MÉMOIRES DE LA SMF 89

K-THÉORIE ET MULTIPLICITÉS DANS $L^2(G/\Gamma)$

François Pierrot

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

F. Pierrot
École Normale Supérieure, DMA, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris.
E-mail : `pierrot@dma.ens.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F72, 19K14, 19K35, 22D10, 43-99, 46L08.

***Mots clefs*.** — Traces densément définies, K-théorie, indice L^2, séries discrètes.

K-THÉORIE ET MULTIPLICITÉS DANS $L^2(G/\Gamma)$

François Pierrot

Résumé. — On démontre une version généralisée du théorème d'indice L^2 d'Atiyah concernant les opérateurs elliptiques équivariants sur des revêtements galoisiens de variétés compactes, dans le cadre de la K-théorie de Baum-Connes. En utilisant des résultats récents de K-théorie d'algèbres de groupes, ceci nous permet de démontrer les formules de multiplicités des séries discrètes intégrables dans les espaces homogènes de sous-groupes discrets cocompacts sans torsion, dans le cadre des groupes de Lie semi-simples (résultat dû à R.P. Langlands), mais également dans le cadre p-adique.

Abstract **(K-theory and multiplicities in $L^2(G/\Gamma)$).** — We prove a generalized version of the L^2-index theorem of Atiyah concerning equivariant elliptic operators on coverings of compact manifolds, in the context of the Baum-Connes conjecture. Using recent results on the K-theory of group algebras, this enables us to compute the multiplicities of integrable discrete series in the homogeneous spaces of discrete torsionless and cocompact subgroups, in the case of semisimple Lie groups (a result due to R.P. Langlands), but also in the p-adique case.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est de démontrer un théorème dans le cadre de la K-théorie des C^*-algèbres de groupes qui affirme l'égalité de deux morphismes sur l'image de l'application de Baum-Connes : d'une part celui induit par la représentation quasi-régulière d'un sous-groupe discret cocompact sans torsion, d'autre part, celui induit après normalisation, par la trace usuelle, et d'en déduire des généralisations des formules de multiplicité de Langlands ([**Lan**]).

Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar dg. L'algèbre involutive $C_C(G)$ admet une représentation λ dite *régulière* par opérateurs bornés sur $L^2(G)$ et $C^*_r(G)$ désigne la fermeture normique de $\lambda(C_C(G))$. La conjecture de Baum-Connes ([**B-C**], [**B-C-H**]) porte sur la K-théorie de la C^*-algèbre $C^*_r(G)$. Soit $\underline{E}G$ l'espace classifiant les actions propres de G et $K^*_{\mathrm{top}}(G)$ la K-homologie G-équivariante de $\underline{E}G$. Dans [**B-C-H**], est définie l'application d'assemblage ou application de Baum-Connes $\mu_r : K^*_{\mathrm{top}} \to K_*(C^*_r(G))$ et la conjecture de Baum-Connes affirme que c'est un isomorphisme.

Le principe est que l'espace $K^*_{\mathrm{top}}(G)$ est en général plus simple à calculer. Si G est un groupe de Lie semisimple, K un compact maximal (en supposant pour simplifier que la représentation de K sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ est spinorielle), on peut identifier de façon naturelle $K^*_{\mathrm{top}}(G)$ à l'anneau des représentations de K. De l'autre coté, $K_*(C^*_r(G))$ fournit des informations sur les représentations unitaires de G faiblement contenues dans la régulière, même quand G n'est pas de type I. Supposons que G est unimodulaire. Rappelons qu'on appelle *série discrète* de G la classe d'une sous-représentation irréductible de $L^2(G)$ et qu'une représentation unitaire irréductible π de G est une série discrète ssi elle possède un vecteur ξ non nul tel que $\int_G |\langle \xi, g\xi\rangle|^2 dg < +\infty$ (on dit que la série discrète est de plus intégrable s'il existe ξ tel que $\int |\langle \xi, g\xi\rangle| dg < +\infty$). Il existe alors une constante $d_\pi > 0$ appelée dimension formelle de π telle que pour tout vecteur ξ de la représentation, on a $\int_G |\langle \xi, g\xi\rangle|^2 dg = d_\pi^{-1}\|\xi\|^2$. Si π est isolée dans le dual réduit de G (ce qui est le cas pour toute série discrète, si G est presque connexe d'après [**G**]), $C_r^*(G)$ contient $\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$ en facteur donc $K_0(C_r^*(G))$ contient une copie de $\mathbb{Z}$ attachée à la série discrète (on notera $x_\pi \in K_0(C_r^*(G))$ son générateur).

Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de G. Les formules de multiplicité évoquées ci-dessus concernent la représentation par translation à gauche de G dans $L^2(G/\Gamma)$. Celle-ci se décompose en une somme directe hilbertienne de représentations irréductibles. Le célèbre résultat de R.P. Langlands est le suivant :

Théorème 0.1 ([**Lan**]). — *Soit Γ un réseau cocompact sans torsion d'un groupe de Lie semisimple G, π une série discrète intégrable de G, alors la multiplicité de π dans $L^2(G/\Gamma)$ est égale à $d_\pi \operatorname{vol}(G/\Gamma)$.*

Rappelons que la démonstration de Langlands consiste à appliquer la formule des traces de Selberg à un coefficient de matrice intégrable et à utiliser les résultats d'annulation d'intégrales orbitales pour les éléments semisimples.

Pour étudier cette multiplicité, on est amené à étudier la C^*-algèbre maximale notée $C^*(G)$ de G, *i.e.* celle dont le spectre est constitué de toutes les représentations irréductibles unitaires de G et non pas seulement de celles qui sont faiblement contenues dans la régulière. Il existe également une application d'assemblage $\mu : K_{\mathrm{top}}^*(G) \to K_*(C^*(G))$ pour la C^*-algèbre maximale de G telle que $\lambda_* \circ \mu = \mu_r$, où $\lambda_* : K_*(C^*(G)) \to K_*(C_r^*(G))$ est le morphisme induit par le quotient $\lambda : C^*(G) \to C_r^*(G)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce mémoire (théorème 5.2.2) :

Théorème 0.2. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire, π une série discrète de G isolée dans $\widehat{G}_r$, et $x_\pi \in K_0(C_r^*(G))$ l'élément associé. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact sans torsion de G, σ une représentation unitaire de Γ de dimension N finie et $\operatorname{Ind}_\Gamma^G(\sigma)$ la représentation unitaire induite de G. Soit $C_\pi \in K_{\mathrm{top}}^*(G)$ tel que $\mu_r(C_\pi) = x_\pi$. On a :*

$$(\operatorname{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_*(\mu(C_\pi)) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

L'existence (et l'unicité) d'un tel élément C_π est postulée par la conjecture de Baum-Connes pour G. Cette conjecture est maintenant démontrée pour une vaste classe de groupes : les groupes de Lie réductifs (A. Wassermann [**Wa**]), les groupes réductifs sur un corps p-adique (V. Lafforgue [**L**]) et les groupes moyennables (N. Higson, G. Kasparov [**H-K**]).

Supposons de plus que π est isolée dans $\widehat{G}$ de sorte que $C^*(G)$ contient une copie de $\mathbf{K}$ attachée à la série discrète. Soit $p_\pi \in K_0(C^*(G))$ l'élément associé. Clairement, $\lambda_*(p_\pi) = x_\pi$.

COROLLAIRE 0.1. — *Si $\mu(C_\pi) = p_\pi$, alors on a :*

$$m(\pi, \Gamma, \sigma) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

Dans le cas où la série discrète est isolée dans $\widehat{G}$ (ce qui est toujours le cas si π est intégrable), d'après le corollaire précédent, il suffit pour démontrer la formule de Langlands, de savoir que p_π est dans l'image de μ. Toutefois, la conjecture de Baum-Connes postule seulement que $\lambda_*(p_\pi)$ est dans l'image $\lambda_* \circ \mu$. Quand λ_* est injective, c'est suffisant. Compte tenu des travaux de Higson-Kasparov ([**H-K**]), on en déduit (théorème 5.2.3) :

COROLLAIRE 0.2. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire moyennable (ou T-moyennable) et π une série discrète isolée dans $\widehat{G}$, alors :*

$$m(\pi, \Gamma, \sigma) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

Une conjecture de Bost implique que pour un groupe localement compact G, l'image de μ est égal à l'image de $K_*(L^1(G))$ dans $K_*(C^*(G))$. Si π est intégrable, p_π est dans l'image de $K_*(L^1(G))$.

Dans [**L**] et [**L2**], V. Lafforgue démontre la conjecture de Bost pour une vaste classe $\mathcal{C}'$ de groupes localement compacts (stable par sous-groupe fermé) qui comprend tous les groupes de Lie semisimples, les groupes réductifs sur les groupes p-adiques, et les groupes moyennables. On en déduit (théorème 5.3.5) :

COROLLAIRE 0.3. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire, Γ un sous-groupe discret cocompact sans torsion dans la classe $\mathcal{C}'$, π une représentation intégrable de G, σ une représentation unitaire de dimension N de Γ. Alors on a la formule des multiplicités :*

$$m(\pi, \Gamma, \sigma) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

La démonstration du théorème 0.2 repose sur l'analyse des traces densément définies sur les C^*-algèbres et des applications qu'elles induisent en K-théorie (chapitres 1 et 2). En effet, une trace t densément définie sur une C^*-algèbre induit une trace algébrique sur un idéal dense qui a même K-théorie que A (proposition 1.2.3) d'où une application $t_* : K_0(A) \to \mathbb{C}$. L'exemple qui nous intéresse en premier lieu est le cas d'un groupe localement compact unimodulaire. Il existe alors ([**D1**]) une unique trace sci t^G telle que $\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, on a $t^G(f^* f) = \|f\|^2$. Quand π est une série discrète isolée dans le dual réduit de G, alors pour tout vecteur ξ unitaire de π, la fonction p définie par $\forall g \in G$, $p(g) = d_\pi \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$ est dans $C_r^*(G)$, $[p] = [x_\pi]$ et par définition, $t^G(p) = p(e) = d_\pi$. Compte tenu de ceci, le théorème 0.2 est un cas particulier du suivant (théorème 4.4.1) :

THÉORÈME 0.3. — *Soit G un groupe localement compact, Γ un sous-groupe discret sans torsion cocompact. Soit σ une représentation unitaire de Γ de dimension N.*

Alors on a :

$$(\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_* \circ \mu = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) \times (t^G)_* \circ \mu.$$

Ce théorème découle :

(1) d'un théorème abstrait énoncé dans [**H**] qui affirme que pour un groupe discret sans torsion la trace usuelle sur $C^*(\Gamma)$ donnée par l'évaluation en l'identité induit la même application en K-théorie que le morphisme associé à la représentation triviale sur l'image de l'application de Baum-Connes. Le fait que $t_*^\Gamma(x) = (\varepsilon_\Gamma)_*(x)$ quand $x \in K_0(C^*(\Gamma))$ est l'indice équivariant ([**B-C-H**]) d'un opérateur pseudodifférentiel Γ-équivariant sur un revêtement galoisien de groupe Γ d'une variété compacte, est une reformulation abstraite du théorème d'indice L^2 d'Atiyah. Nous montrons que pour un groupe discret sans torsion, tout élément de l'image de l'application de Baum-Connes est un tel indice équivariant (proposition 3.1.7) et nous démontrons une version à coefficient de ce théorème (chapitre 3, théorème 3.3.4). Ceci nous amène à étudier la notion de Γ-trace (définie à l'origine par M.F. Atiyah [**A**]) dans le cadre abstrait des modules hilbertiens (chapitre 2).

(2) d'une propriété de fonctorialité de la trace pour les sous-groupes cocompacts, que nous démontrons au chapitre 4. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact d'un groupe G localement compact. Soit $\sigma_\Gamma^G : K_*(C^*(G)) \to K_*(C^*(\Gamma))$ le morphisme associé à l'induction. Alors on a :

$$(t^\Gamma)_* \circ \sigma_\Gamma^G = \operatorname{vol}(G/\Gamma)(t^G)_*.$$

(3) d'une propriété de fonctorialité de l'application de Baum-Connes pour les sous-groupes cocompacts (théorème 4.3.5).

Notons qu'une représentation irréductible π dans la série discrète d'un groupe localement compact G peut être isolée dans $\widehat{G}_r$ sans l'être dans $\widehat{G}$ (ceci se produit déjà pour $G = SL_2(\mathbb{R})$). Le théorème 0.2 fournit néanmoins une formule à la Langlands pour toutes les séries discrètes des groupes localement compacts presque connexes vérifiant la conjecture de Baum-Connes. Cette formule ne permet pas de calculer directement la multiplicité $m(\pi, \Gamma, \sigma)$ mais la relie aux multiplicités d'autres représentations (non faiblement contenues dans la représentation régulière). En particulier, on obtient une explication géométrique des formules pour les séries discrètes non intégrables des groupes $SO(n, 1)$.

Remerciements. — Je remercie vivement Georges Skandalis, sous la direction duquel j'ai réalisé ma thèse de doctorat, d'où est tiré cet article, ainsi que Joel Bellaïche et Vincent Lafforgue.

CHAPITRE 1

TRACES DENSÉMENT DÉFINIES ET K-THÉORIE

Dans ce chapitre, nous étudions les traces densément définies et leurs liens avec la K-théorie. Nous commençons en donnant les formules algébriques permettant de calculer l'accouplement d'une trace sur une algèbre $\mathcal{A}$ et de l'élément de $K_0(\mathcal{A})$ associé à un quasiisomorphisme. Puis nous montrons qu'un idéal dense d'une algèbre de Banach A a même K-théorie que A, ce qui permet de définir pour toute trace densément définie τ sur une C^*-algèbre A un accouplement entre $K_0(A)$ et τ. Soit A une C^*-algèbre munie d'une trace densément définie. Après avoir étudié les traces naturelles sur l'algèbre des opérateurs compacts d'un A-module hilbertien, nous donnons une formule qui permet de calculer l'accouplement entre un élément de $K_0(A)$ donné sous la forme d'un opérateur Fredholm au sens de Kasparov, et la trace ; nous terminons en faisant le lien avec la théorie de l'indice de Breuer.

1.1. Rappels algébriques

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre non nécessairement unitaire. Convenons d'appeler *trace* sur A toute application linéaire $\tau : A \to \mathbb{C}$ telle que $\forall\, a, b \in A$, $\tau(ab) = \tau(ba)$. Soit τ une trace sur A. Si A est unitaire, l'application qui à $p \in M_n(A)$ projection, associe $\tau(\sum_{i=1}^n p_{ii})$, s'étend d'une unique façon en un morphisme noté τ_* de $K_0(A)$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $\widetilde{A}$ l'unitarisée de A. Rappelons que $\widetilde{A}$ est l'algèbre obtenue en munissant l'espace vectoriel $A \oplus \mathbb{C}$ du produit défini par, pour tous $a_1, a_2 \in A$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$(a_1 \oplus \lambda_1)(a_2 \oplus \lambda_2) = ((\lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2 + a_1 a_2) \oplus \lambda_1 \lambda_2).$$

L'application $\widetilde{\tau} : \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ qui $\forall\, a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifie $\widetilde{\tau}(a \oplus \lambda) = \tau(a)$ est une trace sur $\widetilde{A}$ qui étend τ. La restriction à $K_0(A) \subset K_0(\widetilde{A})$ de $\widetilde{\tau}_*$ est notée τ_*. Elle coïncide si A est unitale, avec l'application définie précédemment. Si $x \in K_0(A)$, on notera également $\langle x, \tau \rangle$ le complexe $\tau_*(x)$.

Soit J un idéal d'une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire A. Tout élément D de A inversible modulo J définit un élément canonique de $K_0(J)$ (*cf.* [**B-C-H**]). On peut en donner une formule explicite. Soit Q un inverse de D modulo J, $S_1 = 1 - DQ$, et $S_2 = 1 - QD$. On a :

$$[D] = \left[\begin{pmatrix} 1 - S_1^2 & (S_1 + S_1^2)D \\ S_2 Q & S_2^2 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

On dira qu'une trace τ sur J est une trace relativement à A, si pour tout $a \in A$, $i \in J$, $\tau(ai) = \tau(ia)$.

Lemme 1.1.1. — *Soit τ une trace sur J.*

Soit D et Q des éléments de A. Soient $S_1 = 1 - DQ$ et $S_2 = 1 - QD$. Alors :

(1) *$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, il existe $Q_n \in A$ tel que $1 - DQ_n = S_1^n$ et $1 - Q_n D = S_2^n$.*

(2) *S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que S_1^k et S_2^k soient dans J, alors D est inversible modulo J et $\tau_*([D]) = \tau(S_2^{2k}) - \tau(S_1^{2k})$.*

(3) *Si τ est une trace relativement à A, et si $k \in \mathbb{N}^*$ est tel que $S_1^k \in J$ et $S_2^k \in J$, alors $\forall\, n \geqslant k$,*

$$\tau_*([D]) = \tau(S_2^n) - \tau(S_1^n) = \tau(S_2^k) - \tau(S_1^k).$$

Démonstration

(1) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $QP(DQ) = P(QD)Q$. Soit alors $P \in \mathbb{Z}[X]$ défini par $XP_n(X) = 1 - (1 - X)^n$. Soit $Q_n = QP_n(DQ) = P_n(QD)Q$. Alors

$$1 - DQ_n = (1 - DQ)^n \quad \text{et} \quad 1 - Q_n D = (1 - QD)^n.$$

(2) Soit Q_k tel que $1 - DQ_k = S_1^k$ et $1 - Q_k D = S_2^k$. Alors

$$[D] = \left[\begin{pmatrix} 1 - S_1^{2k} & (S_1^k + S_1^{2k})D \\ S_2^k Q_k & S_2^{2k} \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

d'où le résultat.

(3) Il suffit de montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $S_i^n \in J$ $(i = 1, 2)$, alors

$$\tau(S_2^{n+1}) - \tau(S_1^{n+1}) = \tau(S_2^n) - \tau(S_1^n).$$

Or

$$\begin{aligned} \tau(S_1^n - S_1^{n+1}) &= \tau((1 - DQ)^n DQ) \\ &= \tau(Q(1 - DQ)^n D) \\ &= \tau((1 - QD)^n QD) \\ &= \tau(S_2^n - S_2^{n+1}) \end{aligned}$$

Remarque. — L'hypothèse que la trace est une trace relativement à A est nécessaire pour la dernière assertion. En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$, A la $\mathbb{Q}$-algèbre des matrices triangulaires supérieures dans $M_{2n}(\mathbb{Q})$. Soit J l'idéal de A de carré nul des matrices $m = (m_{ij}) \in A$ telles que $m_{ij} = 0$ si $j < i + n$. Toute forme linéaire sur J est une trace sur J. Soit $D \in A$ une matrice diagonale inversible. Notons $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$,

$\lambda_k = D_{kk}$ et supposons que $\forall\, k > 1, \lambda_k \neq \lambda_1$. Soit $Q = D^{-1} - N$ où $N_{ij} = 1$ si $j = i+1$ et 0 sinon. Alors

$$(1-QD)^n \in J \quad \text{et} \quad (1-DQ)^n \in J.$$

Pour $j \in \{1,\dots,2n\},\ p \in \{1,\dots,2n-1\}$,

$$((1-QD)^p)_{1j} = ((1-DQ)^p)_{1j} = 0$$

sauf si $j = p+1$ auquel cas

$$((1-QD)^p)_{1j} = \prod_{k=2}^{p+1} \lambda_k \quad \text{et} \quad ((1-DQ)^p)_{1j} = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k.$$

Soit $f : J \to \mathbb{C}$ définie par $\forall\, j \in J,\ f(j) = \sum_{k=n+1}^{2n} f_{1k}$, alors $\forall\, p \in \{n,\dots,2n-1\}$,

$$f((1-QD)^p) - f((1-DQ)^p) = \prod_{k=2}^{p+1} \lambda_k - \prod_{k=1}^{p} \lambda_k \neq 0.$$

Or $[D] = 0$ puisque $K_0(J) = 0$ comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1.1.2. — *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre.*

(1) *Supposons ici que A est unitale et soit p, q deux projections dans A telle que $p+q-1$ est inversible. Alors $[p] = [q] \in K_0(A)$.*

(2) *Soit $n \in \mathbb{N}$ tels que tous les produits de n éléments de A sont nuls. Alors $K_0(A) = 0$.*

Démonstration

(1) Comme $p(p+q-1) = pq = (p+q-1)q$, $(p+q-1)^{-1}p(p+q-1) = q$.

(2) Soit q une projection dans $M_n(\widetilde{A})$ et $p \in M_n(\mathbb{C})$ l'image de q par le morphisme d'augmentation de $M_n(\widetilde{A})$ dans $M_n(\mathbb{C})$. Soit $a = q - p \in M_n(A)$. Alors

$$(2p-1)(p+q-1) = (2p-1)^2 + (2p-1)a = 1 + (2p-1)a.$$

Or $(2p-1)a$ est nilpotent donc $p+q-1$ est inversible et donc $[p] = [q]$. D'où le résultat.

1.2. Traces densément définies sur les C^*-algèbres et K-théorie

1.2.1. K-théorie des idéaux denses des algèbres de Banach. — Rappelons le résultat suivant dû à Swan ([**Sw**]) :

Proposition 1.2.1. — *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre dense unifère d'une algèbre de Banach A unifère, telle que le spectre de tout élément de $\mathcal{A}$ est le même dans $\mathcal{A}$ et dans A.*

(1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-algèbre $M_n(\mathcal{A})$ de $M_n(A)$ a les mêmes propriétés.*

(2) *L'inclusion de $\mathcal{A}$ dans A induit un morphisme injectif de $K_0(\mathcal{A})$ dans $K_0(A)$.*

Esquissons comment l'on déduit la seconde assertion de la première. Soit $e, e' \in M_n(\mathcal{A})$, $p \in e'M_n(A)e$, $q \in eM_n(A)e'$, tels que $pq = e'$ et $qp = e$. Soit $x \in e'M_n(\mathcal{A})e$ et $y \in eM_n(\mathcal{A})e'$ tels que

$$\|x - p\| < 1/2(1 + \|q\|)^{-1} \quad \text{et} \quad \|y - q\| < 1/2(1 + \|p\|)^{-1}.$$

Alors $\|xy - e'\| < 1$ et $\|yx - e\| < 1$ donc xy et yx sont inversibles respectivement dans $e'M_n(A)e'$ et $eM_n(A)e$ et donc dans $e'M_n(\mathcal{A})e'$ et $eM_n(\mathcal{A})e$. Donc il existe $x', x'' \in eM_n(\mathcal{A})e'$ tel que $xx' = e'$ et $x''x = e$. Alors $x'' = x''xx' = x'$. D'où le résultat.

Proposition 1.2.2. — *Soit $\mathcal{A} \subset A$ une sous-algèbre dense d'une algèbre de Banach A. On suppose que pour tout $n > 0$, $M_n(\mathcal{A})$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $M_n(A)$. Alors l'application naturelle de $K_0(\mathcal{A})$ dans $K_0(A)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, il suffit de vérifier la surjectivité. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $M_n(A)$ d'une norme d'algèbre de Banach compatible avec celle de A. Soit $x \in M_n(\widetilde{A})$ un projecteur avec $x = p + a$, $p \in M_n(\mathbb{C})$ projecteur et $a \in M_n(A)$. Soit $x' \in M_n(\mathcal{A})$ tel que

$$\|x - x'\| < \sup_{t \in \mathbb{R}}(\|(x - 1/2 + it)^{-1}\|)^{-1};$$

alors $\mathrm{Sp}(x') \subset \Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \neq 1/2\}$. Soit f la fonction holomorphe sur Ω qui à $z \in \Omega$ associe 0 si $\mathrm{Re}(z) < 1/2$ et 1 si $\mathrm{Re}(z) > 1/2$. Soit $P = X(1 - X) \in \mathbb{C}[X]$. Il existe g_0 et g_1 des fonctions holomorphes sur $P(\Omega)$ telles que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) = g_0(P(z)) + zg_1(P(z))$. Soit $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $M_n(\mathcal{A})$ tels que,

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \|a - a_m\| < (\sup_{t \in \mathbb{R}}(\|x - 1/2 + it)^{-1}\|)^{-1}.$$

Alors $f(p + a_m)$ est une suite de projecteurs qui tend vers $f(x)$ et donc pour m assez grand

$$[f(p + a_m)] = [f(x)] = [x] \in K_0(\widetilde{A}).$$

Or

$$f(p + a_m) = g_0(P(p + a_m)) + (p + a_m)g_1(P(p + a_m)) \in M_n(\widetilde{\mathcal{A}}),$$

puisque $P(p + a_m) \in M_n(\mathcal{A})$.

Remarque. — Soit A une algèbre de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre dense de A munie d'une structure d'algèbre de Banach dont la topologie est plus fine que celle induite par A et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans A. Alors d'après le lemme 1.2.1 l'inclusion de $M_n(\widetilde{\mathcal{A}})$ dans $M_n(\widetilde{A})$ est isospectrale, donc $M_n(\widetilde{A})$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe. Donc l'inclusion de $\mathcal{A}$ dans A induit un isomorphisme de $K_0(\mathcal{A})$ sur $K_0(A)$.

Proposition 1.2.3. — *Soit I un idéal à gauche (resp. à droite) dense d'une algèbre de Banach A. Alors I est stable par calcul fonctionnel et l'inclusion de I dans A induit un isomorphisme de $K_0(I)$ sur $K_0(A)$.*

Démonstration. — Soit $x \in I$. Soit $K = \mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(x)$ et U un voisinage ouvert de K. Soit f une fonction holomorphe sur U. Soit g une fonction holomorphe sur U telle que $\forall \lambda \in U,\ f(\lambda) = f(0) + \lambda g(\lambda)$. Alors

$$f(x) = f(0)1 + xg(x) = f(0) + g(x)x \in \widetilde{I}.$$

Donc I est stable par calcul fonctionnel holomorphe.

La seconde assertion résulte du fait que $M_n(I)$ idéal de $M_n(A)$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe et de la proposition précédente.

On a d'ailleurs un peu mieux :

Lemme 1.2.4. — *Soit I un idéal à gauche (resp. à droite) d'une algèbre de Banach. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(\widetilde{I})$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $M_n(\widetilde{A})$.*

Démonstration. — Soit $\pi : \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ le morphisme unital et $\pi_n : M_n(\widetilde{A}) \to M_n(\mathbb{C})$ son extension aux matrices. Soit $x \in M_n(\widetilde{I})$, R le polynôme minimal de $\pi_n(x) \in M_n(\mathbb{C})$. Soit P un polynôme tel que $(f-P)/R$ se prolonge sur U en une fonction holomorphe g. Puisque $P(x) \in M_n(\widetilde{I})$ et $R(x) \in M_n(I)$, on a $f(x) = P(x) + R(x)g(x) \in M_n(\widetilde{I})$.

1.2.2. Formes sur la K-théorie associées à des traces densément définies sur des C^*-algèbres

Définition 1.2.5. — On appelle trace sur une C^*-algèbre ([**D1**], p. 115) une application $t : A^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que :

(1) $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$, $x, y \in A^+, \lambda \geqslant 0$.
(2) $f(xx^*) = f(x^*x)$, $x \in A$.

Si t est une trace sur une C^*-algèbre A, on notera n_t l'ensemble formé des éléments x de A tels que $t(x^*x) < +\infty$ et m_t l'espace vectoriel engendré par les produits d'éléments de n_t ou s'il n'y a pas ambiguïté n, m respectivement.

Proposition 1.2.6 ([**D1**], p. 116). — *Soit t une trace sur une C^*-algèbre A.*

(1) *Les ensembles n et m sont des idéaux bilatères autoadjoints. En tant qu'espace vectoriel, m est engendré par $m^+ = m \cap A^+$ et on a $m^+ = \{x \in A^+ \mid t(x) < +\infty\}$. De plus $\overline{m} = \overline{n}$.*

(2) *Il existe une unique application linéaire $t' : m \to \mathbb{C}$ qui coïncide avec t sur m^+.*

(3) *On a $t'(x^*) = \overline{t'(x)}$, $x \in m$ et $t'(xy) = t'(yx)$, $x, y \in n$. En particulier, t' est une trace sur m relativement à A.*

On dira que la trace est densément définie si $\overline{m} = \overline{n} = A$.

Définition 1.2.7. — Soit t une trace densément définie sur une C^*-algèbre A. Soit $j : m \to A$ l'inclusion. On note $t_* : K_0(A) \to \mathbb{C}$ l'application $(t')_* \circ (j_*)^{-1}$.

1.3. Traces sur les C^*-algèbres et C^*-modules

1.3.1. Rappels sur les opérateurs compacts des C^*-modules. — Soit A une C^*-algèbre, E et F deux A-modules hilbertien. Pour tous $\xi \in F, \eta \in E$, on note $\theta_{\xi,\eta} \in \mathbf{L}(E,F)$ défini par $\forall\, \zeta \in E$, $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi\langle \eta, \zeta\rangle$. Un opérateur $T \in \mathbf{L}(E,F)$ est dit de rang fini, s'il existe $\xi_1, \ldots, \xi_n \in F$, $\eta_1, \ldots, \eta_n \in E$ tel que $T = \sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i,\eta_i}$. On désigne par $\mathbf{K}(E,F)$ la fermeture normique dans $\mathbf{L}(E,F)$ de l'ensemble formé des opérateurs de rang fini de E dans F. Soit $\xi \in E$. On note $T_\xi \in \mathbf{K}(A,E)$ l'opérateur qui à $a \in A$ associe ξa. On a les lemmes suivants ([**Sk**]) :

Lemme 1.3.1. — *L'application qui à $\xi \in E$ associe $T_\xi \in \mathbf{K}(A,E)$ est bijective. Un opérateur $T \in \mathbf{L}(E,F)$ est de rang fini ssi il existe $U \in \mathbf{K}(A^n,E)$ et $V \in \mathbf{K}(A^n,F)$ tel que $T = VU^*$.*

Lemme 1.3.2. — *L'application qui à $T \in \mathbf{L}(E,F)$ associe $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}(E \oplus F)$ induit une bijection préservant la norme entre $\mathbf{L}(E,F)$ (resp. $\mathbf{K}(E,F)$) et le sous-espace fermé de $\mathbf{L}(E \oplus F)$ (resp. de $\mathbf{K}(E \oplus F)$) formé des opérateurs T tels que $TF = 0$ et $TE \subset F$.*

D'après ces deux lemmes, on peut identifier A, $\mathbf{K}(E)$ et E à des sous-espaces de $\mathbf{K}(A \oplus E)$. Nous utiliserons la proposition suivante ([**Sk**]) :

Proposition 1.3.3. — *Soit E et F deux A-modules hilbertiens, E_1 un sous-A-module hilbertien de E et F_1 un sous-A-module hilbertien de F.*

(1) *Un opérateur $T \in \mathbf{L}(E,F)$(resp. $\mathbf{K}(E,F)$) tel que $TE \subset F_1$ et $T^*F \subset E_1$ définit par restriction un élément de $T_1 \in \mathbf{L}(E_1,F_1)$ (resp. $\mathbf{K}(E_1,F_1)$).*

(2) *Tout élément $T_1 \in \mathbf{K}(E_1,F_1)$ s'étend de manière unique en un élément $T \in \mathbf{K}(E,F)$ tel que $TE \subset F_1$ et $T^*F \subset E_1$.*

Démonstration. — Esquissons la démonstration de la deuxième assertion. Quitte à utiliser la deuxième assertion, on peut supposer que $E = F$ et $E_1 = F_1$. Soit $\mathbf{K}(E_1 : E)$ la sous-C^*-algèbre de $\mathbf{K}(E)$ formée des opérateurs T tels que $TE \cup T^*E \subset E_1$. Soit $r : \mathbf{K}(E_1 : E) \to \mathbf{K}(E_1)$ le morphisme induit par restriction à E_1. Soit $\xi, \eta \in E_1$. L'élément $\theta_{\xi,\eta} \in \mathbf{K}(E_1)$ admet clairement un prolongement en un élément de $\mathbf{K}(E_1 : E)$ donné par la même formule, mais en considérant cette fois $\xi, \eta \in E$. Donc le morphisme r est d'image dense donc surjectif. Soit $T, S \in \mathbf{K}(E_1 : E)$ tels que $T_{|E_1} = S_{|E_1}$. Alors $(T - S)(T - S)^* = 0$ donc $T = S$. D'où le résultat.

On notera $j : \mathbf{K}(E_1,F_1) \to \mathbf{K}(E,F)$ l'application injective associée.

PROPOSITION 1.3.4 ([**R**]). — *Pour tout A-module hilbertien E, il existe une application canonique $\zeta_E : K_*(\mathbf{K}(E)) \to K_*(A)$ qui est un isomorphisme lorsque E est un A-module hilbertien plein. Quand $E = A$ et en identifiant $\mathbf{K}(A)$ à A, alors $\zeta_A = \mathrm{id}_{K_*(A)}$. De plus, si E est un sous-A-module hilbertien de F, alors $\zeta_F \circ j_* = \zeta_E$.*

1.3.2. Traces sur $\mathbf{K}(E)$. — Étant donné une trace τ sur une C^*-algèbre A et E un A-module hilbertien, on se propose d'étudier quelles sont les traces « naturelles » sur $\mathbf{K}(E)$. Si τ est densément définie, une condition « naturelle » pour une telle trace τ' est que τ' soit densément définie et que $(\tau')_* = \tau_* \circ \zeta_E$. Nous commençons par montrer que cette condition est satisfaite si $\forall\, \xi \in E$, $\tau'(\theta_{\xi,\xi}) = \tau(\langle \xi, \xi\rangle)$ puis nous construisons une telle trace.

LEMME 1.3.5. — *Soit E_1 et E_2 deux A-modules hilbertiens. Soit τ_1 et τ_2 deux traces sur $\mathbf{K}(E_1)$ et $\mathbf{K}(E_2)$. Il existe une trace (et celle-ci est alors unique) sur $\mathbf{K}(E_1 \oplus E_2)$ dont les restrictions à $\mathbf{K}(E_1)$ et $\mathbf{K}(E_2)$ sont τ_1 et τ_2 ssi*

$$\forall\, S \in \mathbf{K}(E_1, E_2), \quad \tau_1(S^*S) = \tau_2(SS^*).$$

Démonstration. — Supposons

$$\forall\, S \in \mathbf{K}(E_1, E_2), \quad \tau_1(S^*S) = \tau_2(SS^*),$$

alors on définit $\tau : \mathbf{K}(E_1 \oplus E_2)^+$, par

$$\forall\, T \in \mathbf{K}(E_1 \oplus E_2)^+, \quad \tau(T) = \tau_1(T_{11}) + \tau_2(T_{22}).$$

Soit $S \in \mathbf{K}(E_1 \oplus E_2)^+$,

$$\begin{aligned}\tau(S^*S) &= \tau_1(S_{11}^*S_{11} + (S_{21})^*S_{21}) + \tau_2((S_{12})^*S_{12} + S_{22}^*S_{22})\\ &= \tau_1(S_{11}S_{11}^*) + \tau_2(S_{21}(S_{21})^*) + \tau_1(S_{12}(S_{12})^*) + \tau_2(S_{22}S_{22}^*)\\ &= \tau(SS^*)\end{aligned}$$

L'unicité est triviale ainsi que la réciproque.

