MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LAURE BLASCO

Paires duales réductives en caractéristique 2

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 52 (1993), p. 1-73

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_52__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire n° 52
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 121, 1993, fascicule 1, pp. 1-73.

Paires duales réductives en caractéristique 2

Laure Blasco

Résumé. Sur un corps local de caractéristique 2, A.Weil a défini le groupe métaplectique comme extension d'un groupe dit pseudosymplectique. Cependant, les paires de sous-groupes réductifs (G, G') de ce groupe, duales au sens où G et G' sont les commutants l'un de l'autre, n'avaient pas été classifiées. Une classification complète est ici établie, ainsi que la trivialité de l'extension métaplectique restreinte à ces sous-groupes.

Abstract. Over a local field of characteristic 2, A.Weil has defined the metaplectic group as an extension of a group called "pseudosymplectique". However, the pairs of reductive subgroups (G, G') of this group, dual in the sense that G and G' are each others centralizers, had not been classified. A complete classification is established here, as well as the triviality of the metaplectic extension restricted to these subgroups.

AMS subjects classification : 11F27, 22E50
11F70, 20G25, 20G40

Texte reçu le 1er juin 1992, révisé le 31 juillet 1992.

Institut de Recherche Mathématique Avancée. Université Louis Pasteur et CNRS.
7, Rue René Descartes. 67084 Strasbourg Cedex. France.

Introduction

Analysant les travaux de C.L. Siegel sur les formes quadratiques, A. Weil montre en 1964, le rôle capital que joue dans la théorie des fonctions thêta, une représentation unitaire (projective) du groupe dit pseudosymplectique [15].

Poursuivant dans cette voie, R. Howe propose une théorie générale [6] qui explique la dualité entre certains groupes classiques, dualité mise en évidence par de nombreux auteurs. R. Howe introduit la notion de paires duales réductives (c'est-à-dire de paires (G, G') de sous-groupes réductifs, duales au sens où G et G' sont les commutants l'un de l'autre) et définit une correspondance entre certaines représentations projectives irréductibles de ces sous-groupes à l'aide de la représentation de Weil.

Cette théorie, développée sur les corps de caractéristique nulle ou impaire, peut-elle être élargie à des corps de caractéristique 2 ?

Répondre à cette question nécessite de revenir à l'article d'A. Weil [15]. Il apparaît alors que le groupe pseudosymplectique n'est plus isomorphe au groupe symplectique mais est une extension d'un groupe orthogonal.

Plus précisément, considérons un corps F de caractéristique 2, fini ou local, et W un espace vectoriel sur F muni d'une forme quadratique Q non dégénérée et non défective, d'indice quelconque (I.1.1) (A. Weil s'intéresse au cas d'indice maximal). Notons $O(Q)$ le groupe des isométries de (W, Q). Le groupe pseudosymplectique est alors une extension de $O(Q)$ par le module $\mathcal{Q}_a(W)$ des formes quadratiques additives définies sur W. Cette extension est, en général, non triviale (I.1.3).

Nous remarquons que l'existence de formes quadratiques additives non nulles est propre à la caractéristique 2. Elle est source de nouveaux problèmes pour la recherche des paires duales et pour l'étude de l'extension métaplectique.

Cette étude fait l'objet du paragraphe I.2. Le groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q)$, défini précédemment, est formé d'automorphismes d'un groupe de Heisenberg (I.1.2) triviaux sur le centre. Par le théorème de Stone-Von Neumann, encore valable sous nos hypothèses, nous construisons l'extension métaplectique (I.2.1). Celle-ci présente deux particularités (que nous mettons en évidence sur sa restriction au sous-groupe $\mathcal{Q}_a(W)$ (I.2.2)) : être d'ordre exactement 2 que F soit fini ou local ; avoir des éléments qui ne commutent pas quand bien même leurs projections commuteraient dans le groupe pseudosymplectique.

Dans l'étape suivante nous classifions les paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.1 et 2). Elles sont de la forme : deux groupes linéaires ou un groupe symplectique et un groupe orthogonal ou deux groupes unitaires ou encore, une des deux paires duales triviales. Nous reconnaissons là les différentes "familles" obtenues pour les autres caractéristiques. Par ailleurs, quand cela doit être précisé, nous décrivons les sous-groupes du groupe pseudosymplectique qui interviennent (II.2.2).

Mais revenons à la démonstration établissant la classification. Dans un premier temps nous avons recherché les paires duales réductives de $O(Q)$ par des méthodes communes aux autres caractéristiques [8] (II.1). Nous abandonnons ensuite ces méthodes pour décrire à partir de la classification obtenue un procédé qui nous permet de construire des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.2.2). Nous en dressons la liste (II.2.1 proposition b). Est-elle complète ?

Le vérifier exige la connaissance de certaines propriétés des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II. 2.1 théorème c). De ces propriétés et du lemme 2.4, nous déduisons, pour chaque paire duale réductive non triviale (G, G') du groupe pseudosymplectique, l'existence d'une paire duale réductive (K, K') déjà répertoriée telle que les projections de K et K' sur $O(Q)$ contiennent celles de G et G' respectivement : de là, via le corollaire 2.1.d, l'exhaustivité de la liste établie (II.2.1 théorème e).

Le dernier paragraphe traite de la restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives. Cette restriction est toujours scindée (sauf au-dessus des paires duales triviales).

Il apparaît en outre que les images réciproques des composantes d'une paire duale non triviale commutent dans l'extension métaplectique. Ainsi donc, nous pouvons étendre la correspondance locale de Howe au cas de caractéristique 2 et retrouver des situations connues.

Nous pouvons également étudier les propriétés de cette correspondance. En particulier, elle s'avère être "compatible" avec l'induction parabolique. Pour le démontrer, il suffit de suivre, mutatis mutandis, le raisonnement de S. Kudla [7] et ses variantes [8, Ch.3 §§IV et V]. Ce dernier point n'est pas développé dans le présent article.

L'ensemble de ces résultats est issu d'une nouvelle thèse préparée à l'université de Paris-Sud (Orsay) sous la direction de Guy Henniart. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

NOTATIONS : On fixe un corps commutatif F de caractéristique 2, fini ou local dans le chapitre II. On note F^2 le sous-corps de F formé des carrés de F ; si F est local, $\mathcal{O}_F$ désigne l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal.

Soit ψ un caractère additif non trivial de F.

On considère un espace vectoriel W sur F , de dimension finie et muni d'une forme quadratique Q dont la forme alternée associée est notée $<,>$.

$\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

I. EXTENSION MÉTAPLECTIQUE

§ 1. Groupes pseudosymplectiques

1.1. Formes quadratiques en caractéristique 2 [3,Ch.I,§ 16]

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur F.

Une *forme quadratique* q sur V est une application de V dans F définie à l'aide d'une forme bilinéaire b par : $q(v) = b(v, v)$, $v \in V$. Une forme bilinéaire alternée, notée $(\,,)$, lui est associée de la façon suivante :

$$\text{pour tout } (v, v') \in V^2, \quad (v, v') = q(v + v') + q(v) + q(v') = b(v, v') + b(v', v).$$

Ces trois objets ne se déterminent pas l'un l'autre. D'une part, deux formes quadratiques q et q' ont la même forme alternée associée si et seulement si $q + q'$ est additive; d'autre part, deux formes bilinéaires b et b' définissent la même forme quadratique si et seulement si la forme bilinéaire $b + b'$ est alternée.

On note $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques sur V, $\mathcal{Q}_a(V)$ le sous-ensemble des formes quadratiques additives sur V et $\mathcal{Q}_a^2(V)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}_a(V)$ formé des formes quadratiques additives dont les valeurs sont des carrés de F.

Soit $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $(\,,)$ la forme alternée associée. Un sous-espace vectoriel X de V est *isotrope* si l'intersection de X et son orthogonal $X^\perp$ n'est pas nulle. Si en outre X est contenu dans $X^\perp$, X est dit *totalement isotrope*. Un sous-espace vectoriel X, totalement isotrope et sur lequel q est nulle, est dit *singulier*.

Un sous-espace vectoriel de V est *hyperbolique* s'il admet une *base hyperbolique* $(e_1, \cdots, e_p, e_{-1}, \cdots, e_{-p})$ c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned} &(e_i, e_j) = \delta_{i,-j} && \text{pour tout} \quad i, j \in \{-p, \cdots, -1, 1, \cdots, p\} \\ \text{et} \quad &q(e_i) = 0 && \text{pour tout} \quad i \in \{-p, \cdots, -1, 1, \cdots, p\}. \end{aligned}$$

Une base ne vérifiant que la première condition est dite *symplectique*.

On suppose que q est *non dégénérée et non défective* (i.e. la forme $(,)$ est non dégénérée).

Alors si X est un sous-espace vectoriel de V totalement isotrope, il existe, pour toute base $(e_i)_{i\in I}$ de X, des vecteurs $(e_{-i})_{i\in I}$ de V tels que

$$(e_i, e_{-j}) = \delta_{i,j} \quad \text{pour tout} \quad i,j \in I.$$

Si de plus X est singulier, on peut choisir les vecteurs $(e_{-i})_{i\in I}$ singuliers [3 p. 34]. Ainsi, si X est un sous-espace vectoriel singulier de V de dimension maximale, il existe un sous-espace vectoriel Y de V, de même dimension que X, tel que $X \oplus Y$ soit hyperbolique. Alors $(X \oplus Y)^\perp$ est un sous-espace vectoriel sans éléments singuliers et V se décompose en somme orthogonale

$$V = (X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y)^\perp.$$

La dimension de X s'appelle *l'indice de q* et est notée $\nu(q)$.

1.2. Le groupe de Heisenberg

Soit Q une forme quadratique sur W, non dégénérée et non défective. Alors W est de dimension paire notée $2n$. On note $<,>$ la forme alternée de Q.

Pour toute forme bilinéaire B définissant Q, on définit un groupe de Heisenberg $H(B)$ par [15 § 31] :

$$H(B) = W \times F$$

muni de la loi

$$(w,t),(w',t') \in H(B), \; (w,t)(w',t') = (w+w', t+t'+B(w,w')).$$

Si B' est une autre forme bilinéaire définissant Q, on définit de même le groupe de Heisenberg $H(B')$. Soit q une forme quadratique dont la forme alternée est $B+B'$. Posons $\alpha_q(w,t) = (w, t+q(w))$, $(w,t) \in H(B)$. Alors α_q est un isomorphisme entre $H(B)$ et $H(B')$.

THÉORÈME DE STONE-VON NEUMANN. — *Supposons que F est fini ou local. A isomorphisme près, il existe une et une seule représentation $(\rho, \mathcal{V})$ de $H(B)$, lisse et irréductible, telle que, pour tout $t \in F$,*

$$\rho((0,t)) = \psi(t)id_{\mathcal{V}}.$$

La démonstration est celle exposée dans [8,Ch.2] à quelques modifications près que nous allons préciser.

Preuve : La démonstration de l'existence d'une telle représentation est en tout point semblable à celle de [8, Ch. 2, I.3] (il suffit de remarquer que $\delta(-a) = \delta(a)^{-1}$: en caractéristique 2, cela donne $\delta(a) \cdot (0, Q(a))$).

Exemples.

1. Soient $W = X \oplus Y$ une *polarisation complète* de W (i.e. X et Y sont des sous-espaces vectoriels totalement isotropes, de dimension maximale) et ψ_X un caractère du sous-groupe $X \times F$ de $H(B)$ prolongeant ψ.
On définit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ (ou $\mathcal{H}(X, \psi_X, B)$ s'il y a ambiguïté) par :
 – si F est fini, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est formé des fonctions ϕ sur $H(B)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que :
 (1)
$$\forall x \in X,\ \forall t \in F,\ \forall h \in H(B), \quad \phi((x,t)h) = \psi_X((x,t))\phi(h)$$
 – si F est local, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est formé des fonctions ϕ sur $H(B)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ localement constantes, à support compact modulo $X \times F$ et vérifiant (1).
Le groupe $H(B)$ agit sur $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ par translations à droite. La représentation $(\rho_\psi, \mathcal{H}(X, \psi_X))$ de $H(B)$ ainsi obtenue vérifie les conditions du théorème.
De plus, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est isomorphe au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(Y)$ des fonctions de Y dans $\mathbb{C}$ si F est fini, et au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(Y)$ des fonctions de Y dans $\mathbb{C}$, localement constantes à support compact si F est local.
On a alors, pour tout $x \in X$, $y \in Y$, $t \in F$ et $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$,
$$\rho_\psi((x+y,t))\varphi(y') = \psi(t + < y', x > + B(x+y', y))\psi_X((x,0))\varphi(y+y'),\quad y' \in Y.$$

2. On suppose que F est local.
Soit L un réseau de W. On définit le réseau L^* par
$$L^* = \{w \in W | \forall \ell \in L, < \ell, w > \in \mathcal{E}_\psi\}$$
où $\mathcal{E}_\psi$ est le plus grand sous $\mathcal{O}_F$-module contenu dans $\operatorname{Ker} \psi$. On suppose $L = L^*$. En remplaçant $X \times F$ par $L \times F$ dans l'exemple précédent, on obtient une "autre" représentation répondant au problème.

Remarquons que si $(\rho, \mathcal{V})$ est une représentation de $H(B)$ satisfaisant les conditions du théorème alors sa contragrédiente $(\rho^\vee, \mathcal{V}^\vee)$ vérifie les mêmes conditions (puisque $(0,t)^2 = 1$ pour tout $t \in F$). Les représentations $(\rho, \mathcal{V})$ et $(\rho^\vee, \mathcal{V}^\vee)$ joueront des rôles symétriques dans la suite de la démonstration.

On déduit l'unicité des deux lemmes suivants.

Notons $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : H(B) \longrightarrow \mathbb{C}$ localement constantes, à support compact modulo F, et telles que pour tout $h \in H(B)$, tout $t \in F$, on ait

$$f(h(0,t)) = \psi(t) f(h).$$

Notons ρ_d (resp. ρ_g) la représentation de $H(B)$ dans $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ par translations à droite (resp. à gauche).

LEMME *a*. — *Si $(\rho, \mathcal{V})$ est une représentation vérifiant les conditions du théorème, alors ρ s'identifie à une sous-représentation de ρ_d.*

Soit $(\rho, \mathcal{S}(Y))$ le modèle décrit dans le premier exemple.

LEMME *b*. — *La représentation $(\rho_d, \mathcal{S}(H(B), \psi))$ est isotypique de composante irréductible $(\rho, \mathcal{S}(Y))$.*

Démonstration du lemme a : Soit $(\rho, \mathcal{V})$ une représentation vérifiant les conditions du théorème et $(\rho^\vee, \mathcal{V}^\vee)$ sa contragrédiente. Pour $v \in \mathcal{V}$ et $v^\vee \in \mathcal{V}^\vee$, notons $f_{v^\vee, v}$ le coefficient défini par : $f_{v^\vee, v}(h) = v^\vee(\rho(h)v)$ pour $h \in H(B)$.

Montrons que $f_{v^\vee, v} \in \mathcal{S}(H, \psi)$. Il suffit de voir que $f_{v^\vee, v}$ est à support compact modulo F.

Soit $w \in W$ tel que $f_{v^\vee, v}((w,0)) \neq 0$ et L un sous-groupe ouvert compact de W tel que v et $v^\vee$ soient invariants sous $L \times \{0\}$. Alors L contient un sous-groupe L' tel que $\psi \circ Q_{|L'}$ soit trivial. Pour tout $\ell \in L'$, on a

$$\begin{aligned} f_{v^\vee, v}((w,0)) = v^\vee(\rho((w,0))v) &= v^\vee(\rho((w,0)(\ell,0))) \\ &= \psi(< w, \ell >) f_{v^\vee, v}((w,0)). \end{aligned}$$

Donc $\psi(< w, \ell >) = 1$ i.e. $w \in L'^*$ qui est compact puisque la forme alternée $< , >$ est non dégénérée.

Ainsi, on définit une application linéaire de $\mathcal{V}^\vee \otimes \mathcal{V}$ dans $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ qui entrelace les représentations $\rho^\vee \otimes \rho$ et $\rho_g \times \rho_d$. Si $v^\vee \neq 0$, cette application identifie $(\rho, \mathcal{V})$ à une sous-représentation irréductible de $(\rho_d, \mathcal{S}(H(B), \psi))$. $\square$

Démonstration du lemme b : Il existe une dualité entre $\mathcal{S}(X)$ et $\mathcal{S}(Y)$ définie par :

$$< v', v >= \int_{X \times Y} v'(x) v(y) \psi(< x, y >) dx dy$$

pour $v' \in \mathcal{S}(X)$, $v \in \mathcal{S}(Y)$ et où l'on a fixé des mesures de Haar dx et dy sur X et Y respectivement. Ainsi, $\mathcal{S}(Y)^\vee$ s'identifie à $\mathcal{S}(X)$: la représentation $(\rho^\vee, \mathcal{S}(Y)^\vee)$ s'identifie à une représentation ρ' dans $\mathcal{S}(X)$. Comme précédemment, il existe une application $\mathcal{F} : (v', v) \longmapsto f_{v',v}$ de $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$ dans $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ qui entrelace les représentations $\rho' \otimes \rho$ et $\rho_g \times \rho_d$. Or, pour tout $x_0 \in X$ et tout $y_0 \in Y$, on a

$$f_{v',v}((x_0 + y_0, 0)) = \psi(B(y_0, x_0) + Q(y_0))\psi_X((x_0, 0)) \cdot A \quad \text{où}$$

$$A = \int_{X \times Y} v'(x)v(y)\psi(B(y, y_0) + < x, y >)\psi(< x + y, x_0 + y_0 >)dxdy.$$

Après identification de $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$ et $\mathcal{S}(H, \psi)$ avec $\mathcal{S}(W)$, $\mathcal{F}$ devient essentiellement une transformée de Fourier : $\mathcal{F}$ est donc inversible. Donc $\rho' \otimes \rho$ est isomorphe à $\rho_g \times \rho_d$. Comme ρ est irréductible, ρ_d est isomorphe à une somme directe de représentations isomorphes à $(\rho, \mathcal{S}(Y))$. □

1.3. Groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q)$

Pour toute forme bilinéaire B définissant Q, on définit le groupe pseudosymplectique, PsB par [15 § 31]

$$PsB = \{(\sigma, f) \in O(Q) \times \mathcal{Q}(W) | f(w + w') + f(w) + f(w') = B(\sigma w, \sigma w') + B(w, w')\}$$

avec la loi : $(\sigma, f)(\sigma', f') = (\sigma\sigma', f \cdot \sigma' + f')$

où $f \cdot \sigma'$ désigne la forme quadratique $w \longmapsto f(\sigma' w)$.

Le groupe PsB agit sur $H(B)$ par

$$(\sigma, f) \cdot (w, t) = (\sigma w, t + f(w)), \; (\sigma, f) \in PsB, \; (w, t) \in H(B).$$

Il apparaît donc comme un sous-groupe (en général propre) du groupe des automorphismes du groupe de Heisenberg $H(B)$ qui agissent trivialement sur le centre.

PROPOSITION a. — *Tous les groupes pseudosymplectiques au-dessus de $O(Q)$ sont isomorphes.*

En effet, soient B et B' deux formes bilinéaires définissant Q. Alors $B + B'$ est alternée. Soit q une forme quadratique dont la forme alternée associée est $B + B'$ et notons β_q l'application définie par : $\beta_q(\sigma, f) = (\sigma, f + q \cdot \sigma + q)$: alors β_q est un isomorphisme de PsB dans PsB'.

On note $\mathcal{I}(B, B')$ l'ensemble des isomorphismes β de PsB dans PsB' pour lesquels il existe une forme quadratique q telle que $\beta = \beta_q$ (nécessairement la forme bilinéaire associée à q est $B + B'$).

PROPOSITION b. — *Soit B une forme bilinéaire définissant Q. La suite*

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow \mathcal{Q}_a(W) \longrightarrow PsB \longrightarrow O(Q) \longrightarrow 1$$

est exacte ; elle est scindée si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$ et $F = \mathbb{F}_2$.

Dans les cas où la suite $(*)$ est scindée, toutes les sections sont conjuguées sous $\mathcal{Q}_a(W)$.

La fin du paragraphe est consacrée à la démonstration de cette proposition.

La projection de PsB sur $O(Q)$ est surjective de noyau $\{(id, f) \in PsB\} = \{(id, f), f \in \mathcal{Q}_a(W)\}$ d'où l'exactitude de la suite $(*)$.

Supposons la suite $(*)$ scindée. Soit s une section.

Si $a \in W$ est non singulier, on note t_a la transvection orthogonale de vecteur a

$$t_a(w) = w + \frac{< w, a >}{Q(a)} \cdot a, \quad w \in W.$$

Soit $(t_a, q_a) = s(t_a)$. Alors, la forme alternée associée à q_a est

$$(w, w') \longmapsto B(t_a(w), t_a(w')) + B(w, w')$$

ce qui devient après calculs,

$$(2) \qquad (w, w') \longmapsto \frac{B(w, a)B(a, w') + B(a, w)B(w', a)}{Q(a)}.$$

Comme t_a est d'ordre 2, $s(t_a)$ également, d'où

$$q_a \cdot t_a + q_a = 0$$

ce qui équivaut à

$$\frac{< w, a >^2}{Q(a)^2}(q_a(a) + Q(a)) = 0 \quad \text{pour tout } w \in W,$$

d'où

$$(3) \qquad q_a(a) = Q(a).$$

De plus, si a et b sont non singuliers, non colinéaires et orthogonaux, t_a et t_b commutent d'où

$$s(t_a)s(t_b) = s(t_b)s(t_a)$$

ce qui équivaut à

$$q_a \cdot t_b + q_b = q_b \cdot t_a + q_a.$$

ou encore

$$\frac{< w, a >^2}{Q(a)^2} q_b(a) = \frac{< w, b >^2}{Q(b)^2} q_a(b) \tag{4}$$

pour tout $w \in W$.

1^er^ cas : Si $n \geq 2$ et $F \neq \mathbb{F}_2$, il existe a, b deux vecteurs non singuliers, non colinéaires et orthogonaux entre eux. Il existe donc un vecteur w_0 de W orthogonal à a et non à b. Par (4) appliqué à $w = w_0$, on a :

$$q_a(b) = 0. \tag{5}$$

Puisque $F \neq \mathbb{F}_2$, on peut supposer que $Q(a) \neq Q(b)$. Le raisonnement précédent avec a et $a + b$ au lieu de a et b montre que : $q_a(a + b) = 0$.

Or

$$q_a(a + b) = q_a(a) + q_a(b) = Q(a) \neq 0$$

d'après (3) et (5).

La suite $(*)$ n'est donc pas scindée dans ce cas.

