha)e_0 + (\beta(\lambda_2 - \lambda_1 + 1) + \kappa_4)e_1$$
$$A\underline{e_3} - (\lambda_2 - 1)\underline{e_3} = (\kappa_3 + \gamma(\lambda_1 - \lambda_2 + 1))e_0 + (\delta + \kappa_5)e_1.$$

On constate qu'en choisissant $\delta = -\kappa_5$ et $\alpha = -\kappa_2$, on a $\kappa_2 = \kappa_5 = 0$; de plus si $\lambda_2 - \lambda_1 \neq \pm 1$, on peut supposer que κ_3 et κ_4 sont nuls.

En soustrayant $(\lambda_2 - 1)R$ à X représenté par la matrice A, on se ramène au cas où l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par R et les deux champs :

$$z_2 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad ((\mu + 1)z_0 + \kappa_3 z_3)\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_1 + \kappa_4 z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + \mu z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

où $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ (par hypothèse μ est non nul).

On va suivre la méthode utilisée précédemment mais nous la détaillerons car elle est ici un peu plus technique. Comme l'hyperplan $z_3 = 0$ est invariant par X et Y on se place dans la carte affine $z_3 = 1$ où l'on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{Y} &= Y_{|z_3=1} = z_2\frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_1},\\ \widetilde{X} &= X_{|z_3=1} = ((\mu+1)z_0 + \kappa_3)\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_1 + \kappa_4 z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + \mu z_2\frac{\partial}{\partial z_2}.\end{aligned}$$

L'hyperplan $z_1 = 0$ est transverse à $\widetilde{Y}$ donc au feuilletage $\mathscr{F}$. Notons :

$$\varphi(z_0, z_1, z_2; t) = (z_0 + tz_2, z_1 + t, z_2)$$

le flot de $\widetilde{Y}$. Le difféomorphisme :

$$H(z_0, z_1, z_2) = \varphi(z_0, 0, z_2; z_1) = (z_0 + z_1 z_2, z_1, z_2)$$

redresse le champ $\widetilde{Y}$ sur $\partial/\partial z_1$ et trivialise le feuilletage. Dans l'hyperplan $z_1 = 0$, le feuilletage $\mathscr{F}_{|z_1=0}$ est donné par :

$$(\widetilde{X} - \kappa_4 z_2 \widetilde{Y})_{|z_1=0} = ((\mu+1)z_0 + \kappa_3 - \kappa_4 z_2^2)\frac{\partial}{\partial z_0} + \mu z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

La 1-forme :

$$\overline{\omega} = \mu z_2 dz_0 - ((\mu+1)z_0 + \kappa_3 - \kappa_4 z_2^2)dz_2$$

décrit donc $\mathscr{F}_{|z_1=0}$.

a.1. Si $\mu = -1$, le feuilletage restreint est donné par la 1-forme :

$$d\left(z_0 - \frac{\kappa_4}{2}z_2^2\right) + \kappa_3\frac{dz_2}{z_2}.$$

Si κ_3 est nul, le feuilletage est de degré 1. Lorsque κ_3 est non nul :

$$z_2 \exp\left(\frac{z_0}{\kappa_3} - \frac{\kappa_4}{2\kappa_3}z_2^2\right)$$

est une intégrale première de $\mathscr{F}_{|z_1=0}$. Après composition avec H^{-1} et homogénéisation, on obtient l'intégrale première :

$$\frac{z_2}{z_3}\exp\left(\frac{2z_0 z_3 - 2z_1 z_2 - \kappa_4 z_2^2}{2\kappa_3 z_3^2}\right)$$

qui correspond au cas Af (v) à conjugaison près.

a.2. Si $\mu \neq \pm 1$, on peut se ramener à $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$, soit à :

$$\overline{\omega} = \mu z_2 dz_0 - (\mu+1)z_0 dz_2.$$

On en déduit, pour le feuilletage restreint à $z_1 = 0$, l'intégrale première suivante :

$$\frac{z_0^{\mu}}{z_2^{\mu+1}}.$$

Après composition par H^{-1} et homogénéisation, le feuilletage admet pour intégrale première :

$$\frac{(z_0z_3 - z_1z_2)^{\mu}}{z_2^{\mu+1}z_3^{\mu-1}}$$

qui donne le cas Af (vi).

a.3. Si $\mu = 1$, la 1-forme $\overline{\omega}$ s'écrit :

$$\overline{\omega} = z_2dz_0 - (2z_0 + \kappa_3 - \kappa_4z_2^2)dz_2.$$

Quitte à composer $\overline{\omega}$ par $\phi\colon (z_0, z_2) \mapsto (z_0 - \frac{\kappa_3}{2}, z_2)$ on a :

$$\overline{\omega} = z_2dz_0 - (2z_0 - \kappa_4z_2^2)dz_2$$

ou encore, à multiplication près :

$$d\left(\frac{z_0}{z_2^2}\right) + \kappa_4\frac{dz_2}{z_2}.$$

On obtient l'intégrale première (κ_4 est non nul sinon le degré diminue) :

$$z_2 \exp\left(\frac{z_0}{\kappa_4z_2^2}\right).$$

Ce qui donne après composition avec ϕ^{-1}, H^{-1} et homogénéisation :

$$\frac{z_2}{z_3}\exp\left(\frac{2z_0z_3 - 2z_1z_2 + \kappa_3z_3^2}{2\kappa_4z_2^2}\right).$$

Quitte à permuter z_2 et z_3 puis z_0 et z_1 on retrouve le cas **a.1**.

b. Cas $A = A_2$.

En reprenant les calculs précédents, on constate que si ε est nul, le degré du feuilletage diminue.

On suppose donc que ε vaut 1. Alors on a :

$$ABe_2 - BAe_2 = Be_2$$

ce qui équivaut à :

$$BAe_2 = (\lambda - 1)Be_2.$$

Il en résulte que :

$$Ae_2 = \kappa_2e_0 + \kappa_4e_1.$$

De la même façon, on obtient :

$$Ae_3 = \kappa_3e_0 + \kappa_5e_1 + e_2 + (\lambda - 1)e_3$$

et :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ 0 & \lambda & \kappa_4 & \kappa_5 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

On note que les changements de base du type :

$$\begin{aligned} e_2 &\longmapsto e_2 + \alpha e_0 + \beta e_1 = \underline{e_2} \\ e_3 &\longmapsto e_3 + \gamma e_0 + \delta e_1 = \underline{e_3} \end{aligned}$$

n'altèrent ni B, ni la forme de A. On a :

$$A\underline{e_2} - (\lambda - 1)\underline{e_2} = (\kappa_2 + \alpha + \beta)e_1 + \kappa_4 + \beta.$$

Donc, quitte à prendre $\beta = -\kappa_4$ et $\alpha = \kappa_4 - \kappa_2$, on peut supposer que κ_2 et κ_4 sont nuls. On a alors :

$$A\underline{e_3} - (\lambda - 1)\underline{e_3} - \underline{e_2} = (\kappa_3 + \delta + \gamma)e_1 + (\kappa_5 + \delta)e_2.$$

Puis en posant $\delta = -\kappa_5$ et $\gamma = \kappa_5 - \kappa_3$, on se ramène à : $\kappa_3 = \kappa_5 = 0$. Finalement, à conjugaison près, A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

et le feuilletage $\mathscr{F}$ est tangent aux champs de vecteurs :

$$R, \quad Y = z_2 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{et} \quad X = (z_0 + z_1)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Dans la carte affine $z_3 = 1$, la restriction de $\mathscr{F}$ à $z_1 = 0$ est donnée par le champ :

$$z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_2},$$

autrement dit par l'intégrale première :

$$z_0 \exp(-z_2).$$

Après composition par H^{-1} et homogénéisation, on constate que $\mathscr{F}$ admet pour intégrale première :

$$\frac{z_0 z_3 - z_1 z_2}{z_3^2} \exp\left(-\frac{z_2}{z_3}\right)$$

c'est le cas Af (vii).

Le théorème 4.5 est démontré.

CHAPITRE 5

$\mathscr{L}$-FEUILLETAGES QUADRATIQUES

L'étude des $\mathscr{L}$-feuilletages de codimension 1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ pour $n \geqslant 4$ s'avère délicate, non seulement pour des raisons de taille de calculs mais aussi pour des raisons conceptuelles. Bien sûr nous savons qu'en degrés 0 et 1 tous les feuilletages $\mathscr{F}$ de codimension 1 sont des $\mathscr{L}$-feuilletages. Par contre déjà en degré 2 on se heurte au problème suivant : majorer la dimension de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$. Nous avons vu qu'en degré maximal la dimension de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est précisément $n-1$ ce qui permet d'espérer une classification en se référant à la description des algèbres de Lie, connue en petite dimension. Nous la présentons en dimension 4 dans le chapitre six ; dans ce chapitre, nous donnons quelques pistes utiles à la description des feuilletages quadratiques, en particulier en dimension 4.

5.1. Exemples et généralités

Nous donnons quelques propriétés générales susceptibles d'être utiles pour classifier les $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 2. La plupart sont conséquence de la description des feuilletages de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ faite dans [**3**] et que nous avons présentée dans le cas $n=3$ (chapitre 4). Nous donnerons aussi quelques exemples.

Proposition 5.1. — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$ défini en coordonnées homogènes par la 1-forme $\omega \in \Omega^1_3(\mathbf{C}^{n+1})$. On est dans l'une des situations suivantes :*

1. *$\mathscr{F}$ est exceptionnel, autrement dit il existe $\tau\colon \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \dashrightarrow \mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ linéaire telle que $\mathscr{F} = \tau^*\mathscr{F}_\Gamma$*
2. *Il existe une application linéaire $\tau\colon \mathbf{C}\mathbb{P}(n) \dashrightarrow \mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ et un feuilletage $\mathscr{F}'$ de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(2)$ tels que $\mathscr{F} = \tau^*\mathscr{F}'$.*
3. *$\mathscr{F}$ a une intégrale première du type Q_1/Q_2 où Q_1 et Q_2 sont des formes quadratiques.*

4. *$\mathscr{F}$ possède un hyperplan invariant H et ω un facteur intégrant de l'un des types suivants :*

$$L_1^4 \quad (4.1.), \quad L_1^3 L_2 \quad (4.2.), \quad L_1^2 L_2^2 \quad (4.3.), \quad L_1^2 L_2 L_3 \quad (4.4.),$$
$$L_1 L_2 L_3 L_4 \quad (4.5.), \quad L_1^2 Q \quad (4.6.), \quad L_1 L_2 Q \quad (4.7.), \quad L_1 C \quad (4.8.)$$

où les L_i désignent des formes linéaires distinctes, Q une forme quadratique et C une cubique.

Démonstration. — C'est une application directe de [**3**]. □

Les feuilletages apparaissant dans l'énoncé seront dits de type 1, 2, ...

Remarque 13. — À partir des facteurs intégrants on peut évidemment donner les différents types possibles d'intégrales premières.

On sait que dans le cas des feuilletages exceptionnels, il s'agit de $\mathscr{L}$-feuilletages. Par contre la proposition 3.7 assure que dans le cas 2, $\mathscr{F}$ n'est jamais un $\mathscr{L}$-feuilletage. Dans le cas 3 où $\mathscr{F}$ possède une intégrale première Q_1/Q_2, alors si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage, les formes quadratiques Q_1 et Q_2 ne peuvent être génériques. En effet, si Q_1 et Q_2 sont génériques, alors la surface $Q_1 = Q_2 = 0$ est une surface de Del Pezzo ; ceci implique par un argument déjà rencontré dans la preuve du lemme 4.3 qu'il ne peut y avoir de champ de vecteurs tangent à la fois aux niveaux de Q_1 et de Q_2.

5.1.1. Exemples de type 4.2. — Ils se traitent relativement aisément ; notons ω une 1-forme définissant $\mathscr{F}$. On remarque que si ω possède un facteur intégrant de type $L_1^3 L_2$, alors $\mathscr{F}$ possède, dans une carte affine appropriée, une intégrale première du type $z_1 \exp P$ où P est un polynôme de degré 2.

Proposition 5.2. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ ayant une intégrale première du type $z_1 \exp P$ où P est un polynôme de degré 2 dans une carte affine ad-hoc. Alors, à conjugaison près, P est de l'un des types suivants :*

$$z_2 + z_3 z_4, \quad z_2 + z_3^2, \quad z_2 + z_1 z_3 + z_4^2.$$

Démonstration. — On remarque qu'un champ affine X annulant $\frac{dz_1}{z_1} + dP$ est nécessairement du type :

$$X = \lambda(X) z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Z$$

où :
$$Z \in \Big\langle \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4} \Big\rangle$$

et $\lambda(X) \in \mathbf{C}^*$. D'autre part pour que $\mathscr{F}$ soit un $\mathscr{L}$-feuilletage il est nécessaire que pour l'un des X, le coefficient $\lambda(X)$ soit non nul disons égal à 1. En écrivant que :

$$1 + \left(z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1} + Z(P) \right) = 0$$

on constate que $P(0, z_2, z_3, z_4)$ est un polynôme quadratique qui est nécessairement une submersion. Par suite, quitte à changer les coordonnées, on peut supposer que :

$$P(0, z_2, z_3, z_4) = z_2 + q(z_3, z_4)$$

où q désigne une forme quadratique. On remarque aussi que P n'a pas de terme en z_1^2 si bien que :

$$P = z_2 + z_1 L(z_2, z_3, z_4) + q(z_3, z_4).$$

On examine les cas où $L \equiv 0$, $L = z_2$, $L = z_2 + z_3$ puis $L = z_3$ qui couvrent à conjugaison près tous les autres.

Dans la première éventualité, toujours à conjugaison près, on peut supposer que :

$$P = z_2 + z_3 z_4$$

ou bien :

$$P = z_2 + z_3^2.$$

Dans ces deux cas, un calcul élémentaire montre qu'il s'agit bien de $\mathscr{L}$-feuilletages, le second apparaissant comme un pull-back linéaire d'un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$.

Considérons le cas où :

$$P = z_2 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + q(z_3, z_4).$$

Notons $Z = \sum_{i=2}^4 A_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. En écrivant que X est tangent à $\mathscr{F}$, on a :

$$1 + z_1 z_2 + A_2 + A_3 \left(z_1 + \frac{\partial q}{\partial z_3} \right) + A_4 \frac{\partial}{\partial z_4} \equiv 0.$$

En posant $q = a z_3^2 + b z_3 z_4 + c z_4^2$, on obtient :

$$(1 + z_1 z_2) + A_2 + A_3(z_1 + 2a z_3 + b z_4) + A_4(b z_3 + 2c z_4) \equiv 0.$$

Sur l'intersection des deux hyperplans :

$$z_1 + 2a z_3 + b z_4 = 0 \quad \text{et} \quad b z_3 + 2c z_4 = 0$$

on a :

$$(1 - (2a z_3 + b z_4) z_2) + A_2 \equiv 0.$$

Comme A_2 est affine, les coefficients a et b sont nuls. Finalement à conjugaison près on a :

$$P = z_2 + z_1 z_3 + \kappa z_4^2$$

avec $\kappa \in \{0, 1\}$. On constate que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{L}$-feuilletage puisqu'on trouve parmi les champs tangents à $\mathscr{F}$:

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2} - z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad 2\kappa z_4 \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_4}. \qquad \square$$

5.1.2. Une approche particulière. — Voici une méthode qui pourrait s'avérer fructueuse. Considérons $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ ayant une intégrale première de type Q_1/Q_2 avec Q_i formes quadratiques. Supposons l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ non nilpotente ; alors $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ contient un champ X semi-simple :

$$X = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad \lambda_i \neq 0.$$

On peut supposer $k \geqslant 1$ sinon $\mathscr{F}$ serait un pull-back. Examinons le cas où $\operatorname{rg} X = 2$, *i.e.* $k = 1$:

$$X = \lambda_0 z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad \lambda_0 \lambda_1 \neq 0.$$

Soit Q une forme quadratique annulée par X ; alors Q s'écrit :

$$Q = \varepsilon z_0 z_1 + q(z_2, z_3, z_4).$$

Remarquons que $X(Q_1) = X(Q_2) = 0$. On se ramène à étudier les cas :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

et :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{z_0 z_1 + q_1(z_2, z_3, z_4)}{q_2(z_2, z_3, z_4)}.$$

Dans le premier cas $\mathscr{F}$ est un pull-back. Dans le second, on va faire une discussion suivant le rang de q_2.

Si $\operatorname{rg} q_2 = 1$, *i.e.* si, à conjugaison près, $q_2 = z_2^2$, alors $\mathscr{F}$ est en fait de degré 1.

Supposons q_2 de rang 3, autrement dit de la forme $z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$; un champ Y annulant Q_1 et Q_2 s'écrit :

$$Y = A_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + A_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + B_3 \frac{\partial}{\partial z_3} + B_4 \frac{\partial}{\partial z_4} = A + B.$$

L'égalité $A(z_0 z_1) = 0$ implique que :

$$A = \lambda \left(z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right).$$

On a aussi :

$$B(q_1) = B(q_2) = 0.$$

En particulier on peut voir B dans $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$. Mais tous les éléments non nuls de $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ sont conjugués (à multiplication près). On peut donc supposer que :

$$B = z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_3}$$

et :

$$q_1 = a(z_2^2 + z_3^2) + b z_4^2.$$

Il nous faut pour des raisons de dimension ponctuelle trouver un troisième champ B' annulant q_1 et q_2. Par suite tout champ annulant q_2 annule q_1 et q_1 s'écrit αq_2. Finalement $\mathscr{F}$ possède une intégrale première de la forme :

$$\frac{z_0 z_1}{z_2^2+z_3^2+z_4^2}$$

que nous avons d'ailleurs rencontrée dans le principe de construction d'exemples.

Terminons par le cas où $\operatorname{rg} q_2 = 2$, *i.e.* à conjugaison près on a : $q_2 = z_2^2 + z_3^2$. En suivant la démarche précédente on doit trouver deux champs du type :

$$Y_i = z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + L_i\frac{\partial}{\partial z_4}, \qquad i=1,2$$

indépendants c'est-à-dire, en particulier, non $\mathbf{C}$-colinéaires et annulant q_1 ; ceci n'est possible que si $\frac{\partial}{\partial z_4}$ annule q_1, cas où $\mathscr{F}$ est un pull-back.