PROPOSITION 1.3.6. — *Soit E un A-module hilbertien, et τ' une trace sur $\mathbf{K}(E)$ telle que pour tout $\xi \in E$, $\tau'(\theta_{\xi,\xi}) = \tau(\langle\xi,\xi\rangle)$. Alors $\tau_* \circ \zeta_E = (\tau')_*$.*

Démonstration. — Soit $F = A \oplus E$. Soit $i_E : A \to \mathbf{K}(F)$ et $j_E : \mathbf{K}(E) \to \mathbf{K}(F)$ les inclusions canoniques. D'après la proposition 1.3.4, le morphisme induit $(i_E)_*$ est un isomorphisme d'inverse $(\zeta_F)_*$ et $\zeta_E = (i_E)_*^{-1} \circ (j_E)_*$. D'après le lemme précédent, il existe une unique trace τ'' sur $\mathbf{K}(A \oplus E)$ dont les restrictions à A et $\mathbf{K}(E)$ sont τ et τ', soit $\tau'' \circ i_E = \tau$ et $\tau'' \circ j_E = \tau'$, ce qui implique

$$(\tau'')_* \circ (i_E)_* = \tau_* \quad \text{et} \quad (\tau'')_* \circ (j_E)_* = \tau'_*.$$

Donc :

$$\tau_* \circ \zeta_E = \tau_* \circ (i_E)_*^{-1} \circ (j_E)_* = (\tau'')_* \circ (j_E)_* = (\tau')_*.$$

LEMME 1.3.7. — *Soit A une C^*-algèbre, $a, b \in A$, $a = a^*$, E, F des A-modules hilbertiens, $T \in \mathbf{K}(E,F)$ (resp. $\mathbf{L}(E,F)$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire.*

(1) *Si $ab = -ba$, alors $f(a)b = -bf(a)$.*

(2) *Il existe $S \in \mathbf{K}(E,F)$ (resp. $\mathbf{L}(E,F)$) tel que $f\left(\begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & S^* \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{L}(E \oplus F)$.*

Démonstration

(1) La fonction $f_{|\,\mathrm{Sp}(a)}$ est limite uniforme de polynômes impairs P_n. Donc

$$f(a)b = \lim_{n\to+\infty} P_n(a)b = -\lim_{n\to+\infty} bP_n(a) = -bf(a).$$

(2) Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $a = \begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 1.3.8. — *Soit A une C^*-algèbre. Soient E, F, G des A-modules hilbertiens. Soient $S \in \mathbf{K}(E,F)$ (resp. $S \in \mathbf{L}(E,F)$), $T \in \mathbf{L}(E,G)$.*

(1) *Si $S^*S = T^*T$, alors il existe $U \in \mathbf{K}(F,G)$ (resp. $U \in \mathbf{L}(F,G)$) tel que*

$$U^*U = SS^* \quad \text{et} \quad UU^* = TT^*.$$

(2) *Si $S^*S \leqslant T^*T$ alors il existe $U \in \mathbf{K}(F,G)$ (resp. $U \in \mathbf{L}(F,G)$) tel que*

$$U^*U = SS^* \quad \text{et} \quad UU^* \leqslant TT^*.$$

Démonstration

(1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction réelle impaire telle que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ g(t)|g(t)| = t$. Posons $\begin{pmatrix} 0 & v^* \\ v & 0 \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} 0 & S^* \\ S & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix} 0 & w^* \\ w & 0 \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}\right)$. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & S^* \\ S & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v^* \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v^*v)^{1/2} & 0 \\ 0 & (vv^*)^{1/2} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w^* \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w^*w)^{1/2} & 0 \\ 0 & (ww^*)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

D'où $S = v|v|$, $T = w|w|$ et en particulier $|v| = |w| = |S|^{1/2}$. De même, $S^* = v^*|v^*|$ d'où $|v^*| = |S^*|^{1/2}$. On pose $U = wv^*$; alors

$$U^*U = v(w^*w)v^* = vv^*vv^* = SS^*$$

et par symétrie $UU^* = TT^*$.

(2) Soit $S' \in \mathbf{K}(E)$ (resp. $\mathbf{L}(E)$) tel que

$$(S')^*S' + S^*S = T^*T$$

et soit $\widetilde{S} = (S', S) \in \mathbf{L}(E, E \oplus F)$. On a $\widetilde{S}^*\widetilde{S} = T^*T$. D'après le résultat précédent, il existe $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{L}(E \oplus F, G)$ tel que $u^*u = \widetilde{S}\widetilde{S}^*$ ce qui implique

$$u_2^*u_2 = SS^* \quad \text{et} \quad uu^* = u_1u_1^* + u_2u_2^* = TT^*$$

d'où $u_2u_2^* \leqslant TT^*$. Donc u_2 convient.

Il est aisé d'en déduire la proposition 1.4.10. de [**P**].

Corollaire 1.3.9. — *Soit* $x, y, z \in A$ *tels que* $x^*x \leqslant yy^*+zz^*$ *alors il existe* $u, v \in A$ *tels que* $u^*u \leqslant y^*y$, $v^*v \leqslant z^*z$, *et* $xx^* = uu^* + vv^*$.

Démonstration. — Soit $S = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $T = \left(\begin{smallmatrix} y^* & 0 \\ z^* & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On a $S^*S \leqslant T^*T$ donc il existe $U \in M_2(A)$ tel que $SS^* = UU^*$ et $U^*U \leqslant TT^*$. Si $U = \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & t \end{smallmatrix}\right)$, on a puisque $SS^* = UU^*$, $w = t = 0$, et $xx^* = uu^* + vv^*$ et de $U^*U \leqslant TT^*$ il découle $u^*u \leqslant y^*y$ et $v^*v \leqslant z^*z$.

Lemme 1.3.10

(1) *Soit* $0 \leqslant x \leqslant y \in \mathbf{K}(E)$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in E$ *tels que* $y = \sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i,\xi_i}$,, *alors il existe* $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in E$ *tel que* $x = \sum_{i=1}^n \theta_{\zeta_i,\zeta_i}$.

(2) *Si* $\xi_1, \dots, \xi_n$, $\eta_1, \dots, \eta_n \in E$ *sont tels que* $x = \sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i,\eta_i} \geqslant 0$, *alors il existe* $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in E$ *tels que* $x = \sum_{i=1}^n \theta_{\zeta_i,\zeta_i}$.

(3) *Soit* τ *une trace sur* A. *Si* $\xi_1, \dots, \xi_n$, $\eta_1, \dots, \eta_n \in E$ *sont tels que* $\sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i,\xi_i} = \sum_{i=1}^n \theta_{\eta_i,\eta_i}$, *alors* $\tau(\sum_{i=1}^n \langle \xi_i, \xi_i \rangle) = \tau(\sum_{i=1}^n \langle \eta_i, \eta_i \rangle)$.

Démonstration

(1) Soit $S \in \mathbf{K}(A^n, E)$ tel que $\forall\, a_1, \dots, a_n \in A$, alors $S((a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n \xi_i a_i$. On a $y = SS^*$. Soit $T = x^{1/2}$. D'après la proposition 1.3.8, il existe $u \in \mathbf{K}(A^n, E)$ tel que $uu^* = x$. Soit $(\zeta_i)_{i=1}^n \in E^n$ tels que

$$\forall\, (a_1, \dots, a_n) \in A^n, \quad u((a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n \zeta_i a_i.$$

Alors on a $x = \sum_{i=1}^n \theta_{\zeta_i,\zeta_i}$.

(2) On a $\theta_{\xi_i,\eta_i} + \theta_{\eta_i,\xi_i} \leqslant \theta_{\xi_i+\eta_i,\xi_i+\eta_i}$. Donc

$$0 \leqslant x \leqslant x + x^* \leqslant \sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i+\eta_i,\xi_i+\eta_i}$$

et donc il suffit d'appliquer le résultat précédent.

(3) Soit $S, T \in \mathbf{K}(A^n, E)$ tel que

$$\forall\, a_1, \dots, a_n \in A, \quad S((a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n \xi_i a_i \quad \text{et} \quad T((a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n \eta_i a_i.$$

Alors $SS^* = TT^*$ donc d'après la proposition 1.3.8, il existe $u \in \mathbf{K}(A^n, A^n) = M_n(A)$ tel que $u^*u = S^*S$ et $uu^* = T^*T$.

$$\begin{aligned} \tau\Big(\sum_{i=1}^n \langle \xi_i, \xi_i \rangle\Big) &= \tau\Big(\sum_{i=1}^n (u^*u)_{ii}\Big) = \sum_{i,j=1}^n \tau((u_{ji})^* u_{ji}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \tau(u_{ji}(u_{ji})^*) = \sum_{j=1}^n \tau((uu^*)_{jj}) \\ &= \tau\Big(\sum_{i=1}^n \langle \eta_i, \eta_i \rangle\Big) \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.3.11. — *Soit A une C^*-algèbre, τ une trace sur A et E, F deux A-modules hilbertiens.*

(1) *Il existe une unique trace (densément définie si τ l'est) sur $\mathbf{K}(E)$ qu'on notera τ_E^m telle que si $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E$, $t_E^m\big(\sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i,\xi_i}\big) = \tau\big(\sum_{i=1}^n \langle \xi_i, \xi_i\rangle\big)$ et si $x \in \mathbf{K}(E)^+$ n'est pas de rang fini, $\tau_E^m(x) = +\infty$.*

(2) *Supposons ici que E soit un sous-A-module hilbertien de F et soit $j : \mathbf{K}(E) \to \mathbf{K}(F)$ l'inclusion canonique. Alors $t_F^m \circ j = \tau_E^m$.*

(3) *Soit $S \in \mathbf{K}(E, F)$. Alors $\tau_F^m(SS^*) = \tau_E^m(S^*S)$.*

Démonstration

(1) D'après le lemme précédent, l'application est bien définie. La démonstration montre également que c'est bien une trace si $E = A^n$ et par définition, si $u \in \mathbf{K}(A^n, E)$, alors $t_E^m(uu^*) = \tau_{A^n}^m(u^*u)$. Soit $S \in \mathbf{K}(E)$ et $T \in \mathbf{K}(A^n, E)$ tel que $SS^* = TT^*$. Alors d'après la proposition 1.3.8, il existe $u \in \mathbf{K}(A^n, E)$ tel que $S^*S = uu^*$ et $u^*u = T^*T$. Donc

$$\tau_E^m(S^*S) = \tau_{A^n}^m(u^*u) = \tau_{A^n}^m(T^*T) = \tau_E^m(SS^*).$$

Trivialement,

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, T \in \mathbf{K}(E)^+, \quad \tau_E^m(\lambda T) = \lambda \tau_E^m(T).$$

Soit $S, T \in \mathbf{K}(E)^+$. D'après le lemme 1.3.10, si $S + T$ est de rang fini, alors S et T sont de rang fini. Inversement si $S + T$ n'est pas de rang fini, alors soit S soit T n'est pas de rang fini. Donc, dans les deux cas,

$$\tau_E^m(S + T) = \tau_E^m(S) + \tau_E^m(T).$$

Donc τ_E^m est bien une trace. D'où l'assertion.

(2) En effet, $j(\mathbf{K}(E))$ s'identifie à l'algèbre des opérateurs $T \in \mathbf{K}(F)$ tel que $TF \subset E$ et $T^*F \subset E$. Soit $T \in \mathbf{K}(E)$ et soit $S \in \mathbf{K}(A^n, F)$ tel que $j(T) = SS^*$. Alors

$$\overline{\operatorname{Im}(T)} = \overline{\operatorname{Im}(SS^*)} = \overline{\operatorname{Im} S} \subset E.$$

Donc, d'après la proposition 1.3.3,

$$\exists\, S_1 \in \mathbf{K}(A^n, E) \text{ tel que } j(S_1) = S$$

et donc $T = S_1 S_1^*$. D'où le résultat.

(3) soit $\widetilde{S} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ S & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{K}(E \oplus F)$. Alors en appliquant deux fois le résultat précédent,

$$\begin{aligned} \tau_E^m(S^*S) &= \tau_{E\oplus F}^m(\widetilde{S}^*\widetilde{S}) \\ &= \tau_{E\oplus F}^m(\widetilde{S}\widetilde{S}^*) \\ &= \tau_F^m(SS^*) \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1.3.12. — *Soit E un A-module hilbertien et $\zeta_E : K_0(\mathbf{K}(E)) \to K_0(A)$ l'application canonique. Supposons τ densément définie. Alors τ_E^m est densément définie et $\tau_* \circ \zeta_E = (\tau_E^m)_*$.*

PROPOSITION 1.3.13. — *Soit A une C^*-algèbre et B un sous-C^*-algèbre héréditaire de A telle que l'idéal bilatère fermé engendré par B est A. Soit τ une trace sur B. Il existe une plus grande trace sur A qui étend τ; celle-ci est densément définie, si τ l'est.*

Démonstration. — Soit E l'idéal à gauche fermé engendré par B. Comme $E^*E \subset B$, E est naturellement muni d'une structure de B-module hilbertien en posant

$$\forall\, a, b \in E, \quad \langle a, b\rangle = a^*b.$$

L'action de A par multiplication à gauche définit un isomorphisme π de A sur $\mathbf{K}(E)$. En effet, $\forall\, a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$ et $b_1, \dots, b_n, b_1., \dots, b'_n \in B$, alors

$$\pi\Big(\sum_{i=1}^n a_ib_i(a'_ib'_i)^*\Big) = \sum_{i=1}^n \theta_{a_ib_i, a'_ib'_i} \in \mathbf{K}(E).$$

Comme tout élément de A est limite d'éléments de la forme $\sum_{i=1}^n a_ib_i(a'_ib'_i)^*$, $\pi(A) \subset \mathbf{K}(E)$. Soit $a \in A$ tel que $aE = 0$, alors $a\overline{EE^*} = 0$ (EE^* désigne l'espace vectoriel engendré par les produits d'un élément de E et d'un élément de E^*) et comme $\overline{EE^*} = A$, $a = 0$. Donc π est injectif. Alors $\tau_E^m \circ \pi$ étend τ à A. En effet,

$$\forall\, b \in B^+,\ \tau_E^m(\pi(b)) = \tau_E^m(\theta_{b^{1/2}, b^{1/2}}) = \tau(\langle b^{1/2}, b^{1/2}\rangle) = \tau(b).$$

Montrons que $\tau_E^m \circ \pi$ est la plus grande trace qui étend τ. Soit τ' une trace sur A qui étend τ. Soit $x \in A^+$, tel que $\pi(x)$ est de rang fini. Alors il existe $\xi_1, \dots, \xi_n \in E$ tels que $\pi(x) = \sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i, \xi_i}$. De plus $\forall\, i = 1, \dots, n,\ \exists\, \eta_1, \dots, \eta_n \in E$ et $b_1, \dots, b_n \in E$ tels que $\xi_i = \eta_i b_i$. D'où $x = \sum_{i=1}^n \eta_i b_i b_i^* \eta_i^*$. Alors

$$\tau'(x) = \sum_{i=1}^n \tau(b_i^*\eta_i^*\eta_i b_i) = \sum_{i=1}^n \tau_E^m(\theta_{\xi_i, \xi_i}) = \tau_E^m(\pi(x))$$

Donc $\tau_E^m \circ \pi \geqslant \tau'$. Si τ est densément définie, $\tau_E^m \circ \pi$ l'est également.

1.3.3. Traces densément définies sci. — Après avoir rappelé la définition de l'idéal de Pedersen et le lien avec les traces densément définies sci, nous étudions les traces densément définies sci sur $\mathbf{K}(E)$.

Soit A une C^*-algèbre. Soit $K(A)_0$ l'ensemble des $x \in A^+$ tels qu'il existe $y \in A^+$ tel que $xy = x$. Cet ensemble coïncide avec $\{f(x) \mid x \in A^+, f \in C_C(]0, +\infty[)\}$. Soit $K(A)^+$ l'ensemble des $x \in A^+$ tels qu'il existe $x_k \in K(A)_0,\ k = 1, \dots, n$ avec $x \leqslant \sum_{i=1}^n x_k$. Le théorème qui suit est démontré dans [**P**] (*loc. cit.* théorème 5.6.1. et proposition 5.6.2. p. 175).

THÉORÈME 1.3.14. — *L'intersection de tous les idéaux bilatères denses de A est un idéal bilatère dense autoadjoint appelé idéal de Pedersen et noté $K(A)$. En tant qu'espace vectoriel, $K(A)$ est engendré par sa partie positive qui est $K(A)^+$. De plus, pour tout $x \in A$, $x \in K(A) \Leftrightarrow xx^* \in K(A)^+$.*

Soit τ une forme linéaire positive sur I_A invariante par conjugaison par les unitaires de $\widetilde{A}$. Soit $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ l'ensemble filtrant des éléments positifs de $K(A)^+$ de norme inférieure à 1. On définit pour tout $x \in A^+$,

$$\overline{\tau}(x) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \tau(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}).$$

La proposition qui suit est contenue dans la proposition 5.6.7. de [**P**] et caractérise les traces densément définies semi-continues inférieurement (sci) :

Proposition 1.3.15. — *L'application qui à τ associe $\overline{\tau}$ établit une bijection entre les formes linéaires positives invariantes par conjugaison par les unitaires de $\widetilde{A}$ sur $K(A)$ et les traces densément définies sci sur A. L'application réciproque associe à une trace sci densément définie sur A^+, l'unique application linéaire sur $K(A)$ qui coïncide avec la restriction de cette trace sur $K(A)^+$.*

Pour toute trace τ, notons $E(\tau)$ l'épigraphe de τ.

Corollaire 1.3.16. — *Soit $\tau : A^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ une trace. L'adhérence de $E(\tau)$ est l'épigraphe de l'unique trace sci notée $\widetilde{\tau}$ qui coïncide avec τ sur $K(A)^+$.*

Démonstration. — Soit $\overline{\tau}$ la fonction dont l'épigraphe est $\overline{E(\tau)}$. Supposons d'abord que τ est densément définie. Comme $\widetilde{\tau}$ est sci, $E(\widetilde{\tau})$ est fermé et donc $\overline{E(\tau)} \subset E(\widetilde{\tau})$. Inversement, soit $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une unité approchée de A dans $K(A)^+$. Comme pour tout $x \in A^+$,

$$\widetilde{\tau}(x) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \tau(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$$

on a $E(\widetilde{\tau}) \subset \overline{E(\tau)}$ et donc $\widetilde{\tau} = \overline{\tau}$. Dans le cas général, soit I l'idéal bilatère fermé $\overline{m_\tau}$. Soit $\overline{\tau_I}$ la fonction dont l'épigraphe est $\overline{E(\tau_{|I})}$. On a $\overline{\tau}_{|I} = \overline{\tau_{|I}}$ qui est une trace sci sur I, et $\forall\, x \notin I$, $\overline{\tau}(xx^*) = \overline{\tau}(x^*x) = \infty$. D'où le résultat.

Remarque. — Comme τ et $\widetilde{\tau}$ coïncident sur $K(A)^+$, les applications linéaires associées coïncident sur l'idéal dense $K(A)$. Donc $\tau_* = (\widetilde{\tau})_*$.

Soit A une C^*-algèbre munie d'une trace densément définie sci τ et E un A-module hilbertien.

Lemme 1.3.17

(1) $\forall\, \xi \in E$, $\langle \xi, \xi\rangle \in K(A)$ *ssi* $\forall\, \eta \in E$, $\langle \xi, \eta\rangle \in K(A)$.

(2) *Soit $T, S \in \mathbf{K}(E)^+$ tel que $TS = T$, alors T est de rang fini.*

(3) *Soit $T \in \mathbf{K}(E)^+$. Alors il existe $\xi_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \theta_{\xi_n,\xi_n}$ est normiquement convergente vers T. En particulier, pour tout $T \in \mathbf{K}(E)^+$, $\exists\, S \in \mathbf{K}(E, \mathbb{H}_A)$ tel que $T = S^*S$.*

Démonstration

(1) Soit $\xi \in E$ tel que $\langle \xi, \xi \rangle \in K(A)^+$. Soit $\eta \in E$. Alors

$$\langle \xi, \eta \rangle \langle \eta, \xi \rangle \leqslant \|\eta\|^2 \langle \xi, \xi \rangle \in K(A)^+.$$

Donc $\langle \xi, \eta \rangle \in K(A)$.

(2) En effet, $T \in K(A)_0$ et donc est dans tout idéal bilatère dense. Comme l'espace des opérateurs de rang fini est un idéal bilatère dense, T est de rang fini.

(3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C(\mathrm{Sp}(T))^+$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est nulle au voisinage de 0 et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément vers la fonction identité. Alors $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_n$ avec

$$0 \leqslant T_n = f_n(T) \in K(\mathbf{K}(E))_0.$$

Donc il existe $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \theta_{\xi_n,\xi_n}$ converge normiquement vers T. Alors $\forall\, p \leqslant q,\ \forall\, \xi \in E$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} \langle \xi_n, \xi \rangle^* \langle \xi_n, \xi \rangle &= \sum_{n=p}^{q} \langle \xi, \theta_{\xi_n,\xi_n}(\xi) \rangle \\ &\leqslant \langle \xi, \xi \rangle \times \Big\| \sum_{n=p}^{q} \theta_{\xi_n,\xi_n} \Big\|\end{aligned}$$

Donc l'application qui à $\xi \in E$ associe $(\langle \xi_n, \xi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ définit un élément $S \in \mathbf{K}(E, \mathbb{H}_A)$ et $T = S^*S$. D'où le résultat.

PROPOSITION 1.3.18. — *Soit τ une trace densément définie sci sur A. Soit E un A-module hilbertien.*

(1) *Il existe une unique trace sci notée τ_E sur $\mathbf{K}(E)$ telle que pour tout $\xi \in E$, on a :*

$$\tau_E(\theta_{\xi,\xi}) = \tau(\langle \xi, \xi \rangle).$$

(2) *Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \theta_{\xi_n,\xi_n}$ converge vers un élément $T \in \mathbf{K}(E)$. Alors :*

$$\tau_E(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(\langle \xi_n, \xi_n \rangle).$$

(3) *Soit F un A-module hilbertien, E un sous-A-module hilbertien de F. Alors $(\tau_F)_{|\mathbf{K}(E)^+} = \tau_E$.*

(4) *Soit E_1 et E_2 deux A-modules hilbertiens. Soit $S \in \mathbf{K}(E_1, E_2)$. Alors $\tau_{E_2}(SS^*) = \tau_{E_1}(S^*S)$.*

Démonstration

(1) Soit $\widetilde{\tau}$ une telle trace. Pour tous ξ, η, $\theta_{\xi,\eta}$ est combinaison linéaire des $\theta_{\xi+i^k\eta,\xi+i^k\eta}, k \in \{0,1,2,3\}$. En particulier, soit $\xi, \eta \in E$ tels que $\langle \xi, \xi \rangle, \langle \eta, \eta \rangle \in K(A)$. D'après le lemme qui précède, $\forall\, k \in \{0,1,2,3\}$, $\langle \xi + i^k\eta, \xi + i^k\eta \rangle \in K(A)$, et donc $\theta_{\xi,\eta} \in m_{\widetilde{\tau}}$. De plus, d'après le lemme précédent également, les sommes finies

de tels opérateurs $\theta_{\xi,\eta}$ forment un idéal bilatère I dense. Donc $(\widetilde{\tau})'$ est finie et entièrement déterminée sur I et donc a fortiori sur $K(\mathbf{K}(E))$. D'où l'unicité. On a déjà construit une trace t_E^m qui vérifie la formule souhaitée. Montrons que la régularisée sci $\widetilde{\tau}$ de cette trace convient. Soit $T \in \mathbf{K}(E)^+$ de rang fini. Comme $\widetilde{\tau}(T) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \tau_E^m(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$ où $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est l'unité approchée de $\mathbf{K}(E)$ formé des opérateurs positifs de norme $\leqslant 1$ dans $K(\mathbf{K}(E))$, il suffit de montrer que si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs telle que $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$, avec T de rang fini et $\forall\, n \in \mathbb{N}, T_n \leqslant T$, alors $\liminf \tau_E^m(T_n) = \tau_E^m(T)$. Soit $S \in \mathbf{K}(A^m, E)$ tel que $T = SS^*$ et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. D'après la démonstration de la proposition 1.3.8, il existe $u_i^n \in \mathbf{K}(E, A^m)$, $i = 1, 2$ tels que

$$u_1^n(u_1^n)^* + u_2^n(u_2^n)^* = S^*S, \quad (u_1^n)^*(u_1^n) = T_n \quad \text{et} \quad (u_2^n)^*(u_2^n) = SS^* - T_n.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_2^n = 0$. Puisque $\tau_{A^m}^m$ est sci, $\tau_E^m(T_n) = \tau_{A^m}^m(u_1^n(u_1^n)^*)$ tend vers $\tau_{A^m}^m(S^*S) = \tau_E^m(SS^*)$.

(2) C'est vrai pour les sommes finies et comme τ_E est sci,

$$\tau_E(T) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{0\leqslant n\leqslant N} \tau(\langle \xi_n, \xi_n\rangle).$$

(3) En effet, ces deux traces sci sont finies et coïncident sur l'idéal bilatère dense de $\mathbf{K}(E)$ engendré par

$$\{\theta_{\xi,\eta} \mid \xi, \eta \in E, \langle \xi, \xi\rangle, \langle \eta, \eta\rangle \in K(A)^+\}$$

et donc sur $K(A)^+$.

(4) Il suffit d'appliquer deux fois le résultat précédent avec $F = E_1 \oplus E_2$.

Remarque. — soit $\pi : A \to B$ un morphisme entre deux C^*-algèbres, τ_B une trace densément définie sci sur B et τ_A la trace induite sur A. Soit $\widetilde{\pi} : \mathbf{K}(E) \to \mathbf{K}(E \otimes_\pi B)$ le morphisme induit par π. Alors $(\tau_B)_{E\otimes_\pi B} \circ \widetilde{\pi} = (\tau_A)_E$ par unicité.

Lemme 1.3.19

(1) *Soit τ une trace densément définie sur une C^*-algèbre A, E, F deux A-modules hilbertiens, alors* $\widetilde{\tau_{E\oplus F}^m}_{|\mathbf{K}(E)} = \widetilde{\tau_E^m}$.

(2) $\widetilde{\tau_E} = (\widetilde{\tau})_E$.

Démonstration

(1) Comme

$$\forall\, x \in \mathbf{K}(E \oplus F)^+, \quad \widetilde{\tau_{E\oplus F}^m}(x) = \liminf_{y\in\mathbf{K}(E\oplus F), y\to x, y\leqslant x} \tau_{E\oplus F}^m(y),$$

cela résulte immédiatement du fait que si $x \in \mathbf{K}(E)^+$, et $y \in \mathbf{K}(E \oplus F)^+$, sont tels que $y \leqslant x$, alors $y \in \mathbf{K}(E)^+$.

(2) Appliquons l'assertion précédente avec $F = A$. Il résulte que $\widetilde{\tau_E}$ est une trace densément définie sci sur $\mathbf{K}(E)$, telle qu'il existe un prolongement à $\mathbf{K}(E \oplus A)$, dont la restriction à A est $\widetilde{\tau}$, donc cette trace est égale à $(\widetilde{\tau})_E$.

1.4. Accouplement entre les opérateurs A-Fredholm et les traces densément définies sur A

Soit E_1 et E_2 deux A-modules hilbertiens, $D \in \mathbf{L}(E_1, E_2)$. On dira que l'opérateur D est A-Fredholm s'il existe $Q \in \mathbf{L}(E_2, E_1)$ tel que $QD - 1 \in \mathbf{K}(E_1)$ et $DQ - 1 \in \mathbf{K}(E_2)$. Un opérateur A-Fredholm définit canoniquement un élément $[D] \in K_0(A)$. Dans ce paragraphe, nous donnons une formule permettant de calculer l'accouplement de $[D]$ avec les traces densément définies sur A. Enfin, nous faisons le lien avec la théorie de l'indice de Breuer.

Lemme 1.4.1. — *Soit B une algèbre de Banach unitale, I un idéal à droite (resp. à gauche, resp. bilatère) fermé, J un idéal à droite de B (resp. à gauche, resp. bilatère) dense dans I. Si $T \in B$ possède un inverse modulo I à droite (resp. à gauche, resp. des deux côtés), alors il possède un inverse modulo J à droite (resp. à gauche, resp. des deux côtés). Supposons de plus que B est gradué, que I et J sont stables par graduation et que T est pair (resp. impair). Alors on peut choisir un tel inverse pair (resp. impair).*

Démonstration. — Soit Q un inverse à droite (resp. à gauche) modulo I. Soit $S = 1 - DQ \in I$ (resp. $1 - QD \in I$) et $S_0 \in J$ tel que $\|S - S_0\| \leqslant 1/2$. Soit

$$Q' = Q(1 - (S - S_0))^{-1} \quad (\text{resp. } Q' = (1 - (S - S_0))^{-1}Q).$$

Alors

$$DQ' - 1 = (1 - S)(1 - (S - S_0))^{-1} - 1 \quad (\text{resp. } Q'D - 1 = (1 - (S - S_0))^{-1}(1 - S) - 1)$$

est dans J. Si I et J sont des idéaux bilatères et si T est inversible des deux cotés modulo I, d'après ce qui précède, il est inversible modulo J à gauche et à droite et donc inversible. Supposons de plus que B est gradué, que I et J sont stables par graduation et que T est pair (resp. impair). Soit ε l'automorphisme associé à la graduation et soit Q l'inverse trouvé précédemment. Alors $1/2(Q + \varepsilon(Q))$ (resp. $1/2(Q - \varepsilon(Q))$) convient.

Soit $D \in \mathbf{L}(E_1.E_2)$ un opérateur A-Fredholm. On peut décrire $[D]$ de la façon suivante. Soit Q un quasi-inverse de D, soit $S_1 = 1 - DQ$, $S_2 = 1 - QD$ et

$$p = \begin{pmatrix} 1 - S_1^2 & (S_1 + S_1^2)D \\ S_2 Q & S_2^2 \end{pmatrix}.$$

Alors on a $[D] = \zeta_{E_1 \oplus E_2}([p])$ où $[p]$ est la classe de p dans $K_0(\mathbf{K}(E_1 \oplus E_2)) \subset K_0(A)$.

Soit τ une trace densément définie sci sur A. Soit τ' une trace sur $\mathbf{K}(E_1 \oplus E_2)$ telle que pour tout $\xi \in E_1 \oplus E_2$, $\tau'(\theta_{\xi,\xi}) = \tau(\langle \xi, \xi \rangle)$. On note également τ' l'extension linéaire de τ' à $m_{\tau'}$.

Proposition 1.4.2. — *Il existe $Q \in \mathbf{L}(E_2, E_1)$ tel que $S_1 = 1_{E_2} - DQ \in m_{\tau'}$ et $S_2 = 1_{E_1} - QD \in m_{\tau'}$ et pour tout tel Q, on a :*

$$\tau_*([D]) = \tau'(S_2) - \tau'(S_1).$$

Démonstration. — Appliquons le lemme précédent à $B = \mathbf{L}(E_1 \oplus E_2)$, $I = \mathbf{K}(E_1 \oplus E_2)$, $J = m_{\tau'}$, et à l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}(E_1 \oplus E_2)$ ($m_{\tau'}$ est bien stable par graduation puisque l'automorphisme associé est intérieur). Il s'ensuit qu'il existe $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & Q_2 \\ Q_1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}(E_1 \oplus E_2)$ tels que $1 - TQ, 1 - QT \in m_{\tau'}$. Comme $1 - DQ_1^*, 1 - Q_2 D \in m_{\tau'}$, $Q_2 - Q_1^* = (Q_2 D - 1)Q_1^* + Q_2(1 - DQ_1^*) \in m_{\tau'}$. Donc Q_2 convient. La seconde assertion résulte du lemme 1.1.1 appliqué à $A = \mathbf{L}(E_1 \oplus E_2)$, J, et de la proposition 1.3.6.

Proposition 1.4.3. — *Soit $X = \mathrm{Sp}(D^*D) \cup \{0\}$. Soit $f \in C(X)$ nulle au voisinage du spectre de $q(D^*D)$ (où $q : \mathbf{L}(E_1) \to \mathbf{L}(E_1)/\mathbf{K}(E_1)$). Alors $f(D^*D) \in m_{\tau'}$ et $f(DD^*) \in m_{\tau'}$. Si de plus $f(0) = 1$, on a :*

$$\langle [D], \tau \rangle = \tau'(f(D^*D)) - \tau'(f(DD^*)) \tag{1}$$

Démonstration. — Soit $f \in C(X)^+$ nulle au voisinage du spectre de Z où $Z = \mathrm{Sp}(q(D^*D))$. Soit $g \in C(X)^+$ égale à 1 sur le support de f et nulle au voisinage de Z. Alors $f(D^*D) = f(D^*D)g(D^*D)$, $f(DD^*) = f(DD^*)g(DD^*)$, $g(D^*D) \in \mathbf{K}(E_1)$, $g(DD^*) \in \mathbf{K}(E_2)$. Donc $f(D^*D)$, $f(DD^*) \in K(\mathbf{K}(E_1 \oplus E_2))$ et a fortiori $f(D^*D), f(DD^*) \in m_{\tau'}$. Par linéarité en f, c'est vrai également pour toute fonction $f \in C(X)$ nulle au voisinage de Z.

Montrons que si $f \in C(X)$ est telle que f est nulle au voisinage de Z et $f(0) = 0$, alors

$$\tau'(f(D^*D)) = \tau'(f(DD^*))\cdot \tag{2}$$

A nouveau par linéarité, il suffit de considérer le cas où f est positive. Soit $Y = \{t \in \mathbb{R} \mid t^2 \in X\}$. Alors $\mathrm{Sp}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \subset Y$. Soit $g \in C(Y)$ la fonction impaire telle que $\forall\, t \in Y,\ (g(t))^2 = f(t^2)$ et $S \in \mathbf{K}(E_1, E_2)$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & S^* \\ S & 0 \end{smallmatrix}\right) = g\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Alors $\left(g\left(\begin{smallmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)^2 = f\left(\left(\begin{smallmatrix} D^*D & 0 \\ 0 & DD^* \end{smallmatrix}\right)\right)$ donc $S^*S = f(D^*D)$ et $SS^* = f(DD^*)$ d'où la formule (2).

Pour démontrer la formule (1), il suffit donc de supposer que f est égale à 1 au voisinage de 0. Soit g une fonction continue sur $\mathrm{Sp}(D^*D) \cup \{0\}$ telle que $1 - xg = f$. Posons $Q = D^*g(DD^*) = g(D^*D)D^* \in \mathbf{L}(E_2, E_1)$. On a $1 - DQ = f(DD^*)$ et $1 - QD = f(D^*D)$. La formule résulte alors de la proposition précédente.

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Von Neumann et $t : \mathfrak{A}^+ \to [0, +\infty]$ une trace normale semifinie sur $\mathfrak{A}$. Appelons m_f l'idéal engendré par les projections de $\mathfrak{A}$ de trace finie. Il coïncide avec l'ensemble des éléments x de $\mathfrak{A}$ tels qu'il existe une projection de trace finie E telle que $x = Ex$. Évidemment, $m_f \subset m_t$.

Lemme 1.4.4. — *$\overline{m_f} = \overline{m_t}$ (l'adhérence désigne l'adhérence normique).*

Démonstration. — Soit $x \in m_\tau^+$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit p_ε le projecteur spectral sur $[\varepsilon, +\infty] \cap \mathrm{Sp}(x)$. Alors $p_\varepsilon \leqslant x/\varepsilon$. Donc $p_\varepsilon \in m_f$. Or $x = \lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon x$, d'où $x \in \overline{m_f}$. Le résultat découle alors du fait que m_t est engendré en tant qu'espace vectoriel par sa partie positive.

Soit $T \in \mathfrak{A}$. On désignera par $\operatorname{Ker} T$ aussi bien son noyau que la projection orthogonale sur son noyau qui appartient à $\mathfrak{A}$. Rappelons que les éléments de $\overline{m_f}$ sont appelés dans [**Br**] opérateurs compacts généralisés, et les opérateurs inversibles modulo $\overline{m_f}$ sont appelés opérateurs Fredholm généralisés. Soit $q : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\overline{m_f}$.

Lemme 1.4.5. — *Soit $T \in \mathfrak{A}$ un opérateur Fredholm généralisé, alors* $\operatorname{Ker}(T)$, $\operatorname{Ker}(T^*) \in m_f$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\operatorname{Sp}(q(T^*T)) \subset [\varepsilon, +\infty[$. Soit $f \in C(\operatorname{Sp}(T^*T) \cup \{0\})^+$ telle que $f(0) = 1$ et $\forall\, t \geqslant \varepsilon, f(t) = 0$. Alors $f(T^*T) \in \overline{m_f}$ et $\operatorname{Ker}(T) \leqslant f(T^*T)$. Donc $\operatorname{Ker}(T) \in \overline{m_f}$ et comme $\operatorname{Ker}(T)$ est une projection, $\operatorname{Ker}(T) \in K(\overline{m_f}) \subset m_f$. Quitte à changer T en T^*, on a également $\operatorname{Ker}(T^*) \in m_f$.

Définition 1.4.6. — Soit $T \in \mathfrak{A}$ un opérateur Fredholm généralisé. On définit son indice de Breuer :

$$I(T) = t(\operatorname{Ker}(T)) - t(\operatorname{Ker}(T^*)).$$

Soit $A = \overline{m_f}$. La restriction de t à A est densément définie et sci. A tout opérateur T Fredholm au sens de Breuer, correspond un élément $[T] \in K_0(\overline{m_f})$.