2^ème^ cas : Si $n \geq 3$ et $F = \mathbb{F}_2$, il existe trois vecteurs indépendants a, b, c, deux à deux orthogonaux et tels que

$$Q(a) = Q(b) = Q(c) = 1.$$

Par (3), $q_a(a) = 1$.

Par (4) appliqué successivement à a et b, a et c, a et $a + b + c$, on obtient

$$q_a(b) = q_a(c) = q_a(a + b + c) = 0.$$

Or, $q_a(a + b + c) = q_a(a) = 1$.

La suite $(*)$ n'est pas scindée dans ce cas.

Dans les autres cas, on montre que la suite $(*)$ est scindée en déterminant une section s de $O(Q)$ dans un groupe pseudosymplectique PsB de notre choix grâce à la proposition a.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n, e_{-1}, \cdots, e_{-n}\}$ une base symplectique de W (cf. § 1.1).

A chaque élément σ de $O(Q)$, de matrice $\begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, on associe un entier $D(\sigma)$ appelé invariant de Dickson et défini par :

$$D(\sigma) = \sum_{i,j} (Q(e_j) a_{ij} b_{ij} + Q(e_{-j}) c_{ij} d_{ij} + b_{ij} c_{ij}).$$

L'application $D : \sigma \longmapsto D(\sigma)$ est un homomorphisme de groupes de $O(Q)$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note $O^+(Q)$ son noyau et $O^-(Q)$ l'ensemble des éléments de $O(Q)$ pour lesquels D prend la valeur 1. Le groupe $O(Q)$ est réunion disjointe de $O^+(Q)$ et $O^-(Q)$.

3ème cas : Si $n = 1$, l'indice ν de Q est 0 ou 1.

Si $\nu = 0$ (resp. $\nu = 1$), soit (e_1, e_{-1}) une base de W telle que

$$< e_1, e_{-1} >= 1$$

(respectivement, (e_1, e_{-1}) est une base hyperbolique de W).

On choisit B ainsi :

$$B(xe_1 + ye_{-1}, x'e_1 + y'e_{-1}) = xx'Q(e_1) + xy' + yy'Q(e_{-1}).$$

Alors, l'application $s : O(Q) \longrightarrow PsB$ définie par

$$s(\sigma) = (\sigma, 0), \quad \sigma \in O^+(Q)$$

$$\text{et} \quad s(\sigma) = (\sigma, Q), \quad \sigma \in O^-(Q)$$

est une section.

4ème cas : Si $n = 2$, $\nu = 2$ et $F = \mathbb{F}_2$, on identifie W à l'espace vectoriel $\mathcal{M}(2, \mathbb{F}_2)$ des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ et Q est la forme quadratique $Q(m) = \text{dét}\, m$, $m \in W$.

On choisit la forme bilinéaire B suivante :

$$\text{si } m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et } m' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{alors } B(m, m') = ad' + bc'.$$

Le groupe $O^+(Q)$ s'identifie au groupe $SL(2, \mathbb{F}_2) \times SL(2, \mathbb{F}_2)$ agissant sur W par :

$$(g_1, g_2) \cdot m = g_1 m g_2^{-1}$$

On considère les éléments de PsB suivants : soit $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$s_1 = \left(\sigma_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, id\right), \ q_1(m) = cd\right)$$

$$s_1' = \left(\sigma_1' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, id\right), \ q_1'(m) = ab\right)$$

$$s_2 = \left(\sigma_2 = \left(id, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \ q_2(m) = a^2 + c^2\right)$$

$$s_2' = \left(\sigma_2' = \left(id, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right), q_2'(m) = b^2 + d^2\right)$$

et $t = (\tau, q(m) = bc + a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ où $\tau(m) = {}^t m$.

LEMME. —

1) *L'homomorphisme* $i : O^+(Q) \longrightarrow PsB$ *défini par :*
$$i(\sigma_j) = s_j, \quad i(\sigma'_j) = s'_j, \quad j = 1,2$$
est un relèvement de $O^+(Q)$ *dans* PsB.

2) i *se prolonge en un relèvement de* $O(Q)$ *dans* PsB *en posant* $i(\tau) = t$.

Démonstration : Pour la première affirmation, il suffit de vérifier que les conditions suivantes sont satisfaites :
$$C.1 \quad s_1^2 = s_2^2 = s_1'^2 = s_2'^2 = (id, 0)$$
$$C.2 \quad s_i s'_i s_i = s'_i s_i s'_i \text{ pour } i = 1,2$$
$$C.3 \quad g_1 g_2 = g_2 g_1 \text{ pour } g_i = s_i \text{ ou } s'_i, \ i = 1,2.$$
En effet, $SL(2, \mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Pour la deuxième affirmation, il suffit de vérifier que :
$$C.4 \quad t^2 = (id, 0)$$
$$C.5 \quad ts_1t = s'_2 \text{ et } ts'_1t = s_2.$$

Ces vérifications sont laissées au lecteur.

5ème et dernier cas : Si $n = 2$, $\nu = 1$ et $F = \mathbb{F}_2$.

Soient ξ un générateur de $\mathbb{F}_4$ sur $\mathbb{F}_2$ et $^-$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_4|\mathbb{F}_2)$. Tout élément α de $\mathbb{F}_4$ s'écrit :
$$\alpha = z + \xi t, \quad z, t \in \mathbb{F}_2.$$
On identifie W à $\{m = \begin{pmatrix} x & \overline{\alpha} \\ \alpha & y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{F}_2 \text{ et } \alpha \in \mathbb{F}_4\}$. Alors $Q(m) = \text{dét} m$, $m \in W$ et $O^+(Q)$ s'identifie à $SL_2(\mathbb{F}_4)$ agissant sur W par :
$$g \in SL_2(\mathbb{F}_4), \quad m \in W, g \cdot m = gm\overline{g}^t.$$
On prend la forme bilinéaire B égale à :
$$\text{si } m = \begin{pmatrix} x & \overline{z + \xi t} \\ z + \xi t & y \end{pmatrix}, \quad m' = \begin{pmatrix} x' & \overline{z' + \xi t'} \\ z' + \xi t' & y' \end{pmatrix},$$
$$B(m, m') = xy' + zz' + zt' + tt'.$$
On considère les éléments de PsB suivants :
pour $\lambda = \lambda_1 + \xi\lambda_2 \in \mathbb{F}_4^\times$.
$$s_\lambda = \left(\sigma_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 + \xi\lambda_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ q_\lambda(m) = (\lambda_1 + \lambda_2)yz + \lambda_1 yt + y^2 + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 t^2\right)$$
pour $\mu \in \mathbb{F}_4^\times$, $d_\mu = \left(\delta_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}, 0\right)$ et $w = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q\right)$.

LEMME. — *L'homomorphisme $i : O^+(Q) \longrightarrow PsB$ défini par*

$$\begin{aligned} i(\sigma_\lambda) &= s_\lambda, & \lambda &\in \mathbb{F}_4^\times \\ i(\delta_\mu) &= d_\mu, & \mu &\in \mathbb{F}_4^\times \\ i\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= w \end{aligned}$$

est un relèvement de $O^+(Q)$ dans PsB.

De plus, i se prolonge en un relèvement de $O(Q)$ dans PsB en posant

$$i(\tau) = (\tau, q_\tau(m) = zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2) \quad \textit{où } \tau \cdot m = {}^t m.$$

Les éléments σ_λ et δ_μ sont des générateurs de $SL_2(\mathbb{F}_4)$ soumis à certaines relations [2]. La démonstration consiste à vérifier que i les conserve.

Pour compléter la preuve de la proposition, il reste à montrer l'unicité (à conjugaison près par un élément de $\mathcal{Q}_a(W)$) de la section dans les cas 3, 4 et 5, c'est-à-dire la nullité de $H^1(O(Q), \mathcal{Q}_a(W))$ ou encore, celle de $H^1(O(Q), W)$ puisque celui-là est isomorphe à un produit de $[F : F^2]$ copies de celui-ci (cf. II.2.2).

Dans le cas 4, c'est un résultat de H. Pollatsek [10, théorème 4.5].

Dans les autres cas, il suffit que $H^1(O^+(Q), W)$ soit nul d'après la suite de Hochschild-Serre [13]. Or, $O^+(Q)$ est isomorphe à $F^\times$ quand $n = \nu = 1$, à $U(1, E)$ où E est une extension quadratique de F muni de l'involution canonique quand $n = 1$ et $\nu = 0$ (cf. § 2.5 cas 2), et à $SL(2, \mathbb{F}_4)$ quand $n = 2$, $\nu = 1$ et $F = \mathbb{F}_2$. Alors, il est bien connu que $H^1(O^+(Q), W)$ est nul.

La proposition est maintenant entièrement établie.

§ 2. Groupes métaplectiques : cas fini ou local

2.1. Soit $(\rho_\psi, \mathcal{V})$ la représentation métaplectique de $H(B)$.

A tout s de PsB, on associe la représentation $(\rho^s_\psi, \mathcal{V})$ de $H(B)$ définie par :

$$\rho^s_\psi(h) = \rho_\psi(sh), \quad h \in H(B).$$

C'est une représentation lisse, irréductible et, pour tout $t \in F$,

$$\rho^s_\psi((0,t)) = \psi(t) id_{\mathcal{V}}.$$

Par le théorème de Stone-Von Neumann, ρ_ψ et ρ^s_ψ sont isomorphes. On construit ainsi une représentation projective $\overline{\omega}_\psi$ de PsB.

Il existe alors une extension de PsB par $\mathbb{C}^\times$, notée $\widetilde{Ps}_\psi B$, et une représentation $(\omega_\psi, \mathcal{V})$ de $\widetilde{Ps}_\psi B$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] & \widetilde{Ps}_\psi B \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "\omega_\psi"] & PsB \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\omega}_\psi"] & 1 \\ & & GL\mathcal{V} \arrow[r] & PGL\mathcal{V} & \end{tikzcd}$$

On note p la projection de $\widetilde{Ps}_\psi B$ sur PsB.

$\widetilde{Ps}_\psi B$ est *l'extension métaplectique relative à* ψ de PsB et ω_ψ sa représentation métaplectique.

Soit ψ' un autre caractère additif non trivial de F. On peut alors construire l'extension métaplectique $\widetilde{Ps}_{\psi'} B$ de PsB relativement à ψ'.

PROPOSITION a. — *Soit $a \in F^\times$ tel que $\psi'(x) = \psi(ax)$, $x \in F$.*

Les extensions métaplectiques $\widetilde{Ps}_\psi B$ et $\widetilde{Ps}_{\psi'} B$ sont isomorphes si et seulement si $a \in F^{\times 2}$.

En particulier, si F est fini, l'extension métaplectique ne dépend pas du choix de ψ.

Remarque :

S'il existe deux isomorphismes $\alpha : H(B) \xrightarrow{\sim} H(B')$ et $\beta : PsB \xrightarrow{\sim} PsB'$ tels que :

$$(6) \qquad \forall h \in H(B), \quad \forall s \in PsB, \quad \alpha(sh) = (\beta s)(\alpha(h))$$

alors β se relève en un isomorphisme de $\widetilde{Ps}_\psi B$ dans $\widetilde{Ps}_\psi B'$.

En particulier, si B et B' définissent la même forme quadratique, les isomorphismes α_q et β_q définis respectivement aux paragraphes 1.2 et 1.3 vérifient (6) : $\widetilde{PsB}$ et $\widetilde{PsB'}$ sont isomorphes.

De même, si $B' = \lambda B$, $\lambda \in F^\times$, alors $\widetilde{PsB'}$, défini relativement au caractère $\psi_\lambda : x \longrightarrow \psi(\lambda x)$ est isomorphe à $\widetilde{PsB}$.

Proposition b. —

i L'extension métaplectique n'est pas triviale et contient un sous-groupe $\widehat{Ps_\psi B}$ tel que la restriction de p à ce sous-groupe soit surjective de noyau $\{\pm 1\}$.

ii Dans les cas où PsB contient un sous-groupe isomorphe à $O(Q)$, la restriction de l'extension métaplectique à ce sous-groupe est scindée si et seulement si

$$\begin{cases} \quad n = 1 \\ ou \quad n = \nu = 2 \quad et \quad F = \mathbb{F}_2. \end{cases}$$

Pour établir ce résultat, on décrit différents modèles de la représentation métaplectique en 2.2 et, en 2.3, on examine une situation produit. La proposition a. est prouvée en 2.4. et la proposition b. en 2.5.

2.2. Modèles de la représentation métaplectique

On reprend les notations du § 1.2.

a. *Modèle de Schrödinger*

Soit $s = (\sigma, f)$ un élément de PsB. On suppose que, dans une polarisation complète de $(W, <,>)$, $W = X \oplus Y$, σ s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Sur $X \cap \sigma X$, l'application $x \longmapsto \psi_X(x \cdot s^{-1}x)\psi(Q(x))$ est un caractère. Il existe un élément w_s de W tel que

$$(7) \qquad \psi_X(x)\psi_X(s^{-1}x)\psi(Q(x)) = \psi(< x, w_s >) \quad \text{pour } x \in X \cap \sigma X.$$

On définit un automorphisme $M(s)$ de $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ par

$$M(s)\phi(h) = \begin{cases} |\alpha|^{1/2}\phi(s^{-1}(w_s h)) \text{ si } \sigma \text{ stabilise } X \\ \int_{X/X\cap\sigma X} \psi(Q(x))\psi_X(x)\phi(s^{-1}(w_s x h))|\gamma'|^{1/2} d\dot{x} \text{ sinon} \end{cases}$$

où $\gamma' : X/\operatorname{Ker}\gamma \longrightarrow (X/\delta \operatorname{Ker}\gamma)^*$ est l'isomorphisme induit par γ, $d\dot{x}$ est une mesure de Haar sur $X/X \cap \sigma X$, et w_s un vecteur de W satisfaisant (7).

Un choix différent de w_s peut changer $M(s)$ en $-M(s)$.

On vérifie que $(s, M(s))$ appartient à $\widetilde{PsB}$, par une méthode analogue à [9, § 1].

On note $\Lambda(W)$ l'ensemble des couples (X, ψ_X) où X est un lagrangien de W et ψ_X un caractère sur $X \times F$ prolongeant ψ.

Le groupe PsB agit sur $\Lambda(W)$ par : $s = (\sigma, f) \in PsB$, $(X, \psi_X) \in \Lambda(W)$,

$$(\sigma, f) \cdot (X, \psi_X) = (\sigma X, \psi_X \circ s^{-1}).$$

On fixe $(X_0, \psi_0) \in \Lambda(W)$ et on désigne par $\Lambda^0(W)$ l'orbite sous PsB de (X_0, ψ_0).

Pour deux lagrangiens X et Y, on note A_{YX} l'isomorphisme de $X/X \cap Y$ sur $(Y/X \cap Y)^*$ induit par celui de W sur W^*.

Soient dx et dy des mesures de Haar sur X et Y, dt une mesure de Haar sur $X \cap Y$. On note $d\dot{x}$ et $d\dot{y}$ les mesures de Haar quotients sur $X/X \cap Y$ et $Y/X \cap Y$, et, $|A_{YX}|$ le module de A_{YX} par rapport à $d\dot{x}$ et la mesure duale de $d\dot{y}$ [9, 1.1].

Pour deux éléments (X, ψ_X) et (Y, ψ_Y) de $\Lambda^0(W)$, on définit l'opérateur $\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}$ de la façon suivante :

l'application $x \longmapsto \psi_X(x)^{-1}\psi_Y(x)$ définit un caractère sur $X \cap Y$. Il existe donc $w \in W$ (défini modulo $X + Y$) tel que

$$\psi_X(x)^{-1}\psi_Y(x) = \psi(< w, x >) \quad \text{pour tout } x \in X \cap Y.$$

Alors, pour $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$,

$$\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}\phi(h) = \int_{Y/X\cap Y} \psi_Y^{-1}(y)\phi(w \cdot y \cdot h)|A_{YX}|^{1/2} d\dot{y}.$$

Soient X_1 un supplémentaire de $X \cap Y$ dans X et Y_1 un supplémentaire de $X \cap Y$ dans Y. Alors $X_1 \oplus Y_1$ est non isotrope et son orthogonal $(X_1 \oplus Y_1)^\perp$ contient $X \cap Y$. On note V un supplémentaire de $X \cap Y$ dans $(X_1 \oplus Y_1)^\perp$. Ainsi,

$$W = X_1 \oplus X \cap Y \oplus Y_1 \oplus V,$$

$$Y/X \cap Y \simeq Y_1 \quad \text{et}$$

$$H(B)/X \times F \simeq Y_1 \oplus V.$$

Pour $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$, $\phi|_{Y_1 \oplus V}$ appartient à $\mathcal{S}(Y_1 \oplus V)$ et un calcul simple donne pour $h = (x_1 + u + y_1 + v, t)$ où $x_1 \in X_1$, $u \in X \cap Y$, $y_1 \in Y_1$, $v \in V$ et $t \in F$,

$$\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}\phi(h) = \psi(t + B(y_1, x_1 + u + v) + B(x_1 + u, v) + < w, x_1 + u >)\psi_Y(y_1)$$

$$\int_{Y_1} \psi(< x_1, y >)\psi_Y^{-1}(y)\psi(B(y, v)) \cdot \phi(w(y + v))|A_{YX}|^{1/2} dy.$$

L'opérateur $\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}$ est donc essentiellement un opérateur de transformation de Fourier : il est continu de $\mathcal{H}(X,\psi_X)$ dans $\mathcal{H}(Y,\psi_Y)$ et inversible.

Soit $s=(\sigma,f)\in PsB$. Il définit une application de $\mathcal{H}(X,\psi_X)$ dans $\mathcal{H}(\sigma X,\psi_X\circ s^{-1})$ par : $\phi\longmapsto\phi^s$ où $\phi^s(h)=\phi(s^{-1}h)$.

Alors, pour $\phi\in\mathcal{H}(X_0,\psi_0)$, on a :

$$M(s)\phi=\mathcal{F}_{X_0,\psi_0;\sigma X_0,\psi_0\circ s^{-1}}\phi^s=(\mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0,\psi_0}\phi)^s.$$

L'opérateur $M(s)$ est donc un automorphisme de $\mathcal{H}(X_0,\psi_0)$.

Il reste à vérifier que $M(s)$ entrelace les représentations ρ et ρ^s : pour tout $h\in H(B)$,

$$\begin{aligned} M(s)\rho(h) &= s\circ\mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0,\psi_0}\circ\rho(h)=s\circ\rho(h)\circ\mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0\circ\psi_0}\\ &= \rho(sh)\circ s\circ\mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0,\psi_0}=\rho(sh)\cdot M(s)\end{aligned}$$

$\square$

Examinons la restriction de l'extension métaplectique à certains sous-groupes de PsB.

1. **Cas où Q est déployée** [15]. On choisit X et Y singuliers et B définie par : $B(x+y,x'+y')=<x,y'>$, $x,x'\in X$, $y,y'\in Y$.

Si $s=\left(\begin{pmatrix}\alpha & u\\ 0 & \alpha^{*-1}\end{pmatrix},f\right)$ où $\alpha\in GL(X)$ et $f_{|X}=0$,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y)=|\alpha|^{1/2}\psi(f(\alpha^*y)+B(u\alpha^*y,y))\varphi(\alpha^*y),\ y\in Y,\ \varphi\in\mathcal{S}(Y).$$

Si $s=\left(\begin{pmatrix}0 & \gamma^{*-1}\\ \gamma & 0\end{pmatrix},Q\right)$ où $\gamma:X\longrightarrow Y$ est un isomorphisme,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y)=\int_X\psi(<y,x>)\varphi(\gamma^{-1}x)|\gamma|^{1/2}dx.$$

L'extension métaplectique restreinte au sous-groupe de PsB formé des éléments du premier type est scindée.

2. **Cas du sous-groupe $\mathcal{Q}_a(W)$ de PsB**

Soit $s=(id,f)$ un élément de PsB. Il existe un unique $y_0\in Y$ tel que

$$\forall x\in X,\quad \psi\circ f(x)=\psi(<x,y_0>).$$

Alors, si $\varphi\in\mathcal{S}(Y)$, on a, pour tout $y\in Y$,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y)=\psi(f(y+y_0)+B(y_0,y))\varphi(y+y_0).$$

On en déduit que si $s' = (\sigma', f')$ et que y_0' est défini comme précédemment, alors

$$\begin{aligned}\omega_\psi(s)\omega_\psi(s')\varphi(y) &= \psi(B(y_0, y) + f(y + y_0))\psi(B(y_0', y + y_0) \\ &\qquad + f'(y + y_0' + y_0))\varphi(y + y_0 + y_0') \\ &= \psi(B(y_0', y_0) + f(y_0'))\omega_\psi(ss')\varphi(y).\end{aligned}$$

Si l'extension métaplectique est scindée au-dessus de $\mathcal{Q}_a(W)$, alors pour tout $s = (id, f)$, $s' = (id, f')$ de PsB,

$$\begin{aligned}\omega_\psi(s)\omega_\psi(s') &= \omega_\psi(s')\omega_\psi(s) \\ i.e. \quad \psi \circ f(y_0') &= \psi \circ f'(y_0).\end{aligned}$$

Or, y_0 (resp. y_0') ne détermine f (resp. f') que sur X. On peut trouver deux éléments s et s' de $\mathcal{Q}_a(W)$ pour lesquels cette égalité n'est pas satisfaite.

L'extension métaplectique restreinte à $\mathcal{Q}_a(W)$ n'est pas scindée.

b. *Modèles latticiels*

Soit F un corps local et $\mathcal{E}_\psi$ le conducteur de ψ : $\mathcal{E}_\psi = \mathfrak{p}_F^r$, $r \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe un réseau L dans W, autodual relativement à ψ et $<,>$. En remplaçant X par L dans **a**, on obtient un nouveau modèle de la représentation de Weil, dit modèle latticiel.

En général, si L' est un réseau, le *stabilisateur* K *de* L' est le sous-groupe de PsB formé des éléments (σ, f) tels que :

i) $\sigma L' = L'$

ii) pour tout $\ell \in L'$, $f(\ell) \in \mathfrak{p}^{2[r/2]}$ où [ ] est la partie entière.

3. Cas du stabilisateur K d'un réseau L autodual

Dans ce cas, r est nécessairement pair.

On suppose, en outre, que la restriction de B à $L \times L$ est à valeurs dans $\mathcal{E}_\psi$ et on prolonge trivialement ψ sur $L \times F$. On note ψ_L le caractère de $L \times F$ ainsi obtenu.

Pour tout $s = (\sigma, f) \in K$, le caractère $\ell \longmapsto \psi_L(\ell)^{-1}\psi_L(s^{-1}\ell)$ est trivial. D'où si $\phi \in \mathcal{H}(L, \psi_L)$,

$$M(s)\phi(h) = \phi(s^{-1}h), \ h \in H(B).$$

Par conséquent, *$\widetilde{P}sB$ est scindée au-dessus de K.*

c. Supposons que F soit fini. Soit $(\rho, \mathcal{V})$ un modèle de la représentation métaplectique de $H(B)$.