5.1.3. Exemple de type 3. — On considère un feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ ayant pour intégrale première :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2}{\lambda_0 z_0^2+\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2+\lambda_4 z_4^2}.$$

On peut supposer que λ_0 est nul, λ_4 vaut 1 et qu'un autre λ_i est non nul, sinon le feuilletage serait de degré 1. Les champs X qui annulent Q_1 et Q_2 sont du type :

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4} \mu_{i,j}\left(z_i\frac{\partial}{\partial z_j} - z_j\frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

et satisfont :

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4} \mu_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)z_i z_j = 0.$$

Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont non nuls et différents de 1, on aura :

$$\mu_{0,j} = 0 \text{ pour } j=0,\dots,4$$

et

$$\mu_{i,4} = 0 \text{ pour } i=1,2,3.$$

Ainsi un champ X qui annule Q_1 et Q_2 n'a pas de composante sur $\frac{\partial}{\partial z_0}$ et sur $\frac{\partial}{\partial z_4}$. La condition de dimension ponctuelle pour l'algèbre des champs annulant Q_1 et Q_2 ne peut être satisfaite. On peut donc supposer, toujours sous l'hypothèse $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, que $\lambda_3 = 1$. Si λ_1 et λ_2 sont encore différents de 1, on aura toujours pour X annulant Q_1 et Q_2 les égalités :

$$\mu_{0,j} = \mu_{1,4} = \mu_{2,4} = \mu_{1,3} = \mu_{2,3} = 0$$

et X sera du type :

$$X = \mu_{1,2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_2} - z_2\frac{\partial}{\partial z_1}\right) + \mu_{3,4}\left(z_3\frac{\partial}{\partial z_4} - z_4\frac{\partial}{\partial z_3}\right)$$

ce qui est insuffisant pour obtenir la dimension ponctuelle souhaitée. Par suite on peut supposer $\lambda_2 = 1$. On se ramène donc à :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{z_0^2 + \lambda z_1^2}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, on constate que la seule possibilité est $\lambda = 1$. Le feuilletage a donc une intégrale première de type :

$$\frac{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{z_0^2 + z_1^2}$$

vue dans le principe de construction d'exemples et dans le paragraphe précédent. On démontre de façon analogue que les autres configurations de λ conduisent au même modèle. D'où la :

Proposition 5.3. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ ayant une intégrale première Q_1/Q_2 où les Q_i sont des formes quadratiques diagonales. Si l'élément générique du pinceau $Q_1 - \kappa Q_2$ est de rang maximum, alors $\mathscr{F}$ a une intégrale première du type :*

$$\frac{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{z_0^2 + z_1^2}.$$

Remarque 14. — Un pinceau de formes quadratiques diagonales :

$$Q_1 = \sum_{i=0}^{k} z_i^2 \quad \text{et} \quad Q_2 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i z_i^2$$

tel que l'élément générique ne soit pas de rang maximal satisfait :

$$\lambda_i = 0 \text{ pour } i > k.$$

En particulier le feuilletage associé est un pull-back.

5.1.4. Dégénérescence de feuilletages de degré 3. — Lors de l'examen de certaines configurations de $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ associés à des algèbres résolubles de dimension 3, quelques dégénérescences conduisant à des $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 2 apparaissent ; ils possèdent des intégrales premières du type Q_1/Q_2 avec Q_i forme quadratique. Soient :

$$Q_1 = z_0 z_4 - p_1 z_3^2 - p_2 z_3 z_4 - \frac{1}{2} z_2^2 + p_3 z_4^2$$

et

$$Q_2 = z_1 z_4 - q_1 z_3^2 - q_2 z_3 z_4 - z_2 z_3 - q_3 z_4^2;$$

on constate que l'élément générique du pinceau $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ est dégénéré.

Avec les notations précédentes on a la :

PROPOSITION 5.4. — *Le feuilletage $\mathscr{F}$ de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ donné par les niveaux de Q_1/Q_2 est un $\mathscr{L}$-feuilletage. L'algèbre de Lie $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ associée est résoluble de dimension 3 ; un champ $\widetilde{X}$ de $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ s'écrit :*

$$\begin{aligned}\widetilde{X} = \big(b_1z_0 + (b_3 - e_3q_2 + q_2b_1 - 2q_1b_2)z_2 + (2p_1b_2 - p_2b_1 + e_3p_2)z_3 \\ + (2p_3b_1 - 2p_3e_3 + p_2b_2)z_4\big)\frac{\partial}{\partial z_0} \\ + \big(b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 + (q_2b_2 - 2q_3b_1 + 2q_3e_3)z_4\big)\frac{\partial}{\partial z_1} \\ + \big(e_3z_2 + (b_3 - e_3q_2 + q_2b_1 - 2q_1b_2)z_4\big)\frac{\partial}{\partial z_2} \\ + (e_3z_3 + b_2z_4)\frac{\partial}{\partial z_3} + (2e_3 - b_1)z_4\frac{\partial}{\partial z_4}\end{aligned}$$

où b_1, b_2, b_3, e_3 sont dans $\mathbf{C}$. Ce $\mathscr{L}$-feuilletage ne vérifie pas la condition de régularité *le long de $z_4 = 0$.*

Démonstration. — L'expression des champs $\widetilde{X}$ a été obtenue via Maple. L'hyperplan $z_4 = 0$ n'est pas invariant par le feuilletage puisque Q_1/Q_2 n'y est pas constant. Par contre il est invariant par tous les champs $\widetilde{X}$. On constate par un calcul élémentaire qu'ils sont dépendants le long de cet hyperplan. □

5.1.5. Ubiquité de l'exemple de Gordan-Noether. — Revenons à l'exemple de Gordan-Noether :

$$P = z_1^2z_3 + z_1z_2z_4 + z_2^2z_5$$

dans $\mathbf{C}^5$ et considérons sa restriction à l'hyperplan $z_1 = 1$:

$$P_1 = z_3 + z_2z_4 + z_2^2z_5.$$

On constate que les champs :

$$z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_4}, \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_4} - \frac{\partial}{\partial z_5} \quad \text{et} \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4} - 2z_5\frac{\partial}{\partial z_5}$$

sont tangents aux niveaux de P_1. Le feuilletage par les niveaux de P_1 est donc une fois encore un $\mathscr{L}$-feuilletage de $\mathbf{C}^4$, lequel s'étend bien sûr à $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$; il a pour intégrale première :

$$\frac{z_1^2z_3 + z_1z_2z_4 + z_2^2z_5}{z_1^3}$$

qui définit un feuilletage de degré 2.

Maintenant on considère la restriction de P à $z_3 = 1$; on obtient le polynôme :

$$z_1^2 + z_1z_2z_4 + z_2^2z_5.$$

Il est annulé par les champs :

$$z_2\frac{\partial}{\partial z_1} - 2\frac{\partial}{\partial z_4} - z_4\frac{\partial}{\partial z_5}, \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_4} - z_1\frac{\partial}{\partial z_5}, \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4} - 2z_5\frac{\partial}{\partial z_5}$$

et produit encore un exemple de degré 2 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ d'intégrale première :

$$\frac{z_1^2z_3+z_1z_2z_4+z_2^2z_5}{z_3^3}.$$

Ces deux exemples, tous deux de type 4.1, sont non équivalents.

5.2. Exemples Hamiltoniens

5.2.1. Cas spécial. — Nous allons nous intéresser à un cas spécial de $\mathscr{L}$-feuilletage quadratique de type 4.1 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ ayant une intégrale première du type $\frac{C}{z_0^3}$ où C est un polynôme cubique. La restriction de $\mathscr{F}$ à la carte affine $z_0=1$ définit un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 2 sur $\mathbf{C}^4$ ayant pour intégrale première $P(z_1,z_2,z_3,z_4) = C(1,z_1,z_2,z_3,z_4)$. Nous allons supposer que P est un polynôme homogène.

Théorème 5.5. — *Soit P un polynôme homogène minimal de degré 3 sur $\mathbf{C}^4$ définissant un $\mathscr{L}$-feuilletage. Alors, à conjugaison près, P est de l'un des types suivants :*

1. $z_1z_2^2$,
2. $z_1z_2z_3$,
3. $z_1(z_2^2-z_3z_4)$,
4. $z_1^2z_3+z_1z_2(a_1z_1+z_2+z_3+z_4)+z_2^2z_4$,
5. $z_1^2z_3+z_1z_2(z_3+z_4)+z_2^2z_4$,
6. $z_1^2z_3+z_1z_2z_4+a_2z_2^3$.

Remarques 15

a. Considérons le polynôme de Gordan-Noether :

$$P = z_1^2z_3+z_1z_2z_5+z_2^2z_4.$$

Si l'on restreint P à $z_2=0$ on obtient à permutation près des coordonnées le premier cas 1. En restreignant à $z_3=z_4=0$ on trouve 2 ; la restriction de P à $z_4=0$ est à conjugaison près le cas 3. En restreignant P à l'hyperplan $a_1z_1+z_2+z_3+z_4$, on obtient le cas 4. En le restreignant à $z_5=z_3+z_4$, on retrouve le cas 5. Enfin le cas 6. s'obtient en permutant z_4 et z_5 et en restreignant P à $z_5=a_2z_2$.

b. Par conjugaison on peut supposer $a_2\in\{0,1\}$.

Démonstration. — D'après le théorème 1.16, l'origine n'est pas une singularité isolée de dP sinon le feuilletage $\mathscr{F}$ serait de degré 1. Il s'ensuit que dP s'annule sur un nombre fini de droites, sur une surface ou encore sur une hypersurface. Nous allons traiter ces différentes éventualités au cas par cas.

1. Si dP s'annule sur une hypersurface, P n'est pas réduit et s'écrit z_1^2L où L désigne une forme linéaire. Puisque P est minimal, L est non colinéaire à z_1. Le $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ décrit par le polynôme P est alors de degré 1 et P est du type $z_1z_2^2$.

2. Considérons le cas où dP s'annule au moins sur une droite, par exemple d'équation $z_2=z_3=z_4=0$. En particulier, le polynôme P n'a de monôme ni en z_1^3, ni en

$z_1^2 z_i$; par suite il est de la forme :

$$z_1 q(z_2, z_3, z_4) + r(z_2, z_3, z_4)$$

où q est une forme quadratique et r un polynôme cubique. Un champ de vecteurs X annulant P doit être tangent au lieu singulier de P et donc à l'axe des z_1. Par suite, il est du type :

$$P = A_1(z_1, z_2, z_3, z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4} A_i(z_2, z_3, z_4)\frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Remarquons que si q est nul, alors $\mathscr{F}$ est un pull-back ; ce cas a été traité dans le corollaire 0.2.

Si l'on écrit X sous la forme $A_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Y$, on a :

$$\begin{cases} A_1 q + z_1 Y(q) = 0 \\ Y(r) = 0. \end{cases}$$

Si q est non nul, alors A_1 est divisible par z_1, autrement dit :

$$X = \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Y.$$

Supposons que pour tout champ X annulant le polynôme P on ait $\lambda = 0$. La dimension ponctuelle générique de tels X étant 3, le polynôme P est annulé par $\frac{\partial}{\partial z_2}$, $\frac{\partial}{\partial z_3}$ et $\frac{\partial}{\partial z_4}$ ce qui est absurde. Ainsi on peut trouver des champs annulant P du type :

$$X_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Y_1, \quad X_2 = Y_2 \quad \text{et} \quad X_3 = Y_3$$

génériquement indépendants. Les égalités :

$$\begin{cases} Y_2(q) = Y_2(r) = 0 \\ Y_3(q) = Y_3(r) = 0 \end{cases}$$

impliquent que les composantes connexes des niveaux de q et r sont les mêmes.

Si la forme quadratique q est de rang 2 ou 3, alors r est nul et P s'écrit à conjugaison près :

$$z_1(z_2^2 - z_3 z_4) \text{ ou } z_1 z_2 z_3.$$

Dans les deux cas, P définit un $\mathscr{L}$-feuilletage.

Reste à considérer le cas où la forme quadratique q est de rang 1 ; le polynôme P est alors de la forme :

$$z_1 z_2^2 + \varepsilon z_2^3 = z_2^2(z_1 + \varepsilon z_2)$$

donc conjugué à $z_1 z_2^2$ et le feuilletage obtenu est de degré 1.

3. Cas où dP s'annule sur une surface S.

3.1. Supposons qu'une composante de S soit un plan par exemple d'équation $z_1 = z_2 = 0$, alors P est du type :

$$z_1^2 L_1 + z_1 z_2 L_2 + z_2^2 L_3$$

où L_i désigne une forme linéaire. On a l'alternative suivante :

– le feuilletage $\mathscr{F}$ est un pull-back (et donc encore du type $z_1 z_2^2$ ou $z_1 z_2 z_3$),

– les formes linéaires z_1, z_2, L_1, L_2 et L_3 forment un système de rang 4. On se ramène alors aux deux cas suivants :

$$z_1^2 z_3 + z_1 z_2 L + z_2^2 z_4,$$

$$z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2 L$$

où L désigne une forme linéaire. Il nous faut maintenant caractériser les L qui produisent un $\mathscr{L}$-feuilletage. Comme le lieu singulier doit être invariant par tout champ X annulant P, un tel champ, nécessairement linéaire, est de la forme :

$$(b_1 z_1 + b_2 z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + (c_1 z_1 + c_2 z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + \Big(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i z_i\Big)\frac{\partial}{\partial z_3} + \Big(\sum_{i=1}^{4} \beta_i z_i\Big)\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Posons :

$$L = \sum_{i=1}^{4} a_i z_i.$$

3.1.1. Commençons par considérer le cas où P est de la forme :

$$z_1^2 z_3 + z_1 z_2 L + z_2^2 z_4.$$

L'égalité $X(P) = 0$ se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 2b_1 + c_1 a_3 + \alpha_3 = 0 \\ 2a_1 b_1 + 2a_2 c_1 + a_1 c_2 + \alpha_2 + \alpha_1 a_3 + \beta_1 a_4 \\ b_1 a_2 + 2a_1 b_2 + 2a_2 c_2 + \alpha_2 a_3 + \beta_2 a_4 + \beta_1 = 0 \\ b_1 a_4 + 2c_1 + a_4 c_2 + \alpha_4 a_3 + \beta_4 a_4 = 0 \\ 2b_2 + b_1 a_3 + a_3 c_2 + \alpha_3 a_3 + \beta_3 a_4 = 0 \\ b_2 a_2 + \beta_2 = 0 \\ b_2 a_4 + 2c_2 + \beta_4 = 0 \\ b_2 a_3 + \beta_3 = 0 \\ a_1 c_1 + \alpha_1 = 0 \\ a_4 c_1 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

C'est un système de dix équations à douze inconnues. Pour que la dimension ponctuelle des champs X annulant P soit génériquement 3, il nous faut au moins trois solutions indépendantes. Ceci impose des conditions sur les a_i qui régissent le système. En substituant, on obtient que ce système a un espace de solutions de dimension au moins 3 si et seulement si :

$$(a_2 a_4 - 1)(2a_1 + a_1 a_4^2 - 3a_2 a_4) = (a_3 a_4 - 1) = 0.$$

a. Lorsque $a_2 a_4 = a_3 a_4 = 1$, quitte à conjuguer par une application linéaire ad-hoc, on se ramène à $a_2 = a_3 = a_4 = 1$, autrement dit :

$$P = z_1^2 z_3 + z_1 z_2 (a_1 z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + z_2^2 z_4.$$

On peut alors résoudre le système précédent et l'espace vectoriel des champs annulant P est engendré par :

$$X_1 = z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - z_1\frac{\partial}{\partial z_4},$$

$$X_2 = (z_1+z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_3\frac{\partial}{\partial z_3} - (2a_1z_1+z_2+z_3+z_4)\frac{\partial}{\partial z_4}$$

et
$$X_3 = (z_1+z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} - (a_1z_1+z_3+z_4)\frac{\partial}{\partial z_3} - 2(z_1+z_4)\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

On constate que ces trois champs engendrent une algèbre de dimension ponctuelle 3.

b. Passons au cas où $a_3a_4 = 1$ et $2a_1 + a_1a_4^2 - 3a_2a_4 = 0$. Comme a_3 et a_4 sont non nuls, on se ramène par conjugaison aux deux cas suivants :

$$P_1 = z_1^2z_3 + z_1z_2(z_3+z_4) + z_2^2z_4$$

et :
$$P_2 = z_1^2z_3 + z_1z_2(z_1+z_2+z_3+z_4) + z_2^2z_4.$$

Dans le premier, les champs suivants annulent P_1 :

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - 2z_3\frac{\partial}{\partial z_3} - 2z_4\frac{\partial}{\partial z_4},$$

$$z_2\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + (z_4-z_3)\frac{\partial}{\partial z_4} \quad \text{et} \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - z_1\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Ainsi P_1 définit bien un $\mathscr{L}$-feuilletage.

Le second est un cas particulier du cas **a.** avec $a_1 = 1$.

3.1.2. Considérons le cas où P est de la forme :

$$P = z_1^2z_3 + z_1z_2z_4 + z_2^2(a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3+a_4z_4).$$

Notons que si a_4 est non nul, en posant $Z_4 = a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3+a_4z_4$ on se ramène au cas précédent. Nous supposerons donc que a_4 est nul. Quitte à changer z_4 en $z_4 - a_1z_2$ on a $a_1 = 0$; autrement dit P s'écrit :

$$P = z_1^2z_3 + z_1z_2z_4 + z_2^2(a_2z_2+a_3z_3).$$

Comme précédemment l'égalité $X(P) = 0$ conduit au système :

$$\begin{cases} b_1+\beta_4+c_2 = 0\\ b_2+\alpha_4a_3 = 0\\ c_1+\alpha_4 = 0\\ 2b_1+\alpha_3 = 0\\ 2b_2+2a_3c_1+\beta_3 = 0\\ a_3(2c_2+\alpha_3) = 0\\ 3a_2c_1+\alpha_1a_3+\beta_2 = 0\\ 3a_2c_2+\alpha_2a_3 = 0\\ \alpha_1 = 0\\ \alpha_2+\beta_1 = 0. \end{cases}$$

a. Supposons que a_3 soit nul, *i.e.* que le polynôme P s'écrive :

$$P = z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + a_2 z_2^3.$$

Suivant que a_2 est nul ou non, on a l'alternative :

– $a_2 \neq 0$ et le polynôme P est alors annulé par les champs :

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_3\frac{\partial}{\partial z_3} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4}, \quad z_1\frac{\partial}{\partial z_2} - z_4\frac{\partial}{\partial z_3} - 3a_2z_2\frac{\partial}{\partial z_4} \quad \text{et} \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - z_1\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Il définit donc bien un $\mathscr{L}$-feuilletage.

– $a_2 = 0$ et le polynôme P décrit un $\mathscr{L}$-feuilletage dont l'algèbre associée, de dimension 4, est engendrée par les champs :

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_3\frac{\partial}{\partial z_3} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4}, \quad z_1\frac{\partial}{\partial z_2} - z_4\frac{\partial}{\partial z_3},$$
$$z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4} \quad \text{et} \quad z_2\frac{\partial}{\partial z_3} - z_1\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

On constate que la dimension de l'algèbre passe de 3 à 4 lorsque a_2 s'annule.

b. Supposons maintenant que a_3 soit non nul. À conjugaison près par des applications du type :

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto (\rho_1 z_1, \rho_2 z_2, \rho_3 z_3, \rho_4 z_4)$$

on se ramène à l'étude des deux cas suivants :

$$z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_3,$$
$$z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2(z_2 + z_3).$$

Les champs qui annulent ces deux polynômes forment un espace de dimension 2 donc les feuilletages décrits par ces polynômes ne sont pas des $\mathscr{L}$-feuilletages.

3.2. Plaçons nous dans l'éventualité où la surface S contient une composante non plane. On peut alors supposer que trois axes de coordonnées sont dans S, par exemple les axes z_1, z_2 et z_3. Par un argument déjà rencontré, le polynôme P est affine en z_1, z_2, z_3 et quadratique en z_4 ; on constate que P est du type :

$$\varepsilon z_1 z_2 z_3 + z_4^2(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3).$$

On remarque que ε est non nul sinon le feuilletage décrit par P serait de degré 1. Déterminons les valeurs des a_i pour lesquelles ces polynômes sont singuliers le long d'une surface.

3.2.1. Si $a_1a_2a_3$ est non nul, on se ramène par homothétie à :

$$P = z_1 z_2 z_3 + z_4^2(z_1 + z_2 + z_3)$$

et un calcul élémentaire montre que $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} P = 3$.

3.2.2. Si deux des a_i sont non nuls, on peut supposer que :

$$P = z_1 z_2 z_3 + z_4^2(z_1 + z_2)$$

et comme précédemment le lieu singulier de P est de codimension 3.

3.2.3. Reste donc le cas où un seul des a_i est non nul ; alors P est de la forme :

$$z_1(z_2z_3+z_4^2)$$

que nous avons déjà rencontré en **2.** □

5.2.2. Exemples où $\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}} = 3$**.** — Lors de l'étude des $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ correspondant aux algèbres $\mathscr{L}_\alpha$ (*cf.* chapitre 6) apparaît une dégénérescence qui produit un feuilletage $\mathscr{F}$ de degré 2 de type 4.1.