Proposition 1.4.7. — *Soit T un opérateur Fredholm généralisé. On a :*

$$I(T) = \langle [T], t\rangle.$$

Démonstration. — Considérons T comme opérant sur le C^*-module A et appliquons la proposition 1.4.3. Soit $X = \operatorname{Sp}(T^*T) \cup \{0\} \setminus \operatorname{Sp}(q(T^*T))$. L'application qui à $f \in C_C(X)$ associe $t(f(T^*T))$ (resp. $t(f(TT^*))$) est à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et définit une mesure de Radon μ^+ (resp. μ^-) sur X et comme la trace est normale, $\mu^+(f) = t(f(T^*T))$ et $\mu^-(f) = t(f(TT^*))$, pour toute fonction borélienne positive bornée sur X. La proposition 1.4.3 dit que pour toute fonction $f \in C_C(X)$ égale à 1 en 0, $\mu^+(f) - \mu^-(f) = \langle [T], t\rangle$. La formule est donc encore valable avec $f = \chi_0$ la fonction caractéristique de $\{0\}$. D'où le résultat.

CHAPITRE 2

Γ-TRACE

Dans ce chapitre, nous définissons la notion de Γ-trace dans le cadre des modules hilbertiens équivariants et nous étudions ses propriétés. En particulier, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la Γ-trace (théorème 2.2.6). Un cas particulier est celui où l'action de Γ est propre.

2.1. Traces sur les multiplicateurs

Soit A une C^*-algèbre. Rappelons que $K(A)$ désigne l'idéal de Pedersen de A. Soit $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ l'unité approchée croissante de A formée des éléments de norme $\leqslant 1$ de $K(A)^+$. Soit $\mathbf{M}(A)$ la C^*-algèbre formée des multiplicateurs de A. Munissons $\mathbf{M}(A)^+ \times \mathbb{R}^+$ de la topologie produit de la topologie stricte sur $\mathbf{M}(A)^+$ et de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^+$. Une trace sur $\mathbf{M}(A)$ sera dite *strictement sci* si son épigraphe est fermé pour cette topologie.

Proposition 2.1.1. — *Soit A une C^*-algèbre. Soit τ une trace sur A densément définie. Il existe une unique trace $\widetilde{\tau}$ strictement sci sur $\mathbf{M}(A)$ qui coïncide avec τ sur $K(A)^+$. On a $\forall\, x \in M(A)^+$,*

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}(x) &= \sup_{y\leqslant x, y\in K(A)^+} \tau(y)\\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \tau(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})\end{aligned}$$

Démonstration. — Pour $x \in \mathbf{M}(A)^+$, posons $\widetilde{\tau}(x) = \sup_{y\leqslant x, y\in K(A)^+} \tau(y)$. Évidemment $\widetilde{\tau}$ coïncide avec τ sur $K(A)^+$. Soit $x \in \mathbf{M}(A), y \in K(A)^+$ tels que $y \leqslant x^*x$. Alors d'après la proposition 1.3.8, il existe $u \in \mathbf{M}(A)$, tel que $y = uu^*$ et $u^*u \leqslant xx^*$. Donc $u \in K(A)$. Donc $\widetilde{\tau}(xx^*) \geqslant \widetilde{\tau}(x^*x)$ et par symétrie, il y a égalité. Soit $x, y \in \mathbf{M}(A)^+$ et $z \in K(A)^+$ tels que $z \leqslant x + y$. D'après le corollaire 1.3.9, il existe $u_1, u_2 \in \mathbf{M}(A)$ tels que $u_1^*u_1 \leqslant x$, $u_2^*u_2 \leqslant y$ et $u_1u_1^* + u_2u_2^* = z$. D'où $u_1, u_2 \in K(A)$ et donc $\widetilde{\tau}(x + y) \leqslant \widetilde{\tau}(x) + \widetilde{\tau}(y)$. Trivialement, on a l'inégalité inverse d'où l'égalité. Ainsi, $\widetilde{\tau}$

est une trace. Soit $x \in \mathbf{M}(A)^+$. Soit $\varepsilon > 0$ et $y \in K(A)^+$, tel que $\tau(y)+\varepsilon \geqslant \widetilde{\tau}(x)$. On a $\lim_{\lambda\in\Lambda} \tau(u_\lambda^{1/2} y u_\lambda^{1/2}) = \tau(y)$ (car ceci est vrai si τ est densément définie sci sur A, et on peut s'y ramener puisque $y \in K(A)^+$), donc

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\in\Lambda} \tau(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \tau(u_\lambda^{1/2} x u_\lambda^{1/2})\\ &\geqslant \tau(y)\\ &\geqslant \widetilde{\tau}(x) - \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{\tau}(x) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \tau(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$. Montrons enfin qu'une trace τ' sur $\mathbf{M}(A)$ est strictement sci ssi $\forall\, x \in M(A)^+$, $\tau'(x) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \tau'(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$ ce qui achèvera de démontrer la proposition. La condition est nécessaire puisque $\forall\, x \in \mathbf{M}(A)^+$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2} \leqslant x$ et $(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})_{\lambda\in\Lambda}$ converge strictement vers x. Inversement soit $(x_\mu)_{\mu\in M}$ une famille d'éléments de $\mathbf{M}(A)^+$ qui converge strictement vers $x \in \mathbf{M}(A)^+$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $u_\lambda \in K(A)^+$ tel que $\tau'(x) \leqslant \tau'(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) + \varepsilon$. Comme $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $(u_\lambda^{1/2} x_\mu u_\lambda^{1/2})_{\mu\in M}$ converge normiquement vers $u_\lambda^{1/2} x u_\lambda^{1/2}$ qui est dans $K(A)^+$, on a :

$$\begin{aligned}\liminf_{\mu\in M} \tau'(u_\lambda^{1/2} x_\mu u_\lambda^{1/2}) &\geqslant \tau'(u_\lambda^{1/2} x u_\lambda^{1/2})\\ &\geqslant \tau'(x) - \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $\liminf_{\mu\in M} \tau'(x_\mu) \geqslant \tau'(x)$. D'où l'assertion.

Soit E un C^*-module. On identifie $\mathbf{L}(E)$ à $\mathbf{M}(\mathbf{K}(E))$ et on le munit de la topologie stricte via cet isomorphisme. On pourra ainsi parler de trace strictement sci pour toute sous-C^*-algèbre de $\mathbf{L}(E)$ strictement fermée.

Corollaire 2.1. — *Soit τ une trace densément définie sci sur une C^*-algèbre A.*

(1) *Il existe un unique prolongement strictement continu à $\mathbf{M}(A)$. On le notera également τ.*

(2) *Soit E un A-module hilbertien. Il existe une unique trace strictement continue sur $\mathbf{L}(E)$ qu'on notera τ_E telle que $\forall\, \xi \in E$, $\tau_E(\theta_{\xi,\xi}) = \tau(\langle \xi, \xi\rangle)$.*

Démonstration

(1) La proposition précédente implique l'unicité et, combinée à la formule de la démonstration du corollaire 1.3.16, l'existence.

(2) Cela résulte directement de l'assertion précédente, de la proposition 1.3.18 et de cette même formule.

Remarque. — Étant donnée une trace sci τ sur une C^*-algèbre A non nécessairement densément définie et E un A-module hilbertien, on notera plus généralement τ_E la trace strictement sci sur $\mathbf{L}(E)$ obtenue en composant la trace $(\tau_{|\overline{m_\tau}})_{E\otimes_A \overline{m_\tau}}$ avec le morphisme strictement continu $\mathbf{L}(E) \to \mathbf{L}(E \otimes_A \overline{m_\tau})$.

Nous utiliserons plus loin la généralisation du théorème de Fubini qui suit :

LEMME 2.1.2. — *Soit A une C^*-algèbre possédant un élément strictement positif, τ une trace densément définie sci sur A, E un A-module hilbertien dénombrablement engendré. Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini muni d'une mesure de Radon positive μ et $T : X \to \mathbf{L}(E)^+$ une application strictement continue telle que $\int T(x)d\mu(x)$ est strictement convergente. Alors*

$$\tau_E\Big(\int T(x)d\mu(x)\Big) = \int \tau_E(T(x))d\mu(x).$$

Démonstration. — Quitte à remplacer A par $\mathbf{K}(E)$, on peut supposer que $E = A$ et que τ est une trace strictement sci sur $\mathbf{M}(A)$, densément définie sur A. Soit $u \in m_\tau^+$ tel que $u \leqslant 1$ et soit K un compact de X. Comme $\tau(u^{1/2} \cdot u^{1/2})$ est normiquement continue sur $\mathbf{M}(A)^+$ et comme $x \to u^{1/2}T(x)u^{1/2}$ est normiquement continue, on a

$$\begin{aligned}\int_K \tau(uT(x)u)d\mu(x) &= \int_K \tau\big(u^{1/2}(u^{1/2}T(x)u^{1/2})u^{1/2}\big)d\mu(x)\\ &= \tau\Big(u^{1/2}\Big(\int_K u^{1/2}T(x)u^{1/2}d\mu(x)\Big)u^{1/2}\Big)\\ &= \tau\Big(\int_K uT(x)ud\mu(x)\Big)\end{aligned}$$

Soit $h > 0$ dans A^+. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $C_C(\mathrm{Sp}(h) \setminus \{0\})^+$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \geqslant 1/n$, $f_n(t) = 1$. Soit $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = f_n(h)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une unité approchée pour A dans m_τ^+. Soit K_n une suite de compacts de X telle que $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend strictement vers 1, on a $\forall\, x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} \tau(u_nT(x)u_n) = \tau(T(x))$ (la convergence est normique) et $\lim_{m\to+\infty, n\to+\infty} \int_{K_m} u_nT(x)u_nd\mu(x) = \int T(x)d\mu(x)$ (où la limite est stricte). Donc :

$$\begin{aligned}\tau\Big(\int T(x)d\mu(x)\Big) &= \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \tau\Big(\int_{K_m} u_nT(x)u_nd\mu(x)\Big)\\ &= \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \int_{K_m} \tau\big(u_nT(x)u_n\big)d\mu(x)\\ &= \int_X \tau(T(x))d\mu(x)\end{aligned}$$

2.2. Notion de Γ-trace

Soit A une Γ-algèbre munie d'une trace τ densément définie sci Γ-invariante.

Soit E un A-module hilbertien équivariant, ce qui signifie que $\forall\, \xi, \eta \in E$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $\langle \gamma\xi, \gamma\eta\rangle = \gamma(\langle \xi, \eta\rangle)$. On notera $\forall\, T \in \mathbf{L}(E)$, et $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $T_\gamma = \gamma T \gamma^{-1} \in \mathbf{L}(E)$ et on considérera $\mathbf{L}(E)$ comme muni de l'action de Γ définie par $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $T \in \mathbf{L}(E)$, $\gamma \cdot T = T_\gamma$.

LEMME 2.2.1. — *τ_E est Γ-invariante.*

Démonstration. — Soit $\xi \in E$, $\gamma \in \Gamma$.

$$\begin{aligned}\tau_E(\gamma.\theta_{\xi,\xi} \cdot \gamma^{-1}) &= \tau_E(\theta_{\gamma\cdot\xi,\gamma\cdot\xi}) \\ &= \tau(\langle \gamma\cdot\xi, \gamma\cdot\xi\rangle) \\ &= \tau(\gamma\cdot\langle\xi,\xi\rangle) \\ &= \tau(\langle\xi,\xi\rangle) \\ &= \tau_E(\theta_{\xi,\xi})\end{aligned}$$

Donc les deux traces strictement sci τ_E et $\tau_E(\gamma\cdot\gamma^{-1})$ coïncide sur $K(\mathbf{K}(E))^+$ donc sont égales.

Rappelons également que $\{T \in \mathbf{L}(E) \mid \forall\gamma\in\Gamma,\ \gamma T\gamma^{-1} = T\}$ est une sous-C^*-algèbre de $\mathbf{L}(E)$ qu'on notera $\mathbf{L}(E)^\Gamma$. En effet, soit $S \in \mathbf{L}(E)^\Gamma$, $\eta, \xi \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \eta, \gamma S^*\gamma^{-1}\xi\rangle &= \gamma(\langle\gamma^{-1}\eta, S^*\gamma^{-1}\xi\rangle) \\ &= \gamma(\langle S\gamma^{-1}\eta, \gamma^{-1}\xi\rangle) \\ &= \gamma(\langle\gamma^{-1}S\eta, \gamma^{-1}\xi\rangle) \\ &= \langle S\eta, \xi\rangle \\ &= \langle\eta, S^*\xi\rangle\end{aligned}$$

Théorème 2.2.2. — *Soit $h \in \mathbf{L}(E)^+$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma}(h_\gamma)^2$ converge strictement vers 1. Alors l'application qui à $T \in (\mathbf{L}(E)^\Gamma)^+$ associe $\tau_E(hTh)$ est une trace strictement sci sur $\mathbf{L}(E)^\Gamma$. Celle-ci est indépendante du choix d'un tel opérateur $h \in \mathbf{L}(E)$ et sera notée τ_E^Γ.*

Démonstration. — Soit $h, k \in \mathbf{L}(E)^+$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma}(h_\gamma)^2$ et $\sum_{\gamma\in\Gamma}(k_\gamma)^2$ convergent strictement vers 1. Soit $S \in \mathbf{L}(E)^\Gamma$. On a :

$$\begin{aligned}\tau_E(kS^*Sk) &= \tau_E\Big(kS^*\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2\Big)Sk\Big) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\tau_E\big((kS^*h_\gamma)(h_\gamma Sk)\big) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\tau_E\big((h_\gamma Sk)(kS^*h_\gamma)\big) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\tau_E\big(\gamma^{-1}h_\gamma Sk^2S^*h_\gamma\gamma\big) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\tau_E\big(hSk_{\gamma^{-1}}^2S^*h\big) \\ &= \tau_E\Big(hS\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}k_{\gamma^{-1}}^2\Big)S^*h\Big) \\ &= \tau_E(hSS^*h)\end{aligned}$$

En prenant $h = k$, on en déduit que τ_E^Γ est bien une trace et elle ne dépend pas du choix d'un tel h. Il est évident qu'elle est strictement sci puisque τ_E l'est. D'où le résultat.

Remarques

(1) Évidemment, il n'existe pas toujours de tels $h \in \mathbf{L}(E)^+$. En particulier, il n'en existe jamais si l'action de Γ sur E est triviale et Γ est infini.

(2) Soit F un sous-A,Γ-module hilbertien équivariant orthocomplémenté de E et p_F le projecteur orthogonal sur F, et soit $h \in \mathbf{L}(E)^+$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2$ converge strictement vers 1, alors la restriction à F de $h_F = (p_F h^2 p_F)^{1/2}$ possède les mêmes propriétés pour F.

On munit $L^2(\Gamma)\otimes A$ d'une structure V de A,Γ-module hilbertien équivariant en posant $\forall\,\xi \in L^2(\Gamma)\otimes A,\ \forall\,\gamma_0, \forall\,\gamma\in\Gamma,\ V(\gamma_0)(\xi)(\gamma) = \gamma_0(\xi(\gamma\gamma_0))$. On notera $VN(\Gamma, A)$ le commutant de $V(\Gamma)$, *i.e.* $\mathbf{L}(L^2(\Gamma)\otimes A)^\Gamma$. Notons $\forall\,\gamma\in\Gamma,\ \delta_\gamma \in L^2(\Gamma)$ la fonction caractéristique de γ et soit h le projecteur orthogonal sur $\mathbb{C}\delta_e \otimes A$. Évidemment, $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2$ converge strictement vers 1. On notera simplement $\tau\otimes\tau^\Gamma$ la trace $\tau^\Gamma_{L^2(\Gamma)\otimes A}$. On a une représentation covariante canonique de A,Γ dans $VN(\Gamma,A)$ notée λ_Γ^A telle que $\forall\,\xi\in L^2(\Gamma)\otimes A,\ \forall\,\gamma_0,\ \gamma\in\Gamma,\ \forall\,a\in A,\ \lambda_\Gamma^A(\gamma_0)(\xi)(\gamma) = \xi(\gamma_0^{-1}\gamma)$ et $\lambda_\Gamma^A(a)(\xi)(\gamma) = \gamma^{-1}(a)\xi(\gamma)$. Celle-ci induit un morphisme injectif noté également λ_Γ^A de $A\rtimes_r\Gamma$ dans $VN(\Gamma,A)$. On identifiera par λ_Γ^A, $A\rtimes_r\Gamma$ et son image dans $VN(\Gamma,A)$. Notons que par définition, $\forall\,x\in C_C(\Gamma,A)\cap(A\rtimes_r\Gamma)^+$, on a $(\tau\otimes\tau^\Gamma)(x) = \tau(x(e))$ et donc la restriction à $A\rtimes_r\Gamma$ de $\tau\otimes\tau^\Gamma$ qu'on notera également $\tau\otimes\tau^\Gamma$ est densément définie, et comme la topologie normique est plus fine que la topologie stricte, cette trace est sci.

Proposition 2.2.3. — *Soit B une sous-C^*-algèbre de $VN(\Gamma,A)$ qui agit de façon non dégénérée, E un B-module hilbertien dénombrablement engendré et soit $F = E\otimes_{\lambda_\Gamma^A}(L^2(\Gamma)\otimes\widetilde{A})$ muni de sa structure de A,Γ-module hilbertien équivariant. Alors :*

(1) *Il existe $h\in\mathbf{L}(F)^+$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2$ converge strictement vers 1.*

(2) *On suppose que $\tau\otimes\tau^\Gamma$ est densément définie sur B. On a alors :*

$$\forall\,T\in\mathbf{L}(E)^+,\quad (\tau\otimes\tau^\Gamma)_E(T) = \tau_F^\Gamma(T\otimes_{\lambda_\Gamma^A} 1).$$

Démonstration

(1) Supposons d'abord que $E = \mathbb{H}\otimes B$ de sorte que $F = \mathbb{H}\otimes L^2(\Gamma)\otimes A$. Il suffit de prendre pour h le projecteur orthogonal sur $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\delta_e\otimes A$.

Passons au cas général. D'après le théorème de stabilisation de Kasparov, on a un isomorphisme $E\oplus\mathbb{H}\otimes B \simeq \mathbb{H}\otimes B$ d'où $F\oplus(\mathbb{H}\otimes L^2(\Gamma)\otimes A)\simeq\mathbb{H}\otimes L^2(\Gamma)\otimes A$ en tant que A,Γ-module hilbertien équivariant. D'après la dernière remarque qui précède, il existe donc bien un tel h.

(2) Soit alors $E' = E\oplus B$ et $F' = E'\otimes_B(L^2(\Gamma)\otimes A)$. La trace τ_F^Γ est restriction à $\mathbf{L}(F)^\Gamma$ d'une trace strictement sci sur $\mathbf{L}(F')^\Gamma$ dont la restriction à $VN(\Gamma,A)$ est

$\tau \otimes \tau^\Gamma$. Or $\pi : \mathbf{L}(E') \to \mathbf{L}(F')^\Gamma$ est strictement sci. Donc $\tau_F^\Gamma \circ \pi_{\mathbf{L}(E)}$ est restriction à $\mathbf{L}(E)$ d'une trace strictement sci sur $\mathbf{L}(E')$ dont la restriction à B est $\tau \otimes \tau^\Gamma$, donc est égale $(\tau \otimes \tau^\Gamma)_E$. D'où le résultat.

Nous allons maintenant donner une réciproque à la proposition qui précède. Commençons par un lemme élémentaire :

Lemme 2.2.4. — *Soit B une C^*-algèbre. Soit Λ un ensemble filtré par une relation d'ordre, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille croissante d'éléments de $\mathbf{M}(B)^+$ telle que $\forall\, b \in B$, $(b^* x_\lambda b)_{\lambda\in\Lambda}$ converge dans B. Alors $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge strictement dans $\mathbf{M}(B)$.*

Démonstration. — Pour $\lambda \in \Lambda$, posons $y_\lambda = (x_\lambda)^{1/2} \in \mathbf{M}(B)$. Alors $\forall\, b \in B$, la famille $(y_\lambda b)_{\lambda\in\Lambda}$ est bornée puisque $\forall\, \lambda \in \Lambda, \|y_\lambda b\|^2 = \|b^* x_\lambda b\|$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, la famille $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est bornée et donc la famille $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ également. Enfin, $\forall\, b \in B$, et pour tous $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \in \Lambda$, on a

$$\begin{aligned}\|(x_{\lambda_2} - x_{\lambda_1})b\|^2 &= \|b^*(x_{\lambda_2} - x_{\lambda_1})^2 b\| \\ &\leqslant \Big(\sup_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|\Big) \|b^*(x_{\lambda_2} - x_{\lambda_1})b\|\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Décrivons maintenant $VN(\Gamma, A)$. En identifiant $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $\mathbb{C}\delta_\gamma \otimes A$ avec A, on considérera $\forall\, \gamma \in \Gamma$, le projecteur orthogonal de $L^2(\Gamma) \otimes A$ sur $\mathbb{C}\delta_\gamma \otimes A$ également comme un élément de $\mathbf{L}(L^2(\Gamma) \otimes A, A)$.

Proposition 2.2.5

(1) *Soit $T \in VN(\Gamma, A)$. On lui associe l'unique fonction $f : \Gamma \to \mathbf{M}(A)$ définie par $\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, a \in A,\ f(\gamma)(a) = \gamma(P_\gamma(T(\delta_e \otimes \gamma^{-1}(a))))$. On a : $\forall\, \xi, \eta \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma) \otimes A$,*

$$\langle \xi, T\eta \rangle = \sum_{\gamma_1\in\Gamma, \gamma_2\in\Gamma} (\xi(\gamma_1))^* \gamma_1^{-1}(f(\gamma_1\gamma_2^{-1}))\eta(\gamma_2) \tag{3}$$

Les sommes $\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(f(\gamma)^* f(\gamma))$ et $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) f(\gamma)^*$ sont strictement convergentes dans $\mathbf{M}(A)$ et $\forall\, \xi, \eta \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma) \otimes A$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\Big\| \sum_{\gamma_1\in\Gamma, \gamma_2\in\Gamma} (\xi(\gamma_1))^* \gamma_1^{-1}(f(\gamma_1\gamma_2^{-1}))\eta(\gamma_2) \Big\| \leqslant M \|\xi\| \|\eta\| \tag{4}$$

avec $M = \|T\|$.

(2) *Réciproquement soit $f : \Gamma \to \mathbf{M}(A)$ et $M > 0$ tels que $\forall\, \xi, \eta \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma) \otimes A$, l'inégalité 4 est vérifiée et tels que les sommes $\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(f(\gamma)^* f(\gamma))$ et $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) f(\gamma)^*$ sont strictement convergentes dans $\mathbf{M}(A)$. Alors il existe un unique opérateur $T \in VN(\Gamma, A)$ de norme $\leqslant M$ tel que $\forall\, \xi, \eta \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma) \otimes A$, l'égalité (3) est vérifiée.*

On dira dans ce cas que $f \in VN(\Gamma, A)$ en identifiant f à T. En particulier, si $\mathcal{A}$ est un sous-espace de $VN(\Gamma, A)$, on dira que $f \in \mathcal{A}$ ssi $T \in \mathcal{A}$.

Démonstration

(1) Montrons d'abord que f est bien définie à savoir que $\forall\,\gamma \in \Gamma, f(\gamma) \in \mathbf{M}(A)$. Or, $\forall\,\gamma \in \Gamma,\ a, b \in A$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \delta_\gamma \otimes b, T^*(\delta_e \otimes a)\rangle &= \langle V_\gamma^{-1} V_\gamma T V_\gamma^{-1}(\delta_e \otimes \gamma(b)), V_\gamma^{-1} V_\gamma(\delta_e \otimes a)\rangle \\ &= \gamma^{-1}\langle T(\delta_e \otimes \gamma(b)), \delta_{\gamma^{-1}} \otimes \gamma(a)\rangle \\ &= \gamma^{-1}\big(\gamma(a)^* P_\gamma^{-1}(T(\delta_e \otimes \gamma(b)))\big)^* \\ &= (f(\gamma^{-1})b)^* a\end{aligned}$$

Donc si on note g la fonction associée de la même façon à T^*, on a $\forall\,\gamma \in \Gamma, \forall\, a, b \in A$,

$$\begin{aligned}b^*\gamma^{-1}\big(g(\gamma)(\gamma(a))\big) &= \langle \delta_\gamma \otimes b, T^*(\delta_e \otimes a)\rangle \\ &= (f(\gamma^{-1})b)^* a\end{aligned}$$

et donc $f(\gamma^{-1}) \in \mathbf{M}(A)$ est d'adjoint $\gamma^{-1}(g(\gamma))$.

Le fait que $\forall\,\xi, \eta \in C_C(\Gamma, A)$ l'inégalité (4) est vérifiée avec $M = \|T\|$, résulte trivialement de l'égalité (3).

Par ailleurs, on a $\forall\,\gamma \in \Gamma, a, b \in A$, $\langle \delta_\gamma \otimes b, T(\delta_e \otimes a)\rangle = b^*\gamma^{-1}(f(\gamma))a$.

Donc $\forall\, a \in A, T(\delta_e \otimes a) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes \gamma^{-1}(f(\gamma))a \in L^2(\Gamma) \otimes A$, et

$$T^*(\delta_e \otimes a) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes f(\gamma^{-1})^* a \in L^2(\Gamma) \otimes A.$$

Le résultat découle alors du lemme élémentaire qui précède.

(2) Supposons réciproquement la seconde assertion vérifiée. Il existe un unique opérateur A, Γ-linéaire T de $C_C(\Gamma, A)$ dans $L^2(\Gamma, A)$ tel que

$$\forall\, a \in A, \quad T(\delta_e \otimes a) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes \gamma^{-1}(f(\gamma))a.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cet opérateur est de norme inférieure ou égale à M, donc s'étend en un opérateur A, Γ-équivariant de norme inférieure ou égale à 1 de $L^2(\Gamma, A)$ dans lui-même, noté encore T. De même, il existe un unique opérateur A, Γ-linéaire T^* de $C_C(\Gamma, A)$ dans $L^2(\Gamma, A)$ tel que

$$\forall\, a \in A, \quad T^*(\delta_e \otimes a) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes f(\gamma^{-1})^* a.$$

Il est immédiat que cet opérateur est inclus dans l'adjoint de T. Donc

$$T \in \mathbf{L}(L^2(\Gamma) \otimes A)^\Gamma.$$

Remarque. — Soit A une Γ-algèbre triviale et soit pour $\gamma \in \Gamma$, $f(\gamma) \in A^+$ tel que

$$\forall\,\gamma \in \Gamma,\ \|f(\gamma)\| \leqslant 1, \quad \text{et} \quad \forall\,\gamma \neq \gamma',\ f(\gamma)f(\gamma') = 0.$$

Alors $\forall\,\eta \in C_C(\Gamma, A)$, pour toute partie finie F de Γ, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in F}\Big(\sum_{\gamma_1\in\Gamma} f(\gamma_1)\eta(\gamma_1^{-1}\gamma)\Big)^*\Big(\sum_{\gamma_1\in\Gamma} f(\gamma_1)\eta(\gamma_1^{-1}\gamma)\Big)\\
&= \sum_{\gamma\in F}\eta(\gamma_1^{-1}\gamma)^*\Big(\sum_{\gamma_1\in\Gamma} f(\gamma_1)^* f(\gamma_1)\eta(\gamma_1^{-1}\gamma)\Big)\\
&\leqslant \langle\eta,\eta\rangle
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité 4 est vérifiée avec $M = 1$. En revanche, il est aisé de construire des cas où $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)f(\gamma)^*$ n'est pas strictement convergente.

Théorème 2.2.6. — *Soit F un A,Γ-module hilbertien équivariant. S'il existe $h \in \mathbf{L}(F)^+$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2$ converge strictement vers 1, alors il existe un $VN(\Gamma, A)$-module hilbertien E tel que $F \simeq E\otimes_{\lambda_\Gamma^A}(L^2(\Gamma)\otimes A)$ en tant que A,Γ-module hilbertien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $h \in \mathbf{L}(F)^+$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2$ converge strictement vers 1 et $\overline{hF}$ est dénombrablement engendré.*

(2) *Il existe un $VN(\Gamma, A)$-module hilbertien dénombrablement engendré E tel que $F \simeq E \otimes_{\lambda_\Gamma^A} (L^2(\Gamma) \otimes A)$ en tant que A,Γ-module hilbertien.*

(3) *En tant que A,Γ-module hilbertien, F est isomorphe à un facteur direct de $\mathbb{H} \otimes L^2(\Gamma) \otimes A$ où $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert séparable.*

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires. Soit F un A,Γ-module hilbertien équivariant, $\xi,\ \eta \in F$; s'il n'y a pas ambiguïté, on désignera par $\langle\xi,\eta\rangle$ la fonction de Γ dans A qui à $\gamma\in\Gamma$ associe $\langle\xi,\gamma\eta\rangle$. Soit $h \in \mathbf{L}(F)^+$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma} h\gamma^2$ converge strictement vers 1.

Proposition 2.2.7. — *$\forall\,x, y \in F$, $\langle hx, hy\rangle \in VN(\Gamma, A)$, $\langle hx, hx\rangle \in VN(\Gamma, A)^+$ et $\|\langle hx, hx\rangle\|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

Démonstration. — En fait plus généralement, pour tout A,Γ-module hilbertien F' et tout $x \in F'$, on a $\forall\,\xi \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma) \otimes A$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma_1\in\Gamma,\gamma_2\in\Gamma}(\xi(\gamma_1))^*\gamma_1^{-1}(\langle x,\gamma_1\gamma_2^{-1}x\rangle)\xi(\gamma_2) &= \sum_{\gamma_1\in\Gamma,\gamma_2\in\Gamma}(\xi(\gamma_1))^*\langle\gamma_1^{-1}x,\gamma_2^{-1}x\rangle\xi(\gamma_2)\\
&= \langle\zeta,\zeta\rangle \in A^+
\end{aligned}$$

où $\zeta = \sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{-1}x\xi(\gamma) \in F$.

Il reste donc à montrer que $\forall\,x \in F$, $\langle hx, hx\rangle \in VN(\Gamma, A)$. Posons $f(\gamma) = \langle hx, \gamma hx\rangle,\ \gamma \in \Gamma$.

Notons que $\forall\,\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma^{-1}\langle hx, \gamma hx\rangle = \langle\gamma^{-1}x, h_{\gamma^{-1}}hx\rangle$ d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1}(\langle hx,\gamma hx\rangle^*\langle hx,\gamma hx\rangle) &\leqslant \|x\|^2\langle h_{\gamma^{-1}}hx, h_{\gamma^{-1}}hx\rangle\\
&= \|x\|^2\langle hx, h_{\gamma^{-1}}^2 hx\rangle
\end{aligned}$$

dont la somme est normiquement convergente. Donc $\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{-1}(f(\gamma)^*f(\gamma))$ est normiquement convergente.

De même, comme $\langle\gamma hx, hx\rangle = \gamma\langle x, h\gamma^{-1}hx\rangle = \langle\gamma x, h_\gamma hx\rangle$, on a

$$\langle\gamma hx, hx\rangle^*\langle\gamma hx, hx\rangle \leqslant \|x\|^2\langle h_\gamma hx, h_\gamma hx\rangle = \|x\|^2\langle hx, h_\gamma^2 hx\rangle$$

dont la somme est normiquement convergente. Donc $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)f(\gamma)^*$ est normiquement convergente.

Montrons enfin que l'inégalité 4 du lemme 2.2.5 est vérifiée avec $M = \|x\|^2$. Soit $\xi \in C_C(\Gamma, F) \subset L^2(\Gamma)\otimes F$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma}\Big\langle \sum_{\gamma'\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}}h_{(\gamma')^{-1}}\xi(\gamma'), \sum_{\gamma'\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}}h_{(\gamma')^{-1}}\xi(\gamma')\Big\rangle&\\ &= \sum_{\gamma_1\in\Gamma}\sum_{\gamma_2\in\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\langle h_{\gamma_1^{-1}}\xi(\gamma_1), h^2_{\gamma^{-1}}h_{\gamma_2^{-1}}\xi(\gamma_2)\rangle\\ &= \sum_{\gamma_1\in\Gamma}\sum_{\gamma_2\in\Gamma}\langle h_{\gamma_1^{-1}}\xi(\gamma_1), h_{\gamma_2^{-1}}\xi(\gamma_2)\rangle\end{aligned}$$

D'où il ressort d'une part que l'application linéaire $T : C_C(\Gamma, F) \to L^2(\Gamma)\otimes F$ qui à $\xi \in C_C(\Gamma, F)$ associe

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_\gamma\otimes\Big(\sum_{\gamma'\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}}h_{(\gamma')^{-1}}\xi(\gamma')\Big) \in L^2(\Gamma)\otimes F$$

vérifie

$$\forall\,\xi\in C_C(\Gamma,F),\quad \langle T\xi, T\xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle.$$

Donc si $\|\xi\| \leqslant 1$ on a bien $\|T(\xi)\| \leqslant 1$, donc T s'étend en un opérateur continu de norme 1 (et en fait un projecteur de $\mathbf{L}(L^2(\Gamma)\otimes F)$).

Enfin, $\forall\,\xi \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma)\otimes A$, posons $\xi_x \in C_C(\Gamma, F) \subset L^2(\Gamma)\otimes F$ défini par $\xi_x(\gamma) = (\gamma^{-1}x)\xi(\gamma)$. Évidemment $\|\xi_x\| \leqslant \|x\|\|\xi\|$ et comme

$$\sum_{\gamma_1\in\Gamma}\xi(\gamma_1)^*\langle\gamma_1^{-1}hx, \gamma_2^{-1}hx\rangle\xi(\gamma_2) = \langle\xi_x, T(\xi_x)\rangle$$

on a

$$\Big\|\sum_{\gamma_1\in\Gamma}\xi(\gamma_1)^*\langle\gamma_1^{-1}hx, \gamma_2^{-1}hx\rangle\xi(\gamma_2)\Big\| \leqslant \|x\|^2\|\xi\|^2.$$

D'où le résultat.

Définition 2.2.8. — Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, B une C^*-algèbre. On appellera B-produit scalaire toute application $\langle\,,\rangle : \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to B$ telle que $\forall\,\xi,\eta,\zeta\in\mathcal{E},\ \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{C}$,

(1) $\langle\xi,\xi\rangle \in B^+$.
(2) $\langle\eta,\xi\rangle = \langle\xi,\eta\rangle^*$.
(3) $\langle\xi, \lambda\eta+\mu\zeta\rangle = \lambda\langle\xi,\eta\rangle + \mu\langle\xi,\zeta\rangle$.

Si en outre $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre involutive de B (non nécessairement fermée), et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{A}$-module à droite, on dira qu'un B-produit scalaire $\langle\,,\rangle$ est $\mathcal{A}$-sesquilinéaire si $\forall\,\xi,\eta\in\mathcal{E},\ \forall\,a,b\in\mathcal{A}$, on a $\langle\xi a, \eta b\rangle = a^*\langle\xi,\eta\rangle b$.

Proposition 2.2.9. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\langle\,,\rangle$ un B-produit scalaire.*

(1) *L'application qui à $\xi \in \mathcal{E}$ associe $\|\langle\xi,\xi\rangle\|^{1/2}$ est une seminorme sur $\mathcal{E}$. Soit E le séparé-complété pour cette seminorme. Alors l'application $\langle\,,\rangle$ s'étend par continuité en un B-produit scalaire noté encore $\langle\,,\rangle : E \times E \to B$. Si en outre $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre involutive de B, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{A}$-module à droite tel que $\langle\,,\rangle : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to B$ est $\mathcal{A}$-sesquilinéaire, alors l'action $\mathcal{E}\times\mathcal{A} \to \mathcal{E}$ s'étend par continuité en une action $E \times \overline{\mathcal{A}} \to E$ telle que $\langle\,,\rangle : E\times E \to B$ est $\overline{\mathcal{A}}$-sesquilinéaire.*

(2) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Il existe un B-module hilbertien F et une application linéaire $j : \mathcal{E} \to B$ telle que $\forall\,\xi,\eta \in \mathcal{E}$, $\langle j(\xi), j(\eta)\rangle = \langle\xi,\eta\rangle$.*

(b) *Il existe un B-module hilbertien F et une application linéaire $j : E \to B$ telle que $\forall\,\xi,\eta \in E$, $\langle j(\xi), j(\eta)\rangle = \langle\xi,\eta\rangle$.*

(c) *$\forall\,\xi_1,\dots,\xi_n \in \mathcal{E}$, la matrice $(\langle\xi_i,\xi_j\rangle)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n} \in M_n(B)^+$.*

Démonstration

(1) *cf.* [**Sk**].