Il est alors facile d'exprimer la représentation de Weil de PsB en fonction de $(\rho, \mathcal{V})$, pour certains éléments de PsB.

LEMME. — *Soit* $s = (\sigma, f) \in PsB$. *On suppose que* f *est nulle sur* $\mathrm{Ker}(1+\sigma)$. *Soit* $M(s)$ *l'opérateur de* $\mathcal{V}$ *dans lui-même défini par : pour tout* $v \in \mathcal{V}$,

$$M(s)v = \sum_{w \in W} \rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)v.$$

Alors $(s, M(s))$ *est un élément de* $\widetilde{PsB}$.

Démonstration : Soit $s \in PsB$. L'opérateur $M(s)$ est une somme finie d'éléments de $\mathcal{V}$ donc il est bien défini, à valeurs dans $\mathcal{V}$.

Pour montrer que $M(s)$ est inversible, on calcule le produit $M(s^{-1})M(s)$: soit $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} M(s^{-1})M(s)v &= \sum_{w,w' \in W} \rho(w'^{-1})\rho(sw')\rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)v \\ &= \sum_{u,w' \in W} \rho(w'^{-1})\rho(sw')\rho(su)\rho(u^{-1})v \quad \text{où} \quad u = \sigma^{-1}w. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \rho(sw')\rho(su)\rho(u^{-1}) &= \rho((\sigma w' + \sigma u, f(w') + f(u) + B(\sigma u, \sigma w')))\rho(u^{-1}) \\ &= \rho((0, B(w', u))(\sigma(u+w'), f(w'+u)))\rho(u^{-1}) \\ &= \psi(B(w', u) + < u, \sigma(u+w') >)\rho(u^{-1})\rho(s(u+w')) \end{aligned}$$

d'où
$M(s^{-1})M(s)v$

$$\begin{aligned} &= \sum_{u,w' \in W} \psi(B(w', u) + < u, \sigma(u+w') >)\rho(w'^{-1})\rho(u^{-1})\rho(s(u+w'))v \\ &= \sum_{u,w' \in W} \psi(< u, w' > + < u, \sigma(u+w') >)\rho((u+w')^{-1})\rho(s(u+w'))v \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \rho(w'^{-1})\rho(u^{-1}) = \rho((w', Q(w'))(u, Q(u))) \\ = \rho((u+w', Q(u+w'))(0, B(u, w'))). \end{aligned}$$

$$M(s^{-1})M(s)v = \sum_{u' \in W} \Big(\sum_{u \in W} \psi(< u, u' + \sigma u' >)\Big)\rho(u'^{-1})\rho(su')v$$

avec $u' = u + w'$.

L'homomorphisme $u \longmapsto \psi(< u, u' + \sigma u' >)$ est un caractère de W, trivial si et seulement si $u' \in \operatorname{Ker}(1+\sigma)$. Donc

$$M(s^{-1})M(s)v = |W| \cdot \sum_{u' \in \operatorname{Ker}(1+\sigma)} \rho(u'^{-1})\rho(u', f(u'))v$$
$$= |W| \cdot \sum_{u' \in \operatorname{Ker}(1+\sigma)} \psi(f(u)) \cdot v$$

Puisque f est supposée nulle sur $\operatorname{Ker}(1+\sigma)$, on a

$$M(s^{-1})M(s)v = c \cdot v \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}^{\times}$$

et $M(s)$ est inversible.

Il ne reste plus qu'à prouver que $M(s)$ entrelace les représentations $(\rho, \mathcal{V})$ et $(\rho^s, \mathcal{V})$. Soit $(w_0, t_0) \in H(B)$, $v \in \mathcal{V}$.

$$\begin{aligned} M(s)\rho(w_0, t_0)v &= \psi(t_0) \sum_{w \in W} \rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)\rho(w_0)v \\ &= \sum_{w \in W} \psi(t_0)\rho(sw)^{-1}\rho(w + w_0, B(w, w_0)) \\ &= \sum_{w \in W} \psi(t_0)\rho(s(w + w_0))^{-1}\rho(w_0, B(w + w_0, w_0)) \\ &= \psi(t_0) \sum_{w \in W} \rho(sw_0(sw)^{-1})\rho(w)v = \rho(s(w_0, t_0))M(s)v. \end{aligned}$$

□

2.3. Supposons que (V, b) soit la somme orthogonale de (V_1, b_1) et (V_2, b_2) c'est-à-dire $V = V_1 \oplus V_2$ et

$$b(w_1 + w_2, w_1' + w_2') = b_1(w_1, w_1') + b_2(w_2, w_2'), \quad w_i, w_i' \in W_i$$

et que la forme quadratique q_i définie par b_i soit non dégénérée et non défective. Alors

$$j : \begin{cases} H(b_1) \times H(b_2) & \longrightarrow \quad H(b) \\ ((w_1, t_1), (w_2, t_2)) & \longmapsto \quad (w_1 + w_2, t_1 + t_2) \end{cases}$$

est surjective de noyau $\{((0, t), (0, t)),\ t \in F\}$

Soit $(\rho_{i,\psi}, \mathcal{V}_i)$ un modèle de la représentation métaplectique de $H(b_i)$ et ρ_ψ la représentation métaplectique de $H(b)$ dans $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{V}_2$. Alors, $\rho_\psi \circ j$ est équivalente à $\rho_{1,\psi} \otimes \rho_{2,\psi}$.

L'application

$$\begin{cases} (Psb_1 \times GL(\mathcal{V}_1)) \times (Psb_2 \times GL(\mathcal{V}_2)) & \longrightarrow \quad Psb \times GL(\mathcal{V}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{V}_2) \\ \Big(((\sigma_1, f_1), S_1), ((\sigma_2, f_2), S_2)\Big) & \longmapsto \quad ((\sigma_1 \oplus \sigma_2, f_1 \oplus f_2), S_1 \otimes S_2) \end{cases}$$

définit un homomorphisme $\widetilde{j} : \widetilde{Psb}_1 \times \widetilde{Psb}_2 \longrightarrow \widetilde{Psb}$, de noyau

$$\Big\{\Big(((id, 0), zI), ((id, 0), z^{-1}I)\Big), z \in \mathbf{C}^\times\Big\}$$

et $\omega_\psi \circ \widetilde{j}$ est équivalente à $\omega_{1,\psi} \otimes \omega_{2,\psi}$.

On en déduit les résultats suivants :

Lemme 2.3a. — *Si G est un sous-groupe de Psb isomorphe à $G_1 \times G_2$ dans $Psb_1 \times Psb_2$ et si l'image réciproque de G_i dans $\widetilde{Psb}_i$ est scindée pour $i = 1, 2$, alors l'image réciproque de G dans $\widetilde{Psb}$ est scindée.*

Lemme 2.3b. — *Soit H_1 un sous-groupe de Psb_1. Il s'identifie au sous-groupe $H = \{(\sigma \oplus id_{\mathcal{V}_2}, f \oplus 0), (\sigma, f) \in H\}$ de Psb. Si l'image réciproque de H dans $\widetilde{Psb}$ est scindée, alors l'image réciproque de H_1 dans $\widetilde{Psb}_1$ est scindée.*

Lemme 2.3c. — *Soit C (resp. c_1, c_2) le cocycle de l'extension métaplectique $\widetilde{Psb}$ (resp. $\widetilde{Psb}_1, \widetilde{Psb}_2$). Pour s_i, $s_i' \in Psb_i$, $i = 1, 2$, on a :*

$$C(s_1 \oplus s_2, s_1' \oplus s_2') = c_1(s_1, s_1') \cdot c_2(s_2, s_2').$$

2.4. Démonstration de la proposition 2.1.a.

Supposons d'abord que $a \in F^2$: $a = b^2$, $b \in F^\times$.

Soit $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ un modèle de Schrödinger de ω_ψ. On prolonge ψ' en un caractère ψ'_X de $X \times F$ par :

$$\psi'_X(x, t) = \psi_X(bx, b^2t),$$

et on considère le modèle de Schrödinger $\mathcal{H}(X, \psi'_X)$ de $\omega_{\psi'}$. L'isomorphisme de $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ dans $\mathcal{H}(X, \psi'_X)$ qui à φ, associe φ' définie par :

$$\varphi'(w, x) = \varphi(bw, b^2t), \ (w, t) \in H(B).$$

entrelace les représentations ω_ψ et $\omega_{\psi'}$.Par conséquent, $\widetilde{Ps_\psi B}$ et $\widetilde{Ps_{\psi'} B}$ sont isomorphes.

Réciproquement, supposons que $\widetilde{Ps_\psi B}$ et $\widetilde{Ps_{\psi'} B}$ soient isomorphes et identifions-les. Soient c_ψ un cocycle de $\widetilde{Ps_\psi B}$ et $c_{\psi'}$ le cocycle de $\widetilde{Ps_{\psi'} B}$, image de c_ψ . Alors,

(8) $\quad \forall s_1, s_2 \in PsB, c_\psi(s_1, s_2) = c_\psi(s_2, s_1) \Longleftrightarrow c_{\psi'}(s_1, s_2) = c_{\psi'}(s_2, s_1).$

En particulier, prenons s_1 et s_2 dans $\mathcal{Q}_a(W)$: $s_1 = (id, f_1)$ et $s_2 = (id, f_2)$. Soit y_i (resp.y_i') l'unique élément de Y tel que :

$$\forall x \in X, \ \psi \circ f_i(x) = \psi(< x, y_i >) \ \text{(resp. } \psi' \circ f_i(x) = \psi'(< x, y_i' >)).$$

D'après les résultats du paragraphe 2.2.2., (8) s'écrit alors :
(8′)
$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{Q}_a(W), \ \psi(f_1(y_2)) = \psi(f_2(y_1)) \Longleftrightarrow \psi(af_1(y_2')) = \psi(af_2(y_1'))).$$

Il existe $f_1 \in \mathcal{Q}_a(W)$ telle que $f_{1|Y} = 0$ et $f_1(X) \not\subset \operatorname{Ker}\psi \cup \operatorname{Ker}\psi'$ (donc y_1 et y_1' sont non nuls). Choisissons un tel f_1.
Si y_1 et y_1' ne sont pas colinéaires, il existe $f_2 \in \mathcal{Q}_a(W)$ telle que $f_2(y_1) \in \operatorname{Ker}\psi$ et $f_2(y_1') \notin \operatorname{Ker}\psi'$. Nécessairement y_1 et y_1' sont liés.
Il existe $\lambda \in F^\times$ tel que $y_1' = \lambda y_1$. Par (9), on obtient pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \psi'(f_1(x)) &= \psi(af_1(x)) \\ &= \psi'(< x, y_1' >) = \psi(< a\lambda x, y_1 >) = \psi(a^2\lambda^2 f_1(x)) \end{aligned}$$

d'où
$$\psi((a + a^2\lambda^2)f_1(x)) = 1.$$

Posons $u = (a + a^2\lambda^2)f_1(x_0)$ et $v = a\lambda^2 u$ où x_0 est un élément de X fixé, tel que $f_1(x_0) \neq 0$. Ce sont deux éléments de $\operatorname{Ker}\psi$ (pour v, il suffit d'utiliser (8′) avec $f_2 \in \mathcal{Q}_a(W)$ telle que $f_2(y_1) = u$). D'où

$$F^2u + F^2v \subset \operatorname{Ker}\psi \subsetneq F$$

ce qui équivaut à
$$u \text{ et } v \text{ sont } F^2\text{-liés}$$

ou encore à
$$a \in F^2.$$

Ceci démontre la proposition.

2.5. Démonstration de la proposition 2.1.b.

La première assertion de $\underline{i}$. est une conséquence immédiate de 2.2.2. Pour la deuxième, considérons l'espace (V, b) somme orthogonale de deux copies de (W, B) et identifions PsB au sous-groupe $\{(s,s), s \in PsB\}$ de $PsB \times PsB$.

Soit $X_0 = \{(w,w), w \in W\}$ un sous-espace vectoriel de V. Il est singulier de dimension celle de W. Il existe donc un sous-espace vectoriel Y_0 de V, singulier et de même dimension que X_0, tel que $V = X_0 \oplus Y_0$ soit une polarisation complète de V. On se trouve donc dans le cas décrit en 2.2.1.

De plus, si (σ, f) est un élément de PsB, son image dans Psb stabilise X_0 et $(f \oplus f)_{|X_0}$ est nulle. Par le premier résultat de 2.2.1, l'image réciproque de PsB dans $\widetilde{Psb}$ est scindée et la restriction du cocycle C de l'extension $\widetilde{Psb}$ à PsB est égale à 1.

Soit c le cocycle de $\widetilde{PsB}$. Par le lemme 2.3.c, pour tout s, s' de PsB

$$c^2(s,s') = C(s \oplus s,\ s' \oplus s') = 1.$$

D'où c est à valeurs dans $\{\pm 1\}$.

On a donc établi le $\underline{i}$ de la proposition. Pour le $\underline{ii}$, on étudie successivement les différents cas. On reprend les notations du § 1.3.

Cas 1 : $n = \nu = 1$.

Pour tout élément σ de $O(Q)$, on définit l'opérateur $\omega_\psi(\sigma)$ de $\mathcal{S}(Y)$ par :

si $\sigma \in O^+(Q)$, $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha \in F^\times$,

$$\omega_\psi(\sigma)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2}\varphi(\alpha y), \ \ \varphi \in \mathcal{S}(Y);$$

si $\sigma \in O^-(Q)$, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in F^\times$,

$$\omega_\psi(\sigma)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2}\varphi^*(\alpha^{-1} y), \ \ \varphi \in \mathcal{S}(Y),$$

où φ^* désigne la transformée de Fourier de φ par rapport à la mesure autoduale.

LEMME. — *$\{(\sigma, \omega_\psi(\sigma)),\ \sigma \in O(Q)\}$ est un sous-groupe de $\widetilde{PsB}$.*

La démonstration est immédiate.

La restriction de $\widetilde{PsB}$ à $O(Q)$ est triviale.

Cas 2 : $n = 1$, $\nu = 0$.

Soit (e, f) une base de W telle que $< e, f >= Q(e)$ et ξ une racine de l'équation
$$x^2 + x + \frac{Q(f)}{Q(e)} = 0.$$
La racine ξ n'est pas un élément de F sinon le vecteur $\xi e + f$ serait singulier. On note $E = F(\xi)$ l'extension quadratique séparable de F engendrée par ξ. Alors, W s'identifie à E (en tant que F-espace vectoriel) par l'unique application linéaire $\varphi : W \longrightarrow E$ telle que $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(f) = \xi$.

Soit Q' la forme quadratique sur E définie par :
$$Q'(x) = Q(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in E.$$

On a :
$$Q'(x) = Q(e) \cdot N_{E|F}x, \quad x \in E.$$
D'où
$$O(Q) \simeq O(Q') = O(N_{E|F}) \simeq E^1 \rtimes \mathrm{Gal}(E|F)$$
où
$$E^1 = \{x \in E | N_{E|F}x = 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gal}(E|F) = \{id, \tau\}.$$
En particulier, $O^+(Q) \simeq E^1$.

On peut donc supposer que $W = E$ et $Q = N_{E|F}$. On note δ la norme de ξ. On choisit la forme bilinéaire B donnée par :
$$B(x + \xi y, x' + \xi y') = xx' + xy' + \delta yy', \quad x, x', y, y' \in F.$$

i) Si F est fini, $O^+(Q)$ s'identifie au groupe unitaire U de la forme hermitienne $(,)$ définie sur E, espace vectoriel sur (E, τ), par :
$$(x, y) = \tau(x)y, \quad x, y \in E.$$
Par le théorème 3.3 de [5], $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de $O^+(Q)$. Soit $s \longmapsto (s, r(s))$ une section.

De plus, il existe un élément de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $t = (\tau, Q)$, noté $(t, r(\tau))$, tel que $r(\tau)^2 = I$.

Pour que $\widetilde{PsB}$ soit scindée, il faut et il suffit que :
$$\forall \sigma \in O^+(Q), \quad r(\tau)r(\sigma)r(\tau) = r(\tau\sigma\tau).$$
Or, ces deux opérateurs ne diffèrent que d'un scalaire multiplicatif. Ceci équivaut donc à :
$$\forall \sigma \in O^+(Q), \quad tr(r(\tau)r(\sigma)r(\tau)) = tr(r(\tau\sigma\tau))$$
$$i.e. \ (10) \quad \forall \sigma \in O^+(Q), \quad \chi(\sigma) = \chi(\tau\sigma\tau)$$

où χ désigne le caractère de la représentation de Weil de U. Le calcul de χ, pour les éléments semi-simples de U, a été effectué par P. Gérardin [5, Cor. 4.8.2] et donne, dans notre cas :

$$\chi(\sigma) = -1 \text{ pour tout } \sigma \in U \setminus \{id\}.$$

L'assertion (10) est alors claire, et $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de $O(Q)$.

On suppose maintenant que F est local. On note $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ et π_F une uniformisante. Le conducteur de ψ est $\mathfrak{p}_F^r$ où $r = 2s$ ou $2s+1$, $s \in \mathbb{Z}$.

On choisit ξ tel que $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F + \xi\mathcal{O}_F$. Alors, $O(Q)$ est contenu dans le stabilisateur K du réseau $L = \mathfrak{p}_F^s + \xi\mathfrak{p}_F^s$. Deux cas se présentent :

ii) L est autodual (i.e. r est pair). On vérifie que $\psi \circ B$ est trivial sur $L \times L$. D'après § 2.3.3, $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de K donc de $O(Q)$.

iii) L n'est pas autodual (i.e. r est impair). On construit un nouveau modèle de la représentation de Weil de PsB permettant d'utiliser les résultats de i) [14].

Construction du modèle. :

On remarque que $L^* = \mathfrak{p}L \subset L$. On considère $V = L/L^*$. C'est un espace vectoriel sur le corps résiduel k_F de F. On munit V d'une forme bilinéaire b définie par :

$$b(\overline{\ell}, \overline{\ell}') = B(\pi^{-s}\ell, \pi^{-s}\ell') \bmod \mathfrak{p}_F$$

où $\overline{\ell}$ est l'image de $\ell \in L$ par la projection $L \longrightarrow L/L^*$.

Soit $H(b)$ le groupe de Heisenberg "associé" et $(\rho_\chi, \mathcal{S})$ un modèle de la représentation métaplectique de $H(b)$ pour le caractère χ de k_F :

$$\chi(\overline{x}) = \psi(\pi^{2s}x), \quad x \in \mathcal{O}_F \text{ et } \overline{x} \text{ son image dans } k_F.$$

(χ n'est pas trivial).

Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des fonctions $\phi : H(B) \longrightarrow \mathcal{S}$ telles que :

i) ϕ est localement constante à support compact modulo F

ii) $\phi((\ell, t)h) = \psi(t)\rho_\chi(\overline{\ell})\phi(h)$ pour $\ell \in L$, $t \in F$ et $h \in H(b)$.

Le groupe $H(B)$ agit sur $\mathcal{V}$ par translations à droite.

LEMME. — *La représentation $(\rho, \mathcal{V})$ ainsi obtenue est la représentation métaplectique de $H(B)$.*

Démonstration : $(\rho, \mathcal{V})$ est lisse et vérifie la condition sur l'action du centre.

Pour que $(\rho, \mathcal{V})$ soit un modèle de la représentation métaplectique de $H(B)$, il faut et il suffit qu'elle soit irréductible.

Considérons l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{S}$ qui à $\phi \in \mathcal{V}$ associe $\phi(0)$. C'est un homomorphisme de $L \times F$-modules. Si $\mathcal{V}'$ est un $H(B)$-sous-module de $\mathcal{V}$, il est également un $L \times F$ sous-module. L'image $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{S}$ est donc un sous-module de $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est irréductible, $\mathcal{S}'$ est $\{0\}$ ou $\mathcal{S}$.

Or toute fonction ϕ de $\mathcal{V}$ est entièrement déterminée par $\phi(0)$ sous l'action de $H(B)$. Ainsi, $\mathcal{V}'$ est $\{0\}$ ou $\mathcal{V}$. La représentation $(\rho, \mathcal{V})$ est bien irréductible.

$\square$

Soit $s = (\sigma, f)$ un élément de K. Il induit un automorphisme $(\overline{\sigma}, \overline{f})$ de $H(b)$ par :

$$\begin{cases} \overline{\sigma}(\ell + L^*) & = \overline{\sigma \ell} \\ \overline{f}(\ell + L^*) & = \overline{f(\pi^{-s}\ell)} \end{cases}$$

L'automorphisme $(\overline{\sigma}, \overline{f})$ est un élément du groupe pseudosymplectique Psb.

Soit $(\omega_\chi, \mathcal{S})$ la représentation métaplectique de Psb.

Si $s \in O(Q) \subset K$, alors $\overline{s}$ appartient au groupe orthogonal $O(q)$ de la forme quadratique q définie par b. L'analyse dans i) du cas où F est fini assure l'existence d'une section r_χ de $\widetilde{Psb}$ au-dessus de $O(q)$:

$$r_\chi : \overline{s} \in O(q) \longmapsto (\overline{s}, r_\chi(\overline{s})).$$

L'homomorphisme $s \longmapsto (s, r(s))$ de $O(Q)$ dans $\widetilde{PsB}$ défini par :

$$r(s)\phi(h) = r_\chi(\overline{s})\phi(s^{-1}h), \quad \phi \in \mathcal{V},$$

est une section de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $O(Q)$.

cas 3 : $n = \nu = 2$ et $F = \mathbb{F}_2$

On construit une section de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $O(Q)$.

Pour ce faire on reprend la description de la situation faite au § 1.3. On introduit alors les notations suivantes :

– X est le sous-espace vectoriel de W défini par : $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in W \right\}$.

– Y est le sous-espace vectoriel de W défini par : $Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \right\}$.

Alors $X \oplus Y$ est une polarisation complète de W en espaces singuliers ;

– $(\rho, \mathcal{S}(Y))$ un modèle de la représentation métaplectique de $H(B)$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$,

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}, t_0\right)\varphi(a, b) = \psi(t_0 + ad_0 + bc_0)\varphi(a + a_0, b + b_0).$$

En choisissant une base de $\mathcal{S}(Y)$, on exprime ρ à l'aide de matrices. Soit φ_0 [resp. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$] la fonction de $\mathcal{S}(Y)$ prenant la valeur 1 en $(0,0)$[resp.$(1,0),(0,1),(1,1)$] et s'annulant partout ailleurs.