L'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est résoluble et possède une présentation de la forme :

$$\{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]=\widetilde{Y},\quad [\widetilde{X},\widetilde{Z}]=\alpha\widetilde{Z},\quad [\widetilde{Y},\widetilde{Z}]=0\},\quad \alpha\neq 0.$$

Elle est engendrée par les champs :

$$\begin{aligned} X = \left(-2z_0+(\alpha c-h)z_2+\frac{c\xi+\delta+2\alpha e}{2}z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_0} \\ +(\alpha z_0-3z_1+\beta z_2+\gamma z_3+(h\xi+2i-\alpha\delta)z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} \\ +(-z_2+\xi z_3)\frac{\partial}{\partial z_2}+(\alpha z_3-z_4)\frac{\partial}{\partial z_4}, \end{aligned}$$

$$Z=(cz_2+\delta z_3+ez_4)\frac{\partial}{\partial z_0}+(z_0+hz_2+iz_3)\frac{\partial}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial}{\partial z_4},$$

$$Y=z_3\frac{\partial}{\partial z_0}+z_4\frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Soit

$$\kappa=-\xi(\beta-\alpha h)-2(\alpha i-\gamma).$$

On montre que $\mathscr{F}$ admet pour intégrale première :

$$\frac{3(z_2-\xi z_3)^3}{z_0z_3z_4-z_1z_3^2-\frac{e}{3}z_4^3-\frac{cz_2+\delta z_3}{2}z_4^2+(hz_2+iz_3)z_3z_4+\kappa z_3^3-3\alpha hz_2z_3^2}$$

c'est-à-dire à conjugaison près :

$$\frac{z_2^3}{z_0z_3z_4+z_1z_3^2+z_4^2(az_4+bz_2)}$$

avec a, $b\in\{0,1\}$.

REMARQUES 16

1. En se restreignant à la carte affine $z_2=1$, on constate que le polynôme :

$$P=z_0z_3z_4+z_1z_3^2+az_4^3+bz_4^2$$

définit un $\mathscr{L}$-feuilletage sur $\mathbf{C}^4$.

2. Le dénominateur $z_0z_3z_4+z_1z_3^2+z_4^2(az_4+bz_2)$ de l'intégrale première est encore lorsque b est non nul de type Gordan-Noether. Pour $b=0$, le feuilletage est un pull-back.

CHAPITRE 6

$\mathscr{L}$-FEUILLETAGES DE DEGRÉ 3 EN DIMENSION 4

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$, la proposition 1.4 assure que $\dim \mathscr{L}_{\mathscr{F}} = 3$. Ainsi la classification des $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ repose sur celle des algèbres de Lie de dimension 3 (voir [**7**]). Pour classifier les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 3, on considère le rang de l'application bilinéaire :

$$[\,,\,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Si $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0$, l'algèbre $\mathfrak{g}$ est abélienne.

Si $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 1$, l'algèbre $\mathfrak{g}$ est décrite par les présentations :

$$\mathscr{L}_{0,1} := \{[X,Y] = [X,Z] = 0,\ [Y,Z] = Y\}$$

ou :

$$\mathscr{L}_{0,2} := \{[X,Y] = [X,Z] = 0,\ [Y,Z] = X\}.$$

Si $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 2$, l'algèbre $\mathfrak{g}$ est du type :

$$\mathscr{L}_{\alpha} := \{[X,Y] = Y,\ [X,Z] = \alpha Z,\ [Y,Z] = 0,\ \alpha \in \mathbf{C}^*\}$$

ou bien :

$$\mathscr{L}_{1,1} := \{[X,Y] = Y,\ [X,Z] = Y + Z,\ [Y,Z] = 0\}.$$

Enfin si $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 3$, alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$.

Nous allons étudier au cas par cas les $\mathscr{L}$-feuilletages associés à ces algèbres.

Nous verrons que les algèbres $\mathscr{L}_{0,2}$ et $\mathscr{L}_{1,1}$ ne produisent pas de $\mathscr{L}$-feuilletages de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$.

6.1. Cas $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$

Par simple connexité de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, la représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ dans $\mathscr{M}(5,\mathbf{C})$ donnée par $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ assure l'existence d'une action linéaire de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^5$. On est donc ramené à classifier les actions linéaires de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^5$.

Commençons par supposer que l'action est irréductible ; c'est alors à conjugaison près l'action naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur les polynômes homogènes de degré 4 en deux variables. Cette action descend à l'espace projectif pour donner un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 dont les feuilles sont les niveaux génériques de la fonction $j = 1728\frac{P^3}{\Delta}$; nous l'avons décrite au chapitre 2. À conjugaison près ce $\mathscr{L}$-feuilletage est unique puisqu'il y a une unique action irréductible de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^5$.

Supposons maintenant que l'action linéaire de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^5$ soit réductible ; elle se décompose en actions irréductibles avec les configurations suivantes :

$$\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}^4, \mathbf{C}^2\oplus\mathbf{C}^3, \quad \mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}^3, \quad \mathbf{C}\oplus\mathbf{C}^2\oplus\mathbf{C}^2,$$
$$\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}.$$

On peut exclure les deux dernières configurations : l'action sur chaque facteur $\mathbf{C}$ étant triviale, elles ne donneront pas d'orbite de dimension 4. Examinons les autres possibilités au cas par cas.

(i) Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}^4$.

Sur le facteur $\mathbf{C}$ l'action est triviale et sur $\mathbf{C}^4$ c'est, à conjugaison près, l'action naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur V_4 (*cf.* chapitre 2). Elle admet pour invariants z_1 et $D(z_2,\ldots,z_5)$ où :

$$D(z_2,z_3,z_4,z_5)=z_3^2z_4^2-4z_2z_4^3-4z_3^3z_5-27z_2^2z_5^2+18z_2z_3z_4z_5.$$

Par suite $\mathscr{F}$ possède l'intégrale première :

$$\frac{D(z_2,\ldots,z_5)}{z_1^4}.$$

À conjugaison près, le $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ est unique. Il a déjà été étudié dans la liste d'exemples (chapitre 2) mais présenté de manière différente.

(ii) Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2\oplus\mathbf{C}^3$.

Elle est conjuguée à l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathrm{V}_2\oplus\mathrm{V}_3$. On note les éléments de $\mathrm{V}_2\oplus\mathrm{V}_3$ sous la forme :

$$(z_1x+z_2y, z_3x^2+z_4xy+z_5y^2).$$

À chacun de ces éléments on associe les formes quadratiques :

$$Q_1=(z_1x+z_2y)^2=z_1^2x^2+2z_1z_2xy+z_2^2y^2, \quad Q_2=z_3x^2+z_4xy+z_5y^2;$$

on note $\widetilde{Q}_i$ la matrice de Q_i. Soit $P\in\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$; on a :

$$\det({}^tP(\widetilde{Q}_1-\kappa\widetilde{Q}_2)P)=\det(\widetilde{Q}_1-\kappa\widetilde{Q}_2)$$

autrement dit :

$$\det(\widetilde{Q}_1-\kappa\widetilde{Q}_2)=\kappa^2\Big(z_3z_5-\frac{z_4^2}{4}\Big)-\kappa(z_3z_2^2+z_5z_1^2-z_1z_2z_4)$$

est un invariant de l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2\oplus\mathbf{C}^3$. Ainsi les niveaux génériques de :

$$\Big(z_3z_5-\frac{z_4^2}{4}, z_3z_2^2+z_5z_1^2-z_1z_2z_4\Big)$$

définissent le feuilletage de codimension 2 associé à $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$; la fonction :

$$\frac{\big(z_3z_2^2+z_5z_1^2-z_1z_2z_4\big)^2}{\big(z_3z_5-\frac{z_4^2}{4}\big)^3}$$

en est une intégrale première.

Remarque 17. — Le numérateur de cette intégrale première est le polynôme de Gordan-Noether. On retrouve le feuilletage exceptionnel en coupant par un $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ ad hoc ; ce $\mathbf{C}\mathbb{P}(3)$ est non générique puisque le degré du feuilletage diminue.

(iii) Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}^2\oplus\mathbf{C}^2$.

On écrit l'élément g de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sous la forme :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Comme l'action naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2$ correspond à l'action sur les formes linéaires, on peut voir l'action sur $\mathbf{C}^2\oplus\mathbf{C}^2$ à conjugaison près comme suit :
$$g\cdot(z_2x+z_3y, z_4x+z_5y)\simeq \begin{pmatrix} z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$
On constate ainsi que :
$$\det\begin{pmatrix} z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 \end{pmatrix} = z_2z_5 - z_3z_4$$
en est un invariant. Les niveaux génériques de :
$$(z_1, z_2z_5 - z_3z_4)$$
sont les feuilles du feuilletage de codimension 2 associé à $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ avec les notations habituelles. Ainsi :
$$\frac{z_2z_5 - z_3z_4}{z_1^2}$$
est une intégrale première du $\mathscr{L}$-feuilletage associé à $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ qui est donc de degré 1 ; par suite cette action n'induit pas un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$.

(iv) Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}^3$.

Cette action est triviale sur chaque facteur $\mathbf{C}$ et sur le facteur $\mathbf{C}^3$ c'est l'action naturelle sur V_3. Ainsi le feuilletage associé à $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ est donné par les niveaux de (z_1, z_2) et une intégrale première du $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ associé à $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est z_1/z_2. Par suite $\mathscr{F}$ est de degré 0.

Finalement seules les trois premières actions conduisent à un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$:

Théorème 6.1. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$, alors le feuilletage $\mathscr{F}$ admet à conjugaison près l'une des intégrales premières suivantes :*
$$\frac{z_3^2z_4^2 - 4z_2z_4^3 - 4z_3^3z_5 - 27z_2z_5^2 + 18z_2z_3z_4z_5}{z_1^4},$$
$$\frac{\left(z_3z_2^2 + z_5z_1^2 - z_1z_2z_4\right)^2}{\left(z_3z_5 - \frac{z_4^2}{4}\right)^3} \quad \textit{ou} \quad j = 1728\frac{P^3}{\Delta}.$$

6.2. Cas $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ abélienne

En classifiant les triplets de matrices $(5,5)$ qui commutent on se ramène à étudier les sept cas qui suivent :

(i) $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est diagonale,

ou bien $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par les champs du type suivant

(ii) $\kappa z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2},\quad \xi z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_3\frac{\partial}{\partial z_3},\quad z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_4\frac{\partial}{\partial z_4}\quad$ et R.

(iii) $\kappa z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+z_3\frac{\partial}{\partial z_3},\quad z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_4\frac{\partial}{\partial z_4},\quad z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2}\quad$ et R

(iv) $\kappa z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2}+z_4\frac{\partial}{\partial z_3},\quad z_1\frac{\partial}{\partial z_0}+z_4\frac{\partial}{\partial z_2},\quad (z_0+\xi z_1)\frac{\partial}{\partial z_0}+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\quad$ et R.

(v) $z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_4\frac{\partial}{\partial z_2},\quad \kappa z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2}+z_4\frac{\partial}{\partial z_3},\quad \xi z_0\frac{\partial}{\partial z_0}+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\quad$ et R.

(vi) $\kappa z_0\frac{\partial}{\partial z_0}+(z_2+\xi z_4)\frac{\partial}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2}+z_4\frac{\partial}{\partial z_3},\quad \beta z_0\frac{\partial}{\partial z_0}+(z_3+\delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_2},$
$z_0\frac{\partial}{\partial z_0}+z_4\frac{\partial}{\partial z_1}\quad$ et R.

(vii) $(z_1+\kappa z_4)\frac{\partial}{\partial z_0}+z_2\frac{\partial}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2}+z_4\frac{\partial}{\partial z_3},\quad (z_2+\xi z_4)\frac{\partial}{\partial z_0}+z_3\frac{\partial}{\partial z_2}+z_4\frac{\partial}{\partial z_3},$
$(z_3+\beta z_4)\frac{\partial}{\partial z_0}+z_4\frac{\partial}{\partial z_1}\quad$ et R.

On note $\mathfrak{g}_\alpha$ l'algèbre engendrée par les champs correspondant à la ligne α appartenant à $\{(\mathbf{i}),\ldots,(\mathbf{vii})\}$.

Remarque 18. — On a éliminé les algèbres qui donnent des feuilletages de degré strictement inférieur à 3.

Examinons ces possibilités au cas par cas.

(i) Commençons par traiter le cas où $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est diagonale ; une base de $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est :

$$X=\sum_{k=0}^{4}\kappa_k z_k\frac{\partial}{\partial z_k},\quad Y=\sum_{k=0}^{4}\mu_k z_k\frac{\partial}{\partial z_k},\quad Z=\sum_{k=0}^{4}\nu_k z_k\frac{\partial}{\partial z_k}\quad \text{et}\quad R.$$

Le feuilletage $\mathscr{F}$ est décrit par la forme logarithmique :

$$z_0z_1z_2z_3z_4\sum_{k=0}^{4}\xi_k\frac{dz_k}{z_k}$$

avec $\sum_{k=0}^{4}\kappa_k\xi_k=\sum_{k=0}^{4}\mu_k\xi_k=\sum_{k=0}^{4}\nu_k\xi_k=\sum_{k=0}^{4}\xi_k=0.$

(ii) Cas $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(ii)}$.

La 1-forme annulant les champs :

$$\kappa z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \xi z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_4 \frac{\partial}{\partial z_4} \quad \text{et } R$$

s'écrit à multiplication près dans la carte affine $z_1 = 1$:

$$dz_0 - \kappa \frac{dz_2}{z_2} - \xi \frac{dz_3}{z_3} - \frac{dz_4}{z_4}.$$

Le $\mathscr{L}$-feuilletage décrit par cette 1-forme a pour intégrale première :

$$\frac{z_1^{\kappa+\xi+1}}{z_2^{\kappa} z_3^{\xi} z_4} \exp\left(\frac{z_0}{z_1}\right).$$

(iii) Cas $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(iii)}$.

Les champs :

$$\kappa z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_4 \frac{\partial}{\partial z_4}, \quad z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{et } R$$

annulent la 1-forme suivante exprimée dans la carte $z_1 = 1$:

$$-dz_0 + d\left(\frac{z_2}{z_3}\right) + \kappa \frac{dz_3}{z_3} + \frac{dz_4}{z_4}.$$

Le feuilletage $\mathscr{F}$ admet donc pour intégrale première :

$$\frac{z_3^{\kappa} z_4}{z_1^{1+\kappa}} \exp\left(\frac{z_1 z_2 - z_0 z_3}{z_1 z_3}\right).$$

(iv) Cas où $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(iv)}$.

L'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ est engendrée par les champs :

$$\kappa z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_4 \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + z_4 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad (z_0 + \xi z_1) \frac{\partial}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{et } R.$$

Une 1-forme annulée par ces quatre champs s'écrit dans la carte affine $z_4 = 1$:

$$d\Big(\frac{z_0}{z_1}\Big) - \xi \frac{dz_1}{z_1} + d\Big(-z_2 + \frac{z_3^2}{2} - \kappa z_3\Big).$$

Le $\mathscr{L}$-feuilletage décrit par cette 1-forme a pour intégrale première :

$$\frac{z_0 z_4^2 - z_1 z_2 z_4 - \kappa z_1 z_3 z_4 + \frac{z_1 z_3^2}{2}}{z_1 z_4^2}$$

si $\xi = 0$ et :

$$\left(\frac{z_1}{z_4}\right)^{\xi} \exp\Big(\frac{z_0 z_4^2 - z_1 z_2 z_4 - \kappa z_1 z_3 z_4 + \frac{z_1 z_3^2}{2}}{z_1 z_4^2}\Big)$$

sinon. À conjugaison près on obtient :

$$\frac{z_0 z_4^2 - z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3^2}{z_1 z_4^2} \quad \text{si } \xi = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{z_1}{z_4}\right)^{\xi} \exp\Big(\frac{z_0 z_4^2 - z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3^2}{z_1 z_4^2}\Big) \quad \text{sinon.}$$

(v) Cas $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(v)}$.

On note ω une 1-forme annulant les champs :

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \kappa z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}, \quad \xi z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{et } R.$$

Dans la carte $z_4 = 1$, elle s'écrit :

$$\omega_{|z_4=1} = -\frac{dz_0}{z_0} + \xi\frac{dz_1}{z_1} - \xi dz_2 + \xi(z_3-\kappa)dz_3.$$

Le feuilletage associé à l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ admet pour intégrale première :

$$\frac{z_1^{\xi}z_4^{1-\xi}}{z_0}\exp\left(\xi\frac{z_3^2 - 2\kappa z_3z_4 - 2z_2z_4}{2z_4^2}\right)$$

soit à conjugaison près :

$$\frac{z_1^{\xi}z_4^{1-\xi}}{z_0}\exp\left(\frac{z_3^2 - z_2z_4}{z_4^2}\right).$$

(vi) Cas $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(vi)}$.

Les champs :

$$\kappa z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}, \quad z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_4\frac{\partial}{\partial z_1},$$

$$\beta z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_3+\delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{et } R$$

engendrent l'algèbre $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$.

La 1-forme ω annulée par ces quatre champs s'écrit à multiplication près dans la carte affine $z_4 = 1$:

$$\omega = \frac{dz_0}{z_0} + d\left(-z_1 + z_2z_3 + (\delta-\beta)z_2 - \kappa z_3 + \frac{\beta-\delta}{2}z_3^2 - \frac{z_3^3}{3}\right).$$

Le feuilletage associé admet pour intégrale première :

$$\frac{z_0}{z_4}\exp\left(\frac{-z_1z_4^2 + z_2z_3z_4 + (\delta-\beta)z_2z_4^2 - \kappa z_3z_4^2 - \frac{z_3^3}{3} + \frac{\beta-\delta}{2}z_3^2z_4}{z_4^3}\right).$$

Cette dernière est conjuguée à :

$$\frac{z_0}{z_4}\exp\left(\frac{z_1z_4^2 + z_2z_3z_4 + z_3^3}{z_4^3}\right).$$

(vii) Cas $\widetilde{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} = \mathfrak{g}_{(vii)}$.

Soit ω une 1-forme annulant les champs :

$$(z_1+\kappa z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}, \quad (z_2+\xi z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$(z_3+\beta z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_4\frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{et } R.$$

Elle s'écrit dans la carte affine $z_4 = 1$:

$$\omega_{|z_4=1} = d\left(z_0 - z_1z_3 - \beta z_1 - \xi z_2 + \beta z_2z_3 - \frac{z_2^2}{2} + z_2z_3^2 - \kappa z_3 - \frac{z_3^4}{4} - \frac{\beta}{3}z_3^3 + \frac{\xi}{2}z_3^2\right).$$

On en déduit l'intégrale première suivante :

$$\frac{(z_0 - \beta z_1 - \xi z_2 - \kappa z_3)z_4^3 + (\frac{\xi}{2}z_3 - z_1 + \beta z_2)z_3z_4^2 - \frac{z_2^2z_4^2}{2} - \frac{z_3^4}{4} + (z_2 - \frac{\beta}{3}z_3)z_3^2z_4}{z_4^4}$$

qui après conjugaison s'écrit :

$$\frac{z_0z_4^3 + z_1z_3z_4^2 - \frac{z_2^2z_4^2}{2} - \frac{z_3^4}{4} + z_2z_3^2z_4}{z_4^4}.$$

Le théorème suivant résume l'analyse précédente ; elle a été faite directement sans utiliser Maple.

