

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-MARC FONTAINE
Sur les représentations d'Artin

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 71-81

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__71_0

© Mémoires de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES REPRESENTATIONS D'ARTIN

par

Jean-Marc FONTAINE

--:--:--

Soit K un corps local et soit L une extension galoisienne totalement ramifiée de K . Soit G le groupe de Galois de l'extension. Les groupes de ramification de l'extension munissent G d'une structure de groupe filtré. On peut associer à cette filtration des représentations linéaires de G , les représentations d'Artin et de Swan (voir n° 4.1) définies à un isomorphisme près par leurs caractères.

On peut se demander à quelles conditions ces représentations sont rationnelles sur un corps E de caractéristique 0 (c'est-à-dire réalisables par des matrices carrées à coefficients dans E). Le but de cet exposé est d'indiquer comment ce problème peut se ramener au cas où G a une structure très simple ; puis de montrer que, dans ce cas, les représentations d'Artin et de Swan sont rationnelles si et seulement si l'algèbre $E[G]$ est décomposée. On en déduit que les représentations d'Artin et de Swan de l'extension L/K sont rationnelles sur le corps des vecteurs de Witt du corps résiduel de K .

I - Indices de Schur.

I.1. - Rappels (cf par exemple [2], chap. II, § 11).

Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G . Soit E un corps de caractéristique 0. Si χ est le caractère d'une représentation de G rationnelle sur E , nous dirons, par abus de langage, que χ est rationnel sur E .

Si χ est le caractère d'une représentation absolument irréductible de G , et si $E(\chi)$ désigne le corps engendré sur E par les valeurs de χ , l'ensemble des entiers n strictement positifs tels que $n\chi$ soit rationnel sur $E(\chi)$ n'est pas vide. On démontre que le plus petit élément de cet ensemble est le p.g.c.d. des éléments de l'ensemble. Il est appelé l'indice de Schur de χ sur E et se note $m_E(\chi)$. L'entier $m_E(\chi)$ divise le degré de χ et, si F est une extension de E , $m_F(\chi)$ divise $m_E(\chi)$.

Si φ est un caractère de G , φ est rationnel sur E si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- (i) le caractère φ est à valeurs dans E ;
- (ii) quel que soit le caractère absolument irréductible χ de G , $m_E(\chi)$ divise (φ, χ) .

L'algèbre $E[G]$ est dite décomposée si et seulement si elle est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices sur des corps commutatifs. Pour cela, il faut et il suffit que les indices de Schur de tous les caractères absolument irréductibles de G soient égaux à un (cf par exemple [6], § 2).

I.2. - Soit p un nombre premier et soit G un groupe fini. On dit que G est de type R_p si G est le produit semi-direct d'un groupe cyclique H d'ordre premier à p par un p -sous-groupe invariant P .

PROPOSITION I.1. - Soit G un groupe de type R_p et soit E un corps de caractéristique 0 (si $p = 2$, on suppose de plus que E neutralise le corps des quaternions usuels sur \mathbb{Q}). Soit χ un caractère absolument irréductible de G . Alors $m_E(\chi)$ est premier à p .

Démonstration. Soit q la plus grande puissance de p qui divise $m_E(\chi)$. Un théorème dû à Brauer ([1], p. 250) affirme que q est l'indice de Schur d'un caractère absolument irréductible d'un sous-groupe A de G de type B_p (c'est-à-dire produit semi-direct d'un p -groupe par un groupe cyclique invariant d'ordre premier à p). Le groupe A est à la fois de type R_p et de type B_p ; c'est donc le produit direct d'un groupe cyclique A_1 d'ordre premier à p par un p -groupe P_1 . Roquette ([4]) a montré que si E satisfait les hypothèses de l'énoncé, l'algèbre $E[P_1]$ est décomposée. L'algèbre $E[A]$ l'est donc aussi puisque $E[A] = E[A_1] \otimes E[P_1]$ et que A_1 est abélien. En particulier, $q = 1$.

2 - Groupes de type C_p .

2.1. - Définition : Soit, avec les notations 1.2., $G = H.P$ un groupe de type R_p . Nous dirons que G est de type C_p , ou est un C_p -groupe, si P est abélien de type (p, \dots, p) et si, considéré comme $\mathbb{F}_p[H]$ -module, il est isotypique.

Nous noterons H' le noyau de la représentation canonique de H dans P et $G' = H' \times P$ le centralisateur de P dans G . Nous poserons

$$\begin{aligned} n &= (H:1) \quad , \quad d = (H:H') \quad , \quad m = (H':1) \quad (\text{on a } n = md) \\ \ell &= (P:1) \quad (\text{l'entier } \ell \text{ est une puissance de } p). \end{aligned}$$

Le groupe P est un $\mathbb{F}_p[H/H']$ -module fidèle et ceci entraîne que d divise $\ell-1$.

2.2. - On peut montrer que les caractères absolument irréductibles du C_p -groupe G sont

- d'une part, les n caractères de degré 1 de G/P ;

- d'autre part, $m(\ell-1)/d$ caractères de degré d induits par les caractères de degré 1 de G' non triviaux sur P . Nous désignerons par θ_G la somme de ces caractères.

On montre que

$$(1) \quad \theta_G(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in G - P \\ -m & \text{si } s \in P - \{1\} \\ m(\ell-1) & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

On voit alors que, quel que soit le corps E de caractéristique 0 et le caractère absolument irréductible χ de G , $m_E(\chi)$ divise d puisque le degré de χ est 1 ou d .

Comme θ_G est à valeurs dans \mathbb{Q} , et comme tout caractère absolument irréductible χ de G qui n'est pas de degré 1 vérifie $(\chi, \theta_G) = 1$, on voit que θ_G est rationnel sur E si et seulement si l'algèbre $E[G]$ est décomposée.

PROPOSITION 2.1. - Si E contient les racines n -ièmes de l'unité, l'algèbre $E[G]$ est décomposée.

Démonstration. Nous allons montrer que θ_G est rationnel sur E . Le groupe G opère sur P de la manière suivante :

- P opère sur lui-même par les translations : $s : x \rightarrow sx$;
- H opère sur P par les automorphismes intérieurs : $h : x \rightarrow h x h^{-1}$.

On en déduit une représentation de G sur l'espace vectoriel M des fonctions sur P à valeurs dans E ; soit χ le caractère de cette représentation. Pour tout t dans G de la forme $t = hs$, avec $h \in H$ et $s \in P$, $\chi(hs)$ est égal au nombre de solutions dans P de l'équation en x : $hsxh^{-1} = x$, ou encore, en posant $x^h = h^{-1}xh$, de l'équation : $x^{h^{-1}} = s$.

On vérifie immédiatement que, pour tout h dans H , l'application $x \rightarrow