Le système $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathcal{S}(Y)$ dans laquelle la matrice de $\rho(h)$, $h \in H(B)$, est :

$$\psi(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi(c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(c+d) \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, t\right)$$

$$\psi(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \psi(d) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(c) \\ 0 & 0 & \psi(c+d) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, t\right)$$

$$\psi(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(d) \\ \psi(c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(c+d) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}, t\right)$$

$$\psi(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \psi(d) & 0 \\ 0 & \psi(c) & 0 & 0 \\ \psi(c+d) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}, t\right)$$

Pour chaque élément $g = s_1, s_1', s_2, s_2'$ ou t, on détermine les matrices M_g de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ telles que

$$M_g \rho(h) = \rho(gh) M_g, \quad \text{pour tout } h \in H(B).$$

On obtient :

$$\text{si} \quad g = s_1, \quad M_{s_1} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = s_1', \quad M_{s_1'} = \alpha' \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha' \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = s_2, \quad M_{s_2} = \beta/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = s'_2, \quad M_{s'_2} = \beta' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \beta' \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = t, \quad M_t = \frac{i\gamma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{C}^\times$$

Les conditions $C.1$ et $C.4$ déterminent α, α', β, β' et γ au signe près. Les conditions $C.2$ donnent le signe de α' et β' en fonction de celui de α et β respectivement, tandis que les conditions $C.5$ donnent le signe de β en fonction de celui de α. On obtient :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \pm 1 \\ \gamma = \pm 1 \end{cases}$$

On vérifie que les conditions $C.3$ sont satisfaites.

Ainsi, $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de $O(Q)$.

Cas 4 : $n = 2$, $\nu = 1$ et $F = \mathbb{F}_2$

On reprend les notations de 1.3.

Supposons que la restriction de $\widetilde{PsB}$ à $O(Q)$ soit scindée. Soit r une section de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $O(Q)$.

Considérons le sous-groupe H de $O(Q)$ formé des éléments id, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\xi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $(e_1, 0) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right) \in H(B)$. Alors, pour tout $\sigma \in H \setminus \{id\}$,

$$\sigma(e_1, 0) = (e_1, 1).$$

Comme $(\sigma, r(\sigma))$ est un élément de $\widetilde{PsB}$, on a :

$$r(\sigma)\rho((e_1, 0)) = \rho((e_1, 1))r(\sigma) = \psi(1)\rho((e_1, 0))r(\sigma).$$

De plus, $\sigma = \sigma'\sigma''$ avec $\{\sigma, \sigma', \sigma''\} = H \setminus \{id\}$ d'où

$$r(\sigma) = r(\sigma')r(\sigma'')$$

et

$$\begin{aligned} r(\sigma)\rho((e_1, 0)) &= r(\sigma')r(\sigma'')\rho((e_1, 0)) = \psi(1)r(\sigma')\rho((e_1, 0))r(\sigma') \\ &= \rho((e_1, 0))r(\sigma')r(\sigma'') = \rho((e_1, 0))r(\sigma). \end{aligned}$$

Comme ψ est le caractère non trivial de $\mathbb{F}_2$, on obtient une contradiction.
La restriction de $\widetilde{PsB}$ à $O(Q)$ n'est pas triviale.

Ceci termine la démonstration de la proposition.

§ 3. Groupes métaplectiques : cas global

Dans ce paragraphe, F désigne un corps global de caractéristique 2 c'est-à-dire que F est isomorphe à un corps $\mathbb{F}_q(T)$ où q est une puissance de 2 [16, Ch III].

Soit v une place de F. On note F_v la complétion de F en v et $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de F_v.

Soient $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et Ψ un caractère non trivial de $\mathbb{A}$, trivial sur F. En toute place v, Ψ induit un caractère non trivial ψ_v de F_v et, en presque toute place, ψ_v est trivial sur $\mathcal{O}_v$. On a

$$\Psi = \prod_v \psi_v \ .$$

3.1. Construction des groupes pseudosymplectique et métaplectique adéliques [15, § 29 et 37].

a. *Groupe de Heisenberg adélique $H_{\mathbb{A}}(B)$.*

Soit L un réseau de W. Pour toute place v de F, on considère le F_v- espace vectoriel $W_v = W \otimes_F F_v$ muni de la forme bilinéaire B_v, prolongement naturel de B à $W_v \times W_v$. Alors $L_v = L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v$ est un réseau de W_v et la restriction de B_v à $L_v \times L_v$ est à valeurs dans $\mathcal{O}_v$ pour presque toute place v. Par définition,

$$H_{\mathbb{A}}(B) = \{(h_v)_v \in \prod_v H(B_v) \mid h_v \in L_v \times F_v \text{ pour presque toute place } v\}.$$

On définit la représentation métaplectique $(\rho, \mathcal{S})$ de $H_{\mathbb{A}}$ à l'aide des représentations métaplectiques des groupes locaux. Soit $W = X \oplus Y$ une polarisation complète de W, $X_{\mathbb{A}}$ l'ensemble des $(x_v)_v$ dans $\prod_v X \otimes_F F_v$ tels que $x_v \in L_v$ pour presque toute place v. Soit Ψ_X un caractère de $X_{\mathbb{A}} \times \mathbb{A}$ prolongeant Ψ. En toute place v, Ψ_X induit un caractère $\psi_{X,v}$ de $X \otimes_F F_v \times F_v$ qui prolonge ψ_v.

A toute place v, on considère la représentation métaplectique de $H(B_v)$ relative au caractère $\psi_{X,v}$ que l'on note $(\rho_v, \mathcal{S}(Y \otimes_F F_v))$.

Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de $\otimes_v \mathcal{S}(Y \otimes_F F_v)$ engendré par les éléments de la forme $\otimes_v \phi_v$ où $\phi_v \in \mathcal{S}(Y \otimes_F F_v)$ pour toute place v et ϕ_v est la fonction caractéristique ϕ_v° de L_v pour presque toute place v. Alors :

$$\rho((h_v)_v)(\otimes_v \phi_v) = \otimes_v(\rho_v(h_v)\phi_v) \text{ où } (h_v)_v \in H_{\mathbb{A}}(B) \text{ et } \otimes_v \phi_v \in \mathcal{S}.$$

b. *Groupe pseudosymplectique adélique $Ps_{\mathbb{A}}B$ et groupe métaplectique $\widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B}$.*

Pour toute place v de F, soit K_v le stabilisateur de L_v dans PsB_v (Cf. § 2.2.b). Alors

$$Ps_{\mathbb{A}}B = \{(\sigma_v, f_v)_v \in \prod_v PsB_v \mid (\sigma_v, f_v) \in K_v \text{ pour presque toute place } v\}.$$

Remarques :

1. Pour presque toute place v, K_v est formé des éléments (σ_v, f_v) de PsB_v où σ_v stabilise L_v et f_v induit sur ce réseau une fonction à valeurs entières. La définition précédente coïncide donc avec celle d'A. Weil [15,§ 37].

2. Soient B et B' deux formes bilinéaires définissant Q. Les isomorphismes locaux entre les groupes pseudosymplectiques relatifs à B et B' induisent un isomorphisme entre $Ps_{\mathbb{A}}B$ et $Ps_{\mathbb{A}}B'$.

Le groupe $Ps_{\mathbb{A}}B$ agit sur $H_{\mathbb{A}}(B)$. Pour $s \in Ps_{\mathbb{A}}B$, la représentation $(\rho^s, \mathcal{S})$ de $H_{\mathbb{A}}(B)$ est isomorphe à $(\rho, \mathcal{S})$. On définit ainsi une représentation projective de $Ps_{\mathbb{A}}B$ et on construit l'extension métaplectique $\widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B}$ comme dans le cas fini ou local.

Pour presque toute place v, L_v est autodual et la restriction de $\psi \circ B_v$ à $L_v \times L_v$ est triviale. D'après les résultats obtenus au paragraphe 2.2.b, l'extension métaplectique $\widetilde{PsB_v}$ est scindée au-dessus de K_v. On note s_v la section définie au § 2.2.b. En identifiant $s_v(K_v)$ et K_v, on définit le produit restreint des $\widetilde{PsB_v}$ relativement aux K_v noté $\prod'_{K_v} \widetilde{PsB_v}$.

L'homomorphisme $p : \prod'_{K_v} \widetilde{PsB_v} \longrightarrow \widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B}$ est surjectif, de noyau $\{(\alpha_v)_v \in \prod_v \mathbb{C}^\times \mid \alpha_v = 1 \text{ pour presque toute place } v \text{ et } \prod_v \alpha_v = 1\}$.

LEMME. — *Soient B et B' deux formes bilinéaires telles que $B + B'$ soit alternée. Les extensions métaplectiques $\widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B}$ et $\widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B'}$ sont isomorphes.*

C'est une conséquence de l'étude locale (§ 2.1).

3.2. Restriction de l'extension métaplectique à PsB.

THÉORÈME. — *Il existe un homomorphisme $\beta : PsB \longrightarrow \widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B} \\ & {}^{\beta}\nearrow & \downarrow \\ PsB & \hookrightarrow & Ps_{\mathbb{A}}B \end{array}$$

Remarque : En caractéristique 2, le groupe PsB possède des caractères non triviaux (ils sont tous de la forme $\chi \circ pr$ où χ est un caractère de $O(Q)$ et pr la projection de PsB sur $O(Q)$). L'homomorphisme β n'est donc pas unique.

Démonstration : Quand Q est déployée, l'existence de β a été établie par A. Weil [15,§40].

Quand Q n'est plus nécessairement déployée, on considère W' la somme orthogonale de deux copies de W que l'on munit de la forme bilinéaire B' définie par :

$$B'((w_1, w_2), (w_1', w_2')) = B(w_1, w_1') + B(w_2, w_2').$$

La forme quadratique Q' définie par B' est déployée et PsB s'identifie à un sous-groupe de PsB'. Il existe donc une section Σ de PsB dans $\widetilde{Ps_{\mathbb{A}}}B'$. Soit $s \in PsB$ et $S' = \Sigma(s)$. Soit $(S_v')_v \in \prod'_{K_v'} \widetilde{PsB_v'}$ un relèvement de S' dans $\prod'_{K_v'} \widetilde{PsB_v'}$. D'après l'étude locale (§ 2.3), pour toute place v, S_v' définit un unique élément S_v de $\widetilde{PsB_v}$. Alors, $\prod_v S_v$ appartient à $\prod'_{K_v} \widetilde{PsB_v}$. Notons $\beta(s)$ sa projection sur $\widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B}$. Elle ne dépend pas du choix de $(S_v')_v$.

On définit donc une application β de PsB dans $\widetilde{Ps_{\mathbb{A}}B}$ par $s \mapsto \beta(s)$. En fait, β est un homomorphisme satisfaisant les conditions du théorème. $\square$

II. PAIRES DUALES RÉDUCTIVES DU GROUPE PSEUDOSYMPLECTIQUE

Désormais F désigne un corps fini ou local.

§ 1. Paires duales réductives de $O(Q)$

1.1. Généralités et classification

Soit (H, H') une paire duale de $O(Q)$.

DÉFINITIONS

1. La paire (H, H') est *réductive* si W est $HH'F$ absolument semi-simple. Si W n'est que $HH'F$-semi-simple, la paire (H, H') est dite *relativement réductive.*
2. La paire (H, H') est *irréductible* si l'action de HH' sur W ne laisse stable aucune décomposition en somme orthogonale de W.
3. La paire (H, H') est produit des paires duales (H_i, H_i'), $i = 1, 2$ si H (resp. H') s'identifie à $H_1 \times H_2$ (resp. $H_1' \times H_2'$) et qu'il existe une décomposition en somme orthogonale de W, $W = W_1 \oplus W_2$ telle que, pour $i = 1, 2$, (H_i, H_i') soit une paire duale de $O(Q_{|W_i})$.

Remarque : Comme W est de dimension finie sur F, W est $HH'F$ absolument semi-simple si et seulement si le centre du corps commutant de tout sous-module simple de W est une extension séparable de F [1, § 7 n° 5 prop. 7 et 6].

PROPRIÉTÉ. — *Toute paire duale réductive [resp. relativement réductive] est produit de paires duales réductives [resp. relativement réductives] et irréductibles.*

Démonstration [cf. 8, Ch. 1] :

Soit (H, H') une paire duale. Si elle n'est pas irréductible, il existe une décomposition en somme orthogonale de W, $W = W_1 \oplus W_2$, stable sous HH'.

i) Le groupe H (resp. H') s'identifie à un produit $H_1 \times H_2$ (resp. $H_1' \times H_2'$) où H_i (resp. H_i') est un sous-groupe de $O(Q_{|W_i})$.

En effet, posons $H_i = \{\sigma_{|W_i}, \sigma \in H\}$, $i = 1,2$ et considérons l'homomorphisme i de H dans $H_1 \times H_2$ défini par : $i(\sigma) = (\sigma_{|W_1}, \sigma_{|W_2})$, $\sigma \in H$. Il est injectif. De plus, si $(\sigma_1, \sigma_2) \in H_1 \times H_2$, l'élément σ de $O(Q)$ défini par

$$\sigma(w_1 + w_2) = \sigma_1(w_1) + \sigma_2(w_2), \quad w = w_1 + w_2 \in W, \; w_i \in W_i,$$

commute avec H', donc il appartient au bicommutant de H c'est-à-dire à H lui-même. Ainsi, i est un isomorphisme de H sur $H_1 \times H_2$.

De même, $H' \simeq H_1' \times H_2'$.

ii) LEMME. — *Soit G un groupe, G_1 et G_2 deux sous-groupes tels que $G_1 \times G_2 \subset G$. Soient $K = K_1 \times K_2$ et $K' = K_1' \times K_2'$ deux sous-groupes de G, K_i, $K_i' \subset G_i$. Si (K, K') est une paire duale de G alors (K_i, K_i') est une paire duale de G_i pour $i = 1,2$.*

Si, de plus, (K, K') est relativement réductive (resp. réductive), (K_i, K_i') l'est aussi.

Calculons le commutant de K_1 dans G_1. Soit k' un élément de ce commutant. On prolonge trivialement k' à $G_1 \times G_2$. Alors k' commute avec K dans G, i.e. $k' \in K'$. Donc k' appartient à K_1'. Le commutant de K_1 dans G_1, qui contient K_1', est donc contenu dans K_1'. Il est donc égal à K_1'.

On montre de même que le commutant de K_1' (resp. K_2, K_2') est K_1 (resp. K_2', K_2). La paire (K_i, K_i') est une paire duale de G_i.

La deuxième assertion du lemme est claire.

On déduit du lemme la propriété.

Ainsi, il suffit de déterminer les paires duales réductives et irréductibles.

Exemples de paires duales relativement réductives et irréductibles

1. Soit W_1 (resp. W_2) un F-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme alternée $<,>_1$ (resp. $<,>_2$) non dégénérée. Prenons $W' = W_1 \otimes_F W_2$ avec la forme quadratique Q' définie par :

$$Q'(w_1 \otimes w_2) = 0,$$

et le fait que la forme alternée associée soit

$$< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' > = < w_1, w_1' >_1 < w_2, w_2' >_2, \; w_i, w_i' \in W_i.$$

Nécessairement, $n = \frac{\dim W'}{2}$ est pair et $\nu = n$.

La paire (SpW_1, SpW_2) est duale, réductive et irréductible dans $O(Q')$.

2. Soit D une extension quadratique séparable de F ou un corps de quaternions sur F, muni de l'involution canonique.

Soit W_1 (resp. W_2) un D-espace vectoriel à droite (resp. à gauche), de dimension finie, muni d'une forme hermitienne $<,>_1$ (resp. $<,>_2$) non dégénérée telle que : $< w_1, w_1 >_1 \in F$ pour $w_1 \in W_1$ (resp. $< w_2, w_2 >_2 \in F$ pour $w_2 \in W_2$).

Prenons $W'' = W_1 \otimes_D W_2$ avec la forme quadratique Q'' définie par :

$$Q''(w_1 \otimes w_2) = < w_1, w_1 >_1 \cdot < w_2, w_2 >_2 \quad \text{pour} \quad w_i \in W_i$$

et la forme alternée associée à Q'' est :

$$< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' > = tr_{D|F}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2).$$

Alors, $(U(W_1), U(W_2))$ *est une paire duale réductive, irréductible de* $O(Q'')$.

3. Soit D un corps de centre F. Soit W''' un F-espace vectoriel muni d'une forme alternée $<,>$. Soit $W''' = X \oplus Y$ une polarisation complète de W'''. On définit la forme quadratique Q''' dont la forme alternée associée est $<,>$ par :

$$Q'''(x) = Q'''(y) = 0 \quad \text{pour tout } x \in X, \ y \in Y.$$

Pour toute décomposition de X en produit tensoriel, $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$, de D-espaces vectoriels X_1 et X_2, *les sous-groupes* GLX_1 *et* GLX_2 *définissent une paire duale relativement réductive, irréductible de* $O(Q''')$, *sauf si* $F = \mathbb{F}_2$, *et* $\dim_F X_i \leq 2$ *pour* $i = 1$ *ou* 2. *Cette paire est réductive.*

4. Soit E une extension séparable (resp. séparable ou inséparable) de F et $t : E \longrightarrow F$ un F-homomorphisme tel que la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto t(xy)$ soit non dégénérée. On suppose que W est aussi un E-espace vectoriel. Soit q une forme quadratique sur le E-espace vectoriel W telle que

$$t \circ q = Q.$$

*Les paires duales réductives (*resp. *relativement réductives) précédentes dans* $O(q)$ *sont des paires duales réductives (*resp. *relativement réductives) de* $O(Q)$.

5. *La paire duale triviale* $(\{id\}, O(Q))$.

PROPOSITION. — *Soit* (H, H') *une paire duale réductive (resp. relativement réductive) et irréductible de* $O(Q)$. *Alors,* (H, H') *est l'une des paires suivantes :*

1. *Avec les notations de l'exemple* 1, *si* W *est identifié à* W' *et que* Q *est égale à* Q', *la paire* (SpW_1, SpW_2).

2. *Avec les notations de l'exemple* 2, *si* W *est identifié à* W'' *et que* Q *est égale à* Q'', *la paire* $(U(W_1), U(W_2))$.

3. *Avec les notations de l'exemple* 3, *si* W *est identifié à* W''' *et que* Q *est égale à* Q''', *la paire* $(GL\ X_1, GL\ X_2)$ *sauf si* $F = \mathbb{F}_2$ *et* $\dim_F X_i \leq 2$, $i = 1$ *ou* 2.

4. *Les paires obtenues par restriction des scalaires comme dans l'exemple* 4.

5. *La paire duale triviale* $(O(Q), \{id\})$.

Dans la suite du paragraphe, nous établissons cette proposition. Ceci nous conduira à vérifier l'exactitude des exemples donnés précédemment.

La démonstration se déroule ainsi. Dans un premier temps, on détermine les paires duales irréductibles et relativement réductives. Pour ce faire, on montre d'abord deux lemmes (§ 1.2 et § 1.3) puis on différencie deux types de paires duales (H, H') :

1. celles dont l'action de $HH'F$ est irréductible (§ 1.4), dites de type hermitien (ou de type I).

2. celles dont l'action de $HH'F$ est réductible (§ 1.5), dites de type linéaire (ou de type II).

Dans un deuxième temps, on extrait de la liste obtenue les paires duales réductives.

On note $Z_G(H)$ le commutant de H dans G.

1.2 LEMME. — *Soit* V *un espace vectoriel sur* F *muni d'une forme bilinéaire* $(\,,\,)$ *ou d'une forme quadratique* q *et* $U(V)$ *son groupe d'isométries.*

1. *Si* (H, H') *est une paire duale de* $U(V)$ *et si* V *est* $HH'F$ *simple, alors il existe une décomposition de* V *en produit tensoriel*

$$V \simeq V_1 \otimes_D V_2$$

où V_1 (resp. V_2) *est un espace vectoriel à droite* (resp. *à gauche*) *sur un corps* D *contenant* F *dans son centre, telle que* $H = \mathrm{End}_D V_1 \cap U(V)$ *et* $H' = \mathrm{End}_D V_2 \cap U(V)$.

2. *Si, en outre, la forme bilinéaire* $(\,,\,)$ *est non dégénérée,* D *est muni d'une involution* τ *et les espaces vectoriels* V_1 *et* V_2 *possèdent une structure hermitienne déterminée à similitude près par celle de* V.

Démonstration [8, Ch. 1] :

Par hypothèse, V est $HH'F$-simple. Comme H et H' commutent, V est $H'F$-semi-simple et isotypique : $V = mV'$ où V' est $H'F$-simple.

Par conséquent, la sous-algèbre $B = \mathrm{End}_{H'F} V$ de $\mathrm{End}_F V$ est simple.

Par le théorème du bicommutant [12,Ch.8, cor.4.8], B est égale au commutant de $B' = \mathrm{End}_{BF} V$. D'où $B = \mathrm{End}_{B'F} V = \mathrm{End}_{H'F} V$. De même, $B' = \mathrm{End}_{BF} V = \mathrm{End}_{HF} V$.

Les algèbres B et B' agissent semi-simplement sur V donc (B, B') est une paire duale réductive de $\mathrm{End}_F V$ [8, ch. 1 § 18]. Elle est irréductible car B et B' contiennent respectivement H et H' et (H, H') est nécessairement irréductible.

Ainsi, la paire duale (B, B') correspond à une décomposition en produit tensoriel de V : $V \simeq V_1 \otimes_D V_2$ où $D = \mathrm{End}_{H'F} V'$ est un corps contenant F dans son centre. De plus, $B = \mathrm{End}_D V_1$ et $B' = \mathrm{End}_D V_2$.

Montrons que $H = \mathrm{End}_D V_1 \cap U(V)$. Le groupe H est contenu dans B et $U(V)$ donc

$$H \subset \mathrm{End}_D V_1 \cap U(V).$$

De plus, $B \cap U(V)$ est un sous-groupe de $U(V)$ qui commute avec H'. Donc

$$B \cap U(V) \subset Z_{U(V)} H' = H$$

d'où l'égalité voulue. On montre de même que $H' = \mathrm{End}_D V_2 \cap U(V)$. La première partie du lemme est donc démontrée.

On suppose désormais que $(,)$ est non dégénérée. Alors $(,)$ définit une involution ι sur $\mathrm{End}_F V$ qui laisse stable H et H'. Comme B et B' sont les commutants de H' et H respectivement dans $\mathrm{End}_F V$, $B = \mathrm{End}_D V_1$ et $B' = \mathrm{End}_D V_2$ sont stables sous ι. Il s'en suit que D est muni d'une involution τ [12, Ch. 8, cor. 8.3] et que les espaces V_i possèdent une structure hermitienne, définie à similitude près par celle de V [12, Ch. 8 § 7]. Ceci termine la démonstration du lemme.