THÉORÈME 6.2. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est abélienne, alors le feuilletage $\mathscr{F}$ admet, à conjugaison près, l'une des intégrales premières suivantes :*

$$\begin{array}{ll}
z_0^{\kappa_0}z_1^{\kappa_1}z_2^{\kappa_2}z_3^{\kappa_3}z_4^{\kappa_4} & \dfrac{z_0z_4^3 + z_1z_3z_4^2 - \frac{z_2^2z_4^2}{2} - \frac{z_3^4}{4} + z_2z_3^2z_4}{z_4^4}, \\
\dfrac{z_1^{\kappa+\xi+1}}{z_2^{\kappa}z_3^{\xi}z_4}\exp\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right), & \dfrac{z_3^{\kappa}z_4}{z_1^{1+\kappa}}\exp\left(\dfrac{z_1z_2 - z_0z_3}{z_1z_3}\right), \\
\dfrac{z_0z_4^2 - z_1z_2z_4 + z_1z_3^2}{z_1z_4^2}, & \left(\dfrac{z_1}{z_4}\right)^{\xi}\exp\left(\dfrac{z_0z_4^2 - z_1z_2z_4 + z_1z_3^2}{z_1z_4^2}\right), \\
\dfrac{z_1^{\xi}z_4^{1-\xi}}{z_0}\exp\left(\dfrac{z_3^2 - z_2z_4}{z_4^2}\right), & \dfrac{z_0}{z_4}\exp\left(\dfrac{z_1z_4^2 + z_2z_3z_4 - z_3^3}{z_4^3}\right).
\end{array}$$

Les κ_i, κ et ξ sont des nombres complexes non nuls satisfaisant $\sum_{j=0}^4 \kappa_j = 0$.

6.3. Cas $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ isomorphe à $\mathscr{L}_\alpha$

L'algèbre $\mathscr{L}_\alpha$ a pour présentation :

$$\{[X,Y] = Y, [X,Z] = \alpha Z, [Y,Z] = 0\}, \alpha \neq 0.$$

On remarque que si l'on change X en $\frac{X}{\alpha}$ on a :

$$\left[\frac{X}{\alpha}, Y\right] = \frac{Y}{\alpha}, \quad [Y,Z] = 0, \quad \left[\frac{X}{\alpha}, Z\right] = Z.$$

On obtient avec $X' = \frac{X}{\alpha}$, $Y' = Z$ et $Z' = Y$:

$$[X',Y'] = Y', \quad [Y',Z'] = 0, \quad [X',Z'] = \frac{Z'}{\alpha}.$$

Par suite l'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est indifféremment déterminée par α ou $\frac{1}{\alpha}$ que l'on note $\widetilde{\alpha}$ (*i.e.* on note $\widetilde{\alpha} = \widetilde{2}$ pour $\alpha = 2$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$).

L'algèbre $\mathbf{C}Y \oplus \mathbf{C}Z$ est sous-algèbre abélienne de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ qui est résoluble. La présentation entraîne que Y et Z sont nilpotents ; on peut donc choisir une base dans laquelle Y s'écrit matriciellement :

$$N_{2,1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad N_{2,2} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$N_{3,1} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad N_{3,2} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou } N_4 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

suivant son ordre de nilpotence et son rang (on rappelle que si Y est de rang 1, le degré du feuilletage diminue et, en fait, le feuilletage est un pull-back). On cherche alors la forme de Z ; soit $\mathscr{C}(N_i)$ le commutateur de N_i :

$$\mathscr{C}(N_{i,j}) = \{A \in \mathscr{M}(5,\mathbf{C}) \mid AN_{i,j} - N_{i,j}A = 0\}.$$

Un calcul fastidieux mais sans difficulté donne la description des algèbres de Lie $\mathscr{C}(N_{i,j})$:

$$\mathscr{C}(N_{2,1}) = \left\{\begin{pmatrix} a&b&c&\delta&e\\ f&g&h&i&j\\ 0&0&k&\ell&m\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&0&f&g \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathscr{C}(N_{2,2}) = \left\{\begin{pmatrix} a&b&c&\delta&e\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&0&0\\ 0&0&f&g&h\\ 0&0&i&j&k \end{pmatrix}\right\}$$
$$\mathscr{C}(N_{3,1}) = \left\{\begin{pmatrix} a&c&e&g&i\\ 0&b&\delta&f&h\\ 0&0&a&c&e\\ 0&0&0&b&\delta\\ 0&0&0&0&a \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathscr{C}(N_{3,2}) = \left\{\begin{pmatrix} a&b&c&\delta&e\\ 0&a&b&c&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&0\\ 0&0&0&f&g \end{pmatrix}\right\}$$
$$\mathscr{C}(N_4) = \left\{\begin{pmatrix} a&b&c&\delta&e\\ 0&a&b&c&\delta\\ 0&0&a&b&c\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&0&0&a \end{pmatrix}\right\}$$

Comme Z est nilpotent, Z appartient, suivant l'ordre de nilpotence et le rang de Y, à l'un des espaces suivants :

$$\mathscr{C}'(N_{2,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & \delta & e \\ f & -a & h & i & j \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & f & -a \end{pmatrix} \mid a^2 + bf = 0 \right\}, \quad \mathscr{C}'(N_{3,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c & e & g & i \\ 0 & 0 & \delta & f & h \\ 0 & 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathscr{C}'(N_{2,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c & \delta & e \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j & -g \end{pmatrix} \mid g^2 + jh = 0 \right\}, \quad \mathscr{C}'(N_{3,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c & \delta & e \\ 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathscr{C}'(N_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c & \delta & e \\ 0 & 0 & b & c & \delta \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}(n, \mathbf{C})$; on note $r(E)$ le rang générique des éléments de E :

$$r(E) = \max\{\operatorname{rg} A \mid A \in E\}$$

et $E(A, N_{i,j})$ l'espace vectoriel engendré par A et $N_{i,j}$. Soit $A \in \mathscr{C}'(N_{i,j})$ tel que $\dim E(A, N_{i,j}) = 2$. On introduit la sous-variété algébrique :

$$F_i = \bigcup_j \{A \in \mathscr{C}'(N_{i,j}) \mid r(E(A, N_{i,j})) = i\}$$

et les ensembles :

$$G_{i,j} = \{A \in \mathscr{C}'(N_{i,j}) \mid r(E(A, N_{i,j})) \leqslant i\}.$$

On dit que $(a, b, c, \delta, e, f, g, i, j, k, \ell)$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$ si

$$a = b = c = f = g = 0 \text{ ou } \begin{cases} ak = -f\ell \\ \delta\ell k = -\ell^2 i + \ell jk + ek^2 \\ ck = -g\ell \\ bk^2 = -f\ell^2. \end{cases}$$

Le lemme suivant donne la description des $G_{i,j}$; sa preuve utilise uniquement des arguments standards de mineurs.

Lemme 6.3. — *On a :*

$$G_{2,1}=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c & \delta & e\\ f & -a & h & i & j\\ 0 & 0 & 0 & \ell & m\\ 0 & 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & 0 & f & -a\end{pmatrix} \mid \mathscr{P}(a,b,c,\delta,e,f,h,i,j,\ell,m)\right\}$$

$$G_{2,2}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b & c & \delta & e\\ 0 & 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & f & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad G_{3,1}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & c & e & g & i\\ 0 & 0 & \delta & f & h\\ 0 & 0 & 0 & c & e\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \mid c\delta=0\right\}$$

$$G_{3,2}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & \delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad G_{4}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b & c & \delta & e\\ 0 & 0 & b & c & \delta\\ 0 & 0 & 0 & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Remarque 19. — Si on note $G_i=\bigcup_j G_{i,j}$, on obtient à partir de la description des G_{ij} celle des F_i :

$$F_2=G_2, F_3=G_3\smallsetminus G_2, F_4=G_4\smallsetminus(G_2\cup G_3).$$

Démonstration du lemme 6.3. — Commençons par décrire l'ensemble $G_{2,1}$; l'annulation pour tout t des mineurs $(3,3)$ de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \delta+t & e\\ f & -a & h & i & j+t\\ 0 & 0 & 0 & \ell & m\\ 0 & 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & 0 & f & -a\end{pmatrix}$$

est réalisée si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $a=f=b=c=h=0$
- $b\ell^2=-fm^2, a\ell=-fm, \delta m\ell=-m^2i+mj\ell+e\ell^2, c\ell=-hm.$

Pour l'ensemble $G_{2,2}$, les mineurs $(3,3)$ de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & b+t & c & \delta & e\\ 0 & 0 & b+t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & f & g & h\\ 0 & 0 & i & j & -g\end{pmatrix}$$

sont nuls pour tout t si et seulement si $g=h=j=0$.

On décrit maintenant $G_{3,1}$; la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & c & e+t & g & i \\ 0 & 0 & \delta & f+t & h \\ 0 & 0 & 0 & c & e+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang inférieur ou égal à 3 si et seulement si le produit $c\delta$ est nul.

Passons à la description de $G_{3,2}$; l'annulation pour tout t des mineurs $(4,4)$ de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & b+t & c & \delta & e \\ 0 & 0 & b+t & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 \end{pmatrix}$$

est réalisée si et seulement si les éléments b, e et f sont nuls.

Pour G_4, il n'y a rien à faire. □

On aborde maintenant la classification des $\mathscr{L}$-feuilletages associés aux algèbres $\mathscr{L}_\alpha$.

On se permettra d'effectuer certaines combinaisons linéaires dites permises qui vont changer $\mathscr{L}'_{\mathscr{F}}$ tout en gardant la même structure d'algèbre : par exemple, les algèbres $\langle X, Y, Z\rangle$ et $\langle X + \kappa R, Y, Z\rangle$ sont distinctes mais isomorphes et tangentes au même feuilletage.

Partant de Y et Z dans F_i, on cherche X dans $\chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(4))$ et λ, μ, β, ε dans $\mathbf{C}$ satisfaisant :

$$[X, Y] = \lambda Y + \mu Z, \quad \text{et} \quad [X, Z] = \beta Y + \varepsilon Z.$$

On mentionne souvent la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \beta & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Les équations traitées sont quadratiques (toutefois linéaires en chaque variable) et il n'est pas étonnant qu'arrivent plusieurs cas ; ils correspondent aux différentes composantes irréductibles des ensembles décrits par ces équations. On n'a retenu que les solutions donnant des feuilletages de degré 3, certaines donnant des feuilletages de degré plus bas ; ces solutions éliminées interviennent dans la classification des feuilletages de degré inférieur à 3.

6.3.1. Cas où les matrices Y, Z sont dans F_4. — C'est le cas où Y et Z s'écrivent respectivement :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & b & c & \delta & e \\ 0 & 0 & b & c & \delta \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étudions les feuilletages associés aux solutions données par Maple. Nous n'avons pas eu à établir de programme spécifique ; nous avons juste utilisé les commandes de base de Maple. Nous présentons les calculs typiques et mentionnons par quelles techniques se traitent les autres cas.

Les subdivisions 3.1.1, ... correspondent aux différentes solutions proposées par Maple. C'est dans ce paragraphe que l'on trouve des feuilletages potentiellement exceptionnels (voir remarques 20).

3.1.1. Les champs X et Z s'écrivent respectivement à combinaisons linéaires permises près :

$$\begin{aligned} X &= (bz_1 + cz_2 + \delta z_3 + ez_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (\kappa z_1 + bz_2 + cz_3 + \delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} \\ &\qquad + (2\kappa z_2 + bz_3 + cz_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + (3\kappa z_3 + bz_4)\frac{\partial}{\partial z_3} + 4\kappa z_4\frac{\partial}{\partial z_4}, \\ Z &= z_2\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Dans ce cas :

$$M = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ -b\kappa & 2\kappa \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que κ est non nul ; par suite on peut supposer que $\kappa = 1$. On note que $\widetilde{\alpha} = \widetilde{2}$.

Quitte à faire des combinaisons linéaires permises, le champ X s'écrit :

$$X = (-4z_0 + \delta z_3 + ez_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (-3z_1 + \delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_3\frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Les hyperplans $z_4 =$ cte sont alors invariants par les trois champs qui engendrent donc le feuilletage restreint à la carte affine $z_4 = 1$. Dans cette carte affine, on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{X} &= X_{|z_4=1} = (-4z_0 + \delta z_3 + e)\frac{\partial}{\partial z_0} + (-3z_1 + \delta)\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_3\frac{\partial}{\partial z_3} \\ \widetilde{Y} &= Y_{|z_4=1} = z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} \end{aligned}$$

et $$\widetilde{Z} = Z_{|z_4=1} = z_2\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Les champs $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$ ont une « partie constante », ne s'annulent pas et commutent ; nous allons essayer de les redresser par un automorphisme polynomial. Le flot de $\widetilde{Y}$ est :

$$\varphi(z;t)=\Big(z_0+z_1t+z_2\frac{t^2}{2}+z_3\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24},z_1+z_2t+z_3\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6},z_2+z_3t+\frac{t^2}{2},z_3+t\Big)$$

et celui de $\widetilde{Z}$:

$$\psi(z;s)=\Big(z_0+z_2s+\frac{s^2}{2},z_1+z_3s,z_2+s,z_3\Big).$$

On définit maintenant le difféomorphisme :

$$H(z_0,z_1,z_2,z_3)=\varphi(\psi(z_0,z_1,0,0;z_2);z_3)$$

qui est donné par :

$$\Big(z_0+\frac{z_2^2}{2}+z_1z_3+\frac{z_2z_3^2}{2}+\frac{z_3^4}{24},z_1+z_2z_3+\frac{z_3^3}{6},z_2+\frac{z_3^2}{2},z_3\Big).$$

Par construction H conjugue $\frac{\partial}{\partial z_3}$ à $\widetilde{Y}$ et $\frac{\partial}{\partial z_2}$ à $\widetilde{Z}$.

On note $\widetilde{\mathscr{F}}$ le feuilletage associé à l'algèbre engendrée par les champs $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$; soit $\widetilde{\Omega}$ une 1-forme qui définit $\widetilde{\mathscr{F}}$. Le feuilletage $\mathscr{F}'=H^*\widetilde{\mathscr{F}}$ est décrit par une 1-forme Ω' qui annule les champs $H_*^{-1}\widetilde{Y}=\frac{\partial}{\partial z_3}$ et $H_*^{-1}\widetilde{Z}=\frac{\partial}{\partial z_2}$. Elle s'écrit donc du fait de l'intégrabilité :

$$\Omega'=A'(z_0,z_1)dz_0+B'(z_0,z_1)dz_1.$$

Le difféomorphisme H laisse le plan d'équation $z_2=z_3=0$ invariant point par point, donc $\Omega'=\text{cte}\ \iota^*\widetilde{\Omega}$ où :

$$\iota\colon (z_0,z_1)\longmapsto(z_0,z_1,0,0)$$

et Ω' définit $\widetilde{\mathscr{F}}_{|z_2=z_3=0}$. Le champ :

$$\widetilde{X}_{|z_2=z_3=0}=(-4z_0+e)\frac{\partial}{\partial z_0}+(-3z_1+\delta)\frac{\partial}{\partial z_1}$$

décrit le feuilletage en restriction au 2-plan $z_2=z_3=0$. Alors :

$$\frac{(z_0-\frac{e}{4})^3}{(z_1-\frac{\delta}{3})^4}$$

est une intégrale première de $\widetilde{\mathscr{F}}_{|z_2=z_3=0}$. Après composition avec H^{-1} et homogénéisation, on a :

$$\frac{\Big(z_0z_4^3-\frac{z_2^2z_4^2}{2}-z_1z_3z_4^2+z_2z_3^2z_4-\frac{z_3^4}{4}-\frac{e}{4}z_4^4\Big)^3}{\Big(z_1z_4^2-z_2z_3z_4+\frac{z_3^3}{3}-\frac{\delta}{3}z_4^3\Big)^4}$$

qui à conjugaison près s'écrit :

$$\frac{\Big(z_0z_4^3-\frac{z_2^2z_4^2}{2}-z_1z_3z_4^2+z_2z_3^2z_4-\frac{z_3^4}{4}\Big)^3}{\Big(z_1z_4^2-z_2z_3z_4+\frac{z_3^3}{3}\Big)^4}.$$

3.1.2. Les champs X et Z sont à combinaisons linéaires permises près :

$$\begin{aligned}X = &(\sigma z_1 + \gamma z_2 + \xi z_3 + \zeta z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + 4(b\eta + \varsigma)z_4\frac{\partial}{\partial z_4}\\ &\qquad + ((b\eta+\varsigma)z_1 + \sigma z_2 + (\gamma + \eta\delta)z_3 + z_4)\,\frac{\partial}{\partial z_1}\\ &\qquad + (2(b\eta+\varsigma)z_2 + \sigma z_3 + (\gamma + 2\eta\delta)z_4)\,\frac{\partial}{\partial z_2} + (3(b\eta+\varsigma)z_3 + \sigma z_4)\,\frac{\partial}{\partial z_3},\\ Z = &(bz_1 + \delta z_3)\frac{\partial}{\partial z_0} + (bz_2 + \delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + bz_3\frac{\partial}{\partial z_2} + bz_4\frac{\partial}{\partial z_3}\end{aligned}$$

et $\quad M = \begin{pmatrix} \varsigma & \eta \\ -b(3b\eta + 2\varsigma) & 4\eta b + 3\varsigma \end{pmatrix}.$

Les valeurs propres de cette matrice sont $3(\varsigma + b\eta)$ et $\varsigma + b\eta$ donc $\widetilde{\alpha} = \widetilde{3}$. On remarque que $\varsigma + b\eta$ est non nul.

On note que si δ est nul, la dimension ponctuelle de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est deux. Quitte à changer Z en $\frac{1}{\delta}(Z - bY)$, le champ Z s'écrit :

$$Z = z_3\frac{\partial}{\partial z_0} + z_4\frac{\partial}{\partial z_1}.$$

À combinaisons linéaires et conjugaison près, on a :

$$\begin{aligned}X = (-4(b\eta+\varsigma)z_0 + \zeta z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (-3(b\eta+\varsigma)z_1 + \eta\delta z_3)\frac{\partial}{\partial z_1}&\\ + (-2(b\eta+\varsigma)z_2 + 2\mu\delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} - (b\eta+\varsigma)z_3\frac{\partial}{\partial z_3}&.\end{aligned}$$

On traite ce cas de la même manière qu'en 3.1.1 et une intégrale première de $\mathscr{F}$ est à conjugaison près :

$$\frac{\left(z_2 z_4 - \frac{z_3^2}{2} - \kappa z_4^2\right)^2}{\left(2(b\eta+\varsigma)(z_1 z_3 z_4^2 + \frac{z_2 z_3^2 z_4}{2} - \frac{z_3^4}{8})\right) + z_0 z_4^3}$$

avec :
$$\kappa = \frac{2\eta\delta}{2(b\eta+\varsigma)}.$$

On peut en fait conjuguer la fonction rationnelle précédente à :

$$\frac{\left(z_2 z_4 - z_3^2\right)^2}{z_1 z_3 z_4^2 + z_2 z_3^2 z_4 - z_3^4 + z_0 z_4^3}.$$

3.1.3. À combinaisons linéaires près on a :

$$\begin{aligned}X &= (8z_0+\xi z_3+\zeta z_4)\frac{\partial}{\partial z_0}+(6z_1+\kappa z_2+\kappa^2 z_3+(\xi+\frac{5}{4}\kappa^3)z_4)\frac{\partial}{\partial z_1}\\ &\qquad +(4z_2+2\kappa z_3+2\kappa^2 z_4)\frac{\partial}{\partial z_2}+(2z_3+3\kappa z_4)\frac{\partial}{\partial z_3},\\ Z &= (z_2+\kappa z_3+\frac{5}{4}\kappa^2 z_4)\frac{\partial}{\partial z_0}+(z_3+\kappa z_4)\frac{\partial}{\partial z_1}+z_4\frac{\partial}{\partial z_2}\end{aligned}$$

et : $$M=\begin{pmatrix}-2 & \kappa\\ 0 & -4\end{pmatrix}.$$

On remarque que $\widetilde{\alpha}=\widetilde{2}$.