(2) Si (2a) est vérifiée, alors l'application j est continue pour la seminorme considérée donc s'étend par continuité en une application j qui vérifie (2b). (2b) implique (2c) puisque (2c) est vérifiée quand E est un B-module hilbertien. Donc il suffit de montrer que (2c) implique (2a). Soit $\langle\,,\rangle : (\mathcal{E}\odot\widetilde{B})\odot(\mathcal{E}\odot\widetilde{B}) \to B$ l'application qui $\forall\,\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n \in \mathcal{E}$ et $\forall\,a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \widetilde{B}$ vérifie

$$\Big\langle \sum_{i=1}^n \xi_i\odot a_i, \sum_{i=1}^n \eta_i\odot b_i\Big\rangle = \sum_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n} a_i^*\langle\xi_i,\eta_j\rangle b_j.$$

Comme (2c) est vérifiée, c'est un B-produit scalaire qui est évidemment B-sesquilinéaire. Donc le séparé-complété pour la seminorme associée est un B-module hilbertien noté $E\otimes B$ d'après ce qui précède et l'application $j : \mathcal{E} \to E\otimes B$ qui à ξ associe $\xi\odot 1$ vérifie (2a).

Remarques

(1) Notons qu'un produit scalaire ne vérifie pas toujours les conditions équivalentes ci-dessus. Il suffit pour obtenir un contre-exemple de considérer une application linéaire positive ϕ entre deux C^*-algèbres A et B qui n'est pas complètement positive et de munir A du B-produit scalaire $\langle,\rangle : A\times A \to B$ qui $\forall\,a,b\in A$, vérifie $\langle a,b\rangle = \phi(a^*b)$.

(2) Quand les assertions équivalentes précédentes sont vérifiées, on notera $E\otimes B$ le B-module hilbertien obtenu en séparant-complétant $\mathcal{E}\odot\widetilde{B}$ pour le produit scalaire considéré dans la démonstration de la proposition.

Lemme 2.2.10. — *Supposons que les assertions précédentes sont vérifiées. Notons*

$$\psi : \mathcal{E}\odot\widetilde{B} \longrightarrow E\otimes B$$

l'application canonique. Soit $\pi : \widetilde{B} \to \mathbf{L}(F)$ *un morphisme unital dans un* A*-module hilbertien,* H *un autre* A*-module hilbertien. Soit* $\theta : \mathcal{E} \odot F \to H$*, et* $M > 0$ *tel que* $\forall\, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{E},\ f_1, \dots, f_n \in F$*, on a*

$$\Big\|\theta\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \odot f_i\Big)\Big\|^2 \leqslant M \Big\| \sum_{i,j=1,\dots,n} \langle f_i, \pi(\langle \xi_i, \xi_j\rangle) f_j\rangle \Big\|$$

resp. $$\Big\langle \theta\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \odot f_i\Big), \theta\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \odot f_i\Big)\Big\rangle = \sum_{i,j=1,\dots,n} \langle f_i, \pi(\langle \xi_i, \xi_j\rangle) f_j\rangle$$

(on dit alors que θ *préserve le produit scalaire)), alors il existe une unique application linéaire de norme* $\leqslant M$ *(resp. préservant le produit scalaire)* $\theta : (E \otimes B) \otimes_\pi F \to H$ *telle que* $\forall\, f_1, \dots, f_n \in F$*,* $\forall\, \xi_i^j \in \mathcal{E}$*,* $b_i^j \in \widetilde{B}$*,* $i = 1, \dots, n_j$*, on ait en posant pour* $j = 1, \dots, n$*,* $x_j = \sum_{i=1}^{n_j} \xi_i^j \odot b_i^j$*,*

$$\theta\Big(\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j) \otimes f_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \theta(\xi_i^j \odot \pi(b_i^j) f_j).$$

Démonstration. — $\forall\, f_1, \dots, f_n \in F$, $\forall\, \xi_i^j \in \mathcal{E}$, $b_i^j \in \widetilde{B}$, $i = 1, \dots, n_j$, en posant pour $j = 1, \dots, n$, $x_j = \sum_{i=1}^{n_j} \xi_i^j \odot b_i^j$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{p=1}^{n_k} \langle \pi(b_i^j) f_j, \langle \xi_i^j, \xi_p^k\rangle \pi(b_p^k)) f_k\rangle &= \sum_{j,k=1,\dots,n} \langle f_j, \langle x_j, x_k\rangle f_k\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \psi(x_j) \otimes f_j, \sum_{j=1}^{n} \psi(x_j) \otimes f_j \Big\rangle\end{aligned}$$

Or d'après les hypothèses, on a

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \theta(\xi_i^j \odot \pi(b_i^j) f_j) \Big\|^2 \leqslant M \Big\| \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{p=1}^{n_k} \langle \pi(b_i^j) f_j, \langle \xi_i^j, \xi_p^k\rangle \pi(b_p^k)) f_k\rangle \Big\|$$

resp. $$\begin{aligned}\Big\langle \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \theta(\xi_i^j \odot \pi(b_i^j) f_j), \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \theta(\xi_i^j \odot \pi(b_i^j) f_j) \Big\rangle \\ = \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{p=1}^{n_k} \langle \pi(b_i^j) f_j, \langle \xi_i^j, \xi_p^k\rangle \pi(b_p^k)) f_k\rangle.\end{aligned}$$

Le résultat en découle immédiatement.

Démonstration du théorème 2.2.6. — Montrons d'abord la première assertion. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de F engendré par les vecteurs de la forme $h_\gamma \xi,\ \gamma \in \Gamma, \xi \in F$. C'est un sous-$A, \Gamma$-module de F et donc il est muni d'une structure canonique de $C_C(\Gamma, A)$-module à droite. D'après la proposition 2.2.7, l'application

$$\langle\, ,\rangle : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow VN(\Gamma, A)$$

qui, $\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{F},\ \forall\, \gamma \in \Gamma$, vérifie $\langle \xi, \eta \rangle(\gamma) = \langle \xi, \gamma\eta \rangle$ est un produit scalaire. Celui-ci est $C_C(\Gamma, A)$-sesquilinéaire. En effet, $\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{F}$, $\forall\, f \in C_C(\Gamma, A)$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \xi, \eta \cdot f \rangle(\gamma) &= \Big\langle \xi, \gamma\Big(\sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \gamma_1^{-1}(\eta f(\gamma_1))\Big)\Big\rangle \\ &= \sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \langle \xi, \gamma\gamma_1^{-1}(\eta)\rangle \gamma\gamma_1^{-1}(f(\gamma_1)) \\ &= \langle \xi, \eta \rangle f(\gamma)\end{aligned}$$

Notons de plus que pour $i = 1, \ldots, n$, $f_i \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma) \otimes A$, et $\xi_i \in F$, on a :

$$\sum_{i,j=1,\ldots,n} f_i(\gamma)^* \langle \gamma^{-1}\xi_i, (\gamma')^{-1}\xi_j \rangle f_j(\gamma') = \langle \zeta, \zeta \rangle \in A^+$$

où $\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma \in \Gamma} (\gamma^{-1}\xi_i) f_i(\gamma)$. Donc $\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{F}$, on a

$$(\langle \xi_i, \xi_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n} \in VN(\Gamma, A)^+.$$

Soit E le séparé-complété de $\mathcal{F}$ pour la seminorme qui à $\xi \in \mathcal{F}$ associe $\|\langle \xi, \xi \rangle\|_{VN(\Gamma,A)}^{1/2}$ et $E \otimes VN(\Gamma, A)$ le module hilbertien obtenu grâce à la proposition 2.2.9. On a $\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{F}$, $\forall\, f_1, \ldots, f_n \in C_C(\Gamma, A) \subset L^2(\Gamma) \otimes A$,

$$\begin{aligned}&\Big\langle \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(\xi_i) f_i(\gamma), \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(\xi_i) f_i(\gamma) \Big\rangle \\ &\qquad = \sum_{i,j=1,\ldots,n} \sum_{\gamma,\gamma' \in \Gamma} \langle f_i(\gamma)^* \langle \gamma^{-1}(\xi_i), (\gamma')^{-1}(\xi_j) \rangle f_j(\gamma') \rangle \\ &\qquad = \sum_{i,j=1,\ldots,n} \langle f_i, \langle \xi_i, \xi_j \rangle f_j \rangle\end{aligned}$$

Donc il existe une unique application linéaire préservant le produit scalaire

$$\theta : \mathcal{F} \odot C_C(\Gamma, A) \longrightarrow F$$

telle que $\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{F}$, $\forall\, f_1, \ldots, f_n \in C_C(\Gamma, A)$,

$$\theta\Big(\sum_{i=1}^n \xi_i \odot f_i \Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(\xi_i) f_i(\gamma).$$

Comme $\forall\, \xi \in \mathcal{F}$, $\langle \xi, \xi \rangle \in VN(\Gamma, A)$, celle-ci s'étend d'une unique façon en une application θ préservant le produit scalaire de $\mathcal{F} \odot (L^2(\Gamma) \otimes A)$ dans F. D'après le lemme 2.2.10, celle-ci induit une application préservant le produit scalaire de

$$(E \otimes VN(\Gamma, A)) \otimes_{\lambda_\Gamma^A} (L^2(\Gamma) \otimes A)$$

dans F. Comme celle-ci est clairement d'image dense, c'est un isomorphisme.

Montrons l'équivalence. On a déjà montré que 2 implique 3 implique 1. Il reste à montrer que 1 implique 2. Il suffit de montrer que le $VN(\Gamma, A)$-module hilbertien $E \otimes VN(\Gamma, A)$ construit ci-dessus est dénombrablement engendré quand $\overline{hF}$ l'est.

Supposons $\overline{hF}$ dénombrablement engendré. Il existe alors une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F tel que $(h\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\overline{hF}$. Soit $\xi \in F$. Comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|\langle h\xi_n - h\xi, h\xi_n - h\xi\rangle\| \leqslant \|\xi_n - \xi\|^2,$$

et comme $hF \otimes 1$ est dense $E \otimes VN(\Gamma, A)$, la suite $(h\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre $E \otimes VN(\Gamma, A)$. D'où le résultat.

Rappelons qu'à tout $T \in VN(\Gamma, A)$ est associée une fonction $f : \Gamma \to \mathbf{M}(A)$. Soit B une sous-C^*-algèbre de $VN(\Gamma, A)$ contenant $C_C(\Gamma, A)$ et telle que $\forall\, x \in B$, la fonction f_x associée est à valeurs dans A et soit $\phi(x) \in A$ sa valeur en e. On a $\phi(x\gamma^{-1}) = f_x(\gamma)$. On notera plus simplement λ l'application λ_Γ^A. Soit $(u_\mu)_{\mu\in M}$ l'unité approchée de A formée de ses éléments positifs de norme $\leqslant 1$.

Proposition 2.2.11. — *Soit E un B-module hilbertien, $F = E \otimes_\lambda (L^2(\Gamma) \otimes A)$. Alors :*

(1) *$\forall\, \xi \in E$, la famille $(\xi \otimes (\delta_e \otimes u_\mu))_{\mu\in M}$ est convergente dans F vers un élément noté $\lambda(\xi) \in F$. L'application $\lambda : E \to F$ qui $\forall\, \xi \in E$ associe à ξ, $\lambda(\xi) \in F$ est linéaire continue et injective. On a $\forall\, \xi \in E$ et $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $\gamma^{-1}\lambda(\xi) = \lambda(\xi\gamma)$ et $\forall\, \xi, \eta \in E$, on a $\phi(\langle \xi, \eta\rangle) = \langle \lambda(\xi), \lambda(\eta)\rangle$.*

(2) *L'application qui à $T \in \mathbf{L}(E)$ associe $T \otimes_\lambda 1 \in \mathbf{L}(F)$ induit un isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur la sous-C^*-algèbre de $\mathbf{L}(F)^\Gamma$ formée des opérateurs qui préservent ainsi que leur adjoint $\lambda(E)$.*

Démonstration

(1) $\forall\, \xi \in E, \forall\, \mu, \mu' \in M$,

$$\langle \xi \otimes \delta_e \otimes (u_\mu - u_{\mu'}), \xi \otimes \delta_e \otimes (u_\mu - u_{\mu'})\rangle = (u_\mu - u_{\mu'})^* \phi(\langle \xi, \xi\rangle)(u_\mu - u_{\mu'})$$

D'où la première assertion. Donc l'application est bien définie et évidemment linéaire continue de norme $\leqslant 1$. Par ailleurs, $\forall\, \xi, \eta \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle \lambda(\xi), \lambda(\eta)\rangle &= \lim_{\mu\in M} u_\mu^* \phi(\langle \xi, \eta\rangle) u_\mu \\ &= \phi(\langle \xi, \eta\rangle)\end{aligned}$$

Soit alors $\xi \in E$, tel que $\lambda(\xi) = 0$. On a

$$\forall\, \gamma \in \Gamma, \quad \phi(\langle \xi, \xi\rangle \gamma^{-1}) = 0$$

donc $\langle \xi, \xi\rangle = 0$ et finalement $\xi = 0$. Donc λ est injective. Soit $\xi \in E$ et $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}\lambda(\xi) &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \xi \otimes \delta_\gamma \otimes \gamma^{-1}(u_\lambda) \\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \xi\gamma \otimes \delta_e \otimes \gamma^{-1}(u_\lambda) \\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \xi\gamma \otimes \delta_e \otimes u_\lambda \\ &= \lambda(\xi\gamma)\end{aligned}$$

(2) On notera encore λ l'application qui à $T \in \mathbf{L}(E)$ associe $T \otimes_\lambda 1 \in \mathbf{L}(F)$. Cette application est injective puisque $\lambda : B \to \mathbf{L}(L^2(\Gamma) \otimes A)$ l'est. On a

$$\forall\, \xi \in E,\ \forall\, T \in \mathbf{L}(E), \quad \lambda(T(\xi)) = \lambda(T)(\lambda(\xi)),$$

et $\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, a \in A$,

$$\begin{aligned}
\lambda(T)(\gamma^{-1}\lambda(\xi)) &= \lambda(T)(\lambda(\xi\gamma)) \\
&= \lambda(T(\xi\gamma)) \\
&= \lambda(T(\xi)\gamma) \\
&= \gamma^{-1}\lambda(T(\xi)) \\
&= \gamma^{-1}(\lambda(T)(\lambda(\xi)))
\end{aligned}$$

Comme $\lambda(E)A$ est dense dans F, on a bien $T \in \mathbf{L}(F)^\Gamma$, et donc $\lambda(\mathbf{L}(E))$ est incluse dans la sous-C^*-algèbre de $\mathbf{L}(F)^\Gamma$ formée des opérateurs qui préservent ainsi que leur adjoint $\lambda(E)$. Réciproquement, soit T un opérateur de cette algèbre. Posons

$$\widetilde{T} = \lambda^{-1}T\lambda : E \longrightarrow E, \quad \widetilde{T^*} = \lambda^{-1}T^*\lambda : E \longrightarrow E.$$

Il suffit de montrer que $\widetilde{T}$ admet que $\widetilde{T^*}$ comme adjoint, puisqu'alors $\lambda(\widetilde{T}) = T$. Or $\forall\, \xi, \eta \in E,\ \forall\, \gamma \in \Gamma$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(\langle \eta, \widetilde{T}(\xi)\rangle) &= \langle \lambda(\eta), \lambda(\widetilde{T}(\xi))\rangle \\
&= \langle \lambda(\eta), T(\lambda(\xi))\rangle \\
&= \langle T^*\lambda(\eta), (\lambda(\xi))\rangle \\
&= \langle \lambda(\widetilde{T^*}(\eta)), \lambda(\xi)\rangle \\
&= \phi(\langle \widetilde{T^*}\eta, \xi\rangle)
\end{aligned}$$

et donc $\forall\, \gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}
\phi(\langle \eta, \widetilde{T}(\xi)\rangle\gamma) &= \phi(\langle \eta, \widetilde{T}(\xi\gamma)\rangle) \\
&= \phi(\langle \widetilde{T^*}(\eta), \xi\gamma\rangle) \\
&= \phi(\langle \widetilde{T^*}(\eta), \xi\rangle\gamma)
\end{aligned}$$

donc $\langle \widetilde{T^*}(\eta), \xi\rangle = \langle \eta, T(\xi)$. D'où le résultat.

Remarque. — Soit $E = L^2(\mathbb{N}) \otimes C_r^*(\Gamma)$ et $F = L^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(\Gamma)$. Identifions $C_r^*(\Gamma)$ à $\lambda(C_r^*(\Gamma)) \subset L^2(\Gamma)$, E à $\lambda(E) \subset F$, $L^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(\Gamma)$ à $L^2(\mathbb{N}, L^2(\Gamma))$, et par conséquent E à l'espace des suites $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_r^*(\Gamma)$ tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle \xi_n, \xi_n\rangle$ converge dans $C_r^*(\Gamma)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C_r^*(\Gamma)$ telle que pour toute partie finie $F \subset \mathbb{N}$, $\sum_{n\in F} x_n x_n^* \leqslant M$, telle que $\forall\, n \neq m,\ x_n x_m^* = 0$ et telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^* x_n$ ne converge pas dans $C_r^*(\Gamma)$ (il est aisé de construire de tels éléments par exemple pour $\Gamma = \mathbb{Z}$). Soit $T \in \mathbf{L}(L^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(\Gamma))$ qui à

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n \in L^2(\mathbb{N}, L^2(\Gamma)) \simeq L^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(\Gamma)$$

associe l'élément
$$T(\xi) \in L^2(\mathbb{N}, L^2(\Gamma)) \simeq L^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(\Gamma)$$
défini par
$$T(\xi)_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^* \xi_n \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ T(\xi)_k = 0.$$
Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, alors
$$\langle T(\xi_n), T(\xi_n)\rangle \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \xi_n, x_n x_n^* \xi_n\rangle \leqslant \|(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 M$$
donc $T \in \mathbf{L}(F)^\Gamma$. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^*\xi_n$ converge dans $C_r^*(\Gamma)$. Alors $T(E) \subset E$. Pourtant pour $\xi = \delta_0 \otimes \delta_e \in E$, $T^*(\xi) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin E$.

Proposition 2.2.12. — *Soit B une sous-C^*-algèbre de $VN(\Gamma, A)$ contenant A. Soit F un A,Γ-module hilbertien équivariant. Les deux assertions sont équivalentes :*

(1) *Il existe un B-module hilbertien E tel que $F \simeq E \otimes_{\lambda_\Gamma^A} (L^2(\Gamma) \otimes A)$.*

(2) *Il existe un sous-A,Γ-module $\mathcal{F}$ dense de F tel que $\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{F}$, $\langle \xi, \eta\rangle \in B$.*

Démonstration

(1) Montrons d'abord que la condition est nécessaire. L'application de E dans F qui à $\xi \in E$ associe $\xi \otimes_{\lambda_\Gamma^A} (\delta_e \otimes 1)$ est continue et sera noté λ. Or $\forall\, \xi \in E$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $\forall\, a \in A$, $\lambda(\xi a) = \lambda(\xi)a$ et $\lambda(\xi\gamma) = \gamma^{-1}\lambda(\xi)$. Donc $\mathcal{F} = \lambda(E)$ est un sous-A,Γ-module dense. Soit $\xi, \eta \in E$; on a :
$$\begin{aligned}
\langle \lambda(\xi), \lambda(\eta)\rangle(\gamma) &= \langle \xi \otimes \delta_e \otimes 1, \gamma(\eta \otimes \delta_e \ \otimes 1)\rangle \\
&= \langle \delta_e \otimes 1, \eta \otimes \delta_{\gamma^{-1}} \otimes 1\rangle \\
&= \langle \delta_e \otimes 1, \langle \xi, \eta\rangle(\delta_{\gamma^{-1}} \otimes 1)\rangle \\
&= \phi(\langle \xi, \eta\rangle \gamma^{-1})
\end{aligned}$$
donc $\langle \lambda(\xi), \lambda(\eta)\rangle = \langle \xi, \eta\rangle \in B$ et donc $\mathcal{F}$ convient.

(2) La démonstration de la réciproque est strictement celle du théorème précédent en remplaçant $VN(\Gamma, A)$ par B.

Remarque. — Soit $K \subset S^1$ un Cantor de mesure non nulle et soit $p \in L^\infty(S^1) \simeq VN(\mathbb{Z})$ sa fonction caractéristique. Soit $F = pL^2(\mathbb{Z})$. Alors $\forall\, \xi \in F$, $\xi \neq 0$, on a $\langle \xi, \xi\rangle \notin C_r^*(\mathbb{Z})$.

2.3. Cas propre

Soit encore F un A,Γ-module hilbertien équivariant.

Définition 2.3.1. — On appellera *opérateur cut-off* tout élément $h \in \mathbf{L}(F)^+$ tel que :

(1) Il existe une partie finie $F_0 \subset \Gamma$ telle que $\gamma \in \Gamma, hh_\gamma \neq 0 \Rightarrow \gamma \in F_0$.

(2) La somme $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2$ est strictement convergente vers 1.

Proposition 2.3.2. — *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un espace localement compact X muni d'une action de Γ propre et cocompacte et une structure de $C_0(X) - A, \Gamma$-bimodule équivariant sur F.*

(2) *Il existe un opérateur cut-off $h \in \mathbf{L}(F)^+$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma,\ hh_\gamma = h_\gamma h$.*

Démonstration

(1) Supposons la première assertion vérifiée. Alors (*cf.* [**Tu**]), il existe une fonction $c \in C_C(X)^+$ tel que $\sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma = 1$. Il suffit alors de prendre pour h l'opérateur donné par l'action de $c^{1/2}$.

(2) Supposons la seconde assertion. Soit A la sous-C^*-algèbre de $\mathbf{L}(F)$ engendrée par les $h_\gamma, \gamma \in \Gamma$. Elle est commutative et c'est une sous-Γ-algèbre de $\mathbf{L}(F)$. Soit X son spectre, qui est un espace localement compact séparé. Montrons qu'il est Γ-compact et Γ-propre. Soit

$$K = \{\chi \in X \mid \chi(h^2) \geqslant \|h^2\|/|F_0|\}.$$

C'est un compact de X. Or soit $\chi \in X$. Il existe $\gamma_0 \in \Gamma,\ \chi(h_{\gamma_0}) > 0$. Soit $\gamma \in \Gamma$, tel que $\chi(h_\gamma) > 0$. Alors

$$\chi(h_{\gamma_0} h_\gamma) = \chi(h_{\gamma_0})\chi(h_\gamma) > 0$$

donc $h_{\gamma_0} h_\gamma \neq 0$ et donc $\gamma \in \gamma_0 F_0$. Donc $\sum_{\gamma \in \gamma_0 F_0} \chi(h_\gamma^2) = 1$. Donc il existe $\gamma \in \gamma_0 F_0$ tel que $\chi \in \gamma^{-1} K$ et donc l'espace quotient est bien compact.

Soit

$$O = \{\chi \in X \mid \chi(h^2) > (2|F_0|)^{-1}\}.$$

C'est un ouvert de saturé X. Donc pour montrer que l'action est propre, il suffit de montrer $Z = \{\gamma \in \Gamma \mid O \cap \gamma^{-1} O\}$ est fini. Or pour toute partie finie de $Z' \subset Z$, $1 \geqslant \sum_{\gamma \in Z'} \chi(h_\gamma^2) \geqslant |Z'|/(2|F_0|)$. Donc l'action est propre et cocompacte.

Soit F un A, Γ-module hilbertien muni d'un opérateur cut-off $h \in \mathbf{L}(F)^+$. Fixons $F_0 \subset \Gamma$ partie finie de Γ telle que $\forall \gamma \in \Gamma,\ hh_\gamma \neq 0 \Rightarrow \gamma \in F_0$.

Lemme 2.3.3. — *Soit $P \subset F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\exists F_1 \subset \Gamma, |F_1| < +\infty$ *tel que* $\forall \xi \in P,\ \xi = \sum_{\gamma \in F_1} h_\gamma^2 \xi$

(2) $\exists F_1 \subset \Gamma, |F_1| < +\infty$ *tel que* $\forall \xi \in P,\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus F_1,\ h_\gamma \xi = 0$.

Démonstration. — Soit $F_1 \subset \Gamma$ telle que $|F_1| < +\infty$ et $\forall \xi \in P,\ \xi = \sum_{\gamma \in F_1} h_\gamma^2 \xi$. Alors si $\gamma \in \Gamma$ et $\xi \in P$, sont tels que $h_\gamma \xi \neq 0$, on a

$$h_\gamma \sum_{\gamma' \in F_1} h_{\gamma'}^2 \xi = h_\gamma \xi \neq 0$$

et donc $\gamma \in F_1 F_0^{-1}$. Donc la seconde assertion est réalisée avec $F_1 F_0^{-1}$. Supposons inversement que la seconde assertion est vérifiée avec F_1, alors $\forall \xi \in P$,, on a

$$\xi = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_\gamma^2 \xi = \sum_{\gamma \in F_1} h_\gamma^2 \xi.$$

D'où le résultat.

Les vecteurs de F pour lesquels les conditions équivalentes précédentes sont vérifiées avec $P = \{\xi\}$ seront appelés à support compact (pour h) et on désignera par $\mathcal{F}$ l'espace de ces vecteurs. Il est évident que $\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{F}$, $\langle \xi, \eta \rangle \in C_C(\Gamma, A) \subset A \rtimes_r \Gamma$. Mais $C_C(\Gamma, A)$ est également une sous-algèbre dense de $A \rtimes \Gamma$. On a alors :

THÉORÈME 2.3.4. — *Muni de l'action à droite de $C_C(\Gamma, A)$ associée à sa structure de sous-A, Γ-module, et de la forme $C_C(\Gamma, A)$-sesquilinéaire à valeurs dans $C_C(\Gamma, A)$ défini par $\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{F}$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$,*

$$\langle \xi, \eta \rangle(\gamma) = \langle \xi, \gamma\eta \rangle,$$

$\mathcal{F}$ est muni d'une structure de $C_C(\Gamma, A)$-module préhilbertien, où $C_C(\Gamma, A)$ est considérée comme sous-algèbre involutive dense de $A \rtimes \Gamma$. Soit E le $A \rtimes \Gamma$-module hilbertien obtenu en séparant-complétant. L'application linéaire de $\mathcal{F} \odot C_C(\Gamma) \odot A$ dans F qui $\forall\, f \in \mathcal{F}$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $\forall\, a \in A$, associe à $f \odot \delta_\gamma \odot a$ l'élément $(\gamma^{-1}(f))a$ induit un isomorphisme $E \otimes_{\lambda_\Gamma^A} (L^2(\Gamma) \otimes A) \simeq F$.

La dernière assertion du théorème a déjà été démontrée. La première résulte immédiatement de la proposition qui suit.

Étant donné un $A \rtimes \Gamma$-module hilbertien E, on notera encore λ la composée de l'application quotient de E dans $E_r = E \otimes_\lambda A \rtimes_r \Gamma$ et de l'application définie précédemment et notée $\lambda : E_r \to F$ où $F = E_r \otimes_\lambda (L^2(\Gamma) \otimes A)$.

PROPOSITION 2.3.5. — *Soit F un A, Γ-module hilbertien.*

(1) *Munissons $L^2(\Gamma)$ de l'action par translation à droite, et $F \otimes L^2(\Gamma)$ de l'action diagonale de Γ de sorte que $F \otimes L^2(\Gamma)$ est également muni d'une structure de A, Γ-module hilbertien. Soit $H \in \mathbf{L}(F \otimes L^2(\Gamma))$ le projecteur orthogonal sur $F \otimes \mathbb{C}\delta_e$. Alors H est un opérateur cut-off et l'espace des vecteurs à support compact pour H est $F \odot C_C(\Gamma)$, que l'on munit de l'application $C_C(\Gamma, A)$-sesquilinéaire $\langle\, ,\rangle$ associée. Considérons $C_C(\Gamma, A)$ comme sous-algèbre involutive de $A \rtimes \Gamma$ et $C_C(\Gamma, F)$ comme muni de sa structure canonique de $C_C(\Gamma, A)$-module préhilbertien. L'application λ : $C_C(\Gamma, F) \to F \odot C_C(\Gamma)$ qui à $f \in C_C(\Gamma, F)$ associe $\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(f(\gamma)) \odot \delta_\gamma$ est un isomorphisme de $C_C(\Gamma, A)$-module qui vérifie $\forall\, \xi, \eta \in C_C(\Gamma, A)$,*

$$\langle \lambda(\xi), \lambda(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle.$$

En particulier, $\langle\, ,\rangle$ munit $F \odot C_C(\Gamma)$ d'une structure de $C_C(\Gamma, A)$-module préhilbertien.

(2) *Soit $h \in \mathbf{L}(F)$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma^2 = 1$. Soit $D : F \to F \otimes L^2(\Gamma)$ l'application qui à $\xi \in F$ associe $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}}\xi \otimes \delta_\gamma$. Alors D est un morphisme isométrique de A, Γ-module hilbertien. Supposons de plus, que h est un opérateur cut-off. Soit $\mathcal{F}$ l'espace des vecteurs à support compact pour h, alors $D(\mathcal{F}) \subset F \odot C_C(\Gamma)$. En particulier, $\langle\, ,\rangle$ munit $\mathcal{F}$ d'une structure de $C_C(\Gamma, A)$-module préhilbertien.*

(3) *Soit h un opérateur cut-off pour F et soit $p \in C_C(\Gamma, \mathbf{L}(F)) \subset \mathbf{L}(F \rtimes \Gamma)$ où $F \rtimes \Gamma = F \otimes_A A \rtimes \Gamma$ et où p est défini par $\gamma \in \Gamma$, $p_\gamma = hh_\gamma$. Alors p est un projecteur*

qui préserve le sous-$C_C(\Gamma, A)$-module $C_C(\Gamma, F)$ de $F \rtimes \Gamma$. L'application linéaire S de $\mathcal{F}$ dans $C_C(\Gamma, F)$ définie par $\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, \xi \in \mathcal{F}$,

$$S(\xi)(\gamma) = h\gamma(\xi)$$

vérifie $\lambda \circ S = D_{|\mathcal{F}}$ et induit un isomorphisme de $C_C(\Gamma, A)$-module préhilbertien entre $\mathcal{F}$ et $pC_C(\Gamma, F)$.

Démonstration

(1) Rappelons que $\forall\, \xi, \eta \in C_C(\Gamma, F)$, $\forall\, f \in C_C(\Gamma, A)$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, on a :

$$\langle \xi, \eta \rangle(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \gamma_1^{-1}(\langle \xi(\gamma_1)), \eta(\gamma_1\gamma) \rangle$$

$$\eta f(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \eta(\gamma_1)\gamma_1(f(\gamma_1^{-1}\gamma)).$$

Or

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(\xi), \lambda(\eta) \rangle(\gamma) &= \langle \lambda(\xi), \gamma(\lambda(\eta)) \rangle \\
&= \sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \langle \lambda(\xi)(\gamma_1), (\gamma\lambda(\eta))(\gamma_1) \rangle \\
&= \sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \langle \gamma_1^{-1}(\xi(\gamma_1)), \gamma(\lambda(\eta)(\gamma_1\gamma)) \rangle \\
&= \sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \langle \gamma_1^{-1}(\xi(\gamma_1)), \gamma\gamma^{-1}\gamma_1^{-1}(\eta(\gamma_1\gamma)) \rangle \\
&= \langle \xi, \eta \rangle(\gamma), \\
\lambda(\eta) f &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big(\sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \gamma_1^{-1}(\lambda(\eta)(\gamma\gamma_1^{-1}) f(\gamma_1)) \Big) \otimes \delta_\gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big(\sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \gamma_1^{-1}(\gamma_1\gamma^{-1}(\eta(\gamma\gamma_1^{-1})) f(\gamma_1)) \Big) \otimes \delta_\gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1} \Big(\sum_{\gamma_1 \in \Gamma} \eta(\gamma\gamma_1^{-1})(\gamma\gamma_1^{-1})(f(\gamma_1)) \Big) \otimes \delta_\gamma \\
&= \lambda(\eta f).
\end{aligned}$$

(2) On a $\forall\, \xi \in F$, $\langle D(\xi), D(\xi) \rangle = \langle \xi, \sum_{\gamma \in \Gamma} h^2_{\gamma^{-1}} \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$. Pour montrer que D est un morphisme, il suffit de montrer que D possède un adjoint densément défini. Or l'application de $F \odot C_C(\Gamma)$ dans F qui à $\sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma \odot \delta_\gamma$ associe $\sum_{\gamma \in \Gamma} h_{\gamma^{-1}} \xi_\gamma$ est contenu dans l'adjoint ; d'où l'assertion. Enfin, $\forall\, \xi \in F$, $\forall\, \gamma_0 \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 D(\gamma_0^{-1}\xi) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma_0 h_{\gamma^{-1}} \gamma_0^{-1} \xi \otimes \delta_{\gamma\gamma_0^{-1}} \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} h_{\gamma_0\gamma^{-1}} \xi \otimes \delta_{\gamma\gamma_0^{-1}} \\
&= D(\xi)
\end{aligned}$$

Supposons que h est un opérateur cut-off. Trivialement,

$$D(\mathcal{F}) \subset F \odot C_C(\Gamma) \quad \text{et} \quad D^*(F \odot C_C(\Gamma)) \subset \mathcal{F}.$$

Notons encore $D : \mathcal{F} \to F \odot C_C(\Gamma)$ et $D^* : F \odot C_C(\Gamma) \to \mathcal{F}$ les applications induites. Comme D et (donc) D^* sont Γ-équivariantes, on a

$$\forall\, \xi \in \mathcal{F},\ \forall\, \eta \in F \odot C_C(\Gamma), \quad \langle D^*\eta, \xi\rangle = \langle \eta, D\xi\rangle,$$

et donc $\langle \xi, \xi\rangle = \langle D^*D\xi, \xi\rangle = \langle D\xi, D\xi\rangle \in (A \rtimes \Gamma)^+$.

(3) On a $\forall\, \xi \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} D\xi &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma h_{\gamma^{-1}}\xi \odot \delta_\gamma \\ &= S\xi \end{aligned}$$

Soit $S^* = D^* \circ \lambda : C_C(\Gamma, F) \to \mathcal{F}$. On a $S^*S = \mathrm{id}$ et $\forall\, \xi \in \mathcal{F}$, $\forall\, \eta \in F \odot C_C(\Gamma)$, $\langle S^*\eta, \xi\rangle = \langle \eta, S\xi\rangle$. Comme $\forall\, \xi \in F \odot C_C(\Gamma)$, $S^*(\sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \odot U_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1} h \xi_\gamma$, on a $p = SS^*$; d'où le résultat.

Dans tout le reste de cette section, F désigne un A, Γ-module hilbertien, $h \in \mathbf{L}(F)^+$ un opérateur cut-off, E le $A \rtimes \Gamma$-module hilbertien associé (*cf.* théorème 2.3.4), $E_r = E \otimes_{A\rtimes\Gamma} A \rtimes_r \Gamma$.

Lemme 2.3.6

(1) *Soit $S \in \mathbf{L}(F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $SF \subset \mathcal{F}$.

(b) $\exists\, F_1 \subset \Gamma,\ |F_1| < +\infty, (\gamma \in \Gamma, h_\gamma S \neq 0 \Rightarrow \gamma \in F_1)$.

(c) $\exists\, F_1 \subset \Gamma,\ |F_1| < +\infty, S = \sum_{\gamma\in F_1} h_\gamma^2 S$.

(2) *Soit $T \in \mathbf{L}(F)^\Gamma$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *T préserve $\mathcal{F}$.*

(b) $\exists\, F_1 \subset \Gamma,\ |F_1| < +\infty, (\gamma \in \Gamma, h_\gamma T h \neq 0 \Rightarrow \gamma \in F_1)$.

(c) $\exists\, F_1 \subset \Gamma,\ |F_1| < +\infty, Th = \sum_{\gamma\in F_1} h_\gamma^2 Th$.

Si les assertions précédentes sont vérifiées pour T alors elles le sont pour T^*. Si en outre, $Th \in \mathbf{K}(F)$, alors $T^*h \in \mathbf{K}(F)$.