1.3. Un lemme géométrique

Soit D un corps contenant F dans son centre et muni d'une involution τ. On suppose, en outre, que D est de dimension finie sur son centre. Soit V un espace vectoriel à droite sur D muni d'une forme hermitienne *tracique* (i.e. ses valeurs sur les couples (v, v), v parcourant V, appartiennent à $\{d+\tau(d), d \in D\}$) ou d'une forme alternée ou encore d'une forme quadratique q non dégénérée et non défective. Dans les deux derniers cas, τ est triviale.

On note $U(V)$ son groupe d'isométries.

LEMME. — *Le commutant de $U(V)$ dans* $\mathrm{End}_F V$ *est isomorphe à* $\mathbb{F}_2[X]/X^2$ *si V est orthogonal hyperbolique de dimension* 2 *sur* $\mathbb{F}_2$ *et est isomorphe à D sinon.*

Démonstration :

1° On rappelle [3,Ch.I,§ 12] qu'une *quasi-symétrie de vecteur a*, non isotrope, est une isométrie de V qui laisse invariant point par point l'orthogonal de a et laisse globalement invariante la droite engendrée par a. Le rapport α d'une quasi-symétrie vérifie : $\alpha \cdot \tau(\alpha) = 1$.

Une *transvection* est une isométrie de V de la forme :

$$\text{pour tout } v \in V,\ v \longmapsto v + a \cdot \alpha < a, v >,\ \alpha \in D \text{ tel que } \tau(\alpha) = \alpha$$

(a nécessairement isotrope. Dans le cas orthogonal, a est non singulier et $\alpha = q(a)^{-1}$).

Un élément σ de $Z_{\mathrm{End}_F V}(U(V))$ commute avec toutes les quasi-symétries et toutes les transvections de $U(V)$.

2° Supposons V non orthogonal; alors σ laisse stables toutes les droites de V.

Par conséquent, si $\dim_D V \geq 2$, il existe $\alpha \in D$ tel que

$$\sigma v = v\alpha \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc, σ est une homothétie, et $Z_{\mathrm{End}_F V}(U(V)) \simeq D$.

Si $\dim_D V = 1$, alors V s'identifie à D et la forme (,) est donnée par :

$$\forall d_1, d_2 \in D,\ (d_1, d_2) = \tau(d_1) a d_2 \quad \text{où } a \in \{d + \tau(d), d \in D\}.$$

Comme D est de dimension finie sur son centre F', D est commutatif ou un corps de quaternions : a est un élément de F' et $U(V)$ s'identifie à $D^1 = \{d \in D | \tau(d)d = 1\}$.

Soit E le sous-corps engendré par D^1 et F. Pour que D soit le commutant de $U(V)$ dans $\mathrm{End}_F V$, il faut et il suffit que $E = D$ [8, p. 20].

Le corps D est un E-espace vectoriel.

Si D est commutatif, montrons que $\dim_E D = 1$ [14]. Pour tout $d \in D$, $d^{-1}\tau(d)$ est un élément de D^1 donc de E. Il existe donc $k \in E$ tel que $\tau(d) = dk$. Si $\dim_E D \geq 2$, alors k est indépendant de d. En prenant, $d = 1$, on trouve $k = 1$ d'où $\tau = id$ ce qui est exclu. Par conséquent, $\dim_E D = 1$ i.e. $D = E$.

Si D est un corps de quaternions et si $(1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une base standard de D sur F' [12, p. 314], on considère les sous-corps commutatifs $K_i = F'(\xi_i)$,

$i = 1, 2, 3$. Alors E contient les sous-corps E_i de D engendrés respectivement par $\{d \in K_i | \tau(d)d = 1\}$ et F. Comme K_i est commutatif, $K_i = E_i$ et $E \supset \bigcup_i K_i$. D'où $E \supset D$ et, par suite, $E = D$.

Dans ce cas, $Z_{\mathrm{End}_F W}(U(W)) \simeq D$.

3° Supposons V orthogonal; alors D est commutatif. On note $\nu(q)$ l'indice de q.

Un élément σ de $Z_{\mathrm{End}_F V}(O(q))$ commute avec toutes les transvections orthogonales et laisse donc invariantes toutes les droites régulières. Si V_1 est un D-espace vectoriel sans éléments singuliers non nuls, alors $\sigma_{|V_1}$ est une homothétie : $\sigma_{|V_1} = \alpha id_{V_1}$, $\alpha \in D$.

- Donc si $\nu(q) = 0$, $\sigma \in Did$ et $Z_{\mathrm{End}_F V}(O(q)) \simeq D$.
- Supposons $0 < \nu(q) < n$ et décomposons V en $V = H \oplus H^\perp$ où H est hyperbolique de dimension maximale $2\nu(q)$.

Comme $H^\perp$ est alors sans éléments singuliers, $\sigma_{|H^\perp}$ est une homothétie. Soit $z \in H^\perp \setminus \{0\}$. Pour tout $h \in H$ singulier, $q(z+h) = q(z) \neq 0$. Il existe donc $\lambda_h \in D^\times$ tel que $\sigma(z+h) = (z+h)\lambda_h$ et par le théorème de Witt [3,p.36], il existe $u \in O(q)$ tel que $u(z+h) = z$.

Les endomorphismes σ et u commutent donc : pour tout $h \in H$ singulier,

$$\begin{aligned} u\sigma(z+h) &= \sigma u(z+h) &&= \sigma z \\ &= u(z+h)\lambda_h &&= z\lambda_h. \end{aligned}$$

Donc, $\lambda_h = \lambda$ ne dépend pas de h et $\sigma(h) = h\lambda$ pour tout $h \in H$ singulier. Comme tout élément de H est somme d'éléments singuliers, $\sigma_{|H}$ est λid_H et $\sigma_{|H^\perp} = \lambda id_{H^\perp}$. Ainsi, σ est une homothétie.

$$Z_{\mathrm{End}_F V}(O(q)) \simeq D.$$

Supposons désormais $\nu(q) = n$.

- Si $n > 1$ et $D \neq \mathbb{F}_2$, soit $\{e_i, e_{-i}; i = 1, \ldots, n\}$ une base hyperbolique. Le vecteur $e_1 + e_{-1}$ est non singulier donc : $\sigma(e_1 + e_{-1}) = (e_1 + e_{-1})\lambda$, $\lambda \in D$. Soit z un vecteur non singulier dans l'orthogonal H de e_1 et e_{-1} tel que $q(z) \neq 1$.

Alors $e_1 + e_{-1} + z$ est non singulier : il existe $\lambda_z \in D$ tel que

$$\sigma(e_1 + e_{-1} + z) = (e_1 + e_{-1})\lambda_z + z\lambda_z$$

ce qui équivaut à

$$(e_1 + e_{-1})\lambda + \sigma z = (e_1 + e_{-1})\lambda_z + z\lambda_z$$

d'où
$$\lambda = \lambda_z \text{ et } \sigma z = z\lambda.$$
Si $z \in H$ est singulier, z s'écrit comme somme de deux éléments de H non singuliers : $z = z_1 + z_2$ tels que $q(z_i) \neq 1$, $i = 1, 2$.

D'après, ce qui précède, $\sigma z = z\lambda$.

Ainsi, σ restreint à l'orthogonal de e_1 et e_{-1} est une homothétie. Par le même raisonnement à partir de e_2 et e_{-2}, on conclut que $\sigma \in Did$.

- Si $n > 1$ et $D = \mathbb{F}_2$, il suffit de montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{F}_2$ tel que pour tout i, $\sigma e_i = e_i\lambda$.

Pour $i > 1$, on considère les vecteurs non singuliers $e_1 + e_{-1}$, $e_1 + e_{-1} + e_i$ et $e_1 + e_{-1} + e_{-i}$. Il existe λ, λ_i et λ_{-i} tels que

$$\begin{aligned}
\sigma(e_1 + e_{-1}) &= (e_1 + e_{-1})\lambda \\
\sigma(e_1 + e_{-1} + e_i) &= (e_1 + e_{-1})\lambda_i + e_i\lambda_i \\
\sigma(e_1 + e_{-1} + e_{-i}) &= (e_1 + e_{-1})\lambda_{-i} + e_{-i}\lambda_{-i}
\end{aligned}$$

d'où $\sigma(e_i + e_{-i}) = (e_i + e_{-i})(\lambda_i + \lambda_{-i}) + e_i\lambda_i + e_{-i}\lambda_{-i}$.

Or $\sigma(e_i + e_{-i})$ est colinéaire à $e_i + e_{-i}$ donc $\lambda_i = \lambda_{-i}$.

De plus, il existe $u \in O(q)$ tel que $u(e_i + e_{-i}) = e_1 + e_{-1}$. D'où $\lambda_i = \lambda$. En faisant de même avec e_2 et e_{-2}, on obtient : $\sigma \in Did$.

Il reste le cas où $n = 1 = \nu(q)$.

- Si $D = \mathbb{F}_2$, un simple calcul montre que

$$Z_{\mathrm{End}_F V}(O(q)) = \left\{0, id, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

et cet anneau est isomorphe à $\mathbb{F}_2[X]/X^2$.

Si $D \neq \mathbb{F}_2$. Soit (e, f) une base hyperbolique de V.

Soient z_1 et z_2 tels que $q(z_1) = q(z_2) = \alpha \neq 0$. Comme z_1 et z_2 sont réguliers, il existe μ_1, $\mu_2 \in D$, tels que $\sigma z_1 = z_1\mu_1$, $\sigma z_2 = z_2\mu_2$. Par le théorème de Witt, il existe $u \in O(q)$ tel que $uz_1 = z_2$. D'où

$$z_2\mu_2 = \sigma z_2 = u\sigma z_1 = z_2\mu_1$$

et par suite
$$\mu_2 = \mu_1.$$

Pour tout α, il existe $\mu_\alpha \in D$ tel que, pour tout $z \in V$, tel que $q(z) = \alpha$, $\sigma z = z\mu_\alpha$.

- Si $D = \mathbb{F}_4$ et que $\alpha \notin \mathbb{F}_2$, $q(e\alpha + f(1+\alpha)) = 1$. D'où

$$\sigma(e\alpha + f(1+\alpha)) = (e\alpha + f(1+\alpha))\mu_1$$

ce qui équivaut à

$$\sigma(e+f)\alpha + \sigma(f) = (e+f)\mu_1\alpha + f\mu_1$$

d'où $\sigma(f) = f\mu_1$ et, par suite, $\sigma(e) = e\mu_1$. D'où $\sigma = \mu_1 id$.

- Sinon, soit $\alpha \in D^\times$. Il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in D^\times$ tel que

$$\begin{cases} \alpha_i \neq 0 \quad \text{et} \quad 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 1 \neq 0 \\ \alpha_1(\alpha_2 + 1) = \alpha \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\sigma(e+f) = \sigma(e\alpha_1 + f(1+\alpha_2)) + \sigma(e(\alpha_1+1) + f\alpha_2) \\ &\Longleftrightarrow (e+f)\mu_1 = (e\alpha_1 + (1+\alpha_2))\mu_\alpha + (e(\alpha_1+1) + f\alpha_2)\mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2} \\ &\Longleftrightarrow \mu_1 = \mu_\alpha\alpha_1 + \mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2}(\alpha_1+1) = \mu_\alpha(1+\alpha_2) + \mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2}\alpha_2 \end{aligned}$$

d'où $\mu_1 = \mu_\alpha$.

Donc, pour tout élément z régulier, $\sigma z = \mu_1 z$. On en déduit que σ est $\mu_1 id$.

Ainsi s'achève la démonstration du lemme.

Remarque : L'hypothèse sur la dimension de D sur F' n'intervient que dans le calcul du commutant du groupe unitaire sur un espace vectoriel de dimension 1.

1.4. Paires duales relativement réductives irréductibles de type hermitien.

Dans ce paragraphe, W est $HH'F$-simple.

D'après le lemme 1.2, il existe une décomposition en produit tensoriel de W,

$$W \simeq W_1 \otimes_D W_2$$

où D est un corps muni d'une involution τ, W_i est un D-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne $<,>_i$, telle que $H = \mathrm{End}_D W_1 \cap O(Q)$ et $H' = \mathrm{End}_D W_2 \cap O(Q)$. Grâce à la classification des involutions [8, Ch. 1], on identifie (D, τ). Cela peut être :

$\underline{a}$ F et l'involution triviale,
$\underline{b}$ une extension quadratique séparable F' de F et l'involution définie par l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F'/F)$,
$\underline{c}$ un corps de quaternions sur F et une involution,
$\underline{d}$ un des trois cas précédents où F est remplacée par une extension finie E de F.

Dans les cas $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, la trace réduite $tr_{D|F}$ de D sur F définit une forme bilinéaire non dégénérée par : $(d, d') \longmapsto tr_{D|F}(dd')$.

Dans le cas $\underline{d}$, on considère $t \in \mathrm{Hom}_F(E, F) \setminus \{0\}$ et la trace réduite $tr_{D|E}$ de D sur E. Alors $t \circ tr_{D|E}$ définit une forme bilinéaire non dégénérée comme précédemment.

On note $t_{D|F}$ l'homomorphisme $tr_{D|F}$ ou $t \circ tr_{D|E}$ selon les cas.

i) On définit alors une forme bilinéaire $\ll, \gg$ sur $W_1 \otimes_D W_2$ par :

$$\ll w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' \gg = t_{D|F}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2), \ \ w_i, w_i' \in W_i.$$

Les formes bilinéaires $<, >$ et $\ll, \gg$ définissent des involutions sur $\mathrm{End}_F W$. Par le théorème de Skolem-Nœther [12, Ch. 8, th. 4.2], ces dernières diffèrent d'un automorphisme intérieur. De plus, elles coïncident sur $\mathrm{End}_D W_1$ et $\mathrm{End}_D W_2$. Nécessairement cet automorphisme intérieur est défini par un élément du centre de D. Quitte à modifier les formes $<, >_i$ par un élément du centre de D, on peut supposer que la forme alternée $<, >$ est égale à $\ll, \gg$. Les formes hermitiennes $<, >_i$ sont nécessairement non dégénérées comme $<, >$. De plus, $H = \mathrm{End}_D W_1 \cap O(Q) = U(W_1) \cap O(Q)$ et $H' = U(W_2) \cap O(Q)$.

ii) *Identification de* $<, >_1$ et $<, >_2$

On étudie chaque cas séparément :

- *Cas* $\underline{a}$. Comme $<, >$ est alternée, il en va de même d'une des formes $<, >_i$. Par exemple, $<, >_1$ est alternée. Alors, $<, >_2$ est symétrique.

Soit $V = \{v \in W_2, < v, v >_2 = 0\}$. Le sous-espace vectoriel $W_1 \otimes_F V$ est un sous-espace vectoriel de W $HH'F$-stable. Donc, $W_1 \otimes_F V$ est 0 ou W.

Si $W_1 \otimes_F V = 0$ i.e. $V = 0$, alors $U(W_2)$ est réduit à $\{id\}$ (car $u(w_2) + w_2 \in V$ pour tout $w_2 \in W_2$ et tout $u \in U(W_2)$) d'où $H' = \{id\}$. On n'obtient pas de paire duale non triviale.

Si $W_1 \otimes_F V = W$ i.e. $V = W_2$, $<, >_2$ est alternée.

Dans ce cas, les formes $<, >_i$ sont alternées.

- *Cas* $\underline{b}$. Toute forme hermitienne $<, >_i$ définie sur W_i est tracique. La forme $(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') \longmapsto tr_{F'/F}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2)$ est donc alternée. Aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire.

- *Cas* $\underline{c}$. Ramenons-nous au cas où τ est l'involution canonique τ_0 de D. Par le théorème de Skolem-Nœther, il existe un élément d de D tel que, pour tout x dans D, $\tau(x) = d\tau_0(x)d^{-1}$. Alors

$$\ll w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' \gg = t_{D|F}(d^{-1} < w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2 d), \ w_i, w_i' \in W_i.$$

Or $d^{-1} <,>_1$ (resp. $<,>_2 d$) est une forme hermitienne (relativement à l'involution canonique) sur W_1 (resp. W_2) et son groupe d'isométries est toujours $U(W_1)$ (resp. $U(W_2)$).

On peut donc supposer que τ est l'involution canonique.

Considérons le sous-espace vectoriel V_1 de W_1 formé des vecteurs w_1 de W_1 tels que $< w_1, w_1 >_1$ soit une trace de D (i.e. $< w_1, w_1 >_1 \in F$). Alors $V_1 \otimes_F W_2$ est $HH'F$-stable : $V_1 \otimes_F W_2$ est donc $\{0\}$ ou W.

Dans le premier cas, $U(W_1)$ est réduit à l'identité [4,§ 3] : on n'obtient pas de paire duale non triviale.

On s'intéresse donc au deuxième cas c'est-à-dire le cas où $<,>_1$ est tracique. Pour des raisons analogues, seul le cas où $<,>_2$ est tracique peut fournir une paire duale non triviale.

Quand $<,>_1$ et $<,>_2$ sont traciques, on vérifie comme précédemment, que la forme $<,>$ est bien alternée.

Les formes hermitiennes $<,>_i$ sont donc traciques.

- *Cas d.* On a alors

$$< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' > = t \circ tr_{D|E}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2).$$

Prouvons qu'elle est alternée si et seulement si

$$(,) : (w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') \longmapsto tr_{D|E}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2)$$

est alternée.

Il suffit de montrer que si $(,)$ est une forme bilinéaire HH'-invariante sur le E-espace vectoriel W telle que $t \circ (,)$ soit alternée, alors $(,)$ est alternée.

La forme $(,)$ est symétrique sinon il existerait deux vecteurs w et w' de $W_1 \otimes_D W_2$ tels que $(w, w') - (w', w) \in \operatorname{Ker} t \setminus \{0\}$ et $E = \{(\lambda w, w') - (w', \lambda w), \lambda \in E\}$ serait contenu dans $\operatorname{Ker} t$ i.e. t serait nul. Soit V le sous-E-espace vectoriel de W formé des vecteurs v tels que $(v, v) = 0$. Ce sous-espace est stable sous HH'. L'hypothèse sur l'action de $HH'F$ sur W implique que V est $\{0\}$ ou W.

Si $V = \{0\}$, le groupe des isométries de $(,)$ est réduit à l'identité car, pour tout élément σ de ce groupe et tout vecteur w de W, $\sigma w + w$ appartient à V. Par conséquent, $H = H' = \{id\}$: ceci ne convient pas.

Donc $V = W$ c'est-à-dire que $(,)$ est alternée.

On obtient les mêmes résultats que précédemment.

iii) *Identification de H et H'.*

LEMME. — *Il existe une unique forme quadratique q dont la forme alternée est $<,>$ et telle que $U(W_i) \subset O(q)$ pour $i = 1$ ou 2.*

Démonstration : – Existence de q.

On détermine une forme quadratique q vérifiant les hypothèses voulues dans les cas $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Comme q est "associée" à $<,>$, il suffit de la déterminer sur les $w_1 \otimes w_2$, $w_1 \otimes w_2 \in W_1 \otimes_D W_2$.

Cas $\underline{a}$: $q(w_1 \otimes w_2) = 0$ pour tout $w_1 \otimes w_2 \in W$

Cas $\underline{b}$ et $\underline{c}$: $q(w_1 \otimes w_2) =< w_1, w_1 >_1< w_2, w_2 >_2$

Cas $\underline{d}$: $q(w_1 \otimes w_2) = t \circ q'(w_1 \otimes w_2)$ où q' est l'une des formes quadratiques précédentes sur E.

Vérifions que $U(W_i) \subset O(q)$. Il est clair que $U(W_i)$ est formé d'isométries de $<,>$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $u \in U(W_i)$, $w_1 \otimes w_2 \in W$,

$$q(u(w_1 \otimes w_2)) = q(w_1 \otimes w_2).$$

Les trois premiers cas sont clairs. Le dernier est une conséquence des précédents.

La forme quadratique q existe donc.

– Unicité de q.

Soit q' une autre forme quadratique sur W ayant les mêmes propriétés que q. Alors $U(W_i)$ est contenu dans $O(q) \cap O(q')$, donc dans $O(q+q')$. Or, $q+q'$ est additive et définit une forme semi-linéaire de V dans F. Si $q+q'$ est non nulle, son noyau $\mathrm{Ker}(q+q')$ est un sous-espace vectoriel de V stable sous $O(q+q')$ donc sous HH'. Puisque (H, H') est de type hermitien, $\mathrm{Ker}(q+q')$ est nul. Alors $O(q+q')$ est $\{id\}$ (car, pour tout $\sigma \in O(q+q')$, pour tout $v \in V$, $\sigma v + v \in \mathrm{Ker}(q+q')$). D'où $H = H' = \{id\}$ ce qui est impossible. La forme quadratique $q+q'$ est donc nulle.

La forme q est donc unique et le lemme est démontré.

On en déduit :

LEMME. — *Si (H, H') est une paire duale de type hermitien de $O(Q)$, alors Q est la forme quadratique du lemme précédent. Par conséquent, $H = U(W_1)$ et $H' = U(W_2)$.*

La démonstration est analogue à la précédente où Q remplace q' : en effet, H et H' sont contenus dans $O(Q)$ et $O(q)$ donc dans $O(Q+q)$.

La deuxième assertion est immédiate d'après i).

Ainsi, les paires duales relativement réductives de type hermitien sont parmi les paires :

<u>a</u> (SpW_1, SpW_2) où W_i est un F-espace vectoriel muni d'une forme alternée $<,>_i$ non dégénérée;

<u>b</u> $(U(W_1), U(W_2))$ où W_i est un F'-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne $<,>_i$ non dégénérée et F' une extension quadratique séparable de F muni de l'involution $\tau \in \mathrm{Gal}(F'/F) \setminus \{id\}$;

<u>c</u> $(U(W_1), U(W_2))$ où W_i est un D-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne tracique $<,>_i$ non dégénérée, et D est un corps de quaternions sur F muni de l'involution canonique;

<u>d</u> l'une des trois précédentes où F est remplacé par E, extension finie de F, à condition que $W_1 \otimes W_2 \simeq W$ et la forme quadratique associée aux formes $<,>_i$ soit Q.

Il reste à s'assurer que ce sont bien des paires duales relativement réductives. On considère la sous-algèbre A de $\mathrm{End}_F W$ engendrée par $U(W_1)$. Dans les trois premiers cas, A est contenue dans $\mathrm{End}_F W_1$ et son commutant dans $\mathrm{End}_F W_1$ est D par le lemme 1.3.

Dans le dernier cas, A est contenue dans $\mathrm{End}_E W_1$ et son commutant dans $\mathrm{End}_E W_1$ est encore D par le lemme 1.3.

Par le théorème du bicommutant, $A = \mathrm{End}_D W_1$. D'où

$$Z_{\mathrm{End}_F W}(A) = \mathrm{End}_D W_2$$

$$\text{et} \quad Z_{O(Q)}(U(W_1)) = \mathrm{End}_D W_2 \cap O(Q) = U(W_2).$$

De même, le commutant de $U(W_2)$ est $U(W_1)$. On obtient bien des paires duales relativement réductives.