Notons :

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{3\kappa\xi}{8}+\frac{11\kappa^4}{32}+\frac{\zeta}{4},\\ P &= (z_1-\kappa z_2)z_4^2+\left(\frac{\kappa z_3^2}{2}-z_2z_3\right)z_4+\frac{z_3^3}{3}+\left(\frac{\xi}{6}-\frac{\kappa^3}{8}\right)z_4^3\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}Q &= \left(2z_0+\frac{\kappa^2}{2}z_2-3\kappa z_1\right)z_4^3+\left((3\kappa z_2-2z_1)z_3-\frac{\kappa^2}{4}z_3^2-z_2^2\right)z_4^2\\ &\qquad +(2z_2z_3^2-\kappa z_3^3)z_4-\frac{z_3^4}{2}-\eta z_4^4.\end{aligned}$$

On trouve que $\mathscr{F}$ admet comme intégrale première :

$$\frac{P^4}{Q^3};$$

à conjugaison près, on obtient :

$$\frac{\left(z_1z_4^2-z_2z_3z_4+\frac{z_3^3}{3}\right)^4}{\left(z_0z_4^3-(2z_1z_3+z_2^2)z_4^2+2z_2z_3^2z_4-\frac{z_3^4}{2}\right)^3}.$$

Remarques 20

1. Ce feuilletage n'appartient pas aux composantes connues de l'espace des feuilletages de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$; c'est un candidat à être un feuilletage « *exceptionnel* ».

2. On remarque que les feuilletages produits en 3.1.1 et 3.1.3 sont conjugués. L'explication est la suivante : l'algèbre de Lie a été présentée de deux façons différentes qui se sont avérées à posteriori conjuguées.

3. On constate que lorsque le rang générique de $\langle Y,Z\rangle$ est maximal l'invariant $\widetilde{\alpha}$ est **discret** et vaut $\widetilde{2}$ ou $\widetilde{3}$.

6.3.2. Cas où les matrices Y, Z sont dans F_3. — Comme précédemment on cherche X dans $\chi(\mathbf{C}\mathbb{P}(4))$, λ, μ, β, $\varepsilon\in\mathbf{C}$ satisfaisant :

$$[X,Y]=\lambda Y+\mu Z \quad \text{et} \quad [X,Z]=\beta Y+\varepsilon Z.$$

Grâce à Maple, on obtient sept solutions que l'on étudie au cas par cas. On n'a retenu que les solutions donnant des feuilletages de degré 3.

Les méthodes de calculs d'intégrale première sont les mêmes que celles utilisées en 6.3.1 exception faite du cas 3.2.5 où l'on cherche une symétrie du feuilletage qui produira un facteur intégrant.

3.2.1. Les champs X, Y et Z s'écrivent respectivement à combinaisons linéaires permises près :

$$\begin{aligned}
X = {} & \left(-\frac{1}{2}\sigma z_0 + \xi z_1 + \rho z_2 + \gamma z_3 + \delta z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_0} \\
& + \left(-\frac{1}{2}\frac{i\sigma + 2k(g\zeta - \xi)}{g} z_2 + \xi_8 z_3 + \xi_9 z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_1} \\
& + \left(\frac{1}{2}\sigma z_2 + (\xi + \zeta g) z_3 + (\rho + \zeta i) z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_2} \\
& + \left(\sigma z_3 - \frac{1}{2}\frac{i\sigma - 2\xi k}{g} z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{3}{2}\sigma z_4 \frac{\partial}{\partial z_4}, \\
Y = {} & z_2\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}
\end{aligned}$$

et $$Z = (g z_3 + i z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + k z_4 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{avec } k \neq 0.$$

On remarque que :

$$M = \begin{pmatrix} \sigma & \zeta \\ 0 & \frac{3\sigma}{2} \end{pmatrix}$$

et que $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\tfrac{3}{2}}$. On note :

$$\begin{aligned}
&\varrho = \frac{i\sigma - 2\xi k}{g}, && \tau = \frac{(\rho - \xi_8 + \zeta i)i - \xi_9 g}{k} + \gamma, \\
&\upsilon = i\frac{\xi + 2\zeta g}{k} + \frac{(\rho - \xi_8)g}{k}, && \ell = \frac{g(\xi + \zeta g)}{k}, \quad \varsigma = \delta - \frac{i\xi_9}{k} \\
&A = \frac{\tau}{\sigma} - \frac{2\varrho\upsilon}{\sigma^2} + \frac{3\varrho^2\ell}{\sigma^3}, && B = \frac{\upsilon}{\sigma} - \frac{3\ell\varrho}{\sigma^2}, \quad C = \frac{\ell}{\sigma}, \\
&\vartheta = \frac{\varsigma}{\sigma} - \frac{\tau\varrho}{\sigma^2} + \frac{\varrho^2\upsilon}{\sigma^3} - \frac{\varrho^3\ell}{\sigma^4}, && \kappa = B + \frac{6C\varrho}{\sigma}, \\
&\eta = \frac{2A}{3} + \frac{2\varrho B}{\sigma} + \frac{6C\varrho^2}{\sigma^2} && \text{et} \quad \nu = -\frac{\vartheta}{2} - \frac{B\varrho^2}{\sigma^2} - 2C\frac{\xi'^3}{\sigma^3} - \frac{2A\varrho}{3\sigma}.
\end{aligned}$$

Le feuilletage associé admet pour intégrale première :

$$\frac{z_4\left((\frac{g}{k}(z_2 - z_1)z_3 - \frac{z_2^2}{2} - \kappa z_3^2 + \frac{i}{k}z_2 z_3)z_4 + (z_0 - \frac{i}{k}z_1 - \eta z_3)z_4^2 - 2C z_3^3 + \nu z_4^3\right)}{\left(z_3 + \frac{\varrho}{\sigma}z_4\right)^4}$$

qui se ramène à conjugaison près à :

$$\frac{z_4(z_0 z_4^2 + z_1 z_3 z_4 + z_2^2 z_4 + a z_3^3)}{z_3^4} \quad \text{avec } a \in \{0, 1\}.$$

Remarque 21. — Dans la carte affine $z_3 = 1$, le feuilletage admet pour intégrale première à conjugaison près :

$$z_4(z_0z_4^2 + z_1z_4 + z_2^2z_4 + a).$$

Il produit donc un *polynôme* de degré 4 sur $\mathbf{C}^4$ définissant un $\mathscr{L}$-feuilletage.

3.2.2. Les champs X, Y et Z sont à combinaisons linéaires permises près :

$$\begin{aligned}X &= \left(\frac{(e-f)(\xi+\kappa k)}{k}z_0 + \gamma z_3 + \delta z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\\ &\qquad + (\xi z_2 + (\zeta-\rho)z_3 + \eta z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\frac{(e-f)\xi}{k}z_2 + \kappa i z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_2}\\ &\qquad + (2\kappa(f-e)z_3 + (\xi+\kappa k)z_4)\frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{(f-e)(\kappa k-\xi)}{k}z_4\frac{\partial}{\partial z_4},\\ Y &= z_2\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}\end{aligned}$$

et $\quad Z = iz_4\dfrac{\partial}{\partial z_0} + ((f-e)z_3 + kz_4)\dfrac{\partial}{\partial z_1} \qquad$ avec $ik \neq 0$.

La matrice M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \kappa(f-2e) & \kappa \\ -ef\kappa & \kappa(2f-e)\end{pmatrix};$$

ses valeurs propres sont $\kappa(f-e)$ et $2\kappa(f-e)$ donc $\widetilde{\alpha} = \widetilde{2}$.

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}&\upsilon = \frac{(f-e)(\xi-k\kappa)}{k}, && \varsigma = \frac{(\kappa k+\xi)(f-e)}{k}, \quad \sigma = \xi+\kappa k,\\ &\tau = \zeta-\rho-\mu i - \frac{k\gamma+\delta(f-e)}{i}, && \varrho = -\frac{\gamma(f-e)}{i},\\ &\vartheta = \eta - \frac{\delta k}{i}, && A = \frac{\tau\varsigma - 2\varrho\sigma}{\varsigma(\varsigma-\upsilon)}, \quad B = \frac{\varrho}{2\varsigma-\upsilon},\\ &\nu = -\frac{\tau\sigma}{\upsilon\varsigma} + \frac{\varrho\sigma^2}{\upsilon\varsigma^2} + \frac{\vartheta}{\upsilon} - A\frac{\sigma}{\varsigma} - B\frac{\sigma^2}{\varsigma^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Q = z_1z_4^2 - z_2z_3z_4 &+ \Big(\frac{f-e}{2i}z_3 - \frac{k}{2i}z_4\Big)(z_2^2 - 2z_0z_4)\\ &-\Big(A + 2B\frac{\sigma}{\varsigma}\Big)z_3z_4^2 - Bz_3^2z_4 - \nu z_4^3.\end{aligned}$$

On montre que le feuilletage associé admet pour intégrale première :

$$\frac{z_4^{3\varsigma-\upsilon}\left(z_3 + \frac{\sigma}{\varsigma}z_4\right)^{\upsilon}}{Q^{\varsigma}}.$$

Cette intégrale première est conjuguée à :

$$\frac{z_4^{3\varsigma-\upsilon}z_3^{\upsilon}}{(z_1z_4^2 + z_2z_3z_4 + z_2^2z_3 + z_0^2z_4)^{\varsigma}}.$$

3.2.3. À combinaisons linéaires permises près on a :

$$\begin{aligned}X &= ((-\nu z_0 + \xi z_3 + \gamma z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (\zeta z_3 + \sigma z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} \\ &\qquad + ((-\nu - \delta)z_2 + \varsigma i z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} - 2\delta z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + (-\nu - 2\delta)z_4\frac{\partial}{\partial z_4}, \\ Y &= z_2\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}, \\ Z &= iz_4\frac{\partial}{\partial z_0} + (f-e)z_3\frac{\partial}{\partial z_1}\end{aligned}$$

avec $i(f-e) \neq 0$ et $\delta = \varsigma(e-f)$. On remarque que :

$$M = \begin{pmatrix} \varsigma(-2e+f) & \varsigma \\ -e\varsigma f & \varsigma(2f-e) \end{pmatrix}$$

et $\widetilde{\alpha} = \widetilde{2}$.

Posons :

$$\begin{aligned}&\eta = \zeta - \xi_2 - \varsigma i - \frac{\gamma}{i}(f-e), \kappa = \frac{(e-f)}{2i}, \\ &P = \eta z_3 z_4^2 + \xi\kappa z_3^2 z_4 - \nu(z_1 z_4^2 - z_2 z_3 z_4 - 2\kappa z_0 z_3 z_4 + \kappa z_2^2 z_3)\end{aligned}$$

et $\quad Q = z_1 z_4^2 - z_2 z_3 z_4 - 2\kappa z_0 z_3 z_4 + \kappa z_2^2 z_3 + \dfrac{\eta}{2\delta} z_3 z_4^2 - \dfrac{2\xi\kappa}{2\delta - \nu} z_3^2 z_4 + \dfrac{\sigma}{2\delta + \nu} z_4^3.$

Il y a trois cas à considérer.

Si $\nu + 2\delta = 0$, le feuilletage associé admet pour intégrale première :

$$\left(\frac{z_3}{z_4}\right)^{\sigma} \exp\left(\frac{P}{z_4^3}\right)$$

c'est-à-dire à conjugaison près :

$$\left(\frac{z_3}{z_4}\right)^{\sigma} \exp\left(\frac{z_1 z_4^2 + z_0 z_3 z_4 + z_2^2 z_3}{z_4^3}\right).$$

Si $2\delta + \nu \neq 0$ et $2\delta - \nu \neq 0$, alors le feuilletage admet pour intégrale première :

$$\frac{z_3^{2\delta+\nu} z_4^{2(\nu-\delta)}}{Q^{\nu}}.$$

Elle se ramène, à conjugaison près, à :

$$\frac{z_3^{2\delta+\nu} z_4^{2(\nu-\delta)}}{(z_1 z_4^2 + z_0 z_3 z_4 + z_2^2 z_3)^{\nu}}.$$

Finalement si $2\delta + \nu \neq 0$ et $\nu = 2\delta$, l'intégrale première s'écrit :

$$\left(\frac{z_3}{z_4}\right)^{\beta} \exp\left(2\delta\frac{z_1 z_4^2 - z_2 z_3 z_4 - \frac{f-e}{i} z_0 z_3 z_4 + \frac{f-e}{2i} z_2^2 z_3}{z_3^2 z_4}\right)$$

ou encore à conjugaison près :

$$\left(\frac{z_3}{z_4}\right)^{\beta/2\delta}\exp\left(\frac{z_1z_4^2+z_0z_3z_4+z_2^2z_3}{z_3^2z_4}\right).$$

3.2.4. Les champs X, Y et Z s'écrivent à combinaisons linéaires près :

$$\begin{aligned}X=&\left(2\varsigma(f-e)z_0-2\varsigma gz_1+\frac{\varsigma i(2e-f)+g(\varrho+3\varsigma k)+i\eta}{\delta}z_3+\xi z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\\&+\left(-2\varsigma\delta z_0+\varrho z_2+\left(\frac{3\varsigma i\delta+\varrho(f-e)+\varsigma k(2f-e)+k\eta}{\delta}\right)z_3+\sigma z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_1}\\&\qquad+((\eta+\varsigma(2f-e))z_2-\varsigma gz_3+\varsigma iz_4)\frac{\partial}{\partial z_2}\\&\qquad+(-\varsigma\delta z_2+(\eta+\varsigma f)z_3+(\varrho+\varsigma k)z_4)\frac{\partial}{\partial z_3}+2(\varsigma f+\eta)z_4\frac{\partial}{\partial z_4},\\Y=&\,z_2\frac{\partial}{\partial z_0}+z_3\frac{\partial}{\partial z_1}+z_4\frac{\partial}{\partial z_2}\end{aligned}$$

et $\quad Z=(gz_3+iz_4)\dfrac{\partial}{\partial z_0}+(\delta z_2+(f-e)z_3+kz_4)\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\delta z_4\dfrac{\partial}{\partial z_3}.$

Introduisons les notations suivantes :

$$\kappa=\frac{(2\varsigma\delta-\sigma\delta+k\varrho+\varsigma k^2)\varsigma g+(\xi\delta-i\varrho-i\varsigma k)\eta}{2\delta(\varsigma^2g\delta-\varsigma e\eta-\eta^2)},\quad \zeta=-\frac{2\delta}{e}\left(\frac{\varsigma e}{2}+\eta\right)$$

$$\rho=\frac{(\delta\varsigma\xi+2f(\varsigma e+\eta))\delta\varsigma-\sigma\delta(\eta+e\varsigma)+(\varrho+\varsigma k)(e\varsigma k-i\delta\varsigma+\eta k)}{2(\varsigma^2g\delta-\varsigma e\eta-\eta^2)\delta}$$

$$\gamma^\pm=\frac{e\pm\sqrt{(e^2+4\delta g)}}{2\delta},\quad \vartheta^\pm=\frac{1}{2}\Big(1\pm\frac{2\eta+e\varsigma}{\sqrt{\varsigma^2(e^2+4g\delta)}}\Big),$$

$$P=z_0z_4-\frac{gz_3^2}{2\delta}-\frac{iz_3z_4}{\delta}-\frac{z_2^2}{2}+\kappa z_4^2$$

et $\qquad Q=z_1z_4-\dfrac{f-e}{2\delta}z_3^2-\dfrac{k}{\delta}z_3z_4-z_2z_3-\rho z_4^2.$

On traite ce cas comme d'habitude en trivialisant deux champs tangents dans la carte affine $z_4=1$. Suivant les valeurs des paramètres, on trouve les intégrales premières suivantes :

$$\frac{(P-\gamma^+Q)^{\vartheta^+}(P-\gamma^-Q)^{\vartheta^-}}{z_4^2}\qquad\text{si } e^2+\delta g\neq 0,$$

$$\left(\frac{P-\frac{e}{2\delta}Q}{z_4^2}\right)^{\varsigma\delta}\exp\left(\frac{\zeta P}{P-\frac{e}{2\delta}Q}\right)\qquad\text{sinon.}$$

Notons

$$R=z_0z_4+\frac{\gamma^+(f-e)-g}{2\delta}z_3^2-\frac{z_2^2}{2}+\gamma^+z_2z_3,$$

$$S=z_1z_4+\frac{\gamma^-(f-e)-g}{2\delta}z_3^2-\frac{z_2^2}{2}+\gamma^-z_2z_3,$$

$$\upsilon = e(f-e) - 2g\delta$$

et
$$T = (z_0 - z_1)z_4 + ez_2z_3 - \frac{z_2^2}{2} + \upsilon z_3^2.$$

Si $e^2 + \delta g \neq 0$ on obtient à conjugaison près :

$$\frac{R^{\vartheta_+}S^{\vartheta_-}}{z_4^2};$$

sinon on a :

$$\frac{T}{z_4^2}\exp\Big(\zeta\frac{z_0z_4 - 2g\delta z_3^2 - \frac{z_2^2}{2}}{T}\Big).$$

3.2.5. Étudions le cas suivant prédit par Maple :

$$Y = z_2\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}$$

et
$$Z = (z_1 + gz_3 + iz_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (fz_3 + kz_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Notons, et ceci se constate dans les cartes $z_4 = 1$ puis $z_3 = 1$, que l'on peut par conjugaison se ramener à : $g = i = 0$. Lorsqu'on demande à Maple $X, \lambda, \mu, \varepsilon, \beta$ tels que $[X, Y] = \lambda X + \mu Y$ et $[X, Z] = \beta X + \varepsilon Y$ il donne :

$$\begin{aligned} X = (\gamma z_3 + \upsilon z_4)\,\frac{\partial}{\partial z_0} &+ ((\zeta + \delta f)z_1 + \delta k z_2 + \vartheta k z_4)\,\frac{\partial}{\partial z_1} \\ &+ (\delta z_1 + \zeta z_2)\,\frac{\partial}{\partial z_2} + (2(\zeta + \delta f)z_3 + 2\delta k z_4)\,\frac{\partial}{\partial z_3} + (2\delta z_3 + 2\delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_4} \end{aligned}$$

et : $\quad M = \begin{pmatrix} \zeta & \delta \\ \delta k & \delta f + \zeta \end{pmatrix},$

matrice qui doit être inversible.