Démonstration

(1) L'équivalence des deux dernières assertions est une conséquence immédiate du lemme 2.3.3 appliqué à $P = \mathrm{Im}(S)$, et trivialement ces deux assertions impliquent la première. Supposons qu'il existe une infinité de $\gamma \in \Gamma$ tel que $h_\gamma S \neq 0$. Par récurrence, on construit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \in F$, $\gamma_n \in \Gamma$ telle que $h_{\gamma_n} S\xi_n \neq 0$ et $h_{\gamma_n} S\xi_m = 0$ si $m < n$. Quitte à changer les ξ_n par des vecteurs proportionnels, on peut en outre supposer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ est convergente vers un vecteur $\xi \in F$ et

$$\forall\, n < m, \quad \|h_{\gamma_n} S\xi_m\| \leqslant (2)^{-m-1} \|h_{\gamma_n} S\xi_n\|$$

de sorte que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Big\| \sum_{n<m} h_{\gamma_n} S\xi_m \Big\| < \|h_{\gamma_n} S\xi_n\|.$$

D'où $h_{\gamma_n} S\xi = h_{\gamma_n} S\xi_n + \sum_{n<m} h_{\gamma_n} S\xi_m \neq 0$. Donc $S\xi \notin \mathcal{F}$. D'où l'équivalence.

(2) Pour l'équivalence, il suffit d'appliquer le résultat qui précède à $S = Th$. Soit $F_1 \subset \Gamma$ fini tel que

$$\gamma \in \Gamma,\ h_\gamma Th \neq 0 \Longrightarrow \gamma \in F_1.$$

Alors, comme

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ h_\gamma T^* h = ((h_{\gamma^{-1}} Th)_\gamma)^*,$$

on a

$$\gamma \in \Gamma,\ h_\gamma T^* h \neq 0 \Longrightarrow \gamma \in F_1^{-1}.$$

Si $Th \in \mathbf{K}(F)$, alors

$$hT = \sum_{\gamma \in F_1} hTh^2_{\gamma^{-1}} = \sum_{\gamma \in F_1} (h_\gamma Th^2)_{\gamma^{-1}} \in \mathbf{K}(F).$$

Donc $T^* h = (hT)^* \in \mathbf{K}(F)$.

Définition 2.3.7. — On notera $\mathbf{L}_P^\Gamma(F)$, l'ensemble des $T \in \mathbf{L}(F)^\Gamma$ qui vérifient les conditions équivalentes du lemme précédent et $\mathbf{K}_P^\Gamma(F)$ l'ensemble

$$\{T \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F) \mid Th \in \mathbf{K}(F)\}.$$

D'après le lemme qui précède, les espaces $\mathbf{L}_P^\Gamma(F)$ et $\mathbf{K}_P^\Gamma(F)$ sont des sous-algèbres involutives de $\mathbf{L}(F)^\Gamma$.

Remarque. — Soit F un A, Γ-module hilbertien. On munit $F \otimes L^2(\Gamma)$ de la structure de A, Γ-module hilbertien et de l'opérateur cut-off défini dans la proposition 2.3.5. Alors F possède un opérateur cut-off ssi il existe $p \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F \otimes L^2(\Gamma))$ projecteur tel que $F \simeq p(F \otimes L^2(\Gamma))$. En effet, la condition est nécessaire d'après la proposition 2.3.5. Elle est suffisante, car d'après le lemme précédent, on a $p \in C_C(\Gamma, \mathbf{L}(F))$. Posons alors $h = (pHp)^{1/2}$. On a $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $hh_\gamma = 0$ ssi $h^2 h_\Gamma^2 = 0$ ce qui implique $\gamma \in (\mathrm{Supp}(p))^{-1}$.

Théorème 2.3.8

(1) *Soit* $T \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F)$. *Alors* $T_{|\mathcal{F}}$ *s'étend par continuité en un élément noté* $T_\Gamma \in \mathbf{L}(E)$. *On a* $(T_\Gamma)^* = (T^*)_\Gamma$.

(2) *Soit* $T \in \mathbf{K}_P^\Gamma(F)$, *alors* $T_\Gamma \in \mathbf{K}(E)$.

(3) $T_\Gamma \otimes_\lambda 1 \simeq T$.

(4) *L'algèbre* $\lambda(\mathbf{K}(E))$ *est l'adhérence normique de* $\mathbf{K}_P^\Gamma(F)$.

Démonstration

(1) Soit $\xi,\ \eta\in\mathcal{F}$ et soit $\gamma\in\Gamma$. Alors

$$\langle\eta,T\xi\rangle(\gamma)=\langle\eta,T(\gamma\xi)\rangle=\langle\eta,\gamma T\xi\rangle=\langle T^*\eta,\gamma\xi\rangle=\langle T^*\eta,\xi\rangle(\gamma).$$

Donc $T^*_{|\mathcal{F}}\subset(T_{|\mathcal{F}})^*$, donc $T_{|\mathcal{F}}$ est fermable et il suffit de démontrer que $T_{|\mathcal{F}}$ qu'on notera simplement T est borné. Soit S et S^* les applications définies au cours de la démonstration de la proposition 2.3.5. Alors

$$STS^*=\sum_{\gamma\in\Gamma}hTh_\gamma\odot U_\gamma\in C_C(\Gamma,\mathbf{L}(F)).$$

En particulier, STS^* est borné donc TS^* est borné puisque S est isométrique, et finalement $T=TS^*S$ également.

(2) L'opérateur $S:\mathcal{F}\to C_C(\Gamma,F)$ s'étend en un morphisme noté encore $S:E\to F\rtimes\Gamma$. Or $ST_\Gamma S^*\in C_C(\Gamma,\mathbf{K}(F))\subset\mathbf{K}(F\rtimes\Gamma)$ et donc $T_\Gamma=S^*(STS^*)S\in\mathbf{K}(E)$.

(3) Quitte à remplacer A par $\widetilde{A}$, on peut supposer que A est unitale. Soit

$$\xi\in\mathcal{F},\quad(T_\Gamma\otimes_\lambda 1)(\lambda(\xi))=T(\xi)\otimes(\delta_e\otimes 1)=\lambda(T\xi).$$

Comme $\lambda(\mathcal{F})$ est dense dans E, on a bien $T_\Gamma\otimes_\lambda 1=T$.

(4) Comme $\lambda(\mathbf{K}(E))$ est fermée, elle contient d'après ce qui précède l'adhérence de $\mathbf{K}^\Gamma_P(F)$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\forall\,\xi\in\mathcal{F}\subset E$, on a $\lambda(\theta_{\xi,\xi})\in\mathbf{K}^\Gamma_P(F)$. Or

$$\forall\,\xi\in E,\quad(T\otimes_\lambda 1)(\lambda(\xi))=\lambda(T(\xi)).$$

En particulier, soit $\xi\in\mathcal{F}$; on a $\forall\,\eta\in F$,

$$\begin{aligned}(\theta_{\xi,\xi}\otimes_\lambda 1)(h\eta)&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{-1}(\xi\langle\xi,\gamma h\eta\rangle)\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{-1}(\xi)\langle h\gamma^{-1}\xi,\eta\rangle\end{aligned}$$

Comme $h\gamma^{-1}\xi=0$ pour tous γ en dehors d'une partie finie de Γ, on a bien $\lambda(\theta_{\xi,\xi})h\in\mathbf{K}(F)$ et $\lambda(\theta_{\xi,\xi})\in\mathbf{K}^\Gamma_P(F)$.

La proposition suivante nous sera utile dans le chapitre suivant.

PROPOSITION 2.3.9. — *Soit $T\in\mathbf{L}^\Gamma_P(F)$ tel que $[T,h]\in\mathbf{K}(F)$. Alors en identifiant E et $p(F\rtimes\Gamma)$ comme dans la proposition 2.3.5, on a $T_\Gamma-p(T\otimes 1)p\in\mathbf{K}(E)$.*

Démonstration. — D'après le théorème précédent, il suffit de montrer que

$$T_{|\mathcal{F}}-S^*(T\times 1)S$$

est la restriction à $\mathcal{F}$ d'un élément de $\mathbf{K}^\Gamma_P(F)$ où

$$T\times 1:C_C(\Gamma,F)\longrightarrow C_C(\Gamma,F)$$

est défini par

$$\forall\, \xi \in C_C(\Gamma, F),\ \forall\, \gamma \in \Gamma, \quad (T \times 1)(\xi)(\gamma) = T(\xi(\gamma)).$$

Or cela résulte immédiatement du calcul suivant :

$$\begin{aligned}(T_{|\mathcal{F}} - S^*(T \times 1)S)h &= \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} T h^2_{\gamma^{-1}} - \sum_{\gamma\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}} T h_{\gamma^{-1}}\Big)h \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} [h_{\gamma^{-1}}, T] h_{\gamma^{-1}} h\end{aligned}$$

Lemme 2.3.10. — *Soit $S \in \mathbf{L}(F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $SF \cup S^* F \subset \mathcal{F}$.

(2) *Il existe $F_1 \subset \Gamma$ telle que*

$$\begin{gathered}|F_1| < +\infty, \\ \gamma \in \Gamma,\ h_\gamma S \neq 0 \Longrightarrow \gamma \in F_1, \\ \gamma \in \Gamma,\ S h_\gamma \neq 0 \Longrightarrow \gamma \in F_1.\end{gathered}$$

(3) *Il existe $F_1 \subset \Gamma$ telle que*

$$\begin{gathered}|F_1| < +\infty, \\ S = \sum_{\gamma\in F_1} h^2_\gamma S = S \sum_{\gamma\in F_1} h^2_\gamma.\end{gathered}$$

Pour $F_1 \subset \Gamma$, partie finie de Γ, on notera $\mathbf{L}_{F_1}(F)$ la sous-C^*-algèbre de $\mathbf{L}(F)$ formée des opérateurs pour lesquels la troisième assertion est vérifiée avec F_1 et $\mathbf{L}_C(F)$ l'union quand F_1 décrit les parties finies de Γ des $\mathbf{L}_{F_1}(F)$. C'est une sous-algèbre involutive de $\mathbf{L}(F)$; on appellera ses éléments les opérateurs à support compact. Si $T \in \mathbf{L}^\Gamma_P(F), S \in \mathbf{L}_C(F)$, alors $TS, ST \in \mathbf{L}_C(F)$.

Démonstration. — Pour l'équivalence, il suffit d'appliquer le lemme 2.3.6 à S et S^*. Le reste est trivial.

Proposition 2.3.11

(1) *Pour tout $T \in \mathbf{L}_C(F)$, $\sum_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ converge strictement vers un opérateur $M_\Gamma(T) \in \mathbf{L}^\Gamma_P(F)$. Si de plus $T \in \mathbf{K}(F)$, alors $M_\Gamma(T) \in \mathbf{K}^\Gamma_P(F)$. Soit $T_1, T_3 \in \mathbf{L}^\Gamma_P(F)$, $T_2 \in \mathbf{L}_C(F)$, alors $M_\Gamma(T_1T_2T_3) = T_1 M_\Gamma(T_2) T_3$. En particulier, $M_\Gamma : \mathbf{L}_C(F) \to \mathbf{L}^\Gamma_P(F)$ (resp. $M_\Gamma : \mathbf{L}_C(F) \cap \mathbf{K}(F) \to \mathbf{K}^\Gamma_P(F)$) est surjective.*

(2) *Pour toute partie finie F_1 de Γ, la restriction à $\mathbf{L}_{F_1}(F)$ de M_Γ est continue par rapport aux normes d'opérateurs.*

(3) *Soit $T \in m_{\tau_F} \cap \mathbf{L}_C(F)$, alors*

$$M_\Gamma(T) \in m_{\tau^\Gamma_F} \quad et \quad (\tau^\Gamma_F)'(M_\Gamma(T)) = \tau'_F(T).$$

(4) *Soit $T \in \mathbf{L}^\Gamma_P(F)$. Alors $T \in m_{\tau^\Gamma_F}$ ssi $Th \in m_{\tau_F}$. Si $T \in m_{\tau^\Gamma_F}$ alors*

$$\lambda(T_\Gamma) \in m_{(\tau\otimes\tau_\Gamma)_{E_r}} \quad et \quad ((\tau\otimes\tau_\Gamma)_{E_r})'(\lambda(T_\Gamma)) = (\tau^\Gamma_F)'(T).$$

Démonstration. — Soit $F_1 \subset \Gamma, |F_1| < +\infty$. Posons $c = (\sum_{\gamma\in F_1} h_\gamma^2)^{1/2}$. Alors pour toute partie finie F_2 de Γ,

$$\sum_{\gamma\in F_2} c_\gamma^2 \leqslant \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma^2 = |F_1|.$$

Donc $T_{F_1} : \mathcal{F} \to F \otimes L^2(\Gamma)$ qui à $\xi \in \mathcal{F}$ associe $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \xi \otimes \delta_\gamma$ s'étend en un opérateur continu de norme $\leqslant |F_1|^{1/2}$ de F dans $F \otimes L^2(\Gamma)$ qui est limite forte des opérateurs $T_{F_1}^{F_2} : F \to F \otimes L^2(\Gamma)$ qui à $\xi \in F$ associe $\sum_{\gamma\in F_2} c_\gamma \xi \otimes \delta_\gamma$. De plus $T_{F_1} \in \mathbf{L}(F, F \otimes L^2(\Gamma))$ puisque son adjoint contient l'opérateur densément défini qui à $f \in C_C(\Gamma, F) \subset F \otimes L^2(\Gamma)$ associe $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma f(\gamma)$. Soit $T \in \mathbf{L}_{F_1}(F)$. Soit $\widetilde{T} \in \mathbf{L}(F \otimes L^2(\Gamma))$ qui à $f \in F \otimes L^2(\Gamma)$, associe $\sum_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma f(\gamma) \otimes \delta_\gamma$. Alors pour toute partie finie F_2 de Γ,

$$\sum_{\gamma\in F_2} T_\gamma = T_{F_1}^* \widetilde{T} T_{F_1}^{F_2}.$$

Donc $\sum_{\gamma\in\Gamma} T_\Gamma$ converge fortement vers $T_{F_1}^* \widetilde{T} T_{F_1}$ qui est de norme $\leqslant \|T\| |F_1|$. Comme $T_\gamma h = 0$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma$, on a $M_\Gamma(T) \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F)$ et si $T \in \mathbf{K}(E)$, $M_\Gamma(T) \in \mathbf{K}_P^\Gamma(F)$.

Soit $T_1, T_2 \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F)$, alors

$$\forall\, \gamma \in \Gamma, \quad (T_1 T T_2)_\gamma = T_1 (T)_\gamma T_2.$$

Donc

$$M_\Gamma(T_1 T T_2) = T_1 M_\Gamma(T) T_2.$$

En particulier, comme $M_\Gamma(h^2) = 1$, pour tout $T_1 \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F)$, $M_\Gamma(T_1 h^2) = T_1$ et si $T_1 \in \mathbf{K}_P^\Gamma(F)$, $T_1 h^2 \in \mathbf{K}(E)$.

Soit $T \in m_{\tau_E} \cap \mathbf{L}_C(E)$. Écrivons

$$T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$$

où

$$T_1 = \mathrm{Re}(T)^+, \quad T_2 = \mathrm{Re}(T)^-, \quad T_3 = \mathrm{Im}(T)^+, \quad T_4 = \mathrm{Im}(T)^-.$$

Comme T est à support compact, $\mathrm{Re}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$ également et donc T_1, T_2, T_3, T_4 également. Donc on peut supposer que T est positif. Calculons alors (les sommes sont finies)

$$\begin{aligned}
\tau_F^\Gamma(M_\Gamma(T)) &= \tau_F\Big(h\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma T \gamma^{-1}\Big)h\Big)\\
&= \tau_F\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}} T h_{\gamma^{-1}}\Big)\\
&= \tau_F'\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} T h_{\gamma^{-1}}^2\Big)\\
&= \tau_F(T)
\end{aligned}$$

Soit $T \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F)$. Par définition, $T \in n_{\tau_F^\Gamma}$ ssi $Th \in n_{\tau_F}$. Si $T \in m_{\tau_F^\Gamma}$, il existe $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n \in n_{\tau_F^\Gamma}$, tel que $T = \sum_{i=1}^n U_i^* V_i$. De plus il existe une partie finie F_1 de Γ, telle que $Th = \sum_{\gamma\in\Gamma} h_\Gamma^2 Th$. Donc

$$Th = \sum_{i=1}^n \Big(U_i\Big(\sum_{\gamma\in F_1} h_\gamma^2\Big)\Big)^* V_i h \in m_{\tau_F}.$$

Réciproquement, soit $T \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F)$ tel que $Th \in m_{\tau_F}$. Alors Th^2 est à support compact, et $T = M_\Gamma(Th^2) \in m_{\tau_F^\Gamma}$ d'après ce qui précède et d'après la proposition 2.2.3,

$$((\tau \otimes \tau_\Gamma)_{E_r})'(\lambda(T_\Gamma)) = (\tau_F^\Gamma)'(T).$$

Supposons que A est une C^*-algèbre munie de l'action triviale de Γ. Notons simplement

$$\varepsilon : A \otimes_{\max} C^*_{\max}(\Gamma) \longrightarrow A$$

le morphisme $\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon_\Gamma$.

Proposition 2.3.12. — *Soit $T \in \mathbf{L}_P^\Gamma(F) \cap m_{\tau_F^\Gamma}$. Alors $T \otimes_\varepsilon 1 \in m_{\tau_{E\otimes_\varepsilon A}}$.*

Démonstration. — Munissons $F \otimes L^2(\Gamma)$ de l'action par translation à droite sur $L^2(\Gamma)$. Soit H le projecteur sur $F \otimes \mathbb{C}\delta_e$ qui est un opérateur cut-off. Soit

$$D : F \longrightarrow F \otimes L^2(\Gamma)$$

le morphisme équivariant propre qui à $\xi \in F$ associe $\sum_{\gamma\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}}\xi$. On vérifie que $DTD^* \in C_C(\Gamma, \mathbf{L}(F)) \subset \mathbf{L}(F \otimes L^2(\Gamma))$ et que $DTD^* = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1} h_\gamma Th \otimes U_\gamma$, où la somme est finie. Alors $T \otimes_\varepsilon 1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}} Th$ en identifiant $(F \otimes L^2(\Gamma))_\Gamma \otimes_\varepsilon A$ et F par l'application induite par celle qui à $\xi = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi(\gamma) \odot \delta_\gamma \in F \odot C_C(\Gamma)$ associe $\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\xi(\gamma))$. Soit $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n \in n_{\tau_F^\Gamma}$, tels que $T = \sum U_i V_i$.

Alors
$$\sum_{\gamma\in\Gamma} h_{\gamma^{-1}} Th = \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{i=1}^n \gamma^{-1} h_\gamma U_i V_i h \in m_{\tau_F},$$

puisque les sommes sont finies. D'où le résultat.

CHAPITRE 3

UNE GÉNÉRALISATION EN K-THÉORIE DU THÉORÈME D'INDICE L^2 D'ATIYAH

Soit $\widetilde{M}$ un revêtement galoisien de groupe Γ d'une variété compacte M. Le théorème d'indice L^2 d'Atiyah ([**A**]) affirme que le Γ-indice d'un opérateur différentiel elliptique Γ-équivariant sur $\widetilde{M}$ est égal à l'indice de l'opérateur différentiel elliptique associé sur la base. Dans ce chapitre, nous démontrons une généralisation abstraite de ce théorème en K-théorie. Le Γ-indice d'Atiyah s'identifie en effet à l'accouplement entre τ^Γ et l'élément de $K_0(C^*(\Gamma))$ associé à l'opérateur elliptique par l'application de Baum-Connes. Un théorème abstrait (cf. [**H**]) affirme que $(\varepsilon_\Gamma)_*$ et $(\tau^\Gamma)_*$ coïncident sur l'image de l'application de Baum-Connes dans $K_0(C^*(\Gamma))$, pour tout groupe discret sans torsion. Nous montrons en fait que l'on obtient un théorème plus général avec des coefficients dans une C^*-algèbre munie d'une trace densément définie sci ; en particulier, on obtient des théorèmes d'indice L^2 « en famille ».

3.1. La conjecture de Baum-Connes

Après avoir fait quelques rappels rappels succincts sur $KK_G(A,B)$ et sur la conjecture de Baum-Connes, nous montrons que dans le cas d'un groupe discret sans torsion, les groupes de K-théorie topologique et géométrique coïncident.

3.1.1. Rappels concernant $KK_G(A,B)$. — Soit G un groupe localement compact, A et B deux G-algèbres. On désigne par $E_G(A,B)$ l'ensemble des couples (E,F) où $E = E^+ \oplus E^-$ est un $C_0(X) - A, G$-bimodule équivariant gradué et $F \in \mathbf{L}(E)$ un opérateur impair, tel que :

– $\forall\, a \in A$, on a $[a,F] \in \mathbf{K}(E)$, $a(F^2-1) \in \mathbf{K}(E)$, $a(F-F^*) \in \mathbf{K}(E)$
– l'application qui à $g \in G$ associe $gFg^{-1} - F \in \mathbf{K}(E)$ est continue
– $\forall\, a \in A,\ g \in G,\ a(gFg^{-1} - F) \in \mathbf{K}(E)$

On munit $E_G(A,B)$ d'une structure de monoïde (pour la somme directe). On désigne par $KK_G(A,B)$ l'espace des classes d'équivalence d'homotopie d'éléments de

$E_G(A,B)$; la structure de monoïde sur $E_G(A,B)$ induit une structure de groupe abélien sur $KK_G(A,B)$. Quand G est le groupe trivial, on note simplement $E(A,B)$ (resp. $KK(A,B)$) les groupes $E_G(A,B)$ (resp. $KK_G(A,B)$). Étant donné $T \in \mathbf{L}(E_1,E_2)$ où E_1, E_2 sont deux $A,B-G$-bimodules hilbertiens équivariants,

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix},$$

tels que (E,F) est un élément de $E_G(A,B)$, on dira que l'opérateur T *définit* ou *représente* l'élément (E,F) de $E_G(A,B)$ ainsi que sa classe dans $KK_G(C_0(X),A)$ noté $[T]$. Rappelons encore que si T' vérifie les mêmes hypothèses que T et si on a de plus $\forall\, a \in A,\ a(T-T') \in \mathbf{K}(E)$, alors $[T] = [T']$.

3.1.2. La conjecture de Baum-Connes. — Nous faisons ici quelques rappels succincts sur l'application de Baum-Connes. Pour les détails et les démonstrations, le lecteur est renvoyé à [**B-C-H**] et [**B-C**].

Soit G un groupe localement compact, dg sa mesure de Haar à gauche, Δ son module. Soit X un espace localement compact sur lequel agit G à droite de façon propre. On munit $C_C(X)$ d'une structure de pré-$C_C(X \times G)$-module hilbertien (où l'on considère $C_C(X \times G)$ comme sous-algèbre involutive de $C_0(X) \rtimes G$) en posant, $\forall\, \xi, \eta \in C_C(X),\ \forall\, f \in C_C(X \times G)$:

$$\langle \xi, \eta \rangle (x,g) = \overline{\xi}(x)\eta(xg)\Delta(g)^{-1/2}$$

et

$$\xi f(x) = \int \xi(xg^{-1}) f(xg^{-1},g)\Delta(g)^{-1/2} dg.$$

Lemme 3.1.1. — *Si $\xi \in C_C(X)$, alors $\langle \xi, \xi \rangle \in (C_0(X) \rtimes G)^+$.*

Démonstration. — Il existe (*cf.* [**Tu**]) $c \in C(X)$ fonction cut-off, *i.e.* une fonction à valeurs dans $[0,1]$ telle que pour tout compact K, l'intersection de son support avec le saturé de K est compact, et telle que $\int c \cdot g\, dg = 1$. Soit $\theta : C_C(X) \to C_C(X \times G)$ qui à $f \in C_C(X)$ associe $\theta(f) \in C_C(X \times G)$ définie par

$$\forall\, (x,g) \in X \times G, \quad \theta(f)(x,g) = c(x)^{1/2}\xi(xg)\Delta(g)^{-1/2}.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
\theta(f)^*\theta(f)(x,g) &= \int \overline{\theta(f)}(xg_1, g_1^{-1})\Delta(g_1)^{-1}\theta(f)(xg_1, g_1^{-1}g)dg_1 \\
&= \overline{f(x)}(\int c(xg_1)^{1/2}\Delta(g_1)^{1/2}\Delta(g_1)^{-1} f(xg)c(xg_1)^{1/2}\Delta(g_1)^{1/2}dg_1)\Delta(g)^{-1/2} \\
&= \langle f, f \rangle (x,g)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Soit $P_{X,G}$ le $C_0(X) \rtimes G$-module hilbertien obtenu en séparant et complétant. Si en outre X est G-compact, le C^*-module $P_{X,G}$ est projectif de type fini. En effet, soit

$\theta^\sharp : C_C(X \times G) \to C_C(X)$ qui à $\xi \in C_C(X \times G)$, associe $\theta^\sharp(\xi) \in C_C(X \times G)$ définie par

$$\theta^\sharp(\xi)(x) = \int c(xg^{-1}) f(xg^{-1}, g) \Delta(g)^{-1/2} dg, \quad x \in X.$$

On a

$$\forall\, \xi \in C_C(X \times G),\ \eta \in C_C(X), \quad \langle \theta^\sharp(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, \theta(\eta) \rangle \quad \text{et} \quad \theta\theta^\sharp = p$$

où $p \in C_C(X \times G)$ est le projecteur défini par

$$\forall\, (x,g) \in X \times G, \quad p(x,g) = c(x)^{1/2} c(xg)^{1/2} \Delta(g)^{-1/2}.$$

Donc θ s'étend en un isomorphisme de $P_{X,G}$ sur $pC_0(X \rtimes G)$.

Soit A une G-algèbre, et X un G-espace propre G-compact, on définit :

$$\mu^A_{X,G} : KK_G(C_0(X), A) \to K_*(A \rtimes G)$$

comme l'application qui à $F \in KK_G(C_0(X), A)$ associe $[P_{X,G}] \otimes_{C_0(X) \rtimes G} J_G(F)$.

Soit X et Y deux G-espaces propres G-compacts et $f : X \to Y$ une application continue G-équivariante. Soit A une G-algèbre. On notera

$$f_* : KK_G(C_0(X), A) \longrightarrow KK_G(C_0(Y), A)$$

et

$$f_* : KK(C_0(X) \rtimes G, A \rtimes G) \longrightarrow KK(C_0(Y) \rtimes G, A \rtimes G)$$

les applications induites.

Lemme 3.1.2. — $\mu^A_{Y,G} \circ f_* = \mu^A_{X,G} : KK_G(C_0(X), A) \longrightarrow K_*(A \rtimes G)$.

Démonstration. — Soit $F \in KK_G(C_0(X), A)$. Alors par fonctorialité du morphisme de descente, $j_G(f_*(F)) = f_*(j_G(F))$. Il suffit donc de montrer que $f_*[P_{Y,G}] = [P_{X,G}]$. Soit c_Y une fonction cut-off pour Y ; la composée $c_X = c_Y \circ f$ est une fonction cut-off pour X. Soit p_Y et p_X les projecteurs associés dans $C_0(Y) \rtimes G$, et $C_0(X) \rtimes G$ respectivement. Alors $(f^* \rtimes G)(p_Y) = p_X$ et donc

$$p_Y C_0(Y) \rtimes G \otimes_{f^* \rtimes G} C_0(X) \rtimes G = p_X C_0(X) \rtimes G.$$

D'où le résultat.

Un G-espace propre $\underline{E}G$ est appelé *exemple universel* ou *classifiant des actions propres de* G si pour tout G-espace propre Y, il existe une application $f : Y \to \underline{E}G$, G-équivariante unique à G-homotopie près. Rappelons qu'un tel espace existe toujours et qu'on a la caractérisation suivante ([**B-C-H**], p. 247) :

Proposition 3.1.3. — *Un G-espace propre Y est classifiant des actions propres pour G ssi :*

(1) *$\forall\, H$ sous-groupe compact de G, $\exists\, p \in Y$, tel que $p \cdot H = p$.*

(2) *Considérons $Y \times Y$ comme muni de l'action diagonale de G, et ρ_i ($i = 1, 2$), les deux projections : alors ρ_1 et ρ_2 sont G-homotopes.*

COROLLAIRE 3.1.4 ([**B-C-H**], p. 247). — *Si H est un sous-groupe fermé de G, alors tout classifiant des actions propres pour G est classifiant des actions propres pour H.*

DÉFINITION 3.1.5. — Soit A une G-algèbre, on définit $K^*_{\mathrm{top}}(G,A)$ comme

$$\lim_{Y\in C} KK_G(C_0(Y),A)$$

où C désigne l'ensemble filtrant des parties G-compactes de $\underline{E}G$ et l'application de Baum-Connes à coefficient :

$$\mu_G^A = \lim_{Y\in C} \mu_{Y,G}^A : K_*^{\mathrm{top}}(G,A) \to K_*(A \rtimes G).$$

La conjecture de Baum-Connes concerne $\mu_{G,r}^A = \lambda_* \circ \mu_G^A$ où $\lambda : A \rtimes G \to A \rtimes_r G$ est le morphisme canonique ; elle affirme que $\mu_{G,r}^A$ est un isomorphisme. Notons que par définition de $\underline{E}G$ l'image de μ_G^A contient pour tout G-espace propre G-compact X, l'image de $\mu_{X,G}^A$.

3.1.3. K-théorie géométrique. — On désignera par $K_g^*(G,A)$ le sous-groupe de $K^*_{\mathrm{top}}(G,A)$ formé des éléments de la forme $f_*(x)$ où X est un G-espace propre cocompact muni d'une structure de variété C^∞ préservée par l'action de G, $f : X \to \underline{E}G$ est une application classifiante et $x \in KK_G(C_0(X),A)$.

LEMME 3.1.6. — *Soit Γ un groupe discret et X un Γ-espace propre Γ-compact. Alors il existe un complexe simplicial Σ sur lequel agit Γ tel que l'action de Γ sur la réalisation géométrique $|\Sigma|$ de Σ soit propre et cocompacte et une application Γ-équivariante $\Phi : X \to |\Sigma|$.*

Démonstration. — Soit $c \in C_C(X)$ une fonction cut-off. Soit

$$A = \{\gamma \in \Gamma \mid \exists\, x \in X,\ c(x)c(x\gamma) \neq 0\}.$$

Alors A est fini. Soit Σ_A le complexe simplicial de dimension $n = |A| - 1$ dont les sommets sont les éléments de Γ et dont les simplexes de dimension $0 \leqslant p \leqslant n$ sont les $p+1$-uplets $(\gamma_0,\dots,\gamma_p) \in \Gamma^{p+1}$ tels que

$$\forall\, i,j \in \{0,\dots,p\}, \quad \gamma_i\gamma_j^{-1} \in A.$$

Le groupe opère par translation à droite sur Σ et l'action induite sur la réalisation géométrique $|\Sigma_A|$ de Σ_A est propre et cocompacte. On identifie $|\Sigma_A|$ à l'espace des mesures de probabilité dont le support est de cardinal $\leqslant n+1$ telles que $\forall\, x,y \in \Gamma$ tels que $\mu(x)\,\mu(y) > 0$ on a $xy^{-1} \in A$, muni de la topologie de la convergence simple. Pour tout $x \in X$, soit $\Phi(x) \in |\Sigma_A|$ défini par $\forall\, \gamma \in \Gamma$, $\Phi(x)(\gamma) = c(x\gamma)$. Alors l'application $\Phi : X \to |\Sigma_A|$ qui à $x \in X$ associe $\Phi(x)$ est continue Γ-équivariante. D'où le résultat.

PROPOSITION 3.1.7. — *Soit Γ un groupe discret sans torsion et A une Γ-algèbre. Alors $K_g^*(\Gamma,A) = K^*_{\mathrm{top}}(\Gamma,A)$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que si X est un Γ-espace propre Γ-cocompact, alors il existe un Γ-espace propre Γ-cocompact N muni d'une structure de variété préservée par l'action de Γ et une application continue équivariante de X dans N.

D'après le lemme qui précède, on peut supposer que X est la réalisation d'un complexe simplicial. Soit $\Sigma = X/\Gamma$ qui est alors la réalisation d'un complexe simplicial fini, et $q : X \to \Sigma$ l'application quotient. On peut plonger (simplicialement) Σ dans $\mathbb{R}^n$ où n est le nombre de sommets de Σ. Identifions Σ à son image par son plongement. Comme Σ est un espace ANR (*cf.* [**Sp**] p. 149), c'est un rétracte d'un voisinage U par une rétraction r. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f_{|\Sigma} \geqslant 3/4$ et $f_{|U^C} \leqslant 1/4$. Soit $x \in]1/4, 3/4[$ une valeur régulière de f et M la variété à bord $f^{-1}([x, +\infty[)$. Alors $\Sigma \subset M \subset U$. Soit $\widetilde{M} = \{(m, s) \in M \times X \mid r(m) = q(s)\}$. Alors $\widetilde{M}$ est un revêtement de M et en tant que tel est muni d'une structure de variété à bord. L'action naturelle de Γ sur $\widetilde{M}$ (induite par celle sur X) préserve cette structure, et donc le double $D(\widetilde{M})$ de $\widetilde{M}$ est muni d'une action de Γ propre et cocompacte qui préserve sa structure de variété. La composition de l'inclusion de X dans $\widetilde{M}$ et de celle $\widetilde{M}$ dans son double convient. D'où le résultat.

3.2. Représentants sommables et support

3.2.1. Notion de support. — Soit A une C^*-algèbre, X un espace localement compact, E un A-module hilbertien muni d'une représentation non dégénérée π de $C_0(X)$ dans E.

Définition 3.2.1. — Soit $T \in \mathbf{L}(E)$. On appelle *support* de T et on note $\mathrm{Supp}(T)$ le complémentaire de l'ensemble des couples $(x, y) \in X \times X$ tels qu'il existe $f, g \in C_b(X)$ tels que $f(x)g(y) \neq 0$ et $\pi(f)T\pi(g) = 0$. On dira qu'un opérateur est propre si la restriction à son support des deux projections de $X \times X$ sur X est propre.

Notons que le support d'un opérateur est toujours fermé. Rappelons les notations suivantes. Soit G un groupoïde topologique. On note $G^{(0)}$ sa base, r, s les applications but et source, $G^{(2)} = \{(g, g') \in G | s(g) = r(g')\}$, $m : G^{(2)} \to G$ la multiplication, et on considérera $G^{(0)}$ comme un sous-espace fermé de G. Soit $X_1, X_2, X \subset G,\ Y \subset G^{(0)}$, on notera

$$\begin{aligned} X_1X_2 &= \{g \in G \mid \exists\ g_1 \in X_1,\ g_2 \in X_2,\ g = g_1g_2\} \\ X^{-1} &= \{g \in G \mid g^{-1} \in X\} \\ X.Y &= r(XY) \quad \text{et} \quad Y \cdot X = s(YX). \end{aligned}$$

On considérera $X \times X$ comme muni de sa structure canonique de groupoïde de base X.

Lemme 3.2.2

(1) *Si* $\mathrm{Supp}(T) = \varnothing$ *alors* $T = 0$.
(2) $\mathrm{Supp}(T^*) = \mathrm{Supp}(T)^{-1}$.

(3) *Soit* $f \in C_b(X)$, $T \in \mathbf{L}(E)$, *alors*

$$\mathrm{Supp}(\pi(f)T) = \overline{\{(x,y) \in \mathrm{Supp}(T) | f(x) \neq 0\}} \subset \mathrm{Supp}(T) \cap r^{-1}(\mathrm{Supp}(f)).$$

En particulier, si $\forall\, (x,y) \in \mathrm{Supp}(T)$, *on a* $f(x) = 0$ *alors* $\pi(f)T = 0$.

Démonstration

(1) En effet, $T = 0 \Leftrightarrow \forall\, f, g \in C_C(X)$, $fTg = 0$. Soit K_1 et K_2 les supports de telles f et g. Si $\mathrm{Supp}(T) = 0$, il existe $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(g_j)_{j=1,\dots,m}$ telles que $\sum_{i=1}^n f_i^2$ (resp. $\sum_{j=1}^m g_j^2$) est strictement positive sur K_1 (resp. sur K_2) et $\pi(f_i)T\pi(g_j) = 0$. D'où $\pi(f)T\pi(g) = 0$.