1.5. Paires duales relativement réductives de type linéaire.

On suppose maintenant que W n'est pas $HH'F$-simple.

Par hypothèse, il existe un sous-espace vectoriel propre V de W $HH'F$-stable. Comme (H, H') est une paire irréductible, V est nécessairement isotrope. Posons $X = V \cap V^\perp$. Alors X est stable sous HH' et est totalement isotrope. De même, $X^\perp$ est stable sous HH'. Soit Y un supplémentaire de $X^\perp$ dans W stable sous HH'. Alors $X \oplus Y$ est stable sous HH', et est non isotrope. L'espace vectoriel W se décompose en $(X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y)^\perp$, qui est stable sous HH'. Comme (H, H') est irréductible, $(X \oplus Y)^\perp$ est nul. D'où $W = X \oplus Y$ et $\dim X = \dim Y = n$. Montrons que Y est totalement isotrope.

Le sous-espace Y est nécessairement isotrope sinon $W = Y \oplus Y^\perp$ et $Y, Y^\perp$ sont $HH'F$-stables et (H, H') ne serait pas irréductible.

Alors $Y \cap Y^\perp$ est un sous-espace vectoriel non nul, totalement isotrope et invariant sous HH'. En remplaçant X par $Y \cap Y^\perp$ dans le raisonnement précédent, on montre que $\dim Y \cap Y^\perp = n = \dim Y$ d'où $Y = Y^\perp$.

Il existe donc une polarisation complète de $(W, <, >)$ stable sous HH'. Les groupes H et H' s'identifient à des sous-groupes de GLX. L'irréductibilité de (H, H') exige que X ne possède pas de sous-espace vectoriel propre stable sous HH'. En particulier, $X' = \{x \in X, Q(x) = 0\}$ étant un sous-espace vectoriel stable sous HH', est $\{0\}$ ou X.

Si $X' = \{0\}$, un élément u de HH' est trivial sur X (car $u(x) - x \in X$ est singulier) donc aussi sur Y : $H = H' = \{id\}$. Ce n'est pas une paire duale.

Si $X' = X$, Q est déployée et (H, H') s'identifie à une paire duale irréductible de GLX. D'après le lemme 1.2, il existe une décomposition de X en produit tensoriel

$$X \simeq X_1 \otimes_D X_2$$

où X_i est un D-espace vectoriel et D un corps contenant F dans son centre, telle que

$$H = \mathrm{End}_D X_1 \cap GL_D X = GL_D X_1 \quad \text{et} \quad H' = \mathrm{End}_D X_2 \cap GLX = GL_D X_2.$$

Réciproquement, nous supposons que Q est déployée et que $H = GL_D X_1$, $H' = GL_D X_2$ pour une décomposition en produit tensoriel d'un sous-espace vectoriel singulier X, de dimension maximale.

Déterminons le commutant $Z_{O(Q)}(H)$ de H dans $O(Q)$.

LEMME. — *Avec les notations précédentes, le commutant de H est :*

$$\begin{cases} O(Q) & si \quad F = \mathbb{F}_2 \quad et \quad \dim_F X_1 = 1 \\ Sp_D(X_2 + X_2^*) & si \quad F = \mathbb{F}_2 \quad et \quad \dim_F X_1 = 2 \\ GL_D(X_2) & sinon. \end{cases}$$

Démonstration : L'action de H sur W définit une représentation semi-simple de H dans W. On a

$$W \simeq m_2 X_1 \oplus m_2 X_1^*$$

où X_1 est la représentation naturelle de $GL_D X_1$ dans X_1, X_1^* sa contragrédiente et $m_2 = \dim_D X_2$.

Un élément g de $Z_{O(Q)}(H)$ est un isomorphisme de cette représentation dans elle-même.

Si X_1 et X_1^* ne sont pas isomorphes, g laisse stable les composantes $m_2 X_1$ et $m_2 X_1^*$. L'élément g est donc un élément de $GLX \subset O(Q)$. D'où

$$Z_{O(Q)}(H) = Z_{GLX}(H) = H'.$$

Si X_1 et X_1^* sont isomorphes et si τ est un isomorphisme entre X_1 et X_1^* alors, pour tout $\lambda \in F^\times$, on a

$$\tau \circ \lambda id = \lambda^{-1} id \circ \tau.$$

Donc tout élément de $F^\times$ est de carré 1. Le corps F est nécessairement $\mathbb{F}_2$.

On suppose donc $F = \mathbb{F}_2$ et on pose

$$m_1 = \dim_D X_1, \quad d = [D : \mathbb{F}_2] \quad \text{et} \quad K = \mathbb{F}_{2^{dm_1}}^\times.$$

Le groupe K s'injecte dans $GL_D X_1 \simeq GL(m_1, \mathbb{F}_{2^d})$. Les restrictions de X_1 et X_1^* à K sont encore isomorphes. Soit $\overline{\mathbb{F}}_2$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_2$.

Comme X_1 est isomorphe à X_1^*, $X_1 \otimes_{\mathbb{F}_2} \overline{\mathbb{F}}_2$ est isomorphe à $X_1^* \otimes_{\mathbb{F}_2} \overline{\mathbb{F}}_2$. Maintenant, $X_1 \otimes_{\mathbb{F}_2} \overline{\mathbb{F}}_2$ est une somme de caractères σ de K et X_1^* est nécessairement la somme des σ^{-1}. Il existe donc un entier r, $0 \leq r < m_1 d$ tel que, pour tout $x \in K$, $x^{2^r+1} = 1$, c'est-à-dire que $2^{m_1 d} - 1$ divise $2^r + 1$. On en déduit que $m_1 d = 1$ ou 2, i.e. $D = \mathbb{F}_2$ et $\dim_{\mathbb{F}_2} X_1 = 1$ ou 2 ou bien $D = \mathbb{F}_4$ et $\dim_{\mathbb{F}_2} X_1 = 2$.

Etudions donc ces trois cas :

- Quand $D = \mathbb{F}_2$ et $\dim_{\mathbb{F}_2} X_1 = 1$, H est $\{id\}$ d'où $H' = O(Q)$.
- Quand $D = \mathbb{F}_2$ et $\dim_{\mathbb{F}_2} X_1 = 2$, X_1 et X_1^* sont isomorphes et W s'identifie, comme H-module à

$$W \simeq X_1 \otimes_{\mathbb{F}_2} (X_2 \oplus X_2^*)$$

L'espace vectoriel $X_2 \oplus X_2^*$ est muni d'une forme alternée et $H = GL(2, \mathbb{F}_2) = Sp(2, \mathbb{F}_2)$. Le commutant de H dans $O(Q)$ est donc $Sp(X_2 \oplus X_2^*)$ d'après l'étude du paragraphe précédent.

- Quand $D = \mathbb{F}_4$ et $\dim_{\mathbb{F}_2} X_1 = 2$, on considère un espace vectoriel V sur $\mathbb{F}_4$ de dimension 2, muni de la forme quadratique q, non dégénérée, non défective d'indice 1. En choisissant une base hyperbolique (e, f) de V, on identifie H au sous-groupe de $O(q)$ formé des $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{F}_4^\times$. Or $O(q)$ est $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{F}_4^\times \right\}$ donc $H \simeq O^+(q)$.

Le commutant de H contient donc $Sp_{\mathbb{F}_4}(X_2 \oplus X_2^*)$.

Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_{m_2})$ une base de X_2 sur $\mathbb{F}_4$ et $(e_{-1}, \ldots, e_{-m_2})$ la base duale dans X_2^*.

On considère la base hyperbolique $(e_i, \xi e_i, \xi e_{-i}, e_{-i})$ de W sur $\mathbb{F}_2$.

Soit $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note A_α (resp. $A_{\alpha^{-1}} = A_\alpha^{-1}$) la matrice $2m_2 \times 2m_2$, diagonale par blocs dont les m_2 blocs sont égaux à α (resp. α^{-1}).

En tant que sous-groupe de $O(Q)$, $\mathbb{F}_4^\times$ s'identifie à

$$\left\{id, \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A_\alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{\alpha^{-1}} & 0 \\ 0 & A_{\alpha^{-1}}^{-1} \end{pmatrix}\right\}.$$

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $O(Q)$ qui commute avec $\mathbb{F}_4^\times$. Alors

$$ad^* + cb^* = id \tag{11}$$

et

$$\begin{cases} A_\alpha a = aA_\alpha & {}^tA_\alpha^{-1}c = cA_\alpha \\ A_\alpha b = b^tA_\alpha^{-1} & {}^tA_\alpha^{-1}d = d^tA_\alpha^{-1} \end{cases} \tag{12}$$

En décomposant a, b, c et d en blocs 2×2 : $a = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$, $c = (c_{ij})$, $d = (d_{ij})$, (12) équivaut à : pour tout (i,j)

1) a_{ij} et d_{ij} appartiennent à $\{0, id, \alpha, \alpha^{-1}\}$,

2) b_{ij} et c_{ij} appartiennent à $\left\{0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ainsi, pour tout (i,j), a_{ij} est une application $\mathbb{F}_2$-linéaire de $\mathbb{F}_4 e_j$ dans $\mathbb{F}_4 e_i$ telle que $a_{ij}(e_j) = 0$ ou e_i ou ξe_i ou $\overline{\xi} e_i$ et $a_{ij}(\xi e_j) = 0$ ou ξe_i ou $\overline{\xi} e_i$ ou e_i respectivement. Donc a_{ij} est la multiplication par un élément de $\mathbb{F}_4$.

De même, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} sont des multiplications par un élément de $\mathbb{F}_4$.

Ainsi a, b, c et d sont à coefficients dans $\mathbb{F}_4$ et (11) implique que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_{\mathbb{F}_4}(X_2 \oplus X_2^*).$$

Les résultats du lemme sont donc démontrés.

On en déduit que $(GL_D X_1, GL_D X_2)$ est une paire duale relativement réductive de $O(Q)$ sauf si $F = \mathbb{F}_2$ et $\dim_{\mathbb{F}_2} X_i \leq 2$, $i = 1$ ou 2.

On connait désormais toutes les paires duales relativement réductives et irréductibles de $O(Q)$. On reconnait celles qui sont réductives grâce à la remarque 1.1.

Ceci termine la démonstration de la proposition 1.1.

Remarque : Il est clair que, si (H, H') est une paire duale réductive de $O(Q)$, les groupes H et H' sont réductifs.

Si (H, H') est une paire duale de $O(Q)$, telle que H et H' soient réductifs, alors (H, H') est relativement réductive.

En effet, l'hypothèse "W $HH'F$-semi-simple" n'intervient, dans la démonstration précédente, que pour déterminer les paires duales de type linéaire. Dans ce cas, un argument analogue à celui de [8, Ch. I, 19] utilisant l'hypothèse "H et H' réductifs" fournit le même résultat.

§ 2. Paires duales réductives du groupe pseudosymplectique

Afin de développer une théorie analogue à celle de R. Howe en caractéristique différente de 2, il nous faut déterminer les paires duales réductives d'un groupe pseudosymplectique (cf. I).

Ce paragraphe est consacré à la résolution de ce problème.

2.1. Réduction du problème

Les notations sont celles du § I.1.

Soit (G, G') une paire duale de PsB. On note $\overline{G}$ (resp. $\overline{G}'$) la projection de G (resp. G') sur $O(Q)$.

DÉFINITIONS :

La paire duale (G, G') est *réductive* si W est $\overline{G}\overline{G}'F$ absolument semi-simple.

La paire (G, G') est *irréductible* s'il n'existe pas de décomposition de W en somme orthogonale stable sous $\overline{G}\overline{G}'$.

PROPRIÉTÉS. —

a. Toute paire duale (resp. paire duale réductive) est produit de paires duales (resp. réductives et) irréductibles de PsB.

b. Restriction des scalaires : *Soit E une extension séparable de F. Soit $t : E \longrightarrow F$ un homomorphisme F-linéaire tel que la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto t(xy)$ soit non dégénérée. Supposons W muni d'une structure de E-espace vectoriel et soient Q' une E-forme quadratique sur W et B' une forme bilinéaire définissant Q' telles que*

$$t \circ Q' = Q \quad \text{et} \quad t \circ B' = B.$$

Si (G, G') est une paire duale réductive et irréductible, non triviale de PsB' alors (G, G') est une paire duale réductive et irréductible de PsB.

Démonstration de a. : Soit (G, G') une paire duale de PsB. Si elle n'est pas irréductible, on considère une décomposition de W en somme orthogonale stable sous $\overline{G}\overline{G}'$: $W = W_1 \oplus W_2$.

Pour $i = 1, 2$, on note B_i la restriction de B à $W_i \times W_i$, Q_i celle de Q à W_i et PsB_i le groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q_i)$ relatif à B_i.

Soit $G_i = \{(\sigma_{|W_i}, f_{|W_i}), (\sigma, f) \in G\}$ et $G'_i = \{(\sigma_{|W_i}, f_{|W_i}), (\sigma, f) \in G'\}$, $i = 1, 2$. Alors G (resp. G') s'identifie à $G_1 \times G_2$ (resp. $G'_1 \times G'_2$).

Par le lemme 1.1, (G_i, G'_i) est une paire duale de PsB_i et (G, G') est produit de (G_1, G'_1) et (G_2, G'_2).

De plus, si (G, G') est réductive alors W_i est $\overline{G}_i\overline{G}'_iF$ absolument semi-simple : (G_i, G'_i) est une paire duale réductive de PsB_i.

En itérant, on montre la propriété a.

Démonstration de b. : Comme E est séparable, l'application F-linéaire de $\mathcal{Q}_a(W_E)$ dans $\mathcal{Q}_a(W_F)$ définie par :

$$f \in \mathcal{Q}_a(W_E) \longmapsto t \circ f \in \mathcal{Q}_a(W_F)$$

est un isomorphisme. Le groupe PsB' s'identifie à un sous-groupe de PsB par : $(\sigma, f) \longmapsto (\sigma, t \circ f)$.

Soit (G, G') une paire duale réductive de PsB'. Montrons que le commutant de G dans PsB est encore G'.

En effet, si (σ', f') est un élément du commutant de G dans PsB, σ' est E-linéaire (prop. 1.1). Soit (σ', f_0') un relèvement de σ' à PsB'. Alors $t \circ f_0' + f'$ est additive, et d'après ce qui précède, il existe $f_a \in \mathcal{Q}_a(W_E)$ telle que

$$t \circ f_0' + f' = t \circ f_a \quad \text{i.e.} \quad f' = t \circ (f_0' + f_a)$$

L'élément $(\sigma', f_0' + f_a)$ appartient donc au commutant de G dans PsB' c'est-à-dire G'. □

Sous certaines hypothèses, on construit des paires duales réductives et irréductibles de PsB à partir de celles de $O(Q)$. En effet, on prouvera en 2.2i

LEMME 2.1*a*. — *Si (G, G') est une paire duale réductive et irréductible de PsB, il existe une paire duale, relativement réductive et irréductible de $O(Q)$, notée (H, H'), telle que :*

$$\overline{G} \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H'.$$

En imposant que G soit isomorphe à un sous-groupe de $O(Q)$ (i.e. $\overline{G}$) et que $\overline{G}$ soit exactement H, on identifie des sous-groupes G possibles. Puis en calculant les commutant et bicommutant de chacun de ces sous-groupes (§ 2.3), on démontre :

PROPOSITION 2.1*b*. — *Les paires suivantes sont duales, réductives, irréductibles et non triviales dans PsB :*

1. *Avec les notations de l'exemple* 1 § 1.1, *si W est identifié à W' et que $Q = Q'$,*

   a. la paire (SpW_1, SpW_2) si W_i est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension 2, $i = 1$ *ou* 2.

   b. Sinon, la paire $(SpW_1, O(q_2))$ où q_2 est une forme quadratique sur W_2 dont la forme alternée est $<,>_2$.

2. *Avec les notations de l'exemple* 2 §1.1, *si* W *est identifié à* W'' *et que* $Q = Q''$, *la paire* $(U(W_1), U(W_2))$.

3. *Avec les notations de l'exemple* 3 §1.1, *si* W *est identifié à* W''', *que le centre de* D *est une extension séparable de* F *et que* $Q = Q'''$, *la paire* $(GL_D X_1, GL_D X_2)$ *sauf si* $F = \mathbb{F}_2$ *et* $\dim_F X_i \leq 2$ *pour* $i = 1$ *ou* 2.

4. *Les paires précédentes dans un groupe pseudosymplectique* Psb, *défini sur une extension finie séparable* E *de* F.

La démonstration décrit précisément les groupes qui interviennent dans chaque paire duale (Cf.§2.2).

D'autre part,

THÉORÈME 2.1c. — *Soit* (G, G') *une paire duale réductive et irréductible de* PsB.

i) Ou bien, (G, G') *est triviale c'est-à-dire de la forme* $(\{(id, 0)\}, PsB)$ *ou, quand* W *est un plan ,* $(\mathcal{Q}_a(W), \mathcal{Q}_a(W))$ *;*

ou bien, G *et* G' *sont isomorphes à des sous-groupes de* $O(Q)$.

ii) On suppose que (G, G') *n'est pas triviale. Alors,* $H^1(\overline{GG}', \mathcal{Q}_a(W))$ *est nul.*

COROLLAIRE 2.1*d*. — *Si* (K, K') *est une paire duale, réductive et irréductible de* PsB *alors toute paire duale réductive et irréductible, non triviale,* (G, G') *telle que*

$$\overline{G} \subset \overline{K} \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset \overline{K}'$$

est de la forme : $G = sKs^{-1}$, $G' = sK's^{-1}$ *pour un* $s \in \mathcal{Q}_a(W)$.

Par conséquent,

THÉORÈME 2.1e. — *Si* (G, G') *est une paire duale, réductive et irréductible de* PsB *alors* (G, G') *est triviale ou apparaît dans la liste précédente.*

2.2. Construction de paires duales réductives et irréductibles de PsB

Montrons tout d'abord le lemme 2.1a.

On différencie deux cas selon que W est ou n'est pas $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple.

Premier cas : W est $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple : $(Z_{O(Q)}Z_{O(Q)}(\overline{G}), Z_{O(Q)}(\overline{G}))$ est une paire duale de $O(Q)$ telle que

$$\overline{G} \subset Z_{O(Q)}Z_{O(Q)}(\overline{G}) \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset Z_{O(Q)}(\overline{G}).$$

Elle est donc irréductible, de type hermitien donc relativement réductive (cf. § 1.5). Cette paire duale convient.

Deuxième cas : W n'est pas $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple. Il existe un sous-espace vectoriel X qui soit $\overline{G}\,\overline{G}'F$-stable et non nul. Quitte à considérer $X \cap X^{\perp}$ au lieu de X, on peut supposer que X est totalement isotrope. Par le même raisonnement qu'en 1.5, on prouve que $\overline{G}$ et $\overline{G}'$ s'identifient à des sous-groupes de GLX, qui commutent entre eux et que X est de dimension maximale. Comme (G, G') est irréductible, X est $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple. Donc X est singulier ou de dimension 1 et non singulier.

Dans le premier cas, il existe une décomposition de X en produit tensoriel, $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$, D contenant F dans son centre, telle que

$$\overline{G} \subset GL_D X_1, \quad \overline{G}' \subset GL_D X_2.$$

Si $(GL_D X_1, GL_D X_2)$ est une paire duale, elle convient. Sinon, on prend $H = Sp(2, \mathbb{F}_2)$ et $H' = Sp(n, \mathbb{F}_2)$ (cf. § 1.5).

Dans le deuxième cas, $\overline{G}\,\overline{G}'$ est réduit à $\{id\}$. La paire duale réductive triviale convient.

Le lemme est donc établi.

Revenons maintenant à la construction de paires duales réductives. On distingue trois cas selon la nature de H : unitaire, symplectique ou linéaire.

Les notations sont empruntées au paragraphe 1. On note G' le commutant de G dans PsB.

Remarque : Soit B' une autre forme bilinéaire définissant Q. Si l'on détermine une paire duale réductive et irréductible (G, G') dans PsB', on obtient une paire duale réductive et irréductible de PsB en prenant les images respectives de G et G' par un élément de $\mathcal{I}(B', B)$ (Cf.I.1.3).

Cas unitaire : Dans ce cas, B est, à une forme alternée près, la forme bilinéaire B'' définie par

$$B''(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') = tr_{D|F}(\xi < w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2)$$

où ξ est un générateur d'une extension quadratique séparable de F contenue dans D.

On peut supposer $B = B''$. Le groupe $G = \{(\sigma \otimes_D id_{W_2}, 0), \sigma \in U(W_1)\}$ est un sous-groupe de PsB''. Calculons G'.

Soit $(\sigma', f') \in G'$. Comme $\overline{G}' \subset U(W_2)$, f' est nécessairement additive et invariante sous $\overline{G}$.

Soient $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ une base orthogonale de W_1 et s_i une quasi-symétrie de vecteur e_i différente de l'identité. Puisque (σ', f') commute avec s_i pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on obtient :

$$f'((s_i + id)e_i \otimes w) = 0 \text{ pour tout } w \in W_2 \text{ et tout } i \in \{1, \cdots, n\}$$

$$\Leftrightarrow f'(e_i \otimes w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in W_2 \text{ et tout } i \in \{1, \cdots, n\} \text{ car } (s_i + id)e_i \text{ est colinéaire à } e_i \text{ , non nul } (s_i \neq id)$$

$$\Leftrightarrow f' = 0 \text{ sur } W.$$

Ainsi $G' = \{(\sigma, 0), \sigma \in U(W_2)\}$.

Par symétrie des rôles de G et G', le bicommutant de G' est G : (G, G') est une paire duale de PsB.

Cas symplectique :Alors, B est, à une forme alternée près, la forme bilinéaire B' définie par :

$$B'(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') = b_1(w_1, w_1') < w_2, w_2' >_2, \quad w_i, w_i' \in W_i,$$

où b_1 est une forme bilinéaire définissant $<, >_1$.

Notons q_1 la forme quadratique définie par b_1. On choisit b_1 pour que $O(q_1)$ contienne un élément σ tel que $(\sigma + id)$ soit inversible.

Considérons la forme bilinéaire b définie par :

$$b(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') =< w_1, w_1' >_1 b_2(w_2, w_2')$$

où b_2 est une forme bilinéaire définissant $<, >_2$. Alors $b + B'$ est alternée. Comme H se relève à Psb par $\sigma \longmapsto (\sigma, 0)$, il se relève à PsB' par $\sigma \longmapsto \beta(\sigma, 0)$ où $\beta \in \mathcal{I}(b, B')$. Les sous-groupes de PsB' obtenus sont :

$$G_{q_2} = \{(\sigma \otimes_F id_{W_2}, f_\sigma) \in PsB' | \sigma \in SpW_1$$
$$\text{et } f_\sigma(w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1))q_2(w_2)\}$$

où q_2 parcourt l'ensemble des formes quadratiques sur W_2 dont la forme alternée est $<, >_2$.