Les méthodes que nous avons appliquées jusqu'ici conduisent à des calculs relativement pénibles. Nous allons en essayer une autre ; supposons que l'on puisse trouver un champ X' tel que X' ne soit pas tangent au feuilletage et $[X, X'] = 0$. Alors X' est nécessairement une symétrie ; on en déduit un facteur intégrant qui, en principe, permet de calculer l'intégrale première. Cherchons par exemple, et cela conviendra dans presque tous les cas ($\delta \neq 0$), le champ X' sous la forme :

$$(\rho z_3 + \varrho z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + 2z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + 2z_4\frac{\partial}{\partial z_4}$$

ceci correspondant aux choix $\mu' = 0$ et $\lambda' = 1$. Pour que $[X, X']$ soit nul, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} (\zeta + \delta f)\rho + \delta\varrho = \gamma \\ \delta k\rho + \zeta\varrho = \upsilon. \end{cases}$$

Ce système possède une solution unique puisque la matrice M est inversible. Dans le cas où $\delta \neq 0$ on vérifie que X' n'est pas tangent au feuilletage ; par contre, lorsque

$\delta = 0$, le champ X' est colinéaire à X. La résolution explicite de ρ et ϱ donne :

$$\rho = \frac{\zeta\gamma - \delta\upsilon}{\nu} \quad \text{et} \quad \varrho = \frac{-\mu k\gamma + (\zeta + \delta f)\upsilon}{\nu}$$

avec :

$$\nu = \zeta(\zeta + \delta f) - \delta^2 k.$$

On procède alors au calcul de :

$$\omega = i_X i_Y i_Z i_R dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4$$

1-forme qui décrit le feuilletage et de :

$$P = \omega(X') = i_{X'} i_X i_Y i_Z dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4$$

facteur intégrant de cette 1-forme. Si $\kappa = \sqrt{\delta^2 f^2 + 4\delta^2 k}$, on constate que les deux hyperplans :

$$(\delta f + \kappa)z_3 + 2\delta k z_4 = 0 \quad \text{et} \quad (\delta f - \kappa)z_3 + 2\delta k z_4 = 0$$

sont invariants par le feuilletage car invariants par X et évidemment par Y et Z. Le polynôme P s'écrit donc à constante multiplicative près :

$$\big((\delta f + \kappa)z_3 + 2\delta k z_4\big)\big((\delta f - \kappa)z_3 + 2\delta k z_4\big)Q,$$

où : $\quad \varsigma = \upsilon\zeta - \delta k\gamma + \delta\upsilon f, \sigma = \delta\upsilon - \zeta\gamma$

et
$$\begin{aligned} Q = {} & -2\nu(k + f z_3 - z_3^2)z_0 - \nu(f z_3 + k)z_2^2 + 2\nu z_1 z_2 z_3 \\ & - \nu z_1^2 - \sigma z_3^3 + (\varsigma + f\sigma)z_3^2 + (k\sigma - \varsigma f)z_3 - k\varsigma. \end{aligned}$$

Le polynôme Q, obtenu à l'aide de Maple, est de degré 3 ; génériquement sur les valeurs des paramètres il est irréductible. Dans ce cas le feuilletage associé admet une intégrale première de la forme :

$$((\delta f + \kappa)z_3 + 2\delta k z_4)^{\lambda_0} \, ((\delta f - \kappa)z_3 + 2\delta k z_4)^{\lambda_1} \, \widetilde{Q}^{\lambda_2}$$

où $\widetilde{Q}$ est l'homogénéisé de Q ; on constate que $\widetilde{Q}$ vaut :

$$\begin{aligned} & -2\nu(k z_4^2 + f z_3 z_4 - z_3^2)z_0 - \nu(f z_3 + k z_4)z_2^2 + 2\nu z_1 z_2 z_3 \\ & \qquad - \nu z_1^2 z_4 - \sigma z_3^3 + (\varsigma + f\sigma)z_3^2 z_4 + (k\sigma - \varsigma f)z_3 z_4^2 - k\varsigma z_4^3. \end{aligned}$$

Les λ_i se calculent à partir des résidus de $\frac{\omega}{\omega(X')}$.

Pour les valeurs non génériques des paramètres où le polynôme P n'est pas réduit, on trouve des intégrales premières contenant des exponentielles.

Le polynôme P s'écrit $\delta^2 \widetilde{P}$ donc s'annule pour $\delta = 0$, ce qui n'est pas le cas de $\widetilde{P}$. Par suite $\widetilde{P}$ est un facteur intégrant du feuilletage correspondant à $\delta = 0$. On traite ce cas comme d'habitude suivant les valeurs des paramètres ; il ne donne pas de phénomène nouveau.

3.2.6. À combinaisons linéaires permises près Maple donne :

$$\begin{aligned}
X &= (-3\varsigma z_0 + \xi z_2 + \zeta z_3 + \sigma z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (-2\varsigma z_1 + \gamma c z_2 + (\xi + \gamma\delta)z_3)\frac{\partial}{\partial z_1} \\
&\qquad + (-\varsigma z_2 + 2\gamma c z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + (\upsilon z_3 + (\rho - 3\varsigma)z_4)\frac{\partial}{\partial z_4}, \\
Y &= z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2}, \\
Z &= (z_2 + \delta z_3)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_1}
\end{aligned}$$

et : $$M = \begin{pmatrix} \varsigma & -\frac{\varsigma\delta}{2} \\ 0 & 2\varsigma \end{pmatrix}.$$

On note que $\varsigma \neq 0$ et $\widetilde{\alpha} = 2$.

Posons :

$$\kappa = \frac{\upsilon}{\rho - 3\varsigma}, \quad \nu = \frac{1}{3\varsigma}\left(\sigma\kappa + \delta(\xi + \mu\delta) - \zeta\right)$$

et $$P = z_0 z_3^2 + \nu z_3^3 + \delta\Big(\frac{z_2^2}{2} - z_1 z_3\Big)z_3 - z_1 z_2 z_3 + \frac{1}{3}z_2^3.$$

Si $\rho - 3\varsigma \neq 0$ et $\rho \neq 0$, le feuilletage associé admet pour intégrale première :

$$\frac{(z_4 + \kappa z_3)^{3\varsigma}\left(\rho P - \sigma(z_4 + \kappa z_3)z_3^2\right)^{\rho - 3\varsigma}}{z_3^{3\rho - 6\varsigma}}.$$

À conjugaison près on obtient :

$$\frac{z_4^{3\varsigma}\left(z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3\right)^{\rho - 3\varsigma}}{z_3^{3\rho - 6\varsigma}}.$$

Si $\rho = 0$, alors le feuilletage est décrit par :

$$\left(\frac{z_4}{z_3}\right)^{\sigma/3\varsigma} \exp\left(\frac{z_0 z_3^2 + \delta(\frac{1}{2}z_2^2 z_3 - z_1 z_3^2) - z_1 z_2 z_3 + \frac{1}{3}z_2^3}{z_3^2 z_4}\right)$$

qui se ramène à conjugaison près à :

$$\left(\frac{z_4}{z_3}\right)^{\sigma/3\varsigma} \exp\left(\frac{z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3}{z_3^2 z_4}\right).$$

Soit

$$\vartheta = \frac{1}{3\varsigma}\left(\delta(\xi + \mu\delta) - \zeta + \frac{\upsilon\sigma}{3\varsigma}\right).$$

Pour $\rho - 3\varsigma = 0$, on trouve comme intégrale première :

$$\frac{z_0 z_3^2 - \delta z_1 z_3^2 + \frac{\delta}{2}z_2^2 z_3 - z_1 z_2 z_3 + \frac{1}{3}z_2^3 + \vartheta z_3^3 - \frac{\sigma}{3\varsigma}z_3^2 z_4}{z_3^3} \exp\left(\frac{3\varsigma z_4}{\upsilon z_3}\right).$$

À conjugaison près elle est de la forme :

$$\frac{z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3}{z_3^3}\exp\left(\frac{z_4}{z_3}\right).$$

6.3.3. Cas où les matrices Y, Z sont dans F_2. — Maple nous a donné trois couples de champs (Y, Z) que l'on va examiner.

3.3.1. Le premier cas est le suivant :

$$Y = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 0&b&c&\delta&e\\ 0&0&b&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&f&0&0\\ 0&0&i&0&0 \end{pmatrix}.$$

Les champs $Z_{|z_2=0}$ et $Y_{|z_2=0}$ sont colinéaires donc le feuilletage $\mathscr{F}$ ne peut être un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3. En fait, il conduit à un $\mathscr{L}$-feuilletage quadratique.

3.3.2. Le second proposé est celui où :

$$Y = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 0&0&0&\delta&e\\ 0&0&0&i&j\\ 0&0&0&\ell&m\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Si $(\ell, m) = (0,0)$, le feuilletage $\mathscr{F}$ est un pull-back donc n'est pas de degré 3.

On remarque que la matrice Z est conjuguée à :

$$Z_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0&0&0&\delta+\varepsilon i&\varepsilon(j-\delta-\varepsilon i)+e\\ 0&0&0&i+\varepsilon\ell&\varepsilon(m-\varepsilon\ell-i)+j\\ 0&0&0&\ell&m-\varepsilon\ell\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

En particulier si ℓ est non nul, on peut, en posant $\varepsilon = \frac{m}{\ell}$, se ramener à $m = 0$.

Si $\ell = 0$, alors le produit mi est non nul (sinon le degré de $\mathscr{F}$ n'est pas 3). On a :

$$Z_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0&0&0&\delta+\varepsilon i&\varepsilon(j-\delta-\varepsilon i)+e\\ 0&0&0&i&\varepsilon(m-i)+j\\ 0&0&0&0&m\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on peut supposer que : $\ell = 0$ et $m \neq 0$ ou : $\ell \neq 0$ et $m = 0$. Mais quitte à permuter z_3 et z_4, puis z_0 et z_1, on vérifie qu'il suffit d'étudier le cas $\ell \neq 0$ et $m = 0$.

Une fois Y et Z fixés :

$$Z = (\delta z_3 + e z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (i z_3 + j z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2},$$

Maple donne pour X :

$$X = (\xi z_0 - 2\mu e z_1 + (2\mu(\delta - j)^2 + 2\zeta e + 4i\mu e + (\xi - \varsigma)(\delta - j))z_2 + \rho z_3 + \beta z_4)\frac{\partial}{\partial z_0}$$
$$+ (\zeta z_0 + \varsigma z_1 + (2i(\xi - \varsigma) + (\zeta - 2i\mu)(j - \delta))z_2 + \tau z_3 + \varepsilon z_4)\frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$+ (-\mu z_0 + (2\xi + 3\mu(\delta - j) - \varsigma)z_2 + \vartheta z_3 + \nu z_4)\frac{\partial}{\partial z_2}$$
$$+ ((\xi + \lambda + \mu\delta)z_3 - \mu e z_4)\frac{\partial}{\partial z_3} + ((\zeta + i\mu)z_3 + (\varsigma + \lambda + \mu j)z_4)\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Nous présentons le calcul de l'intégrale première, la procédure d'intégration étant sensiblement différente de celles déjà rencontrées.

Quitte à soustraire $((\xi+\lambda+\mu\delta)z_3 - \mu e z_4)R$ à X, le champ X n'a pas de composante en $\frac{\partial}{\partial z_3}$. Ainsi les trois champs engendrent le feuilletage restreint à la carte affine $z_3 = 1$; dans cette carte affine, les champs Y et Z s'écrivent :

$$\widetilde{Y} = Y_{|z_3=1} = \frac{\partial}{\partial z_0} + z_4\frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$\widetilde{Z} = Z_{|z_3=1} = (\delta + e z_4)\frac{\partial}{\partial z_0} + (i + j z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

On définit, comme d'habitude, en redressant les champs $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$ par un automorphisme polynomial, le difféomorphisme :

$$H(z_0, z_1, z_2, z_4) = (z_0 + (\delta + e z_4)z_2, z_1 + (i + j z_4)z_2 + z_0 z_4, z_2, z_4).$$

Par construction H conjugue $\frac{\partial}{\partial z_0}$ à $\widetilde{Y}$ et $\frac{\partial}{\partial z_2}$ à $\widetilde{Z}$. On note $\widetilde{\mathscr{F}}$ le feuilletage associé à l'algèbre engendrée par les champs $\widetilde{X} = X_{|z_3=1}$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Z}$ et $R_{|z_3=1}$. On constate que le champ $\widetilde{X}_{|z_0=z_2=0}$, quitte à le modifier avec des combinaisons ici polynomiales de R, Y et Z, s'écrit :

$$((\varsigma - \xi - \lambda - \mu\delta)z_1 + 3\mu e z_1 z_4 + (\varepsilon - i\nu - \rho - \vartheta(j - \delta))z_4$$
$$+(\vartheta e + (\delta - j)\nu - \beta)z_4^2 + e\nu z_4^3 + \tau - i\vartheta\Big)\frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$+ \Big((\zeta + \mu i) + (\varsigma - \xi + \mu(j - \delta))z_4 + \mu e z_4^2\Big)\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Il est tangent à $\widetilde{\mathscr{F}}$ et au 2-plan $z_0 = z_2 = 0$; donc il décrit $\widetilde{\mathscr{F}}$ en restriction à ce 2-plan. Ce feuilletage est aussi défini par :

$$\omega = \big(\kappa_0 + \kappa_1 z_4 + \kappa_2 z_4^2\big)\,dz_1 + \big(\kappa_3 z_1 - 3\kappa_2 z_1 z_4 + \kappa_5 z_4 + \kappa_6 z_4^2 + \kappa_7 z_4^3 + \kappa_8\big)\,dz_4$$

avec : $\kappa_0 = \zeta + \mu i, \kappa_1 = \varsigma - \xi + \mu(j - \delta)$ $\quad$ $\kappa_2 = \mu e, \kappa_3 = -\varsigma + \xi + \lambda + \mu\delta,$
$\kappa_5 = -\varepsilon + i\nu + \rho + \vartheta(j - \delta),$ $\quad$ $\kappa_6 = (j - \delta)\nu - \vartheta e + \beta,$
$\kappa_7 = -e\nu$ et $\kappa_8 = i\vartheta - \tau.$

On regarde la forme ω comme une équation différentielle linéaire avec second membre dont on cherche une solution particulière du type :

$$z_1 = a_0 + a_1 z_4 + a_2 z_4^2 + a_3 z_4^3.$$

En développant on obtient :

$$\begin{aligned}(\kappa_0 a_1 + \kappa_3 a_0 + \kappa_8) + (2\kappa_0 a_2 + (\kappa_1 + \kappa_3)a_1 - 3\kappa_2 a_0 + \kappa_5)\, z_4 \\ + (3\kappa_0 a_3 + (2\kappa_1 + \kappa_3)a_2 - 2\kappa_2 a_1 + \kappa_6)\, z_4^2 + ((3\kappa_1 + \kappa_3)a_3 - \kappa_2 a_2 + \kappa_7)\, z_4^3 = 0.\end{aligned}$$

Soit

$$f = 11\kappa_1^2\kappa_3^2 + 6\kappa_1\kappa_3^3 + \kappa_3^4 + 8\kappa_0\kappa_2\kappa_3^2 + 6\kappa_1^3\kappa_3 + 24\kappa_0\kappa_1\kappa_2\kappa_3 + 18\kappa_0\kappa_1^2\kappa_2 + 9\kappa_0^2\kappa_2^2.$$

La résolution de cette équation conduit à :

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{f}\big(3\kappa_0^3\kappa_7 + 3\kappa_0^2\kappa_2\kappa_5 - 9\kappa_0\kappa_1\kappa_2\kappa_8 + 5\kappa_0\kappa_1\kappa_3\kappa_5 - 6\kappa_1^3\kappa_8 - 5\kappa_0\kappa_2\kappa_3\kappa_8 \\ &\qquad - \kappa_0^2\kappa_3\kappa_6 + 6\kappa_0\kappa_1^2\kappa_5 - 3\kappa_0^2\kappa_1\kappa_6 - 11\kappa_1^2\kappa_3\kappa_8 - 6\kappa_1\kappa_3^2\kappa_8 + \kappa_0\kappa_3^2\kappa_5 - \kappa_3^3\kappa_8\big), \\ a_1 &= -\frac{1}{f}\big(3\kappa_2\kappa_3^2\kappa_8 + 3\kappa_0\kappa_2\kappa_3\kappa_5 + 6\kappa_1^2\kappa_3\kappa_5 + 15\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_8 + 5\kappa_1\kappa_3^2\kappa_5 \\ &\qquad - \kappa_0\kappa_3^2\kappa_6 - 3\kappa_0\kappa_1\kappa_3\kappa_6 + \kappa_3^3\kappa_5 + 3\kappa_0^2\kappa_3\kappa_7 + 18\kappa_1^2\kappa_2\kappa_8 + 9\kappa_0\kappa_2^2\kappa_8\big), \\ a_2 &= -\frac{1}{f}\big(6\kappa_2^2\kappa_3\kappa_8 + 18\kappa_1\kappa_2^2\kappa_8 + 3\kappa_0\kappa_2\kappa_3\kappa_6 + 9\kappa_0\kappa_1\kappa_2\kappa_6 + 2\kappa_2\kappa_3^2\kappa_5 + \kappa_3^3\kappa_6 \\ &\qquad - 3\kappa_0\kappa_3^2\kappa_7 + 4\kappa_1\kappa_3^2\kappa_6 + 3\kappa_1^2\kappa_3\kappa_6 - 3\kappa_0\kappa_1\kappa_3\kappa_7 + 6\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_5 - 9\kappa_0^2\kappa_2\kappa_7\big), \\ a_3 &= -\frac{1}{f}\big(2\kappa_1^2\kappa_3\kappa_7 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_6 + 6\kappa_0\kappa_1\kappa_2\kappa_7 + 3\kappa_1\kappa_3^2\kappa_7 + 3\kappa_0\kappa_2^2\kappa_6 \\ &\qquad + \kappa_2\kappa_3^2\kappa_6 + \kappa_3^3\kappa_7 + 5\kappa_0\kappa_2\kappa_3\kappa_7 + 6\kappa_2^3\kappa_8 + 2\kappa_2^2\kappa_3\kappa_5\big)\end{aligned}$$

Notons $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ et posons $z_1 = Z_1 + p(z_4)$; la forme ω s'écrit alors :

$$\omega = \big(\kappa_0 + \kappa_1 z_4 + \kappa_2 z_4^2\big)\, dZ_1 + Z_1\,(\kappa_3 - 3\kappa_2 z_4)\, dz_4,$$

soit encore à multiplication près :

$$\frac{dZ_1}{Z_1} + \frac{\kappa_3 - 3\kappa_2 z_4}{\kappa_0 + \kappa_1 z_4 + \kappa_4 z_2^2} dz_4.$$

Cette dernière s'intègre explicitement par décomposition en éléments simples ; notons que $q = \kappa_0 + \kappa_1 z_4 + \kappa_4 z_2^2 \not\equiv 0$. Il y a plusieurs cas suivant que le polynôme q a ses racines distinctes ou non.

Commençons par considérer le cas où q a deux racines distinctes :

$$\gamma^{\pm} = \frac{-\kappa_1 \pm \sqrt{\kappa_1^2 - 4\kappa_0\kappa_2}}{2\kappa_4}.$$

Posons

$$c = \frac{\kappa_2(\kappa_3 - 3\kappa_2\gamma^+)}{\sqrt{\kappa_1^2 - 4\kappa_0\kappa_2}} \quad \text{et} \quad b = -3\kappa_2 - c.$$

Le feuilletage est alors décrit par la 1-forme :

$$\frac{dZ_1}{Z_1}+\frac{1}{\kappa_2}\left(\frac{b}{z_4-\gamma^-}+\frac{c}{z_4-\gamma^+}\right)dz_4.$$

On en déduit l'intégrale première :

$$\frac{P\left(z_4-\gamma^- z_3\right)^b\left(z_4-\gamma^+ z_3\right)^c}{z_3^{3+b+c}}$$

où P s'écrit :

$$P=(z_1-iz_2-a_1z_4)z_3^2+((\delta-j)z_2-z_0)z_3z_4+(ez_2-a_2z_3)z_4^2-a_0z_3^3-a_3z_4^3.$$

À conjugaison près on obtient :

$$\frac{\left(z_1z_3^2+z_0z_3z_4+ez_2z_4^2-az_4^3\right)\left(z_4-\varrho^- z_3\right)^b\left(z_4-\varrho^+ z_3\right)^c}{z_3^{3+b+c}}$$

avec a, $e\in\{0,1\}$; ϱ^+ et ϱ^- se calculent en fonction des différents paramètres.