(2) En effet, $\forall\, f, g \in C_b(X)$, $\pi(f)T\pi(g) = 0 \Leftrightarrow \pi(\overline{g})T^*\pi(\overline{f}) = 0$.

(3) Si $f, g, h \in C_b(X)$ et $T \in \mathbf{L}(E)$, $\pi(g)T\pi(h) = 0$ implique $\pi(gf)T\pi(h) = 0$ donc $\mathrm{Supp}(\pi(f)T) \subset \mathrm{Supp}(T)$. Par ailleurs, si $x \notin \mathrm{Supp}(f)$ alors $\exists\, g \in C_C(X)$ telle que $gf = 0$ et $g(x) \neq 0$ donc $\mathrm{Supp}(\pi(f)T) \subset r^{-1}(\mathrm{Supp}(f))$. Donc $\mathrm{Supp}(\pi(f)T) \subset \mathrm{Supp}(T) \cap r^{-1}(\mathrm{Supp}(f))$. Donc $\mathrm{Supp}(\pi(f)T) \subset r^{-1}(\mathrm{Supp}(f)) \cap \mathrm{Supp}(T)$.

Supposons que $\{(x,y) \in \mathrm{Supp}(T) \mid f(x) \neq 0\} = \varnothing$. Alors $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe $l \in C_b(X)$ à support dans $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ avec $\|(1-l)f\| \leqslant \varepsilon$. Alors d'après ce qui précède, $\mathrm{Supp}(\pi(l)T) = \varnothing$ donc $\pi(l)T = 0$, et donc $\|\pi(f)T\| = \|\pi(f(1-l))T\| \leqslant \varepsilon\|T\|$ et donc $\pi(f)T = 0$.

Dans le cas général, soit $(x,y) \notin \overline{\{(x,y) \in \mathrm{Supp}(T) \mid f(x) \neq 0\}}$. Alors il existe $g, h \in C_C(X)$ tels que $g(x)h(y) \neq 0$ tel que

$$\mathrm{Supp}(g) \times \mathrm{Supp}(h) \cap \{(x,y) \in \mathrm{Supp}(T) \mid f(x) \neq 0\} = \varnothing.$$

Comme $\mathrm{Supp}(\pi(g)T\pi(h)) \subset (\mathrm{Supp}(g) \times \mathrm{Supp}(h)) \cap \mathrm{Supp}(T)$, on a

$$\{(x,y) \in \mathrm{Supp}(T\pi(h)) \mid fg(x) \neq 0\} = \varnothing.$$

Réciproquement, soit $x, y \in X$, $g, h \in C_C(X)$ tel que $g(x)h(y) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$ et $\pi(g)(\pi(f)T)\pi(h) = 0$. Alors $\pi(gf)T\pi(h) = 0$ et $(gf)(x)h(y) \neq 0$ donc $\{(x,y) \in \mathrm{Supp}(T) \mid f(x) \neq 0\}$ et par conséquent son adhérence sont inclus dans $\mathrm{Supp}(\pi(f)T)$.

Proposition 3.2.3. — *Soit* $T, T_1, T_2 \in \mathbf{L}(E)$

(1) $\mathrm{Supp}(T_1T_2) \subset \overline{\mathrm{Supp}(T_1) \cdot \mathrm{Supp}(T_2)}$.

(2) *soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{L}(E)$ *qui converge fortement vers* T *et* F *un fermé de* $X \times X$ *tel que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\mathrm{Supp}(T_n) \subset F$. *Alors* $\mathrm{Supp}(T) \subset F$.

(3) *Soit* $F \subset X \times X$ *un fermé contenant* X *tel que* $F = F^{-1}$ *et* $F^2 = F$. *Alors* $\{T \in \mathbf{L}(E) \mid \mathrm{Supp}(T) \subset F\}$ *est une sous-algèbre involutive fortement fermée de* $\mathbf{L}(E)$.

Démonstration

(1) Soit V_1 (resp. V_2) un compact de X. La restriction à $r^{-1}(V_1)$ (resp. $s^{-1}(V_2)$) de la première (resp. seconde) projection est propre et en particulier fermée. Donc $V_1 \cdot \mathrm{Supp}(T_1)$ (resp. $\mathrm{Supp}(T_2) \cdot V_2$) est fermé. Soit $(x,y) \notin \overline{\mathrm{Supp}(T_1) \cdot \mathrm{Supp}(T_2)}$. Il existe alors V_1 (resp. V_2) voisinage compact de x (resp. y) tel que si $F_1 = V_1 \cdot \mathrm{Supp}(T_1)$

et $F_2 = \mathrm{Supp}(T_2) \cdot V_2$, on a $F_1 \cap F_2$. Ainsi, F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints de X. Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues à support respectivement dans V_1 et V_2 telles que $f_1(x) \neq 0$ et $f_2(y) \neq 0$. Soit $f \in C_C(X)$ à support dans un compact K. Soit pour $i = 1, 2$, $K_i = K \cap F_i$. Soit h_1 et h_2 des fonctions à support disjoint valant 1 sur K_1 et K_2 respectivement. D'après le lemme qui précède,

$$\pi(f_1)T\pi(f) = \pi(f_1)T\pi(h_1 f) \quad \text{et} \quad \pi(f)T\pi(f_2) = \pi(fh_2)T\pi(f_2),$$

donc

$$\pi(f_1)T_1\pi(f^2)T_2\pi(f_2) = \pi(f_1)T_1\pi(h_1 f^2 h_2)T_2\pi(f_2) = 0.$$

Comme c'est vrai pour toute $f \in C_C(X)$, $\pi(f_1)T_1T_2\pi(f_2) = 0$.

(2) Soit $(x, y) \notin F$. Soit $f, g \in C_C(X)$, tels que

$$f(x)g(y) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}(f) \times \mathrm{Supp}(g) \cap F = \varnothing.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Supp}(\pi(f)T_n\pi(g)) = \varnothing$, donc $\pi(f)T_n\pi(g) = 0$, donc $\pi(f)T\pi(g) = 0$ et finalement $(x, y) \notin \mathrm{Supp}(T)$.

(3) Cela découle aisément de ce qui précède.

3.2.2. Le cas des variétés compactes

Définition 3.2.4. — Soit A une algèbre de Banach. On appellera *idéal de Banach* de A un idéal I muni d'une norme $\|\|_I$ telle :

(1) $\|\|_I$ fait de I un espace de Banach.

(2) $\forall\, x \in I$, $\forall\, a, b \in A$ on a $\|axb\|_I \leqslant \|x\|_I\|a\|\|b\|$ et $\forall\, x \in I$, $\|x\| \leqslant \|x\|_I$.

Proposition 3.2.5. — *Soit $y \in A$. Alors $\{x \in A \mid [x, y] \in I\}$ est une sous-algèbre stable par calcul fonctionnel holomorphe.*

Démonstration. — Soit $B = \{x \in A \mid [x, y] \in I\}$. C'est une sous-algèbre de A. Pour éviter les confusions, notons $\|\|_A$ la norme de la C^*-algèbre A. Posons pour $x \in B$, $\|x\|_B = \|x\|_A + \|[y, x]\|_I$. On vérifie aisément que $\|\|_B$ est une norme d'algèbre sur B. Montrons que B est complet pour cette norme. Soit $(x_n)_{n\in B}$ une suite de Cauchy dans B. Soit x sa limite dans A et z la limite dans I de la suite $([x_n, y])_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $[x, y] = \lim^A_{n\to+\infty}[x_n, y] = z$. Donc $x \in B$ et comme $\lim^I_{n\to+\infty}[x_n, y] = [x, y]$, on a $\lim^B_{n\to+\infty} x_n = x$. Il suffit alors de montrer que le spectre d'un élément $x \in B$ est le même dans $\widetilde{B}$ et $\widetilde{A}$. Soit $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(x)$. Alors

$$[(\lambda + x)^{-1}, y] = -(\lambda + x)^{-1}[x, y](\lambda + x)^{-1} \in I.$$

Donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\widetilde{B}}(x)$. D'où le résultat.

Rappelons que si τ est une trace densément définie sci sur une C^*-algèbre A, et $p \geqslant 1$, on note $L^p(A)$ l'ensemble des $x \in A$ tel que $\tau(|x|^p) < +\infty$. Comme l'application qui à $x \in L^p(A)$ associe $(\tau(|x|^p))^{1/p}$ est une norme (*cf.* [**Gro**]), il en est de même de celle notée $\|\|_p$ qui à $x \in L^p(A)$ associe $\|x\| + (\tau(|x|^p))^{1/p}$ et cette norme munit

$L^p(A)$ d'une structure d'idéal de Banach. Rappelons encore (*cf.* [**Gro**]) que si $p, q \geqslant 1$, $x \in L^p(A)$, $y \in L^q(A)$, $r = (1/p + 1/q)^{-1}$, alors $xy \in L^r(A)$.

Proposition 3.2.6. — *Soit A, B, C trois C^*-algèbres, A et C étant munies de traces densément définies sci, et Y un espace localement compact. Soit $F \in E(C_0(Y) \otimes B, C)$ représenté dans un C^*-module hilbertien E et à support dans $W \subset Y \times Y$. Soit $p \geqslant 1$. On suppose que $1 - F^2 \in L^p(\mathbf{K}(E))$ et que la sous-algèbre $\mathcal{B}$ de B formée des éléments de B dont le commutateur avec F est dans $L^p(\mathbf{K}(E))$ est dense dans B. Soit $p \in M_n(B \otimes A)$ un projecteur et soit $x = [p] \otimes_B [F] \in KK(C_0(Y), C \otimes A)$. Alors il existe $G \in E(C_0(Y), C \otimes A)$ représenté dans E' à support dans W tel que $1 - G^2 \in L^p(\mathbf{K}(E'))$.*

Démonstration. — Soit $F_{n,A} = 1_{\mathbb{C}^n} \otimes F \otimes 1_A \in \mathbf{L}(\mathbb{C}^n \otimes E \otimes A)$. Comme

$$[M_n \odot \mathcal{B} \odot L^p(A), F_{n,A}] \subset L^p(\mathbf{K}(\mathbb{C}^n \otimes E \otimes A)),$$

$$\mathcal{B}_{n,A} = \{y \in M_n \otimes B \otimes A \mid [y, F_{n,A}] \in L^p(\mathbf{K}(\mathbb{C}^n \otimes E \otimes A))\}$$

est une sous-algèbre pleine de $M_n \otimes B \otimes A$. Donc il existe $q \in \mathcal{B}_{n,A}$ tel que $[p] = [q]$. Alors $G = qF_{n,A}q$ convient.

Corollaire 3.2.7. — *Soit A une C^*-algèbre possédant une unité approchée formée de projecteurs et τ une trace densément définie sci sur A. Soit Y une variété compacte de dimension n. Alors pour tout voisinage W de Y dans $Y \times Y$, pour tout $p > n/2$, et tout élément x de $KK(C(Y), A)$, il existe $F \in \mathbf{L}(E)$ représentant x à support dans W tel que $1 - F^2 \in L^p(\mathbf{K}(E))$ pour $p > n/2$.*

Démonstration. — Soit $B = \mathrm{Cliff}(Y)$ qui est K-dual de $C(Y)$ et $\alpha \in KK(C(Y) \otimes B, \mathbb{C})$ la classe de l'opérateur de Dirac. Par dualité de Poincaré, tout élément de $KK(C(Y), A)$ est de la forme $x \otimes_B \alpha$ pour un élément $x \in K_0(B \otimes A)$. On peut représenter α par un opérateur pseudodifférentiel D d'ordre 0 classique à support dans W. Alors $1 - D^2 \in L^p$ et $[C^\infty(Y), D] \in L^p$ puisque ce sont des opérateurs pseudodifférentiels classiques d'ordre -1. Comme $B \otimes A$ possède une unité approchée formée de projecteurs, le sous-groupe engendré par les classes de projecteurs dans les matrices à coefficients dans $B \otimes A$ est $K_0(B \otimes A)$. Il suffit donc d'appliquer la proposition précédente.

3.2.3. Équivalence de Morita. — Soit Γ un groupe discret agissant de façon libre, propre et cocompacte sur un espace X. Soit A une Γ-algèbre triviale, E un $C_0(X) - A, \Gamma$-bimodule hilbertien équivariant. Par équivalence de Morita, lui est associé un $C(X/\Gamma) - A$-bimodule hilbertien noté E_Γ. Nous faisons le lien entre les opérateurs de $\mathbf{L}(E)^\Gamma$ à support très proche de la diagonale et ceux $\mathbf{L}(E/\Gamma)$ à support très proche de la diagonale. Cette partie technique nous permettra ensuite de déduire de la partie précédente un résultat de représentabilité des éléments de $KK_\Gamma(C_0(X), A)$ par des éléments sommables avec des conditions de support données, quand X peut être d'une structure de variété Γ-équivariante, étape essentielle de notre généralisation du théorème d'indice L^2.

Soit X un espace localement compact sur lequel agit à droite un groupe discret Γ de façon propre, et $P_{X,\Gamma}$ le $C_0(X) \rtimes \Gamma$-module hilbertien construit dans la section précédente. Soit $q : X \to X/\Gamma$ l'application quotient.

Proposition 3.2.8. — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\pi : C_0(X/\Gamma) \longrightarrow \mathbf{K}(P_{X,\Gamma}).$$

Quand l'action de Γ *sur* X *est en outre libre, alors* $P_{X,\Gamma}$ *est un* C^**-module plein ; en particulier, celui-ci réalise une équivalence de Morita entre* $C_0(X/\Gamma)$ *et* $C_0(X) \rtimes \Gamma$.

Démonstration. — Posons pour $f \in C_b(X/\Gamma)$ et $\xi \in C_C(X)$, $\pi(f)(\xi) \in C_C(X)$ défini par

$$\forall\, x \in X, \quad \pi(f)(\xi)(x) = f(q(x))\xi(x).$$

Soit $g = (\|f\|^2 - \overline{f}f)^{1/2}$. Alors $\forall\, x \in C_C(X)$, on a

$$\langle \pi(f)(\xi), \pi(f)(\xi)\rangle + \langle \pi(g)(\xi), \pi(g)(\xi)\rangle = \|f\|^2\langle \xi, \xi\rangle$$

et donc $\|\pi(f)(\xi)\| \leqslant \|f\|\|\xi\|$. Donc π s'étend en une représentation unitale de $C_b(X/\Gamma)$ dans $\mathbf{L}(P_{X,\Gamma})$. Pour montrer que $\pi(C_0(X/\Gamma)) \subset \mathbf{K}(X_\Gamma)$, il suffit de montrer que $\forall\, f \in C_C(X/\Gamma)^+$, on a $\pi(f) \in \mathbf{K}(X_\Gamma)$. Soit donc $f \in C_C(X/\Gamma)^+$. Soit $c \in C(X)$ une fonction cut-off. Soit $\xi = (f \circ q)^{1/2}c^{1/2} \in C_C(X)$. Alors $\pi(f) = \theta_{\xi,\xi}$. D'où l'assertion.

Munissons le $C_C(X/\Gamma)$-module $C_C(X)$ d'une structure de $C_C(X/\Gamma)$-module préhilbertien en posant

$$\forall\, \xi, \eta \in C_C(X),\ \forall\, \overline{x} \in X/\Gamma, \quad \langle \xi, \eta\rangle(\overline{x}) = \sum_{x \in q^{-1}(\overline{x})} \overline{\xi(x)}\eta(x)$$

et soit H le $C_0(X/\Gamma)$-module hilbertien obtenu en séparant-complétant, qui est munit d'une structure naturelle de $C_0(X) \rtimes \Gamma$-module. Il est immédiat que l'application qui $\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_n \in C_C(X)$, $\forall\, f_1, \ldots, f_n \in C_C(X)$, $\forall\, \overline{x} \in X/\Gamma$, associe à $\sum_{i=1} f_i \otimes \xi_i$ la fonction sur X/Γ qui $\forall\, \overline{x} \in X/\Gamma$, associe à $\overline{x} \in X/\Gamma$, $\sum_{x \in q^{-1}(\overline{x})} f_i(x)\xi_i(x)$, induit un isomorphisme de $P_{X,\Gamma} \otimes_{C_0(X) \rtimes \Gamma} H$ sur $C_0(X/\Gamma)$. En particulier, π est injectif. Soit $f \in C_C(X)$ et soit $g \in C_C(X/\Gamma)$ la fonction telle que $g \circ q = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\overline{f} \cdot \gamma)$. Alors $\pi(g) = \theta_{f,f}$. Donc π est également surjectif. Il est aisé de voir que $P_{X,\Gamma}$ est plein quand l'action est en outre libre (*cf.* [**M-Re-W**] pour un résultat plus général).

Supposons dorénavant que l'espace X est Γ-compact. Soit E un $C_0(X) - A$, Γ-bimodule hilbertien équivariant non dégénéré. Quelle que soit la fonction cut-off, l'espace des vecteurs à support compact est $C_C(X)E$ et sera noté $\mathcal{E}$; le $A \rtimes \Gamma$-module hilbertien obtenu en le séparant-complétant (*cf.* théorème 2.3.4) sera noté E_Γ. Quand $E = C_0(X)$, on le notera plus simplement X_Γ.

LEMME 3.2.9. — *On a un isomorphisme naturel* $E_\Gamma \simeq P_{X,\Gamma} \otimes_{C_0(X)\rtimes\Gamma} (E \rtimes \Gamma)$, *d'où une action naturelle de* $C(X/\Gamma)$ *sur* E_Γ.

Démonstration. — Posons $\forall f_1, \dots, f_n \in C_C(X)$, $\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in E, \forall g_1, \dots, g_n \in C_C(\Gamma)$,

$$\theta(\sum_{i=1}^n f_i \odot \xi_i \odot g_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(f_i\xi_i)g_i(\gamma).$$

On vérifie immédiatement que cette application induit une application préservant le produit scalaire de $X_\Gamma \otimes_{C_0(X)\rtimes\Gamma} (E \rtimes \Gamma)$ dans E_Γ. Comme cette application est trivialement d'image dense, c'est un isomorphisme. L'action naturelle de $C(X/\Gamma)$ est alors celle induite par l'action sur $P_{X,\Gamma}$.

Notons $j : \mathcal{E} \to E_\Gamma$ l'application canonique.

LEMME 3.2.10. — *Soit* U *un ouvert de* X/Γ. *La restriction à* $C_C(q^{-1}(U)E)$ *de* j *induit un isomorphisme de* $(C_0(q^{-1}(U))E)_\Gamma$ *sur* $C_0(U)E_\Gamma$.

Démonstration. — Soit $f \in C_C(q^{-1}(U))$ et $\xi \in E$. Il existe $g \in C_C(U)$ tel que $(g \circ q)f = f$. Alors

$$j(f\xi) = \pi(g)(j(f\xi)) \in C_0(U)E_\Gamma.$$

Donc $\mathrm{Im}(j) \subset C_0(U)E_\Gamma$. Réciproquement soit $\xi \in E$, $f \in C_C(X)$ et $g \in C_C(U)$, alors $fg \circ q \in C_C(q^{-1}(U))$ et $j(fg \circ q\xi) = \pi(g)j(f\xi)$. Donc $\overline{\mathrm{Im}(j)} = C_0(U)E_\Gamma$. D'où le résultat.

Supposons dorénavant que A est une Γ-algèbre triviale. Le morphisme $\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon : A \otimes_{\max} C^*(\Gamma) \to A$ sera noté simplement ε. Soit $E/\Gamma = E_\Gamma \otimes_\varepsilon A$ muni de la structure de $C_0(X/\Gamma)$, A-bimodule hilbertien induite par la structure de $C_0(X/\Gamma)$, $A \otimes_{\max} C^*(\Gamma)$-bimodule hilbertien de E_Γ. On notera $\varepsilon : E_\Gamma \to E_{/\Gamma}$ l'application induite ; on a

$$\forall f \in C_C(X/\Gamma),\ \forall \xi \in \mathcal{E}, \quad \varepsilon((f \circ q)\xi) = f\varepsilon(\xi).$$

Pour $T \in \mathbf{L}_P^\Gamma(E)$, on notera $T_{/\Gamma}$ ou encore $\varepsilon(T)$ l'opérateur $T_\Gamma \otimes_\varepsilon 1$.

Soit U un ouvert de X/Γ. On appellera trivialisation sur U, une section $s : U \to X$ d'image ouverte telle que l'application de $U \times \Gamma$ dans X qui à (x, γ) associe $s(x)\gamma$ soit un homéomorphisme sur son image. On notera $\forall \gamma \in \Gamma$, $U.\gamma = s(U) \cdot \gamma \subset X$, $s_\gamma : U \to U.\gamma$ la section d'image incluse dans $U.\gamma$ et $\forall f \in C_C(U)$, $\phi \cdot \gamma \in C_C(s(U) \cdot \gamma)$ la fonction telle que $\phi \cdot \gamma = \phi \circ q$.

LEMME 3.2.11

(1) *Soit* s *une trivialisation sur un ouvert* U. *Alors* $j(C_C(s(U))) \subset C_0(U)E_\Gamma$ *et la composée* $\varepsilon \circ j_{|C_C(s(U))}$ *induit un isomorphisme* $s^* : C_0(s(U))E \to C_0(U)E_{/\Gamma}$ *tel que*

$$\forall f \in C_0(s(U)),\ \forall \xi \in C_0(s(U))E, \quad s^*(f\xi) = s^*(f)s^*(\xi).$$

(2) *Soit* $T \in \mathbf{L}_P^\Gamma(E)$. *Soit* $s' : U' \to X$ *une trivialisation sur un ouvert* U'. *Soit* $\phi \in C_C(U)$ *et* $\phi' \in C_C(U')$. *Alors*

$$\phi' T_{/\Gamma} \phi = \sum_{\gamma \in F} (s'_\gamma)^* (\phi' \cdot \gamma) T(\phi \cdot e)(s^*)^{-1} \in \mathbf{L}(C_0(U)E_{/\Gamma}, C_0(U')E_{/\Gamma})$$

(la somme est finie).

Démonstration

(1) En effet, $\forall\, \xi \in C_C(s(U))E$, $\langle \xi, \xi \rangle \in A \subset C_C(\Gamma, A)$ et donc

$$\langle s^*(\xi), s^*(\xi) \rangle = \langle \xi, \xi \rangle \in A.$$

Le reste est trivial.

(2) On montre que

$$\phi'(T_\Gamma \otimes_\varepsilon 1)\phi s^* = \sum_{\gamma \in F} (s'_\gamma)^* (\phi' \cdot \gamma) T(\phi \cdot e) \in \mathbf{L}(C_0(s(U))E, C_0(U')E_{/\Gamma})$$

où F est une partie finie de Γ telle que

$$(\gamma \in \Gamma, \mathrm{Supp}(\phi' \cdot \gamma) \times \mathrm{Supp}(\Phi) \cap \mathrm{Supp}(T) \neq \varnothing) \Longrightarrow \gamma \in F.$$

Soit $\xi \in C_C(s(U))$. On a

$$\begin{aligned}
\phi' T_{/\Gamma} \phi s^*(\xi) &= \phi' T_{/\Gamma} \phi \varepsilon(\xi) \\
&= \phi' T_{/\Gamma} \varepsilon((\phi \circ q)\xi) \\
&= \phi' T_{/\Gamma} \varepsilon((\phi \cdot e)\xi) \\
&= \phi' \varepsilon(T((\phi \cdot e)\xi)) \\
&= \varepsilon((\phi' \circ q) T(\phi \cdot e)\xi) \\
&= \sum_{\gamma \in F} (s' \cdot \gamma)^* (\phi' \cdot \gamma) T(\phi \cdot e)\xi
\end{aligned}$$

LEMME 3.2.12. — *Soit* τ *une trace densément définie sur* A, τ_E^Γ *la trace associée sur* $\mathbf{L}(E)^\Gamma$. *Soit* $T \in m_{\tau_E^\Gamma}$. *Supposons*

$$\forall\, x \in X, \forall\, \gamma \in \Gamma \setminus \{e\}, \quad (x, x\gamma) \notin \mathrm{Supp}(T),$$

alors

$$(\tau_{E/\Gamma})'(T_{/\Gamma}) = \tau_E^\Gamma(T).$$

Démonstration. — Comme T est propre, $r(\mathrm{Supp}(T))$ et $s(\mathrm{Supp}(T))$ sont fermés. Donc quitte à remplacer X par $r(\mathrm{Supp}(T)) \cup s(\mathrm{Supp}(T))$, on peut supposer que l'action de Γ sur X est libre. Soit $\overline{x} \in X/\Gamma$ et $x \in X$, $q(x) = \overline{x}$. Soit $s : U \to X$ une trivialisation sur un voisinage U de $\overline{x}$ telle que $s(\overline{x}) = x$ et $V \subset U_e$ un voisinage compact de $x \in X$. Soit B une base de voisinages compacts de x inclus dans V et pour $W \in B$ on pose

$$K_W = ((\cup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} W \cdot \gamma) \times W) \cap \mathrm{Supp}(T).$$

On a clairement $\cap_{W\in B}K_W = \varnothing$ et comme $\mathrm{Supp}(T)\cap s^{-1}(V)$ est compact, il existe $W \in B$ tel que $K_W = 0$. Fixons un tel W et une fonction $\phi \in C_{q(W)}(X/\Gamma)$ telle que $\phi(\overline{x}) > 0$. Alors $\phi T_{/\Gamma}\phi = s^*\phi\cdot eT\phi\cdot e(s^*)^{-1}$. Comme X/Γ est compact, il existe un nombre fini de telles fonctions ϕ_i, $i = 1,\ldots,n$ avec $\sum_{i=1}^n \phi_i^2 = 1$. Alors $\sum_{i=1}^n \phi_i\cdot e^2$ est une fonction cut-off. D'où

$$(\tau_{E/\Gamma})'(T_{/\Gamma}) = \sum_{i=1}^n \tau'_{E/\Gamma}(\phi_i T_\Gamma \phi_i) = \sum_{i=1}^n \tau'_E(\phi_{i\cdot e}T\phi_{i\cdot e}) = (\tau_E^\Gamma)'(T).$$

On suppose dorénavant que l'action de Γ sur X est libre. Étant donné un recouvrement $U = (U_i)_{i=1}^n$ par des ouverts trivialisés, $s_i : U_i \to X$ les sections associées, on notera $Z_U = \cup_{i=1}^n \cup_{\gamma\in\Gamma} U_{i\cdot\gamma}\times U_{i\cdot\gamma} \subset X\times X$.

Lemme 3.2.13. — *Soit V un voisinage Γ-invariant de $X \subset X\times X$. Alors il existe un recouvrement ouvert $U = (U_i)_{i=1}^n$ de X/Γ par des ouverts trivialisés tel que $\overline{Z_U}$ soit Γ-compact et contenu dans V.*

Soit $\overline{x}\in X/\Gamma$. Choisissons $x\in q^{-1}(\overline{x})$. Il existe un voisinage compact W de x dans X tel que $W\times W\subset V$ (et donc $\cup_{\gamma\in\Gamma}W\cdot\gamma\times W\cdot\gamma\subset V$) et donc un voisinage $U\subset X/\Gamma$ de $\overline{x}$, $s: U\to X$ une trivialisation d'image incluse dans W. Par compacité, on peut recouvrir X/Γ par un nombre fini de tels U. D'où l'assertion.

Notons $\widetilde{q} : X\times X \to (X\times X)/\Gamma$ l'application quotient. Celle-ci induit une bijection entre les voisinages Γ-invariants de X dans $X\times X$ et les voisinages de la diagonale du groupoïde $G = (X\times X)/\Gamma$.

Proposition 3.2.14. — *Soit G un groupoïde topologique à base compacte. Alors $\forall U \subset G$ voisinage de $G^{(0)}$ dans G, il existe un voisinage V de $G^{(0)}$ dans G tel que $V = V^{-1}$ et $V^2 \subset U$.*

Démonstration. — Soit $m : G^{(2)} \to G$ la multiplication. Comme $m(G^{(0)}) \subset G^{(0)}$ il existe un voisinage ouvert V_1 de $G^{(0)}$ dans $G^{(2)}$ tel que $m(V_1)\subset U$. Soit V_2 un ouvert de $G\times G$ tel que $V_2\cap G^{(2)} = V_1$ et soit $V' = V_2\cup((G\times G)\setminus G^{(2)})$. Alors $V'\cap G^{(2)} = V_1$ et $G^{(0)}\times G^{(0)}\subset V'$. Comme $G^{(0)}$ est compact, il existe $W\subset G$ ouvert contenant $G^{(0)}$ tel que $W\times W\subset V'$. Alors $W^2 = m((W\times W)\cap G^{(2)})\subset U$. Le voisinage $V = W\cap W^{-1}$ convient donc.

Lemme 3.2.15. — *Il existe un recouvrement fini $U = (U_i)_{i=1}^n$ de X/Γ par des ouverts trivialisés tel que $\forall\,(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$, on a $|\{\gamma\in\Gamma \mid U_{i\cdot e}\cap U_{j\cdot\gamma}\neq\varnothing\}|\leqslant 1$.*

Démonstration. — Soit V un voisinage Γ-équivariant de la diagonale de X tel que $\forall\,x\in X, \forall\,\gamma\neq e$, $(x,x\gamma)\notin V$. D'après la proposition 3.2.14 et le lemme 3.2.13, on peut choisir un recouvrement par des ouverts trivialisés $U = (U_i)_{i=1}^n$ tel que $(Z_U)^2\subset V$. Alors si $x\in U_{i\cdot e}\cap U_{j\cdot\gamma_1}$, $y\in U_{i\cdot e}\cap U_{j\cdot\gamma_2}$, on a $(x,y)\in Z_U$ et $(y, x\gamma_1^{-1}\gamma_2)\in Z_U$ d'où $(x,x\gamma_1^{-1}\gamma_2)\in Z_U^2\subset V$. Donc $\gamma_1=\gamma_2$. Donc ce recouvrement convient.

LEMME 3.2.16. — *Soit $U = (U_i)_{i=1}^n$ un recouvrement comme dans le lemme 3.2.15.*

(1) *Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ et $\gamma \in \Gamma$ tel que $\forall\, \gamma' \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$, $U_{i\cdot e} \cap U_{j\cdot\gamma'} = \varnothing$. Alors $s_{i\cdot e}$ induit un isomorphisme de $C_0(U_i \cap U_j)E_{/\Gamma}$ sur $C_0(U_{i\cdot e} \cap U_{j\cdot\gamma})E$ ainsi que $s_{j\cdot\gamma}$ et ces deux isomorphismes coïncident.*

(2) *Soit $(\chi_i)_{i=1}^n$ et $(\phi_i)_{i=1}^n$ une famille de fonctions à support dans U_i respectivement et telles que $(\phi_i)_{i=1}^n$ est une partition de l'unité et $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, $\phi_i\chi_i = \phi_i$. Soit $T \in \mathbf{L}(E/\Gamma)$ tel que $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, $\phi_i T \chi_i = \phi_i T$ et $\chi_i T \phi_i = T\phi_i$. Soit*

$$\widetilde{T} = \sum_{i=1}^{n} M_\Gamma(s_{i\cdot e}\chi_i T s_{i\cdot e}^{-1}\phi_{i\cdot e}) \in \mathbf{L}_P^\Gamma(E).$$

Alors $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, et pour toute fonction ϕ_e à support inclus dans celui de $\phi_{i\cdot e}$, on a, en notant $\phi = \phi_e \circ s_{i\cdot e}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{T} s_{i\cdot e}\phi &= s_{i\cdot e} T\phi \\ s_{i\cdot e}^{-1}\phi_e \widetilde{T} &= \phi T s_{i\cdot e}^{-1}\chi_{i\cdot e}. \end{aligned}$$

En particulier, si $[T, C(X/\Gamma)] \in \mathbf{K}(E_{/\Gamma})$, $\widetilde{T}$ est une connexion pour T (où l'on identifie E à $E_1 \otimes_\pi E/\Gamma$, E_1 désignant le bimodule canonique d'équivalence de Morita entre $C_0(X) \rtimes \Gamma$ et $C(X/\Gamma)$).

Démonstration

(1) Si $U_i \cap U_j = \varnothing$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, $U_{i\cdot e} \cap U_{j\cdot\gamma} \neq \varnothing$. Comme $s_{i\cdot e}$ commute à l'action de $C(X/\Gamma)$, $s_{i\cdot e}$ induit un isomorphisme de $C_0(U_i \cap U_j)E_{/\Gamma}$ sur $C_0(U_{i\cdot e} \cap \cup_{\gamma'\in\Gamma} U_{j\cdot\gamma'})E = C_0(U_{i\cdot e} \cap U_{j\cdot\gamma})E$. De même, pour $s_{j\cdot\gamma}$. Les isomorphismes induits coïncident puisque leur réciproque coïncident sur le sous-espace dense $C_C(U_{i\cdot e} \cap U_{j\cdot\gamma})$.

(2) Soit $j \in \{1,\dots,n\}$, tel que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, et $\gamma \in \Gamma$ l'unique élément de Γ tel que $U_{i\cdot e} \cap U_{j\cdot\gamma} \neq \varnothing$. Soit ψ (resp. ψ_e) la fonction continue telle que $\psi|\psi| = \phi$ (resp. $\psi_e|\psi_e| = \phi_e$).

$$\begin{aligned} M_\Gamma(s_{j\cdot e}\chi_j T s_{j\cdot e}^{-1}\phi_{j\cdot e}) s_{i\cdot e}\phi &= s_{j\cdot\gamma}\chi_j T s_{j\cdot\gamma}^{-1}\phi_{j\cdot\gamma}\psi_e s_{i\cdot e}|\psi| \\ &= s_{j\cdot\gamma}\chi_j T s_{j\cdot\gamma}^{-1}\phi_{j\cdot\gamma}\phi_e s_{i\cdot e} = s_{j\cdot\gamma}\chi_j\chi_i T\phi_j\phi \\ &= s_{i\cdot e}\chi_j\chi_i T\phi_j\phi = s_{i\cdot e}T\phi_j\phi \end{aligned}$$

d'où la première égalité en sommant sur $j = 1,\dots,n$.

$$\begin{aligned} s_{i\cdot e}^{-1}\phi_e M_\Gamma(s_{j\cdot e}\chi_j T s_{j\cdot e}^{-1}\phi_{j\cdot e}) &= s_{i\cdot e}^{-1}\phi_e s_{j\cdot\gamma}\chi_j T s_{j\cdot\gamma}^{-1}\phi_{j\cdot\gamma} = s_{i\cdot e}^{-1}\phi_e\chi_{j\cdot\gamma}s_{j\cdot\gamma}T s_{j\cdot\gamma}^{-1}\phi_{j\cdot\gamma} \\ &= \phi\chi_j T\chi_i s_{j\cdot\gamma}^{-1}\phi_{j\cdot\gamma} = \phi\chi_j T\phi_j s_{i\cdot e}^{-1}\chi_{i\cdot e} \\ &= \phi T\phi_j s_{i\cdot e}^{-1}\chi_{i\cdot e} \end{aligned}$$

d'où la seconde égalité en sommant sur $j = 1,\dots,n$.

Montrons que si $[T, C(X/\Gamma)] \subset \mathbf{K}(E/\Gamma)$, alors $\widetilde{T}$ est une connexion pour T. Il s'agit de montrer que $\forall\, \xi \in C_C(X)$ (sous-espace dense de E_1), $T_\xi T - \widetilde{T} T_\xi \in \mathbf{K}$ et $T_\xi^* \widetilde{T} - T T_\xi^* \in \mathbf{K}$. Par linéarité et comme $\widetilde{T}$ est $\Gamma-$invariant, il suffit de le montrer pour ξ à support dans le support d'un $\phi_{i\cdot e}$ (en remplaçant ξ par $\xi\phi_{i\cdot e}$). Soit donc ξ_e à support dans $U_{i\cdot e}$ et $\xi = \xi_e \circ s_{i\cdot e}$. Alors

$$\begin{aligned} T_{\xi_e} T - \widetilde{T} T_{\xi_e} &= s_{i\cdot e} \xi T - \widetilde{T} s_{i\cdot e} \xi \\ &= s_{i\cdot e}(\xi T - T\xi) \in \mathbf{K} \\ T_{\xi_e}^* \widetilde{T} - T T_{\xi_e}^* &= s_{i\cdot e}^{-1} \overline{\xi_e} \widetilde{T} - T s_{i\cdot e}^{-1} \overline{\xi_e} \\ &= (\overline{\xi} T - T\overline{\xi}) s_{i\cdot e}^{-1} \chi_{i\cdot e} \in \mathbf{K} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Lemme 3.2.17. — *Soit $U_1, \ldots, U_n$ et $V_1, \ldots, V_n$ des ouverts de X/Γ tels que $\forall\, i = 1, \ldots, n$, $\overline{U_i} \subset V_i$. Alors il existe un voisinage compact W de la diagonale de X/Γ dans $X/\Gamma \times X/\Gamma$ tel que $W \cdot \overline{U_i} \subset V_i$.*

Démonstration. — Il suffit de prendre $W = X/\Gamma \times X/\Gamma \setminus (\cup_{i=1}^n (X/\Gamma \setminus V_i) \times \overline{U_i})$.