Calculons maintenant le commutant G' de $G = G_{q_2}$. Nécessairement, $\overline{G}'$ est contenu dans SpW_2. Soit $(\sigma', f') \in G'$. Alors

(13) $\qquad f'$ est additive car $G' \subset PsB$,

(14) $\qquad f' + f_\sigma \cdot \sigma' = f_\sigma + f' \cdot \sigma$ pour tout $(\sigma, f_\sigma) \in G$

i.e. $f'((\sigma + 1)w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1))(q_2(\sigma' w_2) + q_2(w_2))$, $w_i \in W_i$, $\sigma \in SpW_1$.

En particulier, si $\sigma \in O(q_1) \subset SpW_1$,

$$f'((\sigma + id)w_1 \otimes w_2) = 0.$$

Donc, grâce au choix de b_1, $f' = 0$.

• Si $F \neq \mathbb{F}_2$ ou $\dim_F W_1 > 2$, il existe un élément $\sigma \in SpW_1$, n'appartenant pas à $O(q_1)$. On déduit alors de (14) que $\sigma' \in O(q_2)$.

Ainsi $G' \subset \{(\sigma', 0), \sigma' \in O(q_2)\} \subset G'$ d'où l'égalité $G' = \{(\sigma', 0), \sigma' \in O(q_2)\}$.

• Si $F = \mathbb{F}_2$, et $\dim_F W_1 = 2$, $G' \subset \{(\sigma', 0), \sigma' \in SpW_2\} \subset G'$, donc

$$G' = \{(\sigma', 0), \sigma' \in SpW_2\}.$$

Calculons G'', le commutant de G'.

• Si $F \neq \mathbb{F}_2$ ou $\dim_F W_1 > 2$, $\overline{G}''$ est contenu dans $Z_{O(Q)}(O(q_2))$. On déduit du lemme 1.3 que $Z_{O(Q)}(O(q_2))$ est SpW_1 si (W_2, q_2) n'est pas un plan hyperbolique sur $\mathbb{F}_2$ et qu'il contient SpW_1 et $O(q_2)$ dans le cas contraire.

Dans le premier cas, on déduit que $\overline{G}'' = SpW_1$. Soit $(\sigma, f) \in G''$. Alors

$$f = f_\sigma + f_a, \quad f_a \in \mathcal{Q}_a(W_1)$$

$$\text{et} \quad f_a \cdot \sigma' = f_a \quad \text{pour tout} \quad \sigma' \in O(q_2) \quad \text{i.e. } f_a = 0.$$

Donc $G'' = \{(\sigma, f_\sigma), \sigma \in SpW_1\} = G$.

La paire (G, G') est duale.

Dans le deuxième cas, G'' contient G et $O(q_2)$. De plus, $O(q_2)$ permute les deux copies de W_1 : il n'est donc pas contenu dans G. Ainsi

$$G'' \supsetneq G$$

et on n'obtient pas de paire duale.

• Si $F = \mathbb{F}_2$ et $\dim W_1 = 2$, $G' = SpW_2$ a pour commutant $O(q_1)$ et $O(q_1) = SpW_1$ d'où (SpW_1, SpW_2) est une paire duale.

On a donc les paires duales :

$(Sp_{q_2}W_1, O(q_2))$ où W_1 n'est pas un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension 2 et (W_2, q_2) n'est pas un plan hyperbolique sur $\mathbb{F}_2$

$(Sp_{q_2}W_1, SpW_2)$ où W_1 est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension 2.

Cas linéaire : Alors, notons Y un sous-espace vectoriel singulier de dimension ν, supplémentaire à X et B''' la forme bilinéaire définie par :

$$B'''(x + y, x' + y') = < x, y' >, \quad x, x' \in X, \; y, y' \in Y.$$

La forme $B + B'''$ est alternée. On peut la supposer nulle.

Soit $G = \{(\sigma, 0), \sigma \in GL_D X_1\}$. C'est un sous-groupe de PsB'''. Alors $\overline{G}'$ est contenu dans $GL_D X_2$. Donc $(\sigma, f) \in G'$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sigma \in GL_D X_2 \\ f \text{ est additive et invariante sous } \overline{G}. \end{cases}$$

Or $\overline{G}$ agit transitivement sur X_1 et X_1^*. La forme quadratique f est donc nulle sur chaque copie de $X_1 \oplus X_1^*$ donc f est nulle sur W. D'où

$$G' = \{(\sigma, 0),\ \sigma \in GL_D X_2\}.$$

Par symétrie, le commutant de G' est G. On obtient donc une paire duale de PsB sous les hypothèses de la proposition 1.1.

La proposition 2.1*b* est la synthèse des résultats obtenus au § 2.2.

2.3. Démonstration du théorème 2.1*c* et de son corollaire

i) On démontre tout d'abord le

LEMME. —

1. *Si K est un sous-groupe de PsB, $K \cap Q_a(W)$ est un sous-groupe distingué de K et un sous-$\overline{K}$-module de $Q_a(W)$.*

2. *Si un sous-groupe K' de PsB commute avec K, alors $\overline{K}'$ est contenu dans $\bigcap_{f_a \in K \cap Q_a(W)} O(f_a)$ et $K \cap Q_a(W)$ est un sous $\overline{KK}'$-module de $Q_a(W)$. Si, en outre, (K, K') est une paire duale, $K \cap Q_a(W)$, $K' \cap Q_a(W)$ et $KK' \cap Q_a(W)$ sont des $\overline{KK}'F$-modules.*

En effet, $K \cap Q_a(W)$ est un sous-groupe distingué de K car $Q_a(W)$ est distingué dans PsB.

De plus, le conjugué de $(id, f_a) \in K \cap Q_a(W)$ par $(\sigma, f) \in K$ est $(id, f_a \cdot \sigma)$ qui est encore dans $K \cap Q_a(W)$: $K \cap Q_a(W)$ est un sous $\overline{K}$-module de $Q_a(W)$.

Soit $(\sigma', f') \in K'$. Si $(id, f_a) \in K$, (σ', f') commute avec (id, f_a) i.e.

$$f_a \cdot \sigma' = f_a$$

donc $\overline{K}' \subset \cap O(f_a)$, où f_a parcourt $Q_a(W) \cap K$.

Par conséquent, $K \cap Q_a(W)$ est stable sous l'action de $\overline{KK}'$ i.e. $K \cap Q_a(W)$ est un $\overline{KK}'$-module.

On suppose que (K, K') est une paire duale. Si $\lambda \in F$ et $f \in K \cap Q_a(W)$, $(id, \lambda f)$ commute encore avec K' : $(id, \lambda f)$ est un élément de $Q_a(W) \cap K$. Donc $K \cap Q_a(W)$ est un $\overline{K}\,\overline{K}'F$-module. De même, $K' \cap Q_a(W)$ et $KK' \cap Q_a(W)$ possèdent une structure de $\overline{K}\,\overline{K}'F$-modules. $\square$

Soit (G, G') une paire duale réductive et irréductible de PsB. On remarque que les sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F^2$-modules de $\mathcal{Q}_a(W)$ sont en bijection avec les sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F$-modules de W ou $W \oplus W$ suivant que F est fini ou local. Cette correspondance est donnée par :

(15)
si F est fini,

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_a(W) & \longrightarrow \quad W \\ \quad f & \longmapsto \quad v \text{ tel que } f(w) = < w, v >^2 \text{ pour } w \in W \end{cases}$$

si F est local,

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_a(W) & \longrightarrow \quad W \oplus W \\ \quad f & \longmapsto \quad v_1 + v_2 \text{ tel que } f(w) = < w, v_1 >^2 + \pi_F < w, v_2 >^2 \\ & \qquad\qquad \text{pour } w \in W \text{ et } \pi_F \text{ une uniformisante de } F. \end{cases}$$

D'après le lemme précédent, $GG' \cap \mathcal{Q}_a(W)$ est un sous $\overline{G}\,\overline{G}'F$-module de $\mathcal{Q}_a(W)$. S'il est nul, G et G' sont isomorphes à des sous-groupes de $O(Q)$.

Sinon $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$ ou $G' \cap \mathcal{Q}_a(W)$ n'est pas nul : supposons, par exemple, que $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$ soit non nul. Alors $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$ contient un sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F^2$-module simple de $\mathcal{Q}_a(W)$, formé de formes quadratiques additives invariantes sous $\overline{G}'$. Par (16), ce sous-module correspond à un sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F$-module simple N, de W ou $W \oplus W$, selon que F est fini ou local, formé d'éléments invariants sous $\overline{G}'$.

Si W est $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple alors N est isomorphe à W et $\overline{G}'$ est trivial. Si $G' \cap \mathcal{Q}_a(W)$ est nul, (G, G') est la paire $(PsB, \{(id, 0)\})$. Sinon, par le même raisonnement, on montre que $\overline{G}$ est $\{id\}$. La paire (G, G') est donc une paire duale du groupe abélien $\mathcal{Q}_a(W)$ donc $G = G' = \mathcal{Q}_a(W)$. Elle est irréductible si et seulement si W est un plan (sinon W est somme orthogonale de plans stables sous $\overline{G}\,\overline{G}' = \{id\}$.).

Si W n'est pas $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple, il existe un sous-espace vectoriel X de W, totalement isotrope de dimension maximale, $\overline{G}\,\overline{G}'F$-stable et $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple (Cf. § 2.2, démonstration du lemme 2.1.a). Par conséquent, W est somme de composants simples X ou X^*.

Ceci entraîne que tout élément de $\overline{G}'$ est trivial sur X ou X^*. Donc, $\overline{G}'$ est réduit à $\{id\}$. On conclut comme au cas précédent.

ii) On note (H, H') une paire duale relativement réductive et irréductible de $O(Q)$ telle que

$$\overline{G} \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H'.$$

LEMME a. — *Si le centre de* $\overline{G}\,\overline{G}'$ *n'est pas trivial, alors* $H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W))$ *est nul.*

Démonstration : Montrons que, quel que soit l'élément g du centre Z de $\overline{G}\,\overline{G}'$ distinct de id, $(g + id)$ est inversible.

Soient g un tel élément et $V = \mathrm{Ker}(g + id)$. Le sous-espace vectoriel V est stable sous $\overline{G}\,\overline{G}'$ et strictement contenu dans W. D'après ce qui précède, V peut être $\{0\}$ ou un sous-espace vectoriel totalement isotrope de dimension n. Dans ce cas-ci, g serait trivial, donc V est nécessairement nul : $(g + id)$ est bien inversible.

Par un argument standard, on obtient : $H^1(Z,\ \mathcal{Q}_a(W)) = 0$. On en déduit le lemme en appliquant la suite de Hochschild-Serre [13].

On suppose désormais que le centre de $\overline{G}\,\overline{G}'$ (qui contient ceux de $\overline{G}$ et de $\overline{G}'$) est trivial.

LEMME b. — *En tant que groupes,* $H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W))$ *est isomorphe à* $(H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'})^{[F:F^2]}$.

Démonstration : On applique la suite de Hochschild-Serre au groupe $\overline{G}\,\overline{G}'$ et à son sous-groupe distingué $\overline{G}$:

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}}) \longrightarrow H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \xrightarrow{r}$$
$$H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}'} \longrightarrow H^2(\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}})$$

où l'action de $\overline{G}'$ sur $H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))$ est donnée par :

si $\sigma' \in \overline{G}'$ et $d \in Der(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))$, alors $\sigma' \cdot d$ est l'image de la dérivation $\sigma \longmapsto (d(\sigma)) \cdot \sigma'$ dans $H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))$;
et où r est l'homomorphisme induit par la restriction :

$$\sigma \in Der(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \longmapsto \delta_{|\overline{G}} \in Der(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W)).$$

Or, pour toute forme quadratique f de $\mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}}$, (id, f) commute avec G donc appartient à G' : par i), $\mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}}$ est nul. D'où

$$H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \simeq H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}'}.$$

De plus, $\mathcal{Q}_a(W) \simeq W$ ou $W \oplus W$ selon que F est parfait ou non, et $\overline{G}\,\overline{G}'$ respecte cette décomposition, donc :

$$H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}'} \simeq (H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'})^{[F:F^2]}.$$

□

Montrons donc que $H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'}$ est nul. On distingue deux cas suivant le type de (H, H').

1. (H, H') est de type hermitien : il existe une décomposition de W en produit tensoriel hermitien : $W \simeq W_1 \otimes_D W_2$ telle que

$$\begin{aligned} \overline{G} \subset H &= U(W_1), \\ \overline{G}' \subset H' &= U(W_2). \end{aligned}$$

D'où,

$$H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, W_1 \otimes_D W_2)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, W_1) \otimes_D W_2^{\overline{G}'}.$$

On conclut par :

LEMME *c*. — $W_2^{\overline{G}'} = \{0\}$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

– l'irréductibilité de (G, G') implique que $\overline{G}'$ ne laisse stable aucune décomposition en somme orthogonale de W_2.

– l'action de $\overline{G}'$ sur W_2 est semi-simple.

Si $W_2^{\overline{G}'}$ est non nul, un raisonnement analogue à celui du § 1.5 démontre l'existence d'une polarisation complète de W_2 stable sous $\overline{G}'$: $W_2 = X_2 \oplus Y_2$, où $X_2 \subset W_2^{\overline{G}'}$. En outre, tout élément σ' de $\overline{G}'$ agit trivialement sur X_2, donc sur W_2. Par conséquent G' est $\{(id, 0)\}$, ce qui est exclu. □

2. (H, H') est de type linéaire : soit $X \oplus Y$ une polarisation complète de W stable sous $\overline{G}\,\overline{G}'$. Alors, $H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'}$ s'identifie à deux copies de $H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'}$. Comme précédemment, il existe une décomposition en produit tensoriel de X : $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$ telle que $\overline{G} \subset GL_D X_1$, $\overline{G}' \subset GL_D X_2$.

Donc

$$H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, X_1) \otimes_D X_2^{\overline{G}'}.$$

L'irréductibilité de (G, G') implique que $X_2^{\overline{G}'}$ est nul ou X_2.

Si $X_2^{\overline{G}'} = X_2$, $G' = \{(id, 0)\}$. Ce cas est exclu.
Si $X_2^{\overline{G}'} = 0$ alors $H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'} = \{0\}$.

Ceci termine la démonstration du théorème.

Démonstration du corollaire :
S'il existe $s \in \mathcal{Q}_a(W)$ tel que $G \subset sKs^{-1}$ et $G' \subset sK's^{-1}$ alors $G = sKs^{-1}$ et $G' = sK's^{-1}$ (car (G, G') est une paire duale).

Par hypothèse, tout élément g de $\overline{G}\,\overline{G}'$ s'écrit : $g = k \cdot (id, \delta(g))$, $k \in KK'$, $\delta(g) \in \mathcal{Q}_a(W)$. Alors δ définit une dérivation sur $\overline{G}\,\overline{G}'$ à valeurs dans $\mathcal{Q}_a(W)$. Par le théorème précédent (iii), δ est nécessairement intérieure : il existe $f \in \mathcal{Q}_a(W)$ telle que :

$$\forall \sigma \in \overline{G}\,\overline{G}', \quad \delta(\sigma) = f \cdot (\sigma + 1).$$

Alors $s = (id, f)$ convient. □

2.4. Démonstration du théorème 2.1e

On peut supposer que (G, G') est une paire réductive et irréductible non triviale de PsB.

Soit (H, H') une paire duale réductive de $O(Q)$ telle que :

$$\overline{G} \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H' \quad (\text{ lemme } 2.1a.).$$

Si (H, H') n'est pas (SpW_1, SpW_2) alors par le corollaire 2.1d, (G, G') est un des relèvements de (H, H') à PsB décrits dans la proposition 2.1b.

On suppose donc que $H = SpW_1$ et $H' = SpW_2$. Grâce au corollaire 2.1d, il suffit d'établir le

LEMME. — *Si $\overline{G} \subset H$ et $\overline{G}' \subset H'$, alors $\overline{G} \subset O(q_1)$ ou $\overline{G}' \subset O(q_2)$ pour une certaine forme quadratique q_i sur W_i, dont la forme alternée associée est $<,>_i$.*

Démonstration : Montrons d'abord que $SpW_2 = \bigcup\limits_q O(q)$ où q parcourt l'ensemble $\mathcal{E}$ des formes quadratiques sur W_2 dont la forme alternée est $<,>_2$.

Soit $\sigma \in SpW_2$. On choisit une base $(e_1 \dots, e_m)$ de W_2 telle que $(e_{r+1}, \dots, e_m)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(1 + \sigma)$. La matrice de $(\sigma - id)$ dans cette base est de la forme

$$m = (\underbrace{\Sigma}_{r} \mid \underbrace{0}_{m-r}) \quad \text{où } \Sigma \text{ est une matrice } m \times r \text{ de rang } r.$$

On note Σ_2 la matrice obtenue à partir de Σ en élevant chaque coefficient au carré. Alors, Σ_2 est de même rang r que Σ puisque, pour toute matrice carrée M, on a

$$\text{dét } M_2 = (\text{dét } M)^2.$$

Si $q \in \mathcal{E}$, q est invariante sous σ si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad q(\sigma e_i) = q(e_i)$$

i.e. $${}^t\Sigma_2 \cdot \begin{pmatrix} q(e_1) \\ \vdots \\ q(e_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$$ où les α_i ne dépendent que de σ.

Or le système

$${}^t\Sigma_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$$

possède au moins une solution : il existe donc $q \in \mathcal{E}$ telle que $\sigma \in O(q)$.

D'où, $SpW_2 \subset \bigcup_{q \in \mathcal{E}} O(q)$. L'inclusion inverse étant claire, on a l'égalité.

Ainsi $\overline{G}' = \bigcup_{q \in \mathcal{E}} \overline{G}'_q$, avec $\overline{G}'_q = \overline{G}' \cap O(q)$.

Quitte à transporter la situation par un isomorphisme convenable, on peut supposer $B = b_1 <,>_2$ où b_1 est une forme bilinéaire définissant $<,>_1$.

Soit $q \in \mathcal{E}$. Le groupe $SpW_1 \cdot O(q)$ se relève à PsB par :

$$\sigma \longmapsto \begin{cases} (\sigma, 0) & \text{si } \sigma \in O(q) \\ (\sigma, f_{q,\sigma}) & \text{si } \sigma \in SpW_1 \end{cases}$$

où $f_{q,\sigma}(w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1)) \cdot q(w_2)$.

On a alors deux relèvements de $\overline{G}\,\overline{G}'_q$ à PsB puisque $\overline{G}\,\overline{G}'_q$ est un sous-groupe de $\overline{G}\,\overline{G}'$ (qui s'identifie à GG') et de $SpW_1 \cdot O(q)$. Ces deux relèvements diffèrent d'une dérivation de $\overline{G}\,\overline{G}'_q$ à cœfficients dans $Q_a(W)$ que l'on note d_q. De plus, par la suite d'Hochschild-Serre appliquée à $\overline{G}\,\overline{G}'_q$ et son sous-groupe $\overline{G}'_q$, nous obtenons :

(16)

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{G}, Q_a(W)^{\overline{G}'_q}) \longrightarrow H^1(\overline{G}\,\overline{G}'_q, Q_a(W)) \longrightarrow H^1(\overline{G}', Q_a(W))^{\overline{G}} = 0$$

Première étape : Supposons que $Q_a(W)^{\overline{G}'_q} = 0$. Alors, d_q est intérieure et, quitte à conjuguer $G\,G'$ par un élément de $Q_a(W)$, on peut supposer $d_q = 0$.

Si $\overline{G}' = \overline{G}'_q$ alors $\overline{G}' \subset O(q)$ et le résultat est établi.

Sinon considérons un élément σ' de $\overline{G}' \setminus \overline{G}'_q$ et la forme quadratique $q' = q \cdot \sigma'$. Soit (σ', f') l'élément de G' au-dessus de σ'. Il commute avec G, d'où

$$\forall \sigma \in \overline{G}, \ f_{q,\sigma} \cdot \sigma + f' = f' \cdot \sigma + f_{q,\sigma}$$

ce qui équivaut à

$$\forall\sigma \in \overline{G},\ \forall w_i \in W_i,\ b_1(\sigma w_1, \sigma w_1)(q(\sigma' w_2) + q(w_2)) + f'(\sigma w_1 \otimes w_2) \\ = b_1(w_1, w_1)(q(\sigma' w_2) + q(w_2)) + f'(w_1 \otimes w_2).$$

En choisissant $w_2 \in W_2$ tel que $q(\sigma' w_2) + q(w_2) \neq 0$, on définit une forme quadratique q_1 sur W_1 par

$$q_1(w_1) = \frac{1}{q(\sigma' w_2) + q(w_2)} f'(w_1 \otimes w_2) + b_1(w_1, w_1).$$

Sa forme alternée est $<\ ,\ >_1$ et son groupe orthogonal contient $\overline{G}$. Sous notre hypothèse, le lemme est donc établi.

Il reste à prouver l'existence d'une forme quadratique q de $\mathcal{E}$ telle que $\mathcal{Q}_a(W)^{G'_q} = 0$. Pour cela, il suffit de construire un élément σ' de $\overline{G}'$ tel que $id + \sigma'$ soit inversible.

En effet, si $\overline{G}'$ contient un tel élément σ', on choisit $q \in \mathcal{E}$ invariante sous σ'. Alors

$$\mathcal{Q}_a(W)^{G'_q} \subset \mathcal{Q}_a(W)^{\sigma'} = \{f \in \mathcal{Q}_a(W) \mid f = 0 \text{ sur } W_1 \otimes \mathrm{Im}(id + \sigma')\} = \{0\}.$$

La forme quadratique q répond donc au problème.

Deuxième étape : Construction de σ'.

Nous ne considérons désormais que les formes quadratiques $q \in \mathcal{E}$ telles que $\overline{G}'_q \neq \{id\}$. Nous notons W_q le sous-espace de W_2 engendré par les $\mathrm{Im}(id + \sigma)$ quand σ parcourt $\overline{G}'_q$ (W_q est donc non nul).

Remarquons que si W_q est q-singulier ("totalement isotrope" suffit), W_q est contenu dans $W_q^{\perp} = \bigcap_{\sigma \in G'_q} \mathrm{Ker}(id + \sigma)$ car $\overline{G}'_q \subset SpW_2$. Ainsi, tout élément de $\overline{G}'_q$ est d'ordre 2.

Par conséquent, si pour toute forme quadratique $q \in \mathcal{E}$, W_q est singulier, $\overline{G}'$ ne contient que des éléments d'ordre deux : il est donc commutatif. Tous ses éléments non triviaux conviennent car $\mathrm{Ker}(id + \sigma')$ est un sous-espace vectoriel propre de W_2 stable sous $\overline{G}'$: il est donc nul.