Finalement considérons le cas où le polynôme q a une racine double $\gamma=-\kappa_1/2\kappa_2$. Le feuilletage est alors décrit par la 1-forme :

$$\frac{dZ_1}{Z_1}+\eta\frac{dz_4}{(z_4-\gamma)^2}-3\frac{dz_4}{z_4-\gamma}$$

avec :

$$\eta=\frac{\kappa_3-3\kappa_2\gamma}{\kappa_2}.$$

On obtient comme intégrale première :

$$\frac{P}{\left(z_4-\gamma z_3\right)^3}\exp\left(\frac{\eta z_4}{\gamma z_3-z_4}\right)$$

soit encore à conjugaison près :

$$\frac{z_1z_3^2+z_0z_3z_4+ez_2z_4^2-az_4^3}{\left(z_4-z_3\right)^3}\exp\left(\frac{\upsilon z_4}{z_3-z_4}\right)$$

avec a, $e\in\{0,1\}$.

3.3.3. Pour finir traitons le cas où :

$$Y=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad Z=\begin{pmatrix}a&b&c&\delta&e\\f&-a&h&i&j\\0&0&0&\ell&m\\0&0&0&a&b\\0&0&0&f&-a\end{pmatrix}$$

avec : $\begin{cases}a\ell=-fm\\ \delta m\ell=-m^2i+mj\ell+e\ell^2\\ c\ell=-hm\\ b\ell^2=-fm^2.\end{cases}$

Suivant les valeurs des paramètres, Maple propose deux types de solutions X et Z.

a. Le premier est celui où :

$$X = \left(-3\varepsilon z_0 + \tau z_1 + \beta z_2 + \frac{(\delta\tau - \beta m)\ell^2 + 2m\varepsilon(\delta\ell + mi - \ell j)}{b\ell^2} z_3 + \xi z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_0}$$
$$+ \left(-2\varepsilon z_1 + \frac{2\tau i + \beta\ell - \varepsilon\delta}{2b} z_3\right)\frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$+ \left(-2\varepsilon z_2 + \frac{\ell\tau + m\varepsilon}{b} z_3 + \varrho z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_2} + (-\varepsilon z_3 + \tau z_4)\frac{\partial}{\partial z_3}$$

et $$Z = \left(b z_1 + \delta z_3 + \frac{m(\delta\ell - mi - \ell j)}{\ell^2} z_4\right)\frac{\partial}{\partial z_0} + i z_3 \frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$+ (\ell z_3 + m z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + b z_4 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

On vérifie que :

$$M = \begin{pmatrix} 2\varepsilon & 0 \\ \frac{1}{2}(\varepsilon\delta - \beta\ell) & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont 2ε et ε donc $\widetilde{\alpha} = \widetilde{2}$; on remarque que $\varepsilon \neq 0$.

Notons

$$\kappa = -\frac{\varrho}{2\varepsilon} + \frac{\tau m}{2\varepsilon b}, \quad \varsigma = \frac{m\varepsilon(\delta\ell - mi - j\ell) - m\ell^2\beta}{\ell^2 b}$$
$$\nu = -\frac{1}{3\varepsilon}\Big(\frac{\beta\varrho}{2\varepsilon} - \frac{\tau\beta m}{2b\varepsilon} + \xi - \frac{\tau m(\delta\ell - mi - \ell j)}{b\ell^2}\Big),$$
$$P = z_2 z_4 - \frac{m}{b} z_3 z_4 - \frac{\ell}{2b} z_3^2 + \kappa z_4^2$$

et $$Q = \beta z_2 z_4^2 - \varepsilon z_0 z_4^2 + \varepsilon z_1 z_3 z_4 + \varsigma z_3 z_4^2 + \Big(\frac{\delta\varepsilon - \ell\beta}{2b}\Big) z_3^2 z_4 - \frac{i\varepsilon}{3b} z_3^3 + (\beta\kappa - \varepsilon\nu) z_4^3.$$

Le feuilletage associé admet pour intégrale première :

$$\frac{P^3}{Q^2}$$

soit à conjugaison près :

$$\frac{\big(z_2 z_4 - \zeta z_3^2\big)^3}{\big(z_0 z_4^2 + z_1 z_3 z_4 - \upsilon z_3^3\big)^2}$$

avec υ, $\zeta \in \{0, 1\}$.

b. Le second est celui où :

$$X = \Big(-4\varepsilon z_0 + \xi z_1 + \upsilon z_2 + \frac{\delta\xi\ell - hm\varrho + 3\varepsilon m(\delta - j) - \upsilon m\ell}{b\ell} z_3 + \gamma z_4\Big)\frac{\partial}{\partial z_0}$$
$$+ \Big(-3\varepsilon z_1 + \frac{h(\ell\xi + m\varepsilon)}{b\ell} z_2 + \frac{\upsilon\ell + h\varrho - 2\varepsilon\delta}{2b} z_3\Big)\frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$+ \Big(-2\varepsilon z_2 + \frac{\ell\xi + m\varepsilon}{b} z_3 + \varrho z_4\Big)\frac{\partial}{\partial z_2} + (-\varepsilon z_3 + \xi z_4)\frac{\partial}{\partial z_3}$$

$$Z = \Big(b z_1 - \frac{hm}{\ell} z_2 + \delta z_3 + \frac{m(\delta - j)}{\ell} z_4\Big)\frac{\partial}{\partial z_0} + h z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (\ell z_3 + m z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + b z_4 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Ici :
$$M = \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 0 \\ \frac{(b\ell(h\varrho - \upsilon\ell)) + 2b\ell\varepsilon\delta - 2hm(\varepsilon m + \ell\xi)}{2b\ell} & \varepsilon \end{pmatrix}$$

On note que $\widetilde{\alpha} = \widetilde{3}$, que $\varepsilon \neq 0$ et que $b\ell \neq 0$ (sinon $\widetilde{\alpha} = \widetilde{0}$).
Posons :

$$\eta = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\xi m}{b} - \varrho\right), \qquad \kappa = \upsilon + \frac{\xi h m}{b\ell},$$
$$\tau = m^2 h + b\ell\delta, \qquad \rho = \frac{1}{2b\ell}, \qquad \vartheta = \frac{mh}{2b^2},$$
$$\zeta = 2m\rho(\delta - j), \qquad P = \rho(2mz_4 + \ell z_3)z_3,$$
$$\nu = \frac{1}{4\varepsilon}(\eta\kappa - \gamma + \xi\zeta), \qquad \varsigma = \frac{\ell\varepsilon h}{2b}$$

et
$$Q = \zeta z_3 z_4^3 - z_0 z_4^3 + z_1 z_3 z_4^2 + 2\tau\rho^2\ell z_3^2 z_4^2 + \vartheta z_3^3 z_4 + \frac{h\ell}{8b^2} z_3^4 - \nu z_4^4.$$

Le feuilletage associé à cette algèbre admet pour intégrale première :
$$\frac{\left(z_2 z_4 - \ell P + \eta z_4^2\right)^2}{2\varepsilon(Q - hz_2 z_4 P) + \kappa z_4^2\left(z_2 z_4 - \ell P + \eta z_4^2\right)}.$$

Ce qui donne à conjugaison près à :
$$\frac{\left(z_2 z_4 + z_3^2\right)^2}{z_0 z_4^3 + z_1 z_3 z_4^2}.$$

Cette étude nous conduit donc au :

Théorème 6.4 (Maple). — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. Si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ admet pour présentation $\{[X,Y] = Y, [X,Z] = \alpha Z, [Y,Z] = 0\}$, $\alpha \neq 0$, alors le feuilletage $\mathscr{F}$ possède un intégrale première de l'un des types :*

$$\frac{\left(z_2 z_4 - a z_3^2\right)^3}{\left(z_0 z_4^2 + z_1 z_3 z_4 - e z_3^3\right)^2}, \qquad \frac{\left(z_1 z_4^2 - z_2 z_3 z_4 + \frac{z_3^3}{3}\right)^4}{\left(z_0 z_4^3 - (2z_1 z_3 + z_2^2) z_4^2 + 2z_2 z_3^2 z_4 - \frac{z_3^4}{2}\right)^3},$$
$$\frac{z_4(z_0 z_4^2 + z_1 z_3 z_4 + z_2^2 z_4 + a z_3^3)}{z_3^4}, \qquad \frac{z_4^{3\kappa-\lambda} z_3^{\lambda}}{\left(z_1 z_4^2 + z_2 z_3 z_4 + z_2^2 z_3 + z_0^2 z_4\right)^{\kappa}},$$
$$\left(\frac{z_3}{z_4}\right)^{\kappa} \exp\left(\frac{z_1 z_4^2 + z_0 z_3 z_4 + z_2^2 z_3}{z_4^3}\right), \qquad \frac{z_3^{\kappa+\lambda} z_4^{2\lambda-\kappa}}{\left(z_1 z_4^2 + z_0 z_3 z_4 + z_2^2 z_3\right)^{\lambda}},$$
$$\left(\frac{z_3}{z_4}\right)^{\kappa} \exp\left(\frac{z_1 z_4^2 + z_0 z_3 z_4 + z_2^2 z_3}{z_3^2 z_4}\right), \qquad \frac{z_4^{\kappa}\left(z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3\right)^{\lambda-\kappa}}{z_3^{3\lambda-2\kappa}},$$
$$\left(\frac{z_4}{z_3}\right)^{\kappa} \exp\left(\frac{z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3}{z_3^2 z_4}\right), \qquad \frac{z_0 z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3}{z_3^3} \exp\left(\frac{z_4}{z_3}\right),$$

$$\frac{z_1 z_3^2 + z_0 z_3 z_4 + e z_2 z_4^2 - a z_4^3}{\big(z_4 - z_3\big)^3} \exp\Big(\frac{\upsilon z_4}{z_3 - z_4}\Big), \qquad \frac{\big(z_2 z_4 + z_3^2\big)^2}{z_0 z_4^3 + z_1 z_3 z_4^2},$$

$$\frac{\Big(z_1 z_3^2 + z_0 z_3 z_4 + e z_2 z_4^2 - a z_4^3\Big)\Big(z_4 - \varrho^- z_3\Big)^{\kappa}\big(z_4 - \varrho^+ z_3\big)^{\lambda}}{z_3^{3+\kappa+\lambda}},$$

$$\frac{\big(z_0 z_4 + (\gamma^+ c - d) z_3^2 - \frac{z_2^2}{2} + \gamma^+ z_2 z_3\big)^{\vartheta_+}\big(z_1 z_4 + (\gamma^- c - d) z_3^2 - \frac{z_2^2}{2} + \gamma^- z_2 z_3\big)^{\vartheta_-}}{z_4^2},$$

$$\frac{z_1 z_4 + c z_2 z_3 - \frac{z_2^2}{2} + \upsilon z_3^2}{z_4^2} \exp\Big(\zeta \frac{z_0 z_4 - 2g\delta z_3^2 - \frac{z_2^2}{2}}{z_1 z_4 + c z_2 z_3 - \frac{z_2^2}{2} + \upsilon z_3^2}\Big),$$

$z_3^{\lambda_3} z_4^{\lambda_4} Q^{\lambda_2}$, *où Q est une certaine cubique, et ses dégénérescences (cf. 3.2.5).*

Les éléments a et e appartiennent à $\{0,1\}$; les autres paramètres sont des nombres complexes.

On aura noté en cours de preuve que, dans certaines séries de cas, l'invariant $\widetilde{\alpha}$ prend des valeurs continues alors que dans d'autres il prend les valeurs $\widetilde{2}$, $\widetilde{3}$ et $\widetilde{\frac{3}{2}}$.

6.4. Cas $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ isomorphe à $\mathscr{L}_{0,1}$

L'algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ a pour présentation $\{[X,Y] = [X,Z] = 0, [Y,Z] = Y\}$.

La résolubilité de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et l'égalité $[Y,Z] = Y$ assurent que Y est nilpotent. Les matrices X et Y commutent d'où l'existence d'une base dans laquelle on peut jordaniser les champs X et Y ; on obtient modulo R les configurations suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} \nu_0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \nu_0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \nu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \vartheta & \phi \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \eta & \vartheta & \phi & \nu \\ 0 & 0 & \eta & \vartheta & \phi \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \beta & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda & \beta & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors Z tel que $[X, Z] = 0$ et $[Y, Z] = Y$; on obtient sept configurations que l'on traite au cas par cas. Certaines configurations s'avèrent redondantes ; comme cela ne se constate qu'à posteriori nous les avons laissées.

6.4.1. D'après Maple, les champs X, Y et Z s'écrivent :

$$X = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \quad Y = \varepsilon z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{avec } \varepsilon \neq 0$$

et
$$Z = (\xi z_0 + \alpha z_1)\frac{\partial}{\partial z_0} + (\xi - 1)z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \beta z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + ((\beta+1)z_2 + \gamma z_3 + \delta z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + (\upsilon z_3 + \kappa z_4)\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Le feuilletage $\mathscr{F}$ associé est décrit dans la carte affine $z_3 = 1$ par la 1-forme ω donnée par :

$$\omega = ((\beta - \kappa)z_4 - \upsilon)(z_1 dz_0 - z_0 dz_1) + \varepsilon(\upsilon + (\kappa - \beta)z_4)z_1^2 dz_2 + (z_0 + (\alpha - \varepsilon\gamma)z_1 - \varepsilon z_1 z_2 - \varepsilon\delta z_1 z_4)z_1 dz_4.$$

Supposons que $\lambda = \kappa - \beta \neq 0$; on peut résorber le terme υ et, comme ε est non nul, on se ramène, par une homothétie, à :

$$\omega = \lambda(z_0 dz_1 - z_1 dz_0)z_4 + \lambda z_1^2 z_4 dz_2 + (z_0 + \mu z_1 - z_1 z_2 - \delta z_1 z_4)dz_4.$$

On procède ici par éclatement. Posons $z_0 = tz_1$, $\mu = \alpha - \gamma - \frac{\delta\upsilon}{\lambda}$ puis $T = t - z_2 + \mu$; on obtient :

$$\omega = z_1^2\left((T - \delta z_4)dz_4 - \lambda z_4 dT\right)$$

qui a pour facteur intégrant :

$$z_1^2 z_4\left((1-\lambda)T - \delta z_4\right).$$

Le feuilletage admet pour intégrale première :

$$\frac{z_1^\lambda z_3^{\lambda-1} z_4}{((1-\lambda)(z_0z_3 - z_1z_2 + \mu z_1 z_3) - \delta z_1 z_4)^\lambda} \qquad \text{si } \lambda \neq 1,$$

et :
$$\frac{z_4}{z_3}\exp\left(\frac{z_0z_3 - z_1z_2 + \mu z_1z_3}{z_1z_4}\right) \qquad \text{sinon.}$$

Ce qui donne à conjugaison près :

$$\frac{z_1^{\lambda} z_3^{\lambda-1} z_4}{(z_0 z_3 + z_1 z_2)^{\lambda}} \qquad \text{si } \lambda \neq 1$$

et :

$$\frac{z_4}{z_3} \exp\left(\frac{z_0 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_4}\right) \qquad \text{sinon.}$$

Supposons que $\lambda = 0$; on remarque que si $\upsilon = 0$, le degré du feuilletage diminue. La 1-forme ω s'écrit alors :

$$\omega = -\upsilon(z_1 dz_0 - z_0 dz_1) + \varepsilon \upsilon z_1^2 dz_2 + (z_0 + (\alpha - \varepsilon\gamma) z_1 - \varepsilon z_1 z_2 - \varepsilon\delta z_1 z_4)\, z_1 dz_4.$$

Si $\delta \neq 0$, posons $z_0 = t z_1$, $T = -t + \varepsilon z_2$ et $Z_4 = z_4 - \frac{\alpha - \varepsilon\gamma}{\varepsilon\delta}$; quitte à diviser par z_1^2, on a :

$$\omega = \upsilon dT - (T + \varepsilon\delta Z_4) dZ_4$$

qui conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dZ_4} = \frac{T + \varepsilon\delta Z_4}{\upsilon}.$$

Ainsi $T = C \exp z_4 - \varepsilon\delta(Z_4 + \upsilon)$. On en déduit que :

$$C = (T + \varepsilon\delta(Z_4 + \upsilon)) \exp(-z_4)$$

est une intégrale première du feuilletage. Notons :

$$\nu = \frac{\alpha - \varepsilon\gamma}{\varepsilon\delta}.$$

En revenant aux conditions initiales, on obtient l'intégrale première :

$$\left(\frac{\varepsilon z_1 z_2 - z_0 z_3 + \varepsilon\delta z_1 z_4 - \varepsilon\delta(\upsilon - \nu) z_1 z_3}{z_1 z_3}\right) \exp\left(\frac{-z_4 + \nu z_3}{z_3}\right);$$

soit à conjugaison près :

$$\frac{z_1 z_2 + z_0 z_3}{z_1 z_3} \exp\left(\frac{z_4}{z_3}\right).$$

Pour $\delta = 0$, on trouve l'intégrale première :

$$\frac{z_0 z_3 - \varepsilon z_1 z_2 - (\alpha - \varepsilon\gamma) z_1 z_3}{z_1 z_3} \exp\left(-\frac{z_4}{\upsilon z_3}\right)$$

qui après conjugaison donne encore :

$$\frac{z_0 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_3} \exp\left(\frac{z_4}{z_3}\right).$$

6.4.2. Le deuxième cas donné par Maple est le suivant :

$$X = (z_0 + \beta z_1)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Y = (z_3 + (\xi - \zeta)z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}$$

et
$$Z = \upsilon z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + (z_2 + \zeta z_3 + \varsigma z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + \zeta z_4\frac{\partial}{\partial z_3} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Posons :

$$Z_2 = \frac{2z_2 - z_3^2 + 2(\zeta - \xi)z_3 + \xi\zeta + \varsigma - \xi^2}{2}.$$

La 1-forme :

$$\frac{z_1 dz_0 - (z_0 + \beta z_1)dz_1}{z_1^2} - \frac{\upsilon}{2}\frac{dZ_2}{Z_2}$$

annule les champs X, Y, Z et R ; ce qui conduit à l'intégrale première :

$$\frac{z_1^{2\beta}\left(z_2z_4 - \frac{z_3^2}{2} + (\zeta - \xi)z_3z_4 + (\zeta(\zeta - \xi) + \varsigma)z_4^2\right)^{\upsilon}}{z_4^{2(\beta+\upsilon)}}\exp\left(\frac{2z_0}{z_1}\right)$$

qui, après conjugaison, est du type :

$$\frac{z_1^{2\beta}\left(z_2z_4 - \frac{z_3^2}{2}\right)^{\upsilon}}{z_4^{2(\beta+\upsilon)}}\exp\left(\frac{z_0}{z_1}\right).$$

6.4.3. Le troisième comporte deux éventualités ; celle où :

$$X = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Y = (z_3 - \xi z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}$$

et
$$Z = (\zeta z_0 + \upsilon z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (2z_2 + \xi z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}$$

et celle où :

$$X = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Y = (z_3 - \xi z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}$$

et
$$Z = (\zeta z_0 + z_1)\frac{\partial}{\partial z_0} + \zeta z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + (2z_2 + \xi z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}.$$

La seconde est une dégénérescence de la première.

Dans le premier cas, après étude dans la carte affine $z_4 = 1$, on trouve l'intégrale première :

$$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^{2/(\upsilon-\zeta)}\left(\frac{z_2z_4 - \frac{z_3^2}{2} + \xi z_3z_4}{z_4^2}\right)$$

qui est conjuguée à :

$$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^{2/(\upsilon-\zeta)}\left(\frac{z_2z_4 - z_3^2}{z_4^2}\right).$$

Dans le second cas on obtient :

$$\frac{z_2z_4 - \frac{z_3^2}{2} + \xi z_3z_4}{z_4^2}\exp\left(-\frac{2z_0}{z_1}\right)$$

qui se ramène après conjugaison à :

$$\frac{z_2z_4 - z_3^2}{z_4^2}\exp\left(\frac{z_0}{z_1}\right).$$

C'est un cas particulier du 4.2 ($\beta = 0$, $\upsilon = 1$).