Soit τ trace densément définie sci sur A.

Proposition 3.2.18. — *Supposons que $\forall\, x \in KK(C(X/\Gamma), A)$ et pour tout voisinage W de X/Γ il existe un bimodule gradué $E = E_1 \oplus E_2$, $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}(E)$ qui représente x et $Q \in \mathbf{L}(E_2, E_1)$ tel que :*

(1) $[F] = x$

(2) *Les supports de F et Q sont inclus dans W.*

(3) $1 - TQ \in m_{\tau_{E_2}}$ *et* $1 - QT \in m_{\tau_{E_1}}$

Alors $\forall\, x \in KK_\Gamma(C_0(X), A)$, et pour tout voisinage W Γ-équivariant de la diagonale de X, il existe un bimodule $E = E_1 \oplus E_2$ gradué, Γ-équivariant, $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}^\Gamma(E)$ qui représente x et $Q \in \mathbf{L}(E_2, E_1)^\Gamma$ tels que :

(1) $[F] = x$

(2) *Les supports de F et Q sont inclus dans W.*

(3) $1 - QT \in m_{\tau_{E_1}^\Gamma}$ *et* $1 - TQ \in m_{\tau_{E_2}^\Gamma}$.

Démonstration. — Soit $\widetilde{W}$ un voisinage de la diagonale de X Γ-équivariant. Soit $U = (U_i)_{i=1}^n$ un recouvrement comme dans le lemme 3.2.15 tel que $\overline{Z_U} \subset \widetilde{W}$. Soit $(\psi_i)_{i=1}^n$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement et $(\zeta_i)_{i=1}^n$ des fonctions à support dans les U_i respectivement et telle que $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ $\zeta_i = 1$ sur un voisinage V_i du support de ψ_i. Pour tout $x \in X/\Gamma$, on peut trouver un voisinage U_x d'adhérence contenu dans $W_{i(x)}$ où $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, W_i = \{y \in X/\Gamma, \psi_i(x) > 1/2n\}$. Soit $(U'_j)_{j=1}^m$ un sous-recouvrement fini de $(U_x)_{x \in X/\Gamma}$ et ϕ_j une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement fini (on se fixe $i : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ tel que

$\forall\, j \in \{1,\dots,m\}$, $\overline{U'_j} \subset W_{i(j)}$ et $\forall\, j \in \{1,\dots,m\}$, on fixe comme trivialisation s_j sur U'_j la restriction de $s_{i(j)}$ à U'_j). Pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$, soit $\chi_j \in C_C(U'_j)$ valant 1 sur un voisinage V'_j du support des ϕ_j. Enfin, soit W un voisinage compact de la diagonale de X/Γ tel que $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall\, j \in \{1,\dots,m\}$, $W\cdot \operatorname{Supp}\psi_i \subset V_i$, $W\cdot\operatorname{Supp}\phi_j \subset V'_j$.

Soit $x \in KK_\Gamma(C_0(X),A) \simeq KK(C(X/\Gamma),A)$. Soit $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & T^* \\ T & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}(E')$ où E' est un bimodule gradué, qui représente x et Q tels que dans l'énoncé pour W. En particulier, $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, on a $Q\psi_i = \zeta_i Q\psi_i$ et $\forall\, j \in \{1,\dots,m\}$, on a $T\phi_j = \chi_j T\phi_j$. Soit E un bimodule Γ-équivariant (gradué) tel que $E/\Gamma = E'$. Posons

$$\widetilde{T} = \sum_{j=1}^{m} M_\Gamma(s_{j\cdot e}\chi_j T s_{j\cdot e}^{-1}\phi_j) \in \mathbf{L}(E)^\Gamma$$

et

$$\widetilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} M_\Gamma(s_{i\cdot e}\zeta_i Q s_{i\cdot e}^{-1}\psi_i) \in \mathbf{L}(E)^\Gamma$$

et $\widetilde{F} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \widetilde{Q} \\ \widetilde{T} & 0\end{smallmatrix}\right)$. Alors $\widetilde{F}$ est à support dans Z_U donc dans W et comme $\widetilde{F}$ est une connexion pour F d'après le lemme 3.2.16, $\widetilde{F} \in E_\Gamma(C_0(X),A)$ et $[\widetilde{F}] = [F]$. Soit $m^\Gamma = m_{\tau_E^\Gamma}$.

Or d'après lemme 3.2.16, $\forall\, j \in \{1,\dots,m\}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}\widetilde{T}\phi_{j\cdot e} &= \widetilde{Q}s_{j\cdot e}\chi_j T s_{j\cdot e}^{-1}\phi_{j\cdot e}\\
&= \widetilde{Q}\psi_{i(j)\cdot e}s_{j\cdot e}\chi_j/\psi_{i(j)}T s_{j\cdot e}^{-1}\phi_{j\cdot e}\\
&= s_{i(j)\cdot e}\zeta_{i(j)}Q s_{i(j)\cdot e}^{-1}\psi_{i(j)\cdot e}s_{j\cdot e}\chi_j/\psi_{i(j)}T s_{j\cdot e}^{-1}\phi_{j\cdot e}\\
&= s_{i(j)\cdot e}QT\phi_j s_{j\cdot e}^{-1}
\end{aligned}$$

Comme $\phi_{j\cdot e} = s_{i(j)\cdot e}\phi_j s_{j\cdot e}^{-1}$, $\widetilde{Q}\widetilde{T}\phi_{j\cdot e} - \phi_{j\cdot e} \in m_{\tau_{E'}}$. En sommant sur j, il s'ensuit que $1-\widetilde{Q}\widetilde{T} \in m^\Gamma$. Quitte à refaire l'opération en partant des ϕ_j, on obtient $\widetilde{Q}' \in \mathbf{L}(E)^\Gamma$ à support dans $\widetilde{W}$ tel que $1-\widetilde{T}\widetilde{Q}' \in m^\Gamma$. D'où $\widetilde{Q}-\widetilde{Q}' \in m^\Gamma$ et donc $1-\widetilde{T}\widetilde{Q} \in m^\Gamma$. D'où l'assertion.

3.3. Théorème d'indice L^2 en K-théorie

Soit X un espace localement compact muni d'une action à droite de Γ libre, propre et cocompacte et $q : X \to X/\Gamma$ l'application quotient. Soit A une C^*-algèbre munie de l'action triviale de Γ et E un $C_0(X)-A,\Gamma$-bimodule hilbertien équivariant. On notera $\varepsilon_A : A\otimes_{\max} C^*(\Gamma) \to A$ l'application $\mathrm{id}_A\otimes\varepsilon$.

Proposition 3.3.1. — *Soit W un voisinage propre Γ-équivariant de la diagonale de X tel que $\forall\, x\in X$, $\forall\,\gamma \in \Gamma\setminus\{e\}$, $(x,x\gamma)\notin W^2$. Soit $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & T^* \\ T & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{L}(E_1\oplus E_2)^\Gamma$ à support dans W définissant un élément $x \in KK_\Gamma(C_0(X),A)$. Soit $Q \in \mathbf{L}(E_2,E_1)^\Gamma$ à support dans W tel que $1-QT \in m^\Gamma$ et $1-TQ\in m^\Gamma$. Alors :*

$$\tau_*\circ(\varepsilon_A)_*\circ\mu_A^\Gamma(x) = (\tau\otimes\tau^\Gamma)_*\circ\mu_A^\Gamma(x).$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.3.9 $\mu_A^\Gamma(x) = [T_\Gamma]$ où $T_\Gamma : (E_1)_\Gamma \to (E_2)_\Gamma$. Comme $1 - TQ, 1 - QT \in \mathbf{L}_P^\Gamma(E) \cap m^\Gamma$, d'après la proposition 2.3.11,

$$1 - T_\Gamma Q_\Gamma, 1 - Q_\Gamma T_\Gamma \in m_{\tau_{E_\Gamma}}$$

et d'après le lemme 3.2.12 :

$$\begin{aligned}(\tau \otimes \tau^\Gamma)_*([T_\Gamma]) &= (\tau \otimes \tau^\Gamma)_{(E_1)_\Gamma}(1 - Q_\Gamma T_\Gamma) - (\tau \otimes \tau^\Gamma)_{(E_2)_\Gamma}(1 - T_\Gamma Q_\Gamma) \\ &= \tau_{E_1}^\Gamma(1 - QT) - \tau_{E_2}^\Gamma(1 - TQ) \\ &= \tau_{(E_1)_{/\Gamma}}(\varepsilon(1 - QT)) - \tau_{(E_2)_{/\Gamma}}(\varepsilon(1 - TQ)) \\ &= \tau_* \varepsilon_*(x)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

THÉORÈME 3.3.2. — *Soit Γ un groupe discret dans torsion. Soit A une C^*-algèbre munie d'une trace τ densément définie sci et de l'action triviale de Γ. Soit $\varepsilon_A = 1_A \otimes \varepsilon : A \otimes_{\max} C^*(\Gamma) \to A$ et $\tau \otimes \tau^\Gamma$ la trace associée sur $A \otimes_{\max} C^*(\Gamma)$.*

$$\tau_* \circ (\varepsilon_A) * \circ \mu_\Gamma^A = (\tau \otimes \tau^\Gamma)_* \circ \mu_\Gamma^A.$$

Démonstration. — D'après [**D1**], il existe une représentation $\pi : A \to \mathbf{L}(H)$ non dégénérée et τ' une trace normale semifinie sur $\pi(A)''$ telle que $\tau' \circ \pi$ étend τ. Alors $\overline{m_{\tau'}}$ contient une unité approchée formée de projecteurs. Donc quitte à composer par π, on peut supposer que A possède une unité approchée formée de projecteurs. D'après la proposition 3.1.7, il suffit de démontrer que

$$\tau_* \circ \varepsilon_* \circ \mu_{M,\Gamma}^A = (\tau \otimes \tau^\Gamma)_* \circ \mu_{M,\Gamma}^A$$

pour tout Γ-espace propre cocompact M muni d'une structure de variété préservée par l'action de Γ. Soit n la dimension de la variété, $p > n/2$ entier, W un voisinage de la diagonale fermé tel que $\forall\, x \in M$, $\forall\, \gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$, $(x, x\gamma) \notin W^{2p}$. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $\forall\, x \in KK_\Gamma(C_0(M), A)$, il existe un représentant de x et Q tel que dans la proposition précédente pour W. D'après la proposition 3.2.18, il suffit de montrer que pour tout voisinage W_1 de la diagonale de M/Γ, les hypothèses de la proposition 3.2.18 sont vérifiées. Soit W_2 un voisinage compact de la diagonale de M/Γ tel que $W_2^{2p-1} \subset W_1$ et $x \in KK(C(M/\Gamma), A)$. D'après le corollaire 3.2.7, on peut représenter x par un opérateur $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{smallmatrix}\right)$ à support W_1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, tel que $XP(X) = 1 - (1 - X)^p$. Alors $Q = TP(TQ)$ convient. D'où le résultat.

LEMME 3.3.3. — *Soit α_1 et α_2 deux actions de Γ sur A équivalentes, soit $u : \Gamma \to M(A)$ un cocycle tel que $\forall\, \gamma \in \Gamma,\ a \in A$, on a : $\alpha_2(\gamma)(a) = u(\gamma)\alpha_1(\gamma)(a)u(\gamma)^*$. Soit $\theta : A \rtimes_{\alpha_1} \Gamma \simeq A \rtimes_{\alpha_2} \Gamma$ l'isomorphisme tel que si $a \in A$ et $\gamma \in \Gamma$, $\theta(a \odot U_\gamma) = au(\gamma) \odot U_\gamma$. Alors il existe un isomorphisme canonique $\theta_{\text{top}} : K_{\text{top}}^*(\Gamma, A)_{\alpha_2} \simeq K_{\text{top}}^*(\Gamma, A)_{\alpha_1}$ tel que :*

$$\theta_* \circ \mu_{A,\alpha_1}^\Gamma = \mu_{A,\alpha_2}^\Gamma \circ \theta_{\text{top}}.$$

Démonstration. — Soit $A_1 = A$ considérée comme Γ-algèbre pour l'action de α_1 et $A_2 = A$ considérée comme Γ-algèbre pour l'action de α_2. Soit $E = A$ considérée comme $A - A$-bimodule hilbertien. On définit une action de Γ sur E qui le munit d'une structure de $A_1 - A_2, \Gamma$-bimodule hilbertien équivariant en posant pour $\gamma \in \Gamma$, $U(\gamma)(a) = \alpha_1(\gamma)(a)u(\gamma)^*$. Alors E réalise une équivalence de Morita équivariante entre A_1 et A_2; d'où le résultat.

THÉORÈME 3.3.4. — *Soit Γ un groupe discret sans torsion. Soit A une C^*-algèbre ; soit $u : \Gamma \to M(A)$ un morphisme de Γ dans les unitaires de $M(A)$. Soit α l'action de Γ sur A définie par si $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A$, $\gamma \cdot a = u(\gamma)a(u(\gamma))^*$. Soit τ une trace densément définie sci sur A, qui est nécessairement Γ-invariante. Soit $(\tau \otimes_\alpha \tau^\Gamma)$ la trace sci densément définie sur $A \rtimes_r \Gamma$ associée et soit $id \otimes_\alpha \varepsilon$ le morphisme de $A \rtimes \Gamma$ dans A qui à $a \odot U_\gamma$ associe $au(\gamma)$. Alors :*

$$(\tau \otimes_\alpha \tau^\Gamma)_* \circ \mu^\Gamma_{A,\alpha} = \tau_* \circ (\mathrm{id} \otimes_\alpha \varepsilon)_* \circ \mu^\Gamma_{A,\alpha}.$$

Démonstration. — Soit $\theta : A \rtimes_\alpha \Gamma \simeq A \otimes_{\max} C^*(\Gamma)$ l'isomorphisme défini par le lemme précédent. Comme $(\mathrm{id} \otimes_\alpha \varepsilon) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \theta$, et $\tau \otimes_\alpha \tau^\Gamma = \tau \otimes \tau^\Gamma \circ \theta$, on a, en notant t l'action triviale de Γ sur A :

$$\begin{aligned}
(\tau \otimes_\alpha \tau^\Gamma)_* \circ \mu^\Gamma_{A,\alpha} &= (\tau \otimes \tau^\Gamma)_* \circ \theta_* \circ \mu^\Gamma_{A,\alpha} \\
&= (\tau \otimes \tau^\Gamma)_* \circ \mu^\Gamma_{A,t} \\
&= \tau_* \circ (\varepsilon_A)_* \circ \mu^\Gamma_{A,t} \\
&= \tau_* \circ (\mathrm{id} \otimes_\alpha \varepsilon)_* \circ (\theta^{-1})_* \circ \mu^\Gamma_{A,t} \\
&= \tau_* \circ (\mathrm{id} \otimes_\alpha \varepsilon)_* \circ \mu^\Gamma_{A,\alpha}
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 3.3.5. — *On conserve les hypothèses et les notations du théorème précédent. Soit en outre $\sigma : \Gamma \to U(N)$ une représentation de dimension finie de Γ. Soit $\widetilde{\sigma} : A \rtimes_\alpha \Gamma \to A \otimes M_N$ le morphisme vérifiant $\sigma(a \odot U_\gamma) = au(\gamma) \odot \sigma(\gamma)$ pour tout $a \in A$ et $\gamma \in \Gamma$. Alors (en identifiant $K_0(A \otimes M_N)$ et $K_0(A)$:*

$$\tau_* \circ (\widetilde{\sigma})_* \circ \mu^\Gamma_A(x) = N(\tau \otimes_\alpha \tau^\Gamma)_* \circ \mu^\Gamma_A(x).$$

Démonstration. — Soit $B = A \otimes M_N$ et $u_B : \Gamma \to M(B)$ le morphisme défini par $\forall \gamma \in \Gamma$, $u_B(\gamma) = u(\gamma) \otimes \sigma(\gamma)$. On munit B de la structure β de Γ-algèbre associée. Soit $\Delta : A \to A \otimes M_N$ le morphisme défini par $\forall a \in A$, $\Delta(a) = a \otimes 1$. Le morphisme Δ est Γ-équivariant et l'on a $(\mathrm{id}_{A \otimes M_N} \otimes_\beta \varepsilon) \circ \Delta \rtimes \Gamma = \widetilde{\sigma}$. Soit τ_N la trace canonique sur M_N non normalisée ($\tau_N(1) = N$). Quand on identifie $K_0(A \otimes M_N)$ à $K_0(A)$, les applications $(\tau \otimes \tau_N)_* : K_0(A \otimes M_N) \to \mathbb{C}$ et $\tau_* : K_0(A) \to \mathbb{C}$ coïncident. De plus, $((\tau \otimes \tau_N) \otimes_\beta \tau^\Gamma) \circ (\Delta \rtimes \Gamma) = N(\tau \otimes_\alpha \tau^\Gamma)$ et on obtient, en appliquant le théorème précédent à $A \otimes M_N$:

$$\begin{aligned}
\tau_* \circ \widetilde{\sigma}_* \circ \mu_A^\Gamma &= (\tau \otimes \tau_N)_* \circ \widetilde{\sigma}_* \circ \mu_A^\Gamma \\
&= (\tau \otimes \tau_N)_* \circ (\mathrm{id} \otimes_\beta \varepsilon)_* \circ (\Delta \rtimes \Gamma)_* \circ \mu_A^\Gamma \\
&= ((\tau \otimes \tau_N) \otimes_\beta \tau^\Gamma)_* \circ (\Delta \rtimes \Gamma)_* \circ \mu_A^\Gamma \\
&= N(\tau \otimes_\alpha \tau^\Gamma)_* \circ \mu_A^\Gamma
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

CHAPITRE 4

PROPRIÉTÉS DE FONCTORIALITÉ POUR LES SOUS-GROUPES DISCRETS COCOMPACTS ET THÉORÈME À LA LANGLANDS EN K-THÉORIE

Dans ce chapitre, nous formulons et démontrons un théorème à la Langlands en K-théorie (théorème 4.4.1) qui découle du théorème 3.3.4, et de l'étude pour G groupe localement compact, et H sous-groupe fermé de deux types de propriétés de fonctorialité : d'une part, la fonctorialité de la trace si G et H sont unimodulaires, et d'autre part, la fonctorialité de l'application de Baum-Connes si H est cocompact dans G. Nous montrerons au chapitre suivant comment déduire de ce théorème à la Langlands, des généralisations des formules de Langlands.

4.1. Traces associées aux groupes localement compacts unimodulaires

On prend les notations de [**D2**] concernant les algèbres hilbertiennes. Soit G un groupe localement compact unimodulaire. Fixons une mesure de Haar dg. L'algèbre $\mathcal{A}(G) = C_C(G)$ munie du produit scalaire donné par la mesure dg est une algèbre hilbertienne et $U(\mathcal{A}(G)) = VN(G)$. Notons $n(G)$ l'algèbre hilbertienne achevée *i.e.* l'ensemble des éléments $T \in VN(G)$ tels qu'il existe $\xi \in L^2(G)$ tel que $\forall\, \eta \in C_C(G)$, $T(\eta) = \xi * \eta$. Un tel ξ est alors unique, d'où une application injective $\Lambda : n(G) \to L^2(G)$. De plus,

$$\forall\, T \in n(G),\ \forall\, \eta \in L^2(G), \quad T(\eta) = \Lambda(T) * \eta$$

([**D1**] 13.10.3). Si $T \in n(G)$, $S \in VN(G)$, alors $ST, TS \in n(G)$ avec

$$\Lambda(ST) = S(\Lambda(T)) \quad \text{et} \quad \Lambda(TS) = (S^*(\Lambda(T)^*))^*.$$

On notera t^G ou plus simplement $t : VN(G)^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ la trace normale semifinie fidèle associée, m_G son idéal de définition qui coïncide avec $(n(G))^2$. Sa restriction à $C_r^*(G)$ notée également t^G ou simplement t est densément définie et sci et c'est ([**D1**] 6.6.1, 6.6.6, et 17.2.5) l'unique trace semicontinue inférieurement densément définie sur $C_r^*(G)$ telle que si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, $t(f^* f) = \|f\|_2^2$.

Proposition 4.1.1. — *Soit $\phi \in C_C(G)$ une fonction réelle telle que $\int_G \phi^2 \cdot g\, dg = 1$. Alors $\forall\, T \in VN(G)^+$, on a $t^G(T) = \mathrm{Tr}(\phi T \phi)$.*

Démonstration. — Soit $T \in n(G)$ et soit $\xi = \Lambda(T)$. Alors $T\phi$ est Hilbert-Schmidt et

$$\begin{aligned}\|T\phi\|_{HS}^2 &= \int |\xi(g_1 g_2^{-1})|^2 \phi^2(g_2) dg_1 dg_2\\ &= \int |\xi(g_1)|^2 \phi^2(g_2) dg_1 dg_2\\ &= \|\xi\|^2\end{aligned}$$

D'où $t^G(T^*T) = \mathrm{Tr}(\phi T^* T \phi)$. Si $T \in VN(G)^+$ est tel que $t^G(T) = +\infty$, comme t^G est semifinie, il existe une suite d'éléments de m_G, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $0 \leqslant T_n \leqslant T$ et $\lim_{n\to+\infty} t^G(T_n) = +\infty$. D'après ce qui précède, $t^G(T_n) = \mathrm{Tr}(\phi T_n \phi)$ et comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(\phi T \phi) \geqslant \mathrm{Tr}(\phi T_n \phi)$, on a également $\mathrm{Tr}(\phi T \phi) = +\infty$. D'où le résultat.

Le théorème suivant qui découle du lemme 2.1.2 et de la proposition qui précède, généralise la notion de Γ-trace au cas des groupes unimodulaires :

Théorème 4.1.2

(1) *Soit G un groupe localement compact unimodulaire dénombrable à l'infini, $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire de G fortement continue et $h \in (\mathbf{L}(\mathbb{H}))^+$ tel que $\int_G ghg^{-1}dg$ converge strictement vers 1. Alors l'application qui à $T \in (\mathbf{L}(\mathbb{H})^G)^+$ associe $\mathrm{Tr}(h^{1/2} T h^{1/2})$ est une trace indépendante du choix d'un tel h notée $\mathrm{Tr}_{\mathbb{H}}^G$.*

(2) *Soit E un $C_r^*(G)$-module hilbertien dénombrablement et $\mathbb{H} = E \otimes_{\lambda_G} L^2(G)$ muni de l'action de G par translation à droite. Alors il existe $h \in (\mathbf{L}(\mathbb{H}))^+$ tel que $\int ghg^{-1}dg$ converge strictement vers 1 et l'on a $\forall\, T \in \mathbf{L}(E)^+$, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{H}}^G(T \otimes_{\lambda_G} 1) = (t^G)_E(T)$.*

4.2. Fonctorialité de la trace

Soit G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G. Notons δ le comodule de H, *i.e.* le caractère $(\Delta_G)_H/\Delta_H$. Soit $\mathcal{E} = C_C(G)$, $\mathcal{A} = C_C(H)$, $\xi, \eta \in \mathcal{E}$, $f \in C_C(H)$.

On pose

$$\langle \xi, \eta\rangle(h) = \delta(h)^{1/2} \int \overline{\xi}(g)\eta(gh) d\lambda_G(g)$$

et

$$(\xi f)(g) = \int \xi(gh^{-1}) f(h) \delta(h)^{-1/2} \Delta_H(h)^{-1} d\lambda_H(h).$$

On a $\forall\, \xi \in \mathcal{E}$, $0 \leqslant \langle \xi, \xi\rangle \in C^*(H)$ et on note E_H^G le $C^*(H)$-module hilbertien obtenu en complétant. L'action de $C_0(G/H)$ par multiplication et G par translation à gauche sur $\mathcal{E}$ s'étend en une représentation covariante π de $C_0(G/H), G$ dans E_H^G. Le théorème suivant est dû à M.A. Rieffel ([**R**]).

THÉORÈME 4.2.1. — *E_H^G (resp. $(E_H^G)_r = E_H^G \otimes_{\lambda_H} C_r^*(H)$) est un bimodule d'imprimitivité entre $C_0(G/H) \rtimes G$ (resp. $C_0(G/H) \rtimes_r G$) et $C^*(H)$ (resp. $C_r^*(H)$).*

Si F est un $C^*(H){-}B$ bimodule hilbertien, $E_H^G \otimes_{C^*(H)} F$ est un $C^*(G){-}B$-bimodule hilbertien qu'on appelle bimodule induit, et qu'on note $\mathrm{Ind}_H^G(F)$. En particulier, si F est un espace de Hilbert, muni d'une représentation unitaire fortement continue de H, la représentation de G dans $\mathrm{Ind}_H^G(F)$ est la représentation induite au sens usuel de la théorie des représentations.

LEMME 4.2.2. — *On a un isomorphisme naturel $(E_H^G)_r \otimes_{\lambda_H} L^2(H) \simeq L^2(G)$ qui commute à l'action de G par translation à gauche et à l'action de H par translation à droite.*

Démonstration. — Un calcul direct montre que l'application qui $\forall f_1, \ldots, f_n \in C_C(G)$, $\forall g_1, \ldots, g_n \in C_C(H)$ associe à $\sum_{i=1}^n f_i \odot g_i \in (E_H^G)_r \odot L^2(H)$ la fonction $f \in C_C(G) \subset L^2(G)$ telle que :

$$\forall g \in G,\ f(g) = \sum_{i=1}^n \int f_i(gh^{-1}) g_i(h) \Delta_G(h)^{-1/2} \Delta_H(h)^{-1/2} dh$$

induit un isomorphisme entre $(E_H^G)_r \otimes_{\lambda_H} L^2(H)$ et $L^2(G)$ qui convient.

On notera

$$\sigma_{G/H} : C^*(G) \longrightarrow M(C_0(G/H) \rtimes G) = \mathbf{L}(E_H^G)$$

et

$$\sigma_{G/H}^r : C_r^*(G) \longrightarrow M(C_0(G/H) \rtimes_r G) = \mathbf{L}((E_H^G)_r)$$

les morphismes canoniques. Adoptons la convention $0 \times +\infty = 0$.

THÉORÈME 4.2.3. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire dénombrable à l'infini, et H un sous-groupe fermé unimodulaire. Alors*

$$\forall T \in C_r^*(G)^+,\ (t^H)_{(E_H^G)_r} \circ \sigma_{G/H}^r(T) = \mathrm{vol}(G/H) t^G(T).$$

Démonstration. — Soit $\phi \in C(G, [0,1])$ une fonction cut-off pour l'action de H par translation à droite sur $L^2(H)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
C_r^*(G)^+ \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathbf{L}((E_H^G)_r)^+ \arrow[r, "(t^H)_{(E_H^G)_r}"] \arrow[d] & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \arrow[d, "="] \\
C_r^*(G)^+ \arrow[r] & \mathbf{L}(L^2(G))^H \arrow[r, "\mathrm{Tr}(\phi^{1/2} \cdot \phi^{1/2})"] & \mathbb{R}^+ \cup +\infty
\end{tikzcd}$$

Notons $q : G \to G/H$ l'application quotient. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts de mesure non nulle de G/H d'union G/H et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi_n \in C_C(G/H, [0,1])$

telle que $(\psi_n)_{K_n} = 1$ et $\psi_n \leqslant \psi_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} C_n &= \int_G \phi(x)\psi_n \circ q(x)dx \\ &= \int_{G/H} \psi_n(\overline{x})(\int \phi(xh)dh)d\overline{x} \\ &= \int_{G/H} \psi_n(\overline{x})d\overline{x} \end{aligned}$$

qui tend vers $\mathrm{vol}(G/H)$. Notons que $C_n^{-1}\phi(\psi_n \circ q)$ est une fonction cut-off pour l'action de G par translation à droite. Par ailleurs, par convergence monotone, $\int_G \phi(x)\psi_n \circ q(x)dx$ tend vers $\int_G \phi(x)dx$. Il en résulte que si H est de covolume fini, alors $(\mathrm{vol}(G/H))^{-1}\phi$ est une fonction cut-off pour l'action de G par translation à droite et le résultat découle immédiatement du diagramme précédent et de la proposition 4.1.1. Si H est de covolume infini, la suite C_n tend vers $+\infty$ et donc $\forall T \in C_r^*(G)^+ \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} (t^H)_{(E_H^G)_r} \circ \sigma^r_{G/H}(T) &= \mathrm{Tr}(\phi^{1/2}T\phi^{1/2}) \\ &\geqslant \mathrm{Tr}((\psi_n \circ q)^{1/2}\phi^{1/2}T\phi^{1/2}(\psi_n \circ q)^{1/2}) \\ &= C_n t^G(T) \end{aligned}$$

qui tend vers $+\infty$ puisque $t^G(T) > 0$. D'où le résultat.

Corollaire 4.2.4. — *Supposons de plus que H est un sous-groupe cocompact de G de sorte que $\sigma^r_{G/H} : C_r^*(G) \to C(G/H) \rtimes_r G \simeq \mathbf{K}((E_H^G)_r)$ induit $(\sigma^r_{G/H})_* \in \mathrm{Hom}(K_0(C_r^*(G)), K_0(C_r^*(H)))$. Alors $(t^H)_* \circ (\sigma^r_{G/H})_* = \mathrm{vol}(G/H)(t^G)_*$.*

4.3. Fonctorialité de l'application de Baum-Connes pour les sous-groupes cocompacts

Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé de G. Soit A une H-algèbre ; rappelons que $A(G)^H$ désigne la sous-C^*-algèbre de $C_b(G, A)$ engendrée par les fonctions f continues de G dans A à support H-compact telles que $f(gh) = h^{-1}(f(g))$. C'est une G-algèbre pour l'action de G par translation à gauche. Soit B une autre H-algèbre. Dans [**K**], G. Kasparov construit un foncteur :

$$\mathrm{Ind}_H^G : KK_H(A, B) \to KK_G(A(G)^H, B(G)^H).$$

Posons

$$E_H^G(A) = E_H^G \otimes_{C^*(H)} A \rtimes H$$

qui est muni d'une structure de $C_0(G/H) \rtimes G$–$C^*(H)$-bimodule hilbertien. Notons que si K est un compact de G, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C_C(G) \odot A$, à support dans K qui converge uniformément vers $f \in C_C(G, A)$ et si $h \in C_C(H)$, alors $(f_n \odot h)_{n\in\mathbb{N}} \in$

$E_H^G(A)$ est de Cauchy et de limite ne dépendant que de f et de h, de sorte qu'on peut considérer $C_C(G,A)\odot C_C(H)$ comme sous-espace de $E_H^G(A)$. Soit

$$(\xi_k)_{k=1}^m \in C_C(G,A)^m, \quad (h_k)_{k=1}^m \in C_C(H)^m \quad \text{et} \quad f\in A(G)^H.$$

Soit $g=(\|f\|_\infty^2 - f^*f)^{1/2}\in A(G)^H$. Alors

$$\Big\langle \sum_{k=1}^m f\xi_k\odot h_k, \sum_{k=1}^m f\xi_k\odot h_k\Big\rangle + \Big\langle \sum_{k=1}^m g\xi_k\odot h_k, \sum_{k=1}^m g\xi_k\odot h_k\Big\rangle = \|f\|_\infty^2 \Big\langle \sum_{k=1}^m \xi_k\odot h_k, \sum_{k=1}^m \xi_k\odot h_k\Big\rangle$$

de sorte que $\forall\, f \in A(G)^H$, l'endomorphisme de $C_C(G,A)\odot A$ qui $\forall\,(\xi_k)_{k=1}^m \in C_C(G,A)^m$, $(h_k)_{k=1}^m\in C_C(H)^m$, associe à $\sum_{k=1}^m \xi_k\odot h_k$ $\sum_{k=1}^m f\xi_k\odot h_k$ induit un élément noté $\pi(f)$ de $\mathbf{L}(E_H^G(A))$. On définit ainsi un morphisme G-équivariant π_A de $A(G)^H$ dans $\mathbf{L}(E_H^G(A))$. Soit $(E_H^G)^{-1}$ le bimodule inverse de E_H^G au sens de Morita, et

$$E_H^G(A)^{-1} = (E_H^G)^{-1}\otimes_{C_0(G/H)\rtimes G}(A(G)^H)\rtimes G$$

muni de sa structure de $C^*(H) - (A(G)^H)\rtimes G$ bimodule hilbertien ; on vérifie de même que l'on peut munir $E_H^G(A)^{-1}$ de façon naturelle d'une structure de $A\rtimes H - (A(G)^H)\rtimes G$-bimodule hilbertien telle que l'isomorphisme

$$E_H^G(A)\otimes_{A\rtimes H} E_H^G(A)^{-1}\simeq (A(G)^H)\rtimes G$$

soit un isomorphisme de $(A(G)^H)\rtimes G - (A(G)^H)\rtimes G$ bimodule et telle que l'isomorphisme

$$E_H^G(A)^{-1}\otimes_{A\rtimes H} E_H^G(A)\simeq A\rtimes H$$

soit un isomorphisme de $A\rtimes H - A\rtimes H$ bimodule. Ces structures passent aux produits croisés réduits d'où le théorème suivant qui est un cas particulier du théorème 3.15 p. 247 de [**K**] :

Théorème 4.3.1. — *Le morphisme π_A induit un isomorphisme entre $A(G)^H\rtimes G$ et $\mathbf{K}(E_H^G(A))$ qui descend en un isomorphisme entre $A(G)^H\rtimes_r G$ et $\mathbf{K}(E_H^G(A)\otimes_\lambda A\rtimes_r H)$. Ainsi $A(G)^H\rtimes G$ (resp. $A(G)^H\rtimes_r G$) est Morita-équivalent à $A\rtimes H$ (resp. $A\rtimes_r H$).*

Étant donné une H-algèbre A, on notera $E(A)\in KK(A(G)^H\rtimes G, A\rtimes H)$ l'élément inversible associé à l'équivalence de Morita ci-dessus. Nous pouvons maintenant énoncer ([**K**] corollaire p. 247) :

Théorème 4.3.2. — *Soit A et B deux H-algèbres et $F\in KK_H(A,B)$. Alors :*

$$j_G(\mathrm{Ind}_H^G(F))\otimes_{B(G)^H\rtimes G} E(B) = E(A)\otimes_{A\rtimes H} j_H(F).$$

Remarque. — On a un énoncé analogue avec les produits croisés réduits.

Supposons maintenant que A soit une G-algèbre. Soit

$$\psi_A : C_0(G/H) \otimes A \longrightarrow A(G)^H$$

l'application définie par

$$\forall\, f \in C_0(G/H) \otimes A = C_0(G/H, A),\ \forall\, g \in G, \quad \psi_A(f)(g) = g^{-1}(f(\overline{g})).$$

Alors ψ_A est un isomorphisme G-équivariant entre $C_0(G/H) \otimes A$ (où G agit diagonalement) et $A(G)^H$.

Par $(\psi_A)_*$, on désignera l'élément induit dans $KK_G((C_0(G/H) \otimes A), A(G)^H)$ par ψ_A et

$$E'(A) = j_G((\psi_A)_*) \otimes E(A) \in KK((C_0(G/H) \otimes A) \rtimes G, A \rtimes H).$$

Théorème 4.3.3 (théorème p. 169 [**K**]). — *Soit A et B deux G-algèbres et $F \in KK_G(A, B)$. On a :*

$$(\psi_A)_* \otimes \mathrm{Ind}_H^G(r_H^G(F)) \otimes (\psi_B)_*^{-1} = \sigma_{C_0(G/H)}(F).$$

Supposons dorénavant que H est un sous-groupe cocompact de G et A une G-algèbre, de sorte qu'on a un G-morphisme $\sigma^A_{G/H} : A \to C(G/H) \otimes A$.