Supposons qu'il existe une forme quadratique $q \in \mathcal{E}$ pour laquelle W_q n'est pas singulier. Soit $u \in W_q$ tel que $q(u) \neq 0$ et τ la transvection q-orthogonale de vecteur u. Montrons que τ appartient à $\overline{G}'$ c'est-à-dire qu'il existe un élément (τ, f) de PsB qui commute avec G.

D'après (16), $G = \{(\sigma, f_{q,\sigma} + \delta_q(\sigma) + f_q \cdot (\sigma + id)),\ \sigma \in \overline{G}\}$ où δ_q est une dérivation à cœfficients dans $\mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}'_q}$ et $f_q \in \mathcal{Q}_a(W)$. Quitte à conjuguer

GG', on peut supposer f_q nulle. Alors, τ se relève à PsB en $(\tau, 0)$. Montrons que $(\tau, 0)$ commute avec G.

En effet, puisque $Q_a(W)^{\overline{G}'_q} = \{f \in Q_a(W) \mid f = 0 \text{ sur } W_1 \otimes W_q\}$, τ agit trivialement sur $Q_a(W)^{\overline{G}'_q}$. Donc

$$\begin{aligned}\forall(\sigma, f_{q,\sigma} + \delta_q(\sigma)) \in G,\ (\tau, 0)(\sigma, f_{q,\sigma} + \delta_q(\sigma)) &= (\tau\sigma, f_{q,\sigma} \cdot \tau + \delta_q(\sigma) \cdot \tau) \\ &= (\sigma\tau, f_{q,\sigma} + \delta_q(\sigma)) = (\sigma, f_{q,\sigma} + \delta_q(\sigma)) \cdot (\tau, 0).\end{aligned}$$

Ainsi $\tau \in \overline{G}'$.

Puisque $\overline{G}'$ ne laisse stable aucun sous-espace vectoriel non trivial de W_2, il existe $(m-1)$ éléments $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{m-1}$ de $\overline{G}'$ tels que $(u, \sigma_1 u, \sigma_2 u, ..., \sigma_{m-1} u)$ soit une base de W_2. Pour $i = 1, ..., m-1$, notons $\tau_i = \sigma_i \tau \sigma_i^{-1}$ la transvection de vecteur $\sigma_i u$ $(\tau_i \in \overline{G}')$ et posons $\sigma' = \tau_{m-1}\tau_{m-2}...\tau_1\tau$. C'est un élément de $\overline{G}'$. De plus, $\sigma' + id = (\tau_{m-1} + id)(\tau_{m-2}...\tau_1\tau) + (\tau_{m-2} + id)(\tau_{m-3}...\tau_1\tau) + ... + (\tau_1 + id)\tau + (\tau + id)$, chaque application linéaire $\tau_i + id$ ayant pour image la droite engendrée par $\sigma_i u$. Donc

$$\operatorname{Ker}(\sigma' + id) = \bigcap_i \operatorname{Ker}(\tau_i + id) \cap \operatorname{Ker}(\tau + id) = 0.$$

□

§3. Restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives

Si G est un sous-groupe de PsB, on note $\widetilde{G}$ son image réciproque dans $\widetilde{PsB}$.

3.1. Réductions du problème

i) D'après l'étude faite au paragraphe I § 2, l'extension métaplectique n'est pas scindée au-dessus des paires duales triviales.

ii) Supposons que (G, G') soit une paire duale réductive, obtenue par restriction des scalaires. Il existe donc une extension convenable E de F, un homomorphisme $tr : E \longrightarrow F$ tels que :

– la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto tr(xy)$ soit non dégénérée.

– W est muni d'une structure de E-espace vectoriel et d'une forme bilinéaire B_E telle que $tr \circ B_E = B$.

Soit ψ_E le caractère de E défini par $\psi_E = \psi \circ tr$. Alors

$$\psi_E \circ B_E = \psi \circ B$$

et en utilisant le modèle décrit en I § 2.2, nous allons montrer que :

$$r_{\psi_E} = r_{\psi|PsB_E}$$

où r_{ψ_E} (resp. r_ψ) est la représentation métaplectique de PsB_E (resp. PsB) relativement au caractère ψ_E (resp. ψ).

Démonstration : On définit le caractère $\psi_{X,E}$ du sous-groupe $X \times E$ de $H(B_E)$ par :

$$\begin{aligned} & \psi_{X,E}((x,0)) = \psi_X((x,0)) \quad \text{pour tout} \quad x \in X \\ \text{et} \quad & \psi_{X,E}((0,t)) = \psi_E(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in E. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} \mathcal{H}(X,\psi_X) & \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(Y) \xrightarrow{\sim} \quad \mathcal{H}(X,\psi_{X,E}) \\ \phi & \longmapsto \quad \phi' \text{ telle que } \phi'(x+y,t) = \phi(x+y,trt) \end{cases}.$$

On note i cet isomorphisme. Il entrelace les représentations $r_\psi|_{PsB_E}$ et r_{ψ_E}.

En effet, soit $s = (\sigma, f) \in PsB_E$. On note $s' = (\sigma, trf)$ son image dans PsB. On a :

$$\begin{aligned} &\{w_s \in W/\forall x \in X\cap\sigma X,\ \psi_{X,E}(x)\psi_{X,E}(s^{-1}x)\psi_E(B_E(x,x)) = \psi_E(< x, w_s >)\} \\ &= \{w_{s'} \in W/\forall x \in X\cap\sigma X,\ \psi_X(x)\psi_X(s'^{-1}x)\psi_X(B(x,x)) = \psi(< x, w_{s'} >)\}. \end{aligned}$$

D'où si $\sigma \in StabX$, pour tout $\phi \in \mathcal{H}(X,\psi_X)$, tout $h \in H(B_E)$,

$$r_{\psi_E}(s)i(\phi)(h) = i(\phi)(s^{-1}(w_s h)) = \phi(s'^{-1}(w_s(w.trt))) = i(r_\psi(s')\phi)(h).$$

Si $\sigma \notin StabX$, pour tout $\phi \in \mathcal{H}(X,\psi_X)$, pour tout $h \in H(B_E)$, un calcul analogue montre que : $r_{\psi_E}(s)(i(\phi))(h) = i(r_\psi(s')\phi)(h)$.

Ainsi

$$r_{\psi_E} \circ i = i \circ r_{\psi|PsB_E}.$$

Par conséquent si l'image réciproque de GG' dans $\widetilde{PsB_E}$ est scindée, elle l'est encore dans $\widetilde{PsB}$.

Il suffit de considérer les cas où $E = F$, c'est-à-dire les paires duales réductives et irréductibles, non triviales et non obtenues par restriction des scalaires. On les regarde dans un groupe pseudosymplectique PsB de notre choix, le résultat étant indépendant de ce choix. On prend, dans chaque cas, la forme bilinéaire B définie au paragraphe 2.2.

iii) La dernière réduction se fait grâce au

LEMME. — *Soient K et K' deux sous-groupes de PsB. On suppose que*

1) *K et K' commutent,*

2) *pour tout élément $(\sigma, f) \in K$, la restriction de $\psi \circ f$ à* $\mathrm{Ker}(id + \sigma)$ *est triviale.*

Alors $\widetilde{K}$ et $\widetilde{K}'$ commutent dans $\widetilde{PsB}$.

Si (G, G') est une paire duale réductive, irréductible, non triviale, alors G et G' vérifient les hypothèses du lemme. En effet, par le choix de B, l'un au moins des deux groupes, par exemple G, est de la forme $G = \{(\sigma, 0), \sigma \in \overline{G}\}$. La condition 2 est satisfaite ainsi que la première.

Ainsi $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}'$ commutent dans $\widetilde{PsB}$. Si l'extension métaplectique est scindée au-dessus de G et de G', alors elle l'est au-dessus de GG'.

Il suffit donc d'étudier la restriction de l'extension métaplectique au-dessus de chaque composante.

Auparavant, démontrons le lemme ci-dessus. La démonstration est semblable à celle des autres caractéristiques [8, Ch. II].

Dans un premier temps, on définit pour chaque élément s de PsB satisfaisant la deuxième hypothèse, un élément M tel que $(s, M) \in \widetilde{PsB}$.

Dans un deuxième temps, on montre que si s' est un élément de PsB qui commute avec s alors un élément de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de s' commute avec (s, M). D'où, le lemme précédent.

Soit $s = (\sigma, f) \in PsB$ tel que $\psi \circ f = 1$ sur $\mathrm{Ker}(id + \sigma)$.

Alors, la fonction $w \longmapsto \psi(Q(w) + f(w) + B(\sigma w, w))$ est constante sur les classes modulo $\mathrm{Ker}(id + \sigma)$. On définit M comme suit.

Soit dw une mesure de Haar sur l'espace vectoriel $W/\mathrm{Ker}(id + \sigma)$.

– Si F est fini

$$M \cdot v = \int_{W/\mathrm{Ker}(1+\sigma)} \psi(Q(w) + < \sigma w, w >) \rho_\psi((s + id)w) \cdot v dw, \quad v \in \mathcal{V}$$

où $(s + id)w$ désigne l'élément $s(w, 0) \cdot (w, 0)$ de $H(B)$.

– Si F est local, pour un réseau L de $W/\mathrm{Ker}(id + \sigma)$, on définit

$$M_L v = \int_L \psi(Q(w) + < \sigma w, w >) \rho_\psi((s + id)w) \cdot v dw, v \in \mathcal{V}$$

Pour tout v, il existe un réseau L_v de $W/\mathrm{Ker}(id + \sigma)$ tel que pour tout réseau L contenant L_v, $M_L v$ est indépendant de L. Soit M cet élément.

Tout le reste de la démonstration se déroule comme dans [8 Ch II].

3.2. Scindage au-dessus des composantes des paires duales

Cas de GLX_1 et GLX_2.

On est alors dans la situation décrite en I §2.2.1. Les groupes GLX_1 et GLX_2 sont des sous-groupes de GLX et $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de GLX donc également au-dessus de ces sous-groupes.

Cas de SpW_1 et $O(q_2)$.

Comme précédemment, $O(q_2)$ est un sous-groupe de GLX. L'extension métaplectique est scindée sur $\widetilde{O(q_2)}$. Le même argument est valable pour montrer que la restriction de $\widetilde{PsB}$ à $\widetilde{SpW_1}$ est scindée quand q_2 est déployée.

En effet, il suffit de considérer le groupe pseudosymplectique PsB' où

$$B'(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') =< w_1, w_1' >_1 < x_2, y_2' >_2$$

avec $X_2 \oplus Y_2 = W_2$ une polarisation complète en espaces singuliers,

$$w_2 = x_2 + y_2 \ \text{ et } \ w_2' = x_2' + y_2', x_2, x_2' \in X_2, \ \ y_2, y_2' \in Y_2.$$

Alors, $X' = W_1 \otimes_F X_2$ est singulier et il existe un isomorphisme entre PsB et PsB' tel que l'image de SpW_1 soit contenue dans GLX'.

Si q_2 n'est pas déployée, on considère l'espace vectoriel quadratique W_2', somme orthogonale de deux copies de W_2, muni de la forme quadratique déployée q_2' telle que, pour tout $(w, w') \in W_2'$, $q_2'(w, w') = q_2(w) + q_2(w') = b_2(w, w) + b_2(w', w')$. Le groupe SpW_1 se plonge dans $Ps(<,>_1 \otimes (b_2 \oplus b_2))$ en prolongeant chaque élément par $(id, 0)$ sur le deuxième facteur. D'après ce qui précède, l'image réciproque de SpW_1 dans $\widetilde{Ps}(<,>_1 \otimes (b_2 \oplus b_2))$ est scindée et par le lemme I 2.3b, l'extension métaplectique $\widetilde{PsB}$ au-dessus de SpW_1 est encore scindée.

Dans tous les cas, la restriction de l'extension métaplectique à SpW_1, $O(q_2)$ et SpW_2 est scindée.

Cas de $U(W_1)$ et $U(W_2)$

Quand F est fini, cette question a été étudiée par P. Gérardin [5] : l'extension métaplectique restreinte à $U(W_i)$ est scindée.

On suppose donc que F est un corps local et on se ramène au cas où W_1 est un plan hermitien hyperbolique sur une extension quadratique F' de F et W_2 est de dimension 1.

i) W_2 est un D-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne non dégénérée. L'existence d'une base orthogonale et le lemme I.2.3a permettent de supposer que $\dim_D W_2 = 1$.

ii) Supposons que D soit un corps de quaternions sur F. Alors W_2 s'identifie à D muni de la forme hermitienne : $< d, d' >_2 = \bar{d}ad'$ où $a \in F$.

Le corps D s'écrit :

$$D = F(\xi_1) + F(\xi_1)\xi_2$$

où ξ_1 engendre une extension quadratique séparable de F notée F', et ξ_2 engendre une extension inséparable, quadratique de F.

Soit $p : \begin{cases} D & \longrightarrow & F' \\ x + y\xi_2 & \longmapsto & x \end{cases}$. L'espace vectoriel $(W_1, p(<,>_1 a))$ est un espace vectoriel hermitien sur F' noté W'. On a

$$<,> = tr_{F'|F} p(<,>_1 a)$$

$$\text{et} \quad U(W_1) \subset U(W') \subset PsB.$$

S'il existe une section de $U(W')$ dans $\widetilde{U}(W')$, alors sa restriction à $U(W_1)$ définit une section de $U(W_1)$ dans $\widetilde{U}(W_1)$: il suffit donc de montrer que $\widetilde{U}(W')$ est scindée au-dessus de $U(W')$.

On suppose désormais que $D = F'$ est une extension quadratique séparable de F.

iii) En considérant l'espace vectoriel $W_1 \oplus W_1$ muni de la forme hermitienne

$$\ll (w, w'), (v, v') \gg = < w, v >_1 + < w', v' >_1, \quad w, w', v, v' \in W_1$$

et à l'aide du lemme I.2.3b, on se restreint au cas où W_1 est hermitien hyperbolique.

Si W_1 est de dimension supérieure ou égale à 4. Alors $SU(W_1)$ est le groupe des commutateurs de $U(W_1)$ [3, p 47-48] et $H^1(SU(W_1), \mathbb{C}^\times)$ est donc trivial.

On applique alors la suite de Hochschild-Serre à $U(W_1)$ et son sous-groupe distingué $SU(W_1)$:

$$0 \longrightarrow H^2(F'^1, \mathbb{C}^\times) \longrightarrow H^2(U(W_1), \mathbb{C}^\times) \longrightarrow H^2(SU(W_1), \mathbb{C}^\times).$$

L'homomorphisme d'inflation est : $\chi \longmapsto \chi \circ (\text{dét}, \text{dét})$. Or, par le théorème 9.5 de [11], $SU(W_1)$ n'a pas d'extension d'ordre 2. Il existe donc un élément χ de $H^2(F'^1, \mathbb{C}^\times)$ tel que le cocycle c de $\widetilde{U}(W_1)$ s'écrive : $c(\sigma, \sigma') = \chi(\text{dét } \sigma, \text{dét } \sigma')$, pour tout σ, σ' de $U(W_1)$. Considérons V un plan hyperbolique contenu dans W_1. Le groupe $U(V)$ s'identifie à un sous-groupe de $U(W_1)$ en prolongeant trivialement chaque élément et la restriction de $\widetilde{U}(W_1)$ à $U(V)$ est isomorphe à $\widetilde{U}(V)$.

Si l'extension $\widetilde{U}(V)$ de $U(V)$ est triviale alors, pour tout σ, σ' de $U(V)$,

$$c(\sigma, \sigma') = 1 \quad \text{i.e. } \chi(\text{dét } \sigma, \text{dét } \sigma') = 1$$

d'où, χ est trivial. Par suite, c est trivial.

Il reste à prouver que $\widetilde{U}(W_1)$ est scindée quand W_1 est un plan hermitien hyperbolique.

iv) On est donc dans le cas où

$$W \simeq W_1 \otimes_{F'} F' \simeq W_1$$

et $B(w_1, w_1') = tr_{F'|F}(\xi < w_1, w_1' > a_1)$, $a_1 \in F$ et $(1, \xi)$ est une base de F' sur F.

Quitte à transformer ξ en ξa_1 et ψ en $\psi_{a_1^{-1}}$ (prop. 2.1a), on peut supposer $a_1 = 1$.

Le groupe $U(W_1)$ s'identifie au sous-groupe de $GL(2, F')$ engendré par $SL(2, F)$ et $M = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \bar{d}^{-1} \end{pmatrix},\ d \in F'^* \right\}$.

Pour que $\widetilde{U}(W_1)$ soit scindée, il suffit que le cocycle métaplectique c soit trivial sur $SL(2, F) \times SL(2, F)$, $M \times M$, $SL(2, F) \times M$ et $M \times SL(2, F)$.

Soit (e, f) une base hyperbolique de W_1 sur F'. On note δ la norme de ξ. Dans la base $(e, \xi e, \xi f, f)$, B s'écrit

$$B((x_i), (x_i')) = x_1 x_4' + x_4 x_1' + \delta(x_2 x_3' + x_2' x_3)) + x_2' x_4 + x_1' x_3$$

où

$$(x_i) \quad \text{représente} \quad (x_1 + \xi x_2)e + (x_4 + \xi x_3)f,$$

$$(x_i') \quad \text{représente} \quad (x_1' + \xi x_2')e + (x_4' + \xi x_3')f.$$

On considère B' définie par : $B'((x_i), (x_i')) = x_1' x_3 + x_2' x_4$ et la forme quadratique q : $q((x_i)) = x_1 x_4 + \delta x_2 x_3$. La forme quadratique q, étant associée à $B + B'$, définit un isomorphisme entre PsB et PsB'.

L'image de $U(W_1)$ dans PsB' est $\{(\sigma, q \cdot \sigma + q), \sigma \in U(W_1)\}$.

En particulier si $\sigma \in M$, σ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & & \\ b\delta & a+b & & 0 \\ & 0 & a + b/n & \delta b/n \\ & & b/n & a/n \end{pmatrix}$$

où $n = a^2 + ab + \delta b^2$ et $q \cdot \sigma + q$ est nulle.

Donc, M est contenu dans GLX où X est l'espace vectoriel singulier engendré par e et ξe. On sait alors que c est trivial sur $M \times M$ (I. § 2.2.1).

Par [11 th. 9.4], $SL(2,F)$ n'a pas d'extension d'ordre 2 : $\widetilde{SL(2,F)}$ est nécessairement triviale.

Calculons $c(s,s')$ et $c(s',s)$ pour $s \in M$ et $s' \in SL_2(F)$ à partir des formules de r_ψ données en (I § 2.2). Pour ce faire, on choisit ψ_X trivial sur X. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble

$$\left\{ s, s', ss', s's \mid \quad s = \left(\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha}^{-1} \end{pmatrix}, 0\right),\ \alpha \in F'^* \right.$$

$$\text{et} \qquad \left. s' = \left(\sigma' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, f_{\sigma'}\right)\right\}.$$

Pour tout $s'' = (\sigma'', f'')$ de $\mathcal{E}$, $X \cap \sigma'' X$ est $\{0\}$ ou X, on définit $w_{s''}$ par :

$$\begin{cases} w_{s''} = 0 & \text{si} \quad X \cap \sigma'' X = \{0\} \\ w_{s''} \in Y & \text{si} \quad X \cap \sigma'' X = X \end{cases}.$$

Soit $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$,

$$\begin{aligned} r_\psi(s) r_\psi(s')\phi(h) &= r_\psi(s) \int_X \phi(s'^{-1}(w_{s'} x h))|c| dx \\ &= |\alpha|^{1/2} \int_X \phi(s'^{-1}(w_{s'} x) \cdot (ss')^{-1} h)|c| dx \\ &= |\alpha|^{1/2} \int_X \phi((ss')^{-1}(s w_{s'} \cdot \sigma x \cdot h))|c| dx \\ &= \textstyle\int_X \phi((ss')^{-1}(s w_{s'} \cdot x \cdot h)|\alpha|^{-1/2}|c| dx = r_\psi(ss')\phi(h) \end{aligned}$$

d'où $c(s,s') = 1$.

De même,

$$\begin{aligned} r_\psi(s') r_\psi(s)\phi(h) &= |\alpha|^{1/2} r_\psi(s')\phi(s^{-1}h) \\ &= \textstyle\int_X \phi(s^{-1} s'^{-1}(w_{s'} x h))|c|\ |\alpha|^{1/2} dx \\ &= r(s's)\phi(h) \end{aligned}$$

d'où $c(s',s) = 1$.

Donc, $\widetilde{U}(W_1)$ est scindée.

On a donc montré :

PROPOSITION. — *La restriction de l'extension métaplectique à toute paire duale réductive, irréductible, non triviale, est scindée.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI. — *Algèbre*, Ch. 8, *Modules et anneaux semi-simples*, Hermann, Paris, (1958).

[2] E. DICKSON. — *The abstract form of the special linear homogeneous group in an arbitrary field*, in *The collected mathematical papers*, Vol. 6, 127-131, Chelsea Publishing Company, New York, (1983).

[3] J. DIEUDONNÉ. — *La géométrie des groupes classiques*, Springer Ergebnisse 5, (1971).

[4] J. DIEUDONNÉ. — *On the structure of unitary groups* II, Amer. J. of Math. 75, (1973), 665-678.

[5] P. GÉRARDIN. — *Weil representations associated to finite fields*, J. of Algebra 46, (1977), 54-101.

[6] R. HOWE. — *θ-series and invariant theory*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sym. in Pure Math. XXXIII, AMS 1979, 275-286.

[7] S. KUDLA. — *On the local theta correspondence*, Inv. Math. 83, (1986), 229-255.

[8] C. MŒGLIN, M.-F. VIGNÉRAS et J.-L. WALDSPURGER. — *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Springer LN 1291, (1987).

[9] P. PERRIN. — *Représentation de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique* in *Noncommutative harmonic analysis and Lie groups*, Springer LN 880, (1981), 370-407 .

[10] H. POLLATSEK. — *First cohomology groups of some linear groups over fields of characteristic two*, Illinois J. of Math. 15, (1971), 393-417.

[11] G. PRASAD et M.S. RAGHUNATHAN. — *Topological central extensions of semi-simple groups over local fields*, Ann. of Math. 119, (1984), 143-201.

[12] W. SCHARLAU. — *Quadratic and hermitian forms*, Springer Grundlehren 270, (1985).

[13] J.-P. SERRE. — *Cohomologie des extensions de groupes*, C.R.A.S. Paris 231, (1950), 643-646.

[14] J.-L. WALDSPURGER. — *Notes manuscrites d'un cours à l'Université de Paris VII en 1989.*

[15] A. WEIL. — *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111, (1964), 143-211.

[16] A. WEIL. — *Basic number theory*, Springer Grundlehren 144, (1974).