6.4.4. Les champs X, Y et Z s'écrivent dans le quatrième cas :

$$X = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Y = z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}$$

et

$$Z = -z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2 + \xi z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + (\zeta z_3 + \upsilon z_4)\frac{\partial}{\partial z_3}.$$

La 1-forme ω annulant ces champs s'écrit dans la carte affine $z_4 = 1$:

$$\omega = (\zeta z_3 + \upsilon)(z_1dz_0 - z_0dz_1 - z_1^2dz_2) - z_1(z_0 - z_1(z_2 + \xi z_3z_1))dz_3,$$

autrement dit est colinéaire à :

$$d\left(\frac{z_0}{z_1} - z_2\right) - \left(\frac{z_0}{z_1} - z_2 - \xi z_3\right)\frac{dz_3}{\zeta z_3 + \upsilon}.$$

Posons $u = \frac{z_0}{z_1} - z_2$; alors à multiplication près ω est du type :

$$(\zeta z_3 + \upsilon)du + (u - \xi z_3)dz_3.$$

Si ζ est non nul, on note :

$$\kappa = \frac{\upsilon}{\zeta}, \quad Z_3 = z_3 + \kappa \quad \text{et} \quad U = u - \xi\kappa.$$

Alors le feuilletage $\mathscr{F}$ est décrit par :

$$\zeta Z_3dU + (U - \xi Z_3)dZ_3;$$

il admet pour intégrale première :

$$Z_3(\zeta + 1)U - \xi Z_3)^\zeta \qquad \text{si } \zeta \neq -1$$

et :

$$Z_3^\xi\exp\left(\frac{U}{Z_3}\right) \qquad \text{sinon.}$$

Si ζ est différent de 1, on obtient dans les coordonnées initiales l'intégrale première :

$$\frac{(z_3 + \kappa z_4)\big((\zeta+1)(z_0z_4 - z_1z_2 + \xi\kappa z_1z_4) - \xi(z_3z_4 + \kappa z_4^2)\big)^\zeta}{z_1^\zeta z_4^{1+\zeta}};$$

elle est conjuguée à :

$$\frac{z_3(z_0z_4 - z_1z_2)^\zeta}{z_1^\zeta z_4^{1+\zeta}}.$$

Lorsque $\zeta = 1$, on obtient :

$$\left(\frac{z_3 + \kappa z_4}{z_4}\right)\exp\left(\frac{z_0z_4 - z_1z_2 - \xi\kappa z_1z_4}{z_1(z_3 + \kappa z_4)}\right)$$

que l'on conjugue à :

$$\left(\frac{z_3}{z_4}\right)\exp\left(\frac{z_0z_4 - z_1z_2}{z_1z_3}\right).$$

On remarque que cette dernière intégrale première se ramène à celle obtenue en 4.1 pour $\lambda = 1$.

Lorsque ζ est nul, la 1-forme ω s'écrit :

$$\omega = \upsilon du + (u - \xi z_3)dz_3$$

et a pour intégrale première :

$$(u - \xi z_3 + \xi\upsilon)\exp\left(\frac{z_3}{\upsilon}\right).$$

En revenant aux conditions initiales, on obtient :

$$\frac{z_0z_4 - z_1z_2 - \xi z_1z_3 + \xi\upsilon z_1z_4}{z_1z_4}\exp\left(\frac{z_3}{\upsilon z_4}\right)$$

que l'on transforme en :

$$\frac{z_0z_4 - z_1z_2}{z_1z_4}\exp\left(\frac{z_3}{z_4}\right).$$

Cette intégrale première est encore conjuguée à celle obtenue en 4.1 pour $\lambda = 0$.

6.4.5. Grâce à Maple, on obtient pour le cinquième cas :

$$X = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Y = z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_3\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}$$

et

$$Z = \xi z_1\frac{\partial}{\partial z_0} - z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}.$$

La 1-forme qui annule ces champs s'écrit dans la carte affine $z_4 = 1$:

$$(2z_2 - z_3^2)(z_1dz_0 - z_0dz_1 - z_1^2dz_3) + z_1(z_0 - \xi z_1 - z_1z_3)(dz_2 - z_3dz_3)\ ;$$

soit à coefficient multiplicatif près :

$$2\frac{d\left(\frac{z_0}{z_1} - \xi - z_3\right)}{\frac{z_0}{z_1} - \xi - z_3} - \frac{d(2z_2 - z_3^2)}{2z_2 - z_3^2}.$$

On constate que :

$$\frac{(z_0z_4 - \xi z_1z_4 - z_1z_3)^2}{z_1^2\,(2z_2z_4 - z_3^2)}$$

est une intégrale première rationnelle du feuilletage associé, soit encore à conjugaison près :

$$\frac{(z_0z_4 - z_1z_3)^2}{z_1^2\,(z_2z_4 - z_3^2)}.$$

6.4.6. D'après Maple l'avant dernière possibilité est la suivante :

$$X = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + \nu z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Y = (z_3+\kappa z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3}$$

et $$Z = (\upsilon - \zeta - \nu(\xi-\zeta))z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + (2z_2 - \kappa z_3 + (\eta - \rho\kappa)z_4)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}.$$

La 1-forme annulant ces champs et R s'écrit dans la carte affine $z_4 = 1$:

$$(\beta - 2\kappa z_3 - z_3^2 + 2z_2)(\nu z_1 dz_0 - z_0 dz_1) + \gamma z_0 z_1 (dz_2 - \kappa - z_3)dz_3$$

où : $$\beta = \eta - \rho\kappa \quad \text{et} \quad \gamma = \upsilon + (\nu-1)\zeta - \nu\xi.$$

Cette 1-forme est à multiplication près :

$$\omega = \nu\frac{dz_0}{z_0} - \frac{dz_1}{z_1} + \frac{\gamma}{2}\frac{d(\beta + 2z_2 - 2\kappa z_3 - z_3^2)}{\beta + 2z_2 - 2\kappa z_3 - z_3^2}.$$

Le $\mathscr{L}$-feuilletage décrit par ω admet donc pour intégrale première :

$$\frac{z_0^{2\nu}(\beta z_4^2 + 2z_2z_4 - 2\kappa z_3 z_4 - z_3^2)^{\gamma}}{z_4^{2(\gamma+\nu-1)} z_1^2}$$

que l'on conjugue à :

$$\frac{z_0^{2\nu}(z_2z_4 - z_3^2)^{\gamma}}{z_4^{2(\gamma+\nu-1)} z_1^2}.$$

6.4.7. Enfin la dernière possibilité est celle où les champs X, Y et Z s'écrivent :

$$X = z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_4\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Y = (z_3+\varepsilon z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_4\frac{\partial}{\partial z_2}$$

et $$\begin{aligned} Z = ((\beta+\varepsilon)z_2 + (\xi-\beta)z_3 + (\lambda - \gamma + \delta - \varepsilon\beta)z_4)\frac{\partial}{\partial z_1} \\ + (z_2 + \eta z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + (-z_3 + \beta z_4)\frac{\partial}{\partial z_3}.\end{aligned}$$

La 1-forme annulant ces champs et R s'écrit dans la carte affine $z_4 = 1$:

$$\begin{aligned}(z_3 - \beta)(dz_0 - z_0dz_1 + z_0(\varepsilon + z_3))dz_2 \\ + \left(z_0(z_2(z_3-\beta) + z_3((z_3+\varepsilon)\eta - \xi + \beta) - \lambda + \varepsilon\beta + \gamma\delta)\right) dz_3.\end{aligned}$$

Elle admet comme intégrale première :

$$\frac{z_0(z_3 - \beta z_4)^{\zeta}}{z_4^{1+\zeta}} \exp\left(\frac{-z_1z_4 + \varepsilon z_2 z_4 + z_2z_3 + \frac{\eta}{2}z_3^2 + \upsilon z_3 z_4}{z_4^2}\right)$$

où : $$\zeta = ((\eta+1)(\beta+\varepsilon) - \xi)\beta - \beta + \gamma\delta \quad \text{et } \upsilon = ((\varepsilon+\beta)\eta - \xi + \beta);$$

à conjugaison près on a :

$$\frac{z_0(z_3 - z_4)^{\zeta}}{z_4^{1+\zeta}} \exp\left(\frac{z_1z_4 + z_2z_3}{z_4^2}\right).$$

L'examen de tous ces cas conduit au :

THÉORÈME 6.5 (Maple). — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré* 3 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$. *Si $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ est isomorphe à $\mathscr{L}_{0,1}$, alors le feuilletage $\mathscr{F}$ possède à conjugaison près l'une des intégrales premières suivantes :*

$$\frac{z_1^{\lambda} z_3^{\lambda-1} z_4}{(z_0 z_3 + z_1 z_2)^{\lambda}}, \quad \frac{z_4}{z_3} \exp\left(\frac{z_0 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_4}\right), \quad \frac{z_0 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_3} \exp\left(\frac{z_4}{z_3}\right),$$

$$\frac{z_1^{2\lambda}\left(z_2 z_4 - \frac{z_3^2}{2}\right)^{\kappa}}{z_4^{2(\lambda+\kappa)}} \exp\left(\frac{z_0}{z_1}\right), \quad \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^{\kappa} \frac{z_2 z_4 - z_3^2}{z_4^2}, \quad \frac{z_3 (z_0 z_4 - z_1 z_2)^{\kappa}}{z_1^{\kappa} z_4^{\kappa+1}},$$

$$\frac{(z_0 z_4 - z_1 z_3)^2}{z_1^2 (z_2 z_4 - z_3^2)}, \quad \frac{z_0^{2\kappa} (z_2 z_4 - z_3^2)^{\lambda}}{z_4^{2(\lambda+\kappa-1)} z_1^2}, \quad \frac{z_0 (z_3 - z_4)^{\kappa}}{z_4^{1+\kappa}} \exp\left(\frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_4^2}\right),$$

où κ et λ désignent des nombres complexes non nuls.

6.5. Cas $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ isomorphe à $\mathscr{L}_{0,2}$

La matrice $\mathscr{L}_{0,2}$ a pour présentation : $\{[X,Y] = [X,Z] = 0, [Y,Z] = X\}$.
On se propose de vérifier le :

THÉORÈME 6.6. — *Il n'existe pas de $\mathscr{L}$-feuilletage $\mathscr{F}$ de degré* 3 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ *tel que $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ soit isomorphe à $\mathscr{L}_{0,2}$.*

La démonstration se fait en deux étapes, chacune correspondant à l'un des lemmes qui suivent.

L'égalité $[Y,Z] = X$ implique que X est nilpotente ; par jordanisation X s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Notons :

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a le :

LEMME 6.7. — *Si X n'est pas conjugué à X_4, alors l'algèbre $\mathscr{L}_{0,1}$ n'est pas associée à un feuilletage de degré* 3 *sur* $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$.

Démonstration. — Si X est de rang 4, comme Y et Z commutent avec X, les matrices Y et Z sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \nu & \kappa & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \nu & \kappa & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \nu & \kappa & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \nu & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Mais alors $[Y, Z]$ est nul, ce qui est exclu.

Supposons que X soit de rang 3 ; alors X est du type :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Commençons par supposer que X est du type X_1 ; les champs Y et Z commutent à X donc s'écrivent quitte à soustraire un multiple de X :

$$\begin{pmatrix} \kappa & 0 & \beta & * & * \\ 0 & \kappa & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Mais alors $[Y, Z]$ est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} * & * \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

et ne peut donc pas être égal à X.

Finalement supposons que X soit du type X_2 ; les champs Y et Z commutent à X donc s'écrivent respectivement modulo X :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ 0 & 0 & \xi_4 & 0 & \xi_6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_4 & \kappa_5 & \kappa_6 & \kappa_7 \\ 0 & 0 & \kappa_4 & 0 & \kappa_6 \end{pmatrix}.$$

Alors la condition $[Y, Z] = X$ ne peut être satisfaite.

Si X est de rang 2, alors X est de la forme X_4 ou :

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si X est du type X_3 ; comme Y et Z commutent avec X, ils s'écrivent à combinaison linéaire permise près :

$$\begin{pmatrix} \kappa & 0 & * & * & * \\ 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Mais alors $[Y, Z]$ est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

et ne peut donc pas être égal à X.

Si X est de rang 1, alors le feuilletage associé n'est pas de degré 3. □

Reste donc à traiter le cas où $X = X_4$; les matrices X et Y commutent donc sont simultanément jordanisables. Il nous reste parmi les configurations rencontrées au paragraphe 4 la suivante :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} \nu_0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Lemme 6.8. — *Cette configuration ne génère pas un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$.*

Démonstration. — À combinaisons linéaires permises près Y et Z s'écrivent respectivement :

$$Y = \begin{pmatrix} \nu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \zeta_5 & \zeta_6 & \zeta_7 & \zeta_8 & \zeta_9 \\ \zeta_{10} & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta_{14} \\ \zeta_{15} & \zeta_{16} & \zeta_{17} & \zeta_{18} & \zeta_{19} \\ \zeta_{20} & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} & \zeta_{24} \end{pmatrix}.$$

L'égalité $[Y,Z]-X=0$ s'écrit alors :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \\ 0 & 0 & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & * \end{array}\right) = 0$$

ce qui est absurde. □

6.6. Cas $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ isomorphe à $\mathscr{L}_{1,1}$

L'algèbre $\mathscr{L}_{1,1}$ a pour présentation $\{[X,Y]=Y,[X,Z]=Y+Z,[Y,Z]=0\}$.

On a le :

Théorème 6.9. — *Il n'existe pas de $\mathscr{L}$-feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ associé à l'algèbre $\mathscr{L}_{1,1}$.*

La démonstration se fait en deux étapes, chacune correspondant à l'un des lemmes qui suivent.

La résolubilité de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et l'égalité $[X,Y]=Y$ impliquent que Y est nilpotente ; alors par jordanisation Y s'écrit :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Notons :

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

on a le :

Lemme 6.10. — *Si Y n'est pas conjugué à Y_4, alors l'algèbre $\mathscr{L}_{1,1}$ n'est pas associée à un feuilletage de degré 3 sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$.*

Démonstration. — Supposons que Y soit de rang 4. Comme Z commute à Y, la matrice Z est, quitte à soustraire Y, de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'égalité $[X,Y]=Y$ implique que :

$$X = \begin{pmatrix} \kappa' & \beta' & \gamma' & \delta' & \varepsilon' \\ 0 & \kappa'+1 & \beta' & \gamma' & \delta' \\ 0 & 0 & \kappa'+2 & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 & \kappa'+3 & \beta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa'+4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $[X,Z]-Z$ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

et ne peut dont pas être égal à Y.

Supposons que Y soit de rang 3, alors Y est du type :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si Y est du type Y_1 ; la commutation de Y et Z conduit à :

$$Z = \begin{pmatrix} \kappa & \beta & \gamma & * & * \\ 0 & \kappa & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

L'égalité $[X,Y]=Y$ implique que X s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} \kappa' & \beta' & \gamma' & * & * \\ 0 & \kappa'+1 & \beta' & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & \kappa'+2 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa'+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la condition $[X, Z] = Y + Z$ ne peut être satisfaite.

Si Y est du type Y_2, alors comme Z est nilpotent et commute à Y, on obtient :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_0 & \beta & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & \xi_2 & 0 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $[X, Y] = Y$ implique que X s'écrit modulo R :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b & c & \delta & e \\ 0 & 1 & b & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & a & h \\ 0 & 0 & f & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'égalité $[X, Z] - Z - Y = 0$ entraîne en particulier que :

$$\beta f - \kappa\delta - 1 = \kappa\delta - \beta f - 1 = 0$$

ce qui est absurde.

Supposons maintenant que Y soit de rang 2 ; alors Y est du type Y_4 ou de la forme :

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $Y = Y_3$, alors la commutation de Y et Z conduit à :

$$Z = \begin{pmatrix} \kappa & \beta & * & * & * \\ 0 & \kappa & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ensuite l'égalité $[X, Y] = Y$ implique que X est du type :

$$\begin{pmatrix} \kappa' & \beta' & * & * & * \\ 0 & \kappa'+1 & \beta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa'+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

En résulte que $[X, Z] - Z$ s'écrit :

$$[X, Z] - Z = \begin{pmatrix} -\kappa & 0 & * & * & * \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

et ne peut donc être égal à Y.

Si X est de rang 1, alors le feuilletage associé n'est pas de degré 3. □

Reste donc à traiter le cas où $Y = Y_4$; les matrices Y et Z commutent, d'où l'existence d'une base dans laquelle on peut jordaniser Y et Z. Par ailleurs la résolubilité de $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}$ et l'égalité $[X, Z] = Y + Z$ impliquent que Z est nilpotente ; donc parmi les configurations du paragraphe 4, il nous reste seulement la suivante :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 6.11. — *Cette configuration ne génère pas un $\mathscr{L}$-feuilletage de degré* 3.

Démonstration. — L'égalité $[X, Y] = Y$ implique que X s'écrit à combinaison linéaire permise près :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_4 & 0 \\ \zeta_5 & \zeta_6 & \zeta_7 & \zeta_8 & \zeta_9 \\ 0 & \zeta_{10} & 0 & \zeta_7 + 1 & 0 \\ 0 & \zeta_{11} & 0 & \zeta_{12} & \zeta_{13} \end{pmatrix}.$$

Mais alors on a :

$$[X, Z] - Y - Z = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & * \\ \hline * & * \end{array}\right) = 0$$

ce qui est exclu. □

Remarque 22. — Parmi les configurations listées dans les paragraphes 5 et 6 certaines produisent des feuilletages quadratiques. N'ayant pas la classification complète des $\mathscr{L}$-feuilletages sur $\mathbf{C}\mathbb{P}(4)$ nous ne les avons pas détaillés, ayant suffisamment submergé le lecteur de... calculs fastidieux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Cano – « Reduction of the singularities of codimension one foliations in dimension three », *Ann. of Math.* **160** (2004), no. 3, p. 907–1011.

[2] F. Cano & D. Cerveau – « Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices », *Acta Math.* **169** (1992), no. 1-2, p. 1–103.

[3] D. Cerveau & A. Lins Neto – « Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbf{C}\mathbb{P}(n)$, $n \geqslant 3$ », *Ann. of Math. (2)* **143** (1996), no. 3, p. 577–612.

[4] D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J.V. Pereira & F. Touzet – « Algebraic reduction theorem for complex codimension one singular foliations », *Comment. Math. Helv.*, à paraitre.

[5] D. Cerveau & J.-F. Mattei – *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque, vol. 97, Société Mathématique de France, Paris, 1982.

[6] I. Dolgachev – *Lectures on invariant theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 296, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[7] W. Fulton & J. Harris – *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] P. Griffiths & J. Harris – *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978.

[9] J. Harris – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1992.

[10] J.-P. Jouanolou – *Équations de Pfaff algébriques*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 708, Springer, Berlin, 1979.

[11] B. Malgrange – « Frobenius avec singularités. I. Codimension un », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **46** (1976), p. 163–173.

[12] J.V. Pereira & P.F. Sánchez – « Transformation groups of holomorphic foliations », *Comm. Anal. Geom.* **10** (2002), no. 5, p. 1115–1123.

[13] V.L. Popov & È.B. Vinberg – « Invariant theory », in *Algebraic geometry, 4*, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989, en russe, p. 137–314.

[14] K. Saito – « On a generalization of de-Rham lemma », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **26** (1976), no. 2, p. 165–170.

[15] J.-C. Tougeron – *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 71, Springer-Verlag, Berlin, 1972.