Corollaire 4.3.4. — *Soit A et B deux G-algèbres et $F \in KK_G(A, B)$. On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
KK_G(A,B) \arrow[r, "j_G"] \arrow[d, "j_H \circ r_H^G"'] & KK(A \rtimes G, B \rtimes G) \arrow[d, "(\sigma^B_{G/H} \rtimes G)_*"] \\
KK(A \rtimes H, B \rtimes H) \arrow[d, "E'(A)\otimes"'] & KK(A \rtimes G, (B \otimes C(G/H)) \rtimes G) \arrow[d, "\otimes E'(B)"] \\
KK((A \otimes C(G/H)) \rtimes G, B \rtimes H) \arrow[r, "(\sigma^A_{G/H})_*\otimes"] & KK(A \rtimes G, B \rtimes H)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $x \in KK_G(A, B)$. Alors

$$\begin{aligned}
&j_G(x) \otimes (\sigma^B_{G/H} \rtimes G)_* \otimes E'(B)\\
&\qquad = (\sigma^A_{G/H} \rtimes G)_* \otimes j_G(\sigma_{C_0(G/H)}(x))_* \otimes E'(B)\\
&\qquad = (\sigma^A_{G/H} \rtimes G)_* \otimes j_G((\psi_A)_* \otimes \mathrm{Ind}_H^G(r_H^G(x)) \otimes (\psi_B)_*^{-1}) \otimes E'(B)\\
&\qquad = (\sigma^A_{G/H} \rtimes G)_* \otimes j_G((\psi_A)_*) \otimes E(A) \otimes j_H(r_H^G(x))\\
&\qquad = (\sigma^A_{G/H} \rtimes G)_* \otimes E'(A) \otimes j_H(r_H^G(x))
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Soit X un G-espace propre, G-compact. Alors pour l'action induite de H, X est H-propre et H-compact. Soit $\mu_{X,G,H}$ la composition

$$KK_G(C_0(X),A) \xrightarrow{r_H^G} KK_H(C_0(X),A) \longrightarrow K_{\mathrm{top}}^*(H,A).$$

Soit Y un G-espace propre G-compact, et $f : X \to Y$ une application continue G-équivariante. Alors $\mu_{X,G,H} = \mu_{Y,G,H} \circ f_*$ d'où l'existence d'une application induite notée $r_H^G(A) : K_{\mathrm{top}}^*(G,A) \to K_{\mathrm{top}}^*(H,A)$. On peut maintenant énoncer le résultat de fonctorialité de l'application de Baum-Connes.

THÉORÈME 4.3.5. — *Soit G un groupe localement compact et H un sous-groupe co-compact. Soit A une G-algèbre. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathrm{top}}^*(G,A) \arrow[r, "(\sigma_{G/H}^A \rtimes G)_* \circ \mu_G^A"] \arrow[d, "r_H^G(A)"'] & K_*((A \otimes C(G/H)) \rtimes G) \arrow[d, "E'(A)"] \\
K_{\mathrm{top}}^*(H,A) \arrow[r, "\mu_H^A"] & K_*(A \rtimes H)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour X un G-espace propre G-compact, on a

$$\mu_{X,H}^A \circ r_H^G = (\sigma_{G/H}^A \rtimes G)_* \circ \mu_{X,G}^A : KK_G(C_0(X),A) \longrightarrow K_*(A \rtimes G).$$

Fixons un tel espace X. Il suffit de montrer que

$$P_{X,G} \otimes (\sigma_{G/H}^{C_0(X)} \rtimes G)_* \otimes E'(C(X)) = P_{X,H},$$

puisqu'alors d'après le corollaire qui précède, on a $\forall\, T \in KK_G(C_0(X),A)$:

$$\begin{aligned}
\mu_{X,G}^A(T) \otimes (\sigma_{G/H}^A \rtimes)_* \otimes E'(A) &= P_{X,G} \otimes j_G(T) \otimes (\sigma_{G/H}^A \rtimes G)_* \otimes E'(A) \\
&= P_{X,G} \otimes (\sigma_{G/H}^{C_0(X)} \rtimes G)_* \otimes E'(C_0(X)) \otimes j_H(r_H^G(T)) \\
&= P_{X,H} \otimes j_H(r_H^G(T)) \\
&= \mu_H^A(r_H^G(T))
\end{aligned}$$

Pour montrer que $P_{X,G} \otimes (\sigma_{G/H}^{C_0(X)} \rtimes G)_* \otimes E'(C_0(X)) = P_{X,H}$, commençons par décrire la composition $E'(C_0(X))$ de $\psi(C_0(X))$ et de l'équivalence de Morita $E(C_0(X))$. Le bimodule est $C_C(G,C_0(X))$ que l'on considérera dans les formules comme sous-algèbre de $C(X \times G)$ (de même dans les formules, on considérera $C_C(H,C_0(X))$ comme sous-algèbre de $C(X \times H)$). Le produit scalaire est donné par $\forall\, \xi,\ \eta \in C_C(G,C_0(X))$:

$$\langle \xi, \eta\rangle(x,h) = \delta(h)^{1/2} \int \overline{\xi}(x,g)\eta(xh,gh)dg.$$

L'action à droite de $f \in C_C(H,C_0(X)) \subset C(X \times H)$ est :

$$\xi.f(x,g) = \int \xi(xh^{-1},gh^{-1})f(xh^{-1},h)\delta(h)^{-1/2}\Delta_H(h)^{-1}dh$$

et l'action de $s \in C_C(X \times G) \subset (C_0(X) \otimes C(G/H)) \rtimes G$ est donnée par :

$$s \cdot \xi(x,g) = \int s(xg^{-1}, g_0)\xi(x, g_0^{-1}g)dg_0.$$

Alors $\forall\, \xi_1, \xi_2 \in C_C(X \times G)$ et $\forall\, \zeta_1, \zeta_2 \in C_C(X)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\langle \xi_2, \langle \zeta_2, \zeta_1\rangle \xi_1\rangle(x,h)\\
&\quad = \delta(h)^{1/2} \int \overline{\xi_2}(x,g)(\langle \zeta_2,\zeta_1\rangle\xi_1)(xh, gh)dg\\
&\quad = \delta(h)^{1/2} \int \overline{\xi_2}(x,g)\langle \zeta_2,\zeta_1\rangle(xg^{-1}, g_0)\xi_1(xh, g_0^{-1}gh)dg_0dg\\
&\quad = \delta(h)^{1/2} \int \overline{\xi_2}(x,g)\overline{\zeta_2}(xg^{-1})\zeta_1(xg^{-1}g_0)\Delta_G(g_0)^{-1/2}\xi_1(xh, g_0^{-1}gh)dg_0dg\\
&\quad = \Delta_H(h)^{1/2} \int \overline{\xi_2}(x,g)\overline{\zeta_2}(xg^{-1})\zeta_1(xh(g')^{-1})\Delta_G(g')^{-1/2}\Delta_G(g)^{-1/2}\xi_1(xh, g')dg'dg\\
&\quad = \langle \theta(\zeta_2, \xi_2), \theta(\zeta_1,\xi_1)\rangle(x,h)
\end{aligned}$$

où l'on définit $\theta : C_C(X) \times C_C(X \times G) \to C_C(X)$ par $\forall\, \zeta \in C_C(X)$, $\forall\, \xi \in C_C(X \times G)$:

$$\theta(\zeta, \xi)(x) = \int \zeta(xg^{-1})\xi(x,g)\Delta_G(g)^{-1/2}dg.$$

Donc l'application qui $\forall\, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in C_C(X)$, $\forall\, \xi_1, \dots, \xi_n \in C_C(X \times G)$, associe à $\sum_{i=1}^n \zeta_i \odot \xi_i$ la fonction $\sum_{i=1}^n \theta(\zeta_i, \xi_i) \in P_{X,H}$ s'étend par continuité en une isométrie surjective de $P_{X,G} \otimes_{\pi\circ\psi} E(C_0(X))$ sur $P_{X,H}$. D'où le résultat.

4.4. Théorème à la Langlands en K-théorie

Théorème 4.4.1. — *Soit G un groupe localement compact, Γ un sous-groupe discret sans torsion cocompact. Soit σ une représentation unitaire de Γ de dimension N. La représentation induite $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma)$ de G est liminaire ; soit $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_* : K_0(C^*(G)) \to K_0(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{Z}$ le morphisme induit. Alors on a :*

$$(\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_* \circ \mu_G = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) \times (t^G)_* \circ \mu_G.$$

Remarques

(1) Comme G possède un sous-groupe discret cocompact, G est unimodulaire.

(2) La représentation $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma)$ est liminaire puisqu'elle s'identifie à $\sigma_{G/\Gamma} \otimes_\sigma 1$ où $\sigma_{G/\Gamma} : C^*(G) \to \mathbf{K}(E_\Gamma^G)$ et $\sigma : C^*(\Gamma) \to \mathbf{L}(\mathbb{C}^N) = \mathbf{K}(\mathbb{C}^N)$.

(3) Nous verrons au chapitre suivant pourquoi la formule est une formule à la Langlands.

Démonstration. — Notons $(\sigma_{G/\Gamma})_* : K_*(C^*(G)) \to K_*(C(G/\Gamma) \rtimes G) \simeq K_*(C^*(\Gamma))$ le morphisme induit par $\sigma_{G/\Gamma}$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K^*_{\mathrm{top}}(G) \arrow[r, "r^G_\Gamma"] \arrow[d, "\mu_G"'] & K^*_{\mathrm{top}}(\Gamma) \arrow[d, "\mu_\Gamma"] \\
K_*(C^*(G)) \arrow[r, "(\sigma_{G/\Gamma})_*"] \arrow[d, "(t^G)_*"'] & K_*(C^*(\Gamma)) \arrow[d, "(\sigma)_*"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\times N\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

D'après le paragraphe précédent, le carré du haut est commutatif. D'après le corollaire 3.3.5 et le corollaire 4.2.4, le carré du bas est commutatif sur l'image de μ_G. Enfin, $(\sigma)_* \circ (\tau_{G/\Gamma})_* = (\mathrm{Ind}^G_\Gamma)_*$. D'où le résultat.

CHAPITRE 5

CONJECTURE DE BOST ET FORMULE DE LANGLANDS

Soit G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret cocompact sans torsion. Nous montrons dans ce chapitre, comment le théorème 4.4.1 permet de calculer la multiplicité des séries discrètes dans $L^2(G/\Gamma)$ à partir de renseignements sur l'application de Baum-Connes pour la K-théorie de la C^*-algèbre pleine de G. En particulier, nous montrons que la conjecture de Bost sur la K-théorie de l'algèbre de Banach $L^1(G)$ implique les formules de Langlands pour les séries discrètes intégrables. Grâce aux résultats de V. Lafforgue ([**L**], [**L2**]) sur la conjecture de Bost, ceci permet de démontrer des généralisations des résultats de Langlands, valides en particulier pour tout groupe réductif G sur un corps p-adique.

5.1. Séries discrètes

5.1.1. Séries discrètes et dimension formelle. — Soit G un groupe localement compact unimodulaire, de mesure de Haar dg. On a la proposition suivante ([**D1**] 14.1.1, 14.1.3, 14.3.2) :

PROPOSITION 5.1.1. — *Soit π une représentation unitaire irréductible de G dans un espace de Hilbert H_π. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *π est équivalente à une sous-représentation de $L^2(G)$.*
(2) *$\exists\, \xi \in H_\pi$ tel que la fonction $g \to \langle \xi, g\xi\rangle$ est dans $L^2(G)$.*
(3) *$\forall\, \xi \in H_\pi$, la fonction $g \to \langle \xi, g\xi\rangle$ est dans $L^2(G)$.*

On dit d'une telle représentation qu'elle appartient à la série discrète et on note $\widehat{G}_d$ l'ensemble de ces classes de représentations.

THÉORÈME 5.1.2 ([**D1**] 14.3.3). — *Soit $\pi \in \widehat{G}_d$. Il existe une constante $d_\pi > 0$ appelée dimension formelle de la représentation, telle que pour tous $x, x', y, y' \in H_\pi$, on a :*

$$\int_G \overline{\langle y', gx'\rangle}\langle y, gx\rangle dg = (d_\pi)^{-1}\langle y, y'\rangle\langle x', x\rangle.$$

Les formules précédentes sont appelées *relations d'orthogonalité de Schur*.

Liens avec la mesure de Plancherel. — La dimension formelle s'interprète facilement dans le cas où G est de type I. Soit G un groupe localement compact unimodulaire qu'on suppose dans ce paragraphe seulement de type I. Il existe alors une unique mesure μ sur $\widehat{G}$ appelée mesure de Plancherel telle que $\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, on a $t(xx^*) = \int \mathrm{Tr}(\zeta(x)\zeta(x^*))d\mu(\zeta)$. De plus, $\forall x \in C_r^*(G)^+$, on a ([**D1**] 18.8.1) $t(x) = \int \mathrm{Tr}(\zeta(x))d\mu(\zeta)$ et ([**D1**] 18.8.5) :

PROPOSITION 5.1.3. — *Soit $\zeta \in \widehat{G}$. Alors ζ est dans la série discrète ssi $\mu(\{\zeta\}) > 0$ et dans ce cas $\mu(\{\zeta\}) = d_\zeta$.*

Par la suite, nous ne ferons plus l'hypothèse que G est de type I.

5.1.2. Coefficients de matrices et projecteurs minimaux

Soit $U = VN(G)$ et U' son commutant. Soit $H_\pi \subset L^2(G)$ l'espace d'une sous-représentation irréductible π, E le projecteur minimal de U' associé. On notera également $\pi \in \widehat{G}_d$ la classe de la représentation. Soit F le support central de E dans $U \cap U'$ et $K = F(L^2(G))$. Pour tous $\xi, \eta \in H_\pi$, soit $\phi_{\eta,\xi} \in L^2(G)$ définie par :

$$\forall g \in G, \quad \phi_{\eta,\xi}(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle.$$

Notons encore $\forall \zeta \in L^2(G)$, $\widehat{\zeta} \in L^2(G)$ l'élément tel que pour presque tout $g \in G$, $\widehat{\zeta}(g) = \zeta(g^{-1})$.

Le théorème suivant est démontré dans [**D1**] (14.2.2, 14.2.3, 14.3.5, 14.3.6, 14.4.2) :

THÉORÈME 5.1.4

(1) *F est un projecteur minimal de $U \cap U'$ et toute sous-représentation de $L^2(G)$ équivalente à π est une sous-représentation de $F(L^2(G))$.*

(2) *$K \subset \Lambda(n(G))$.*

(3) *$\forall \xi, \eta \in H_\pi$, $\widehat{\phi_{\eta,\xi}} = \xi * \eta^* \in K$.*

(4) *Il existe un unique isomorphisme d'espaces de Hilbert $\Phi : H_\pi \otimes \overline{H_\pi} \to K$ tel que $\Phi(\xi \otimes \eta) = d_\pi^{1/2}\widehat{\phi_{\eta,\xi}}$. De plus, Φ entrelace $(\pi, \overline{\pi})$ et (λ, ρ).*

(5) *En identifiant $H_\pi \otimes \overline{H_\pi}$ à l'espace des opérateurs d'Hilbert-Schmidt sur H_π, on a :*

$$\Phi(u^*) = \Phi(u)^*, \qquad \Phi(uv) = d_\pi^{1/2}\Phi(u) * \Phi(v).$$

(6) *Soit $f \in n(G)$. On a :*

$$\|F(f)\|_2^2 = d_\pi \,\mathrm{Tr}(\pi(f)\pi(f^*)).$$

D'après la dernière assertion du théorème, $\pi(C^*(G)) \subset \mathbf{K}(H_\pi)$; en particulier, $\{\pi\}$ est fermé dans $\widehat{G}$. De plus, $\forall \xi \in H_\pi$ avec $\|\xi\|_2 = 1$, on a $d_\pi\widehat{\phi_{\xi,\xi}} \in K \subset \Lambda(n(G))$. Soit $p_\xi \in n(G)$ tel que $\Lambda(p_\xi) = d_\pi\widehat{\phi_{\xi,\xi}}$.

LEMME 5.1.5. — *L'élément p_ξ de $n(G)$ est un projecteur minimal de $VN(G)$.*

Démonstration. — D'après la cinquième assertion du théorème, p_ξ est un projecteur et d'après la sixième $\pi(p_\xi)$ est de rang un. Soit $\eta \in K^\perp$, $p_\xi(\eta) = \xi * \xi^* * \eta \in K \cap K^\perp$ puisque K (et donc $K^\perp$) est biinvariant. Donc $p_\xi(\eta) = 0$. D'où le résultat. En fait, $\pi(p_\xi)$ est le projecteur orthogonal sur ξ. En effet, $\forall\, \eta \in H_\pi$,

$$\begin{aligned}\langle \eta, p_\xi(\xi)\rangle &= d_\pi \int \langle g\xi, \xi\rangle \overline{\langle g\xi, \eta\rangle} dg \\ &= \langle \eta, \xi\rangle\end{aligned}$$

On en déduit, avec les mêmes notations :

PROPOSITION 5.1.6. — *π est ouvert dans $\widehat{G}_r$ ssi $p_\xi \in \lambda(C^*_r(G))$.*

Démonstration. — Si π est ouvert dans $\widehat{G}_r$, comme $\{\pi\}$ est fermé, alors on a un isomorphisme $\theta : C^*_r(G) \to \mathbf{K}(H_\pi) \oplus J^r_\pi$ où J^r_π est le noyau de π vu comme représentation de $C^*_r(G)$. Modulo cette identification, si $\theta_{\xi,\xi}$ est le projecteur orthogonal sur ξ dans H_π, alors $\lambda(\theta^{-1}(\theta_{\xi,\xi} \oplus 0)) = p_\xi$. La réciproque résulte de la première partie du lemme suivant avec $H = L^2(G)$ et $H' = K^\perp$.

LEMME 5.1.7. — *Soit A une C^*-algèbre et ρ une représentation fidèle de A dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$.*

(1) *Soit $\pi \in \widehat{A}$ telle que $\{\pi\}$ est fermé dans $\widehat{G}$ et $0 \neq x \in A$. On suppose que ρ se décompose en $\mathbb{H} = \mathbb{H}_\pi \otimes \mathbb{K} \oplus \mathbb{H}'$ et que l'on a $\rho_{|\mathbb{H}'}(x) = 0$ et $\rho_{|\mathbb{H}_\pi \otimes \mathbb{K}} = \pi \otimes 1_{\mathbb{K}}$. Alors $\{\pi\}$ est ouvert dans $\widehat{G}$.*

(2) *Si $\pi \in \widehat{A}$ est telle que $\{\pi\}$ est ouvert dans $\widehat{A}$ et si A est séparable, alors il existe une sous-représentation irréductible de ρ dont la classe est π.*

Démonstration

(1) Soit $I = \mathrm{Ker}(\pi)$. Alors $(\rho_{|\mathbb{H}'})_{|I}$ est injective. Pour tout $i \in I$, $\rho_{|\mathbb{H}'}(ix) = 0$ donc $\rho(ix) = 0$ et $ix = 0$. Donc $\forall\, \zeta \in \widehat{I}$, $\zeta(x) = 0$. Comme π est fermée, $\widehat{I} = \widehat{A} \setminus \{\pi\}$ et par ailleurs, $\pi(x) \neq 0$. Donc $\{\pi\} = \{\zeta \in \widehat{G} \mid \zeta(x) \neq 0\}$ est ouvert.

(2) Soit I l'idéal de A tel que $\widehat{I} = \{\pi\}$ qui est séparable. Alors $I \simeq \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$. Le morphisme $\rho_{|I}$ est non trivial et la restriction de ρ à $I\mathbb{H}$ est un multiple de ρ.

REMARQUE. — Si G est localement compact unimodulaire presque connexe, P. Green a démontré (*cf.* [**G**]) qu'une représentation π dans la série discrète est toujours isolée dans le dual réduit.

5.2. Formules de multiplicités

Soit G un groupe localement compact unimodulaire, Γ un sous-groupe discret sans torsion cocompact de G, et soit σ une représentation unitaire de dimension N de Γ. Comme $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma)$ est liminaire, elle se décompose en une somme directe de représentations irréductibles de G. Étant donné $\rho \in \widehat{G}$, le problème des multiplicités consiste alors à calculer $m(\rho,\Gamma,\sigma)$ la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma)$ qui est finie. En particulier, les formules de Langlands concerne le calcul de $m(\pi,\Gamma,\sigma)$ pour $\pi\in\widehat{G}_d$.

Soit donc $\pi\in\widehat{G}_d$. Supposons que π est isolée dans $\widehat{G}_r$ (resp. dans $\widehat{G}$). Alors on a un isomorphisme canonique $C_r^*(G)\simeq\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)\oplus J_\pi^r$ (resp. $C^*(G)\simeq\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)\oplus J_\pi$) où J_π^r (resp. J_π) est le noyau de π vu comme représentation de $C_r^*(G)$ (resp. $C^*(G)$). Soit $x_\pi\in K_0(C_r^*(G))$ (resp. $p_\pi\in K_0(C^*(G))$) l'élément de K-théorie associé. En particulier, si π est isolée dans $\widehat{G}$, alors $\lambda_*(p_\pi)=x_\pi$.

Lemme 5.2.1. — $(t^G)_*(x_\pi)=d_\pi$.

Démonstration. — Fixons ξ un vecteur unitaire dans $\mathbb{H}_\pi$ et $p_\xi\in C_r^*(G)$ le projecteur associé. Alors $[p_\xi]=x_\pi$ donc

$$\begin{aligned}(t^G)_*(x_\pi)&=t^G(p_\xi)\\&=\|p_\xi\|_2^2\\&=d_\pi.\end{aligned}$$

Théorème 5.2.2. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire, π une série discrète de G isolée dans $\widehat{G}_r$, et $x_\pi\in K_0(C_r^*(G))$ l'élément associé. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de G et σ une représentation unitaire de Γ de dimension N finie. Soit $C_\pi\in K^*_{\mathrm{top}}(G)$ tel que $\mu_{G,r}(C_\pi)=x_\pi$. Soit $\mu_\pi=\mu_G(C_\pi)$. On a :*

$$(\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_*(\mu_G(C_\pi))=N\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)d_\pi.$$

Supposons de plus, π est isolée dans $\widehat{G}$ et soit $p_\pi\in K_0(C^*(G))$ l'élément associé. Si $\mu_G(C_\pi)=p_\pi$, alors on a :

$$m(\pi,\Gamma,\sigma)=N\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)d_\pi.$$

Démonstration. — Compte tenu du lemme précédent, la première assertion est simplement le théorème 4.4.1 appliqué à C_π. La seconde résulte immédiatement du fait que $m(\pi,\Gamma,\sigma)=(\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_*(p_\pi)$.

Remarques

(1) L'existence (et son unicité) d'un tel élément C_π est postulée par la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour G. Cette conjecture est maintenant démontrée pour une vaste classe de groupes : les groupes de Lie réductifs (A. Wassermann), les groupes réductifs sur un corps p-adique (V. Lafforgue) et les groupes moyennables (N. Higson, G. Kasparov). Signalons également que l'injectivité de $\mu_{G,A}^r$ est connue pour une très vaste classe de groupes en particulier, pour tous les sous-groupes fermés des groupes presque-connexes et des groupes réductifs p-adiques.

(2) La représentation π peut être isolée dans $\widehat{G}_r$ sans l'être dans $\widehat{G}$ (ceci se produit déjà pour $G=SL_2(\mathbb{R})$). Le théorème précédent fournit néanmoins une formule à la Langlands pour toutes les séries discrètes des groupes localement compact presque connexes vérifiant la conjecture de Baum-Connes. Cette formule ne permet pas de

calculer directement la multiplicité $m(\pi,\Gamma,\sigma)$ mais la relie aux multiplicités d'autres représentations (non faiblement contenues dans la représentation régulière). En particulier, on obtient une explication géométrique des formules pour les séries discrètes non intégrables des groupes $SO(n,1)$.

THÉORÈME 5.2.3. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire moyennable (ou T-moyennable) et π une série discrète isolée dans $\widehat{G}$, alors :*

$$m(\pi,\Gamma,\sigma)=N\operatorname{vol}(G/\Gamma)d_\pi.$$

Démonstration. — N. Higson et G.Kasparov ont démontré la conjecture de Baum-Connes pour les groupes T-moyennables et montré qu'ils sont K-moyennables. En particulier, μ_G est un isomorphisme donc il existe un unique $C_\pi\in K^*_{\mathrm{top}}(G)$ tel que $\mu_G(C_\pi)=p_\pi$ auquel on peut appliquer le théorème précédent. D'où le résultat.

REMARQUES

(1) Dans le cas des groupes nilpotents, ce résultat est dû à C.C. Moore et J.A. Wolf ([**M-W**]).

(2) Ce résultat implique que l'ensemble des dimensions formelles des séries discrètes d'un groupe localement compact moyennable possédant un sous-groupe discret cocompact sans torsion, est discret dans $\mathbb{R}$ (*cf.* [**Co-M**] pour un exemple de groupe de Lie nilpotent dont l'ensemble des dimensions formelles des séries discrètes n'est pas discret). Rappelons que si G est un groupe linéaire, et Γ est un sous-groupe de type fini, alors Γ possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion, et que tout réseau cocompact d'un groupe localement compact presque-connexe est de type fini, puisque ce sont des groupes fondamentaux de variétés compactes. Ainsi l'ensemble des dimensions formelles d'un groupe linéaire localement compact moyennable possédant un réseau cocompact est discret.

5.3. Cas des représentations intégrables

5.3.1. Intégrabilité d'une représentation. — Soit G un groupe localement compact unimodulaire.

PROPOSITION 5.3.1. — *Soit π une série discrète isolée dans le dual réduit. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\exists\, x\in L^1(G)$ *tel que* $\pi(x)$ *est de rang fini non nul et* $\rho(x)=0,\ \forall\,\rho\in\widehat{G}\setminus\{\pi\}$.

(2) $\exists\, p\in L^1(G)$ *tel que* $\pi(p)$ *est un projecteur de rang* 1 *et* $\rho(p)=0,\ \forall\,\rho\in\widehat{G}\setminus\{\pi\}$.

(3) $\exists\,\xi\in\mathbb{H}_\pi,\ \|\xi\|=1$ *tel que la fonction* $g\to\langle\xi,\pi(g)\xi\rangle$ *est intégrable.*

Si la représentation vérifie l'une des assertions équivalentes, on dit qu'elle est intégrable.

Démonstration. — Trivialement, l'assertion 2 implique l'assertion 1. Pour montrer la réciproque, soit $x \in L^1(G)$ tel que dans l'assertion 1. Soit $j : L^1(G) \to C^*(G)$ l'inclusion canonique et B la sous-algèbre involutive $j(x)C^*(G)j(x^*)$ de $C^*(G)$. Alors B est de dimension finie et π induit un isomorphisme entre B et $\pi(B) = \mathbf{L}(\pi(x^*)\mathbb{H})$. De plus, $\forall\, \rho \in \widehat{G} \setminus \{\pi\}$, on a $\rho(B) = 0$. Soit b in B tel que $\pi(b)$ soit un projecteur de rang un. Comme $j(xL^1(G)x^*) = B$ (puisque B est de dimension finie), $b \in j(L^1(G))$. D'où l'assertion 2. D'après ce qui précède, l'assertion 3 implique l'assertion 2, puisque si $\xi \in H_\pi$ est de norme 1 et tel que $g \to \langle \xi, g\xi\rangle \in L^1(G)$, alors $p \in L^1(G)$ défini par $\forall\, g \in G, p(g) = d_\pi\langle g\xi, \xi\rangle$ vérifie les hypothèses de l'assertion 2. Pour la réciproque, soit p tel qu'en 2. Soit ξ de norme 1 tel que $\xi \in \operatorname{Im}(\pi(p))$. Alors $p_\xi = \lambda(p)$. Soit $f \in L^2(G)$ la fonction qui à $g \in G$ associe $d_\pi\overline{\langle \xi, g\xi\rangle}$. On a : $\forall\, \zeta, \eta \in C_C(G)$,

$$\begin{aligned}\langle \zeta * \widehat{\eta}, f\rangle &= \langle \zeta, p_\xi(\eta)\rangle \\ &= \langle \zeta, \lambda(p)(\eta)\rangle \\ &= \int (\zeta * \widehat{\eta})(g)p(g)dg\end{aligned}$$

ce qui implique l'égalité presque sûre des fonctions p et f. D'où le résultat.

Lemme 5.3.2. — *Soit π une série discrète isolée dans $\widehat{G}_r$.*

(1) *S'il existe un projecteur p de $L^1(G)$, et une homotopie de projecteurs dans $C^*_r(G)$ entre $\lambda(p)$ et un projecteur p_ξ pour $\xi \in H_\pi$ de norme 1, alors π est intégrable.*

(2) *S'il existe $p \in L^1(G)$ projecteur tel que $[\lambda(p)] = x_\pi$, et si G est liminaire, alors π est encore intégrable.*

Démonstration. — On a un isomorphisme $C^*_r(G) \simeq \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi) \oplus J^r_\pi$, où J^r_π est le noyau de la représentation π de $C^*_r(G)$. La composante de p_ξ ($\xi \in \mathbb{H}_\pi$) dans J_π est nulle, et donc c'est également le cas pour tout projecteur qui lui est homotope ; soit p un tel projecteur. Alors $\pi(p)$ est de rang 1 et donc vérifie l'assertion 2 du théorème précédent. Donc π est intégrable.

Dans le cas, où G est liminaire, un projecteur non trivial de J^r_π a toujours une classe non triviale en K-théorie ; donc dans ce cas, tout projecteur p de $C^*_r(G)$ qui définit la même classe qu'un p_ξ a également une composante nulle dans J^r_π et par ailleurs le rang de $\pi(p)$ est $\pi_*(p) = \pi_*(x_\pi) = 1$. Donc p vérifie encore l'assertion 2 et π est intégrable.

Soit $j : L^1(G) \to C^*(G)$ l'application canonique.

Lemme 5.3.3. — *Soit $\xi \in \mathbb{H}_\pi$ de norme 1 tel que la fonction p définie par $\forall\, g \in G$, $p(g) = d_\pi\langle g\xi, \xi\rangle$ est dans $L^1(G)$. Soit $f \in C_C(G)$, on a l'égalité suivante dans $L^1(G)$*

$$p * f * p = \langle \xi, \pi(f)\xi\rangle p.$$

La série discrète est isolée dans le dual plein et $p_\pi = [j(p)]$.

Démonstration. — Comme $\lambda : L^1(G) \to VN(G)$ est injective, il suffit de le vérifier dans $VN(G)$. Or $\lambda(p_\xi)$ est un projecteur minimal dans $VN(G)$. Donc il existe $c_f \in \mathbb{C}$, tel que $\lambda(pfp) = c_f p$. On a

$$\begin{aligned} c_f &= c_f \langle \xi, \pi(p)\xi \rangle \\ &= \langle \xi, \pi(pfp)\xi \rangle \\ &= \langle \xi, \pi(f)\xi \rangle \end{aligned}$$

D'où la formule. Il s'ensuit que $j(p)C^*(G)j(p) = \mathbb{C}j(p)$ et donc $j(p)$ est un projecteur minimal de $C^*(G)$ et donc π est isolée dans $\widehat{G}$ (*cf.* [**V2**]).

5.3.2. Les travaux de V. Lafforgue sur la conjecture de Bost et les multiplicités des séries discrètes intégrables. — Soit G un groupe localement compact. On peut construire (*cf.* [**L**]) une flèche de Baum-Connes pour l'algèbre $L^1(G)$:

$$\mu_1 : K^*_{\mathrm{top}}(G) \to K_*(L^1(G))$$

telle que $\mu = j_* \circ \mu_1$. La conjecture de Bost affirme que μ_1 est un isomorphisme. Dans sa thèse, V. Lafforgue a introduit une vaste classe $\mathcal{C}'$ de groupes localement compacts (stable par sous-groupe fermé) qui comprend tous les groupes de Lie semisimples, les groupes réductifs sur les groupes p-adiques, et les groupes moyennables.

THÉORÈME 5.3.4 (V. Lafforgue). — *Si G est dans la classe $\mathcal{C}'$, alors G vérifie la conjecture de Bost.*

En particulier, si G est dans la classe $\mathcal{C}'$, l'image de μ contient (et est égal à) l'image de j_*. Ainsi si π est une série discrète intégrable, p_π (et donc x_π) est dans l'image de μ (resp. μ^r). Par ailleurs, pour les groupes dans la classe $\mathcal{C}'$, μ_r est injective.

En conjuguant le théorème de V. Lafforgue et le théorème 5.2.2, on obtient :

THÉORÈME 5.3.5. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire, Γ un sous-groupe discret cocompact sans torsion dans la classe $\mathcal{C}'$, π une représentation intégrable de G, σ une représentation unitaire de dimension N de Γ. Alors on a la formule des multiplicités :*

$$m(\pi, \Gamma, \sigma) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

BIBLIOGRAPHIE

[A] M.F. Atiyah. Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann Algebras. Astérisque 32-32 (1976), 43-72.

[B] J-B. Bost. Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs. Invent. Math., 101 (1990), 261-333.

[B-C] P. Baum & A. Connes. K-theory for Lie groups and foliation, IHES 1982.

[B-C-H] P. Baum, A. Connes & N. Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. In C^*-algebras : 1943-1993, vol. 167 of Contemp. Math., 240-291. AMS, RI, 1994.

[Br] M. Breuer. Fredholm theories in Von Neumann algebras I, Math. Ann. 178 (1968), 243-254.

[C] A. Connes. Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation. Geometric methods in operator algebras (Kyoto 1983), 52-114, Pitman Res. Notes in Math, 123, 1986.

[Co-M] A. Connes & H. Moscovici. The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups, Ann. of Math. 115 (1982), 291-330.

[D1] J. Dixmier. Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1964.

[D2] J. Dixmier. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier-Villars, 1969.

[G] P. Green. Square integrable representations and the dual topology. JFA 35 (1980), 279-294.

[Gro] A. Grothendieck. Réarrangement de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de Von Neumann munies d'une trace. Séminaire Bourbaki, mars 1955.

[H] N. Higson. The Baum-Connes conjecture, Proc. ICM, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math., (1998), 637-646.

[H-K] N. Higson & G. Kasparov. Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. Electron. Res. Announc. AMS, 3 :131-142 (electronic),1997.

[H-P1] R. Hotta & R. Parthasarathy. A geometric meaning of the multiplicity of integrable discrete classes in $L^2(G/\Gamma)$. Osaka J. Math, 10 (1973), 211-234.

[H-P2] R. Hotta & R. Parthasarathy. Multiplicity formulae for discrete series. Invent. Math. 26 (1974), 133-178.

[H-C] Harish-Chandra. Discrete series for semisimple Lie groups : II, Acta Math. 116 (1966), 1-111.

[K] G. Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture, Invent. Math. 91 (1988), 147-201.

[L] V. Lafforgue. Thèse de doctorat. Université Paris Sud, 1999.

[L2] V. Lafforgue. Une démonstration de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la propriété (T). CRAS 327 (1998), 439-444.

[Lan] R.P. Langlands. Dimension of automorphic forms. PSPM vol. 9, 1966, 253-257.

[M-Re-W] P. Muhly, J. Renault & D. Williams. Equivalence and isomorphism for groupoid C^*-algebras. J.O.T. 17 (1987), 3-22.

[M-W] C.C. Moore & J.A. Wolf. Square integrable representations of nilpotent Lie groups. Trans. AMS. 185 (1973), 445-462.

[P] G. Pedersen. C^*-algebras and their automorphism groups. London Math. Soc. monographs vol. 14. Academic Press, 1979.

[R] M.A. Rieffel. Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras. J. Pure Appl. Algebra 5 (1974), 51-96.

[Sk] G. Skandalis. Cours de 3e cycle. Paris VII.

[Sp] E. H. Spanier. Algebraic topology. Mc Graw Hill (1966).

[Sw] R. G. Swan. Topological examples of projective modules. Trans. AMS 230 (1977), 201-234.

[Tu] J.L. Tu. Thèse de doctorat. Université Paris 7, 1996.

[V1] A. Valette. K-theory for the reduced C^*-algebra of semisimple Lie groups with real rank 1 and finite center. Quart. J. Math. Oxford (2) 35 (1984), 341-359.

[V2] A. Valette. Minimal projections, integrable representations and property (T). Arch. Math. (Basel) 43 (1984), 397-406.

[Wa] A. Wassermann. Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs. CRAS 304 (1987), 559-562.

[W] F. Williams. Discrete series multiplicities in $L^2(G/\Gamma)$. Amer J. Math 106 (1984), 137-148 et 107 (1985), 367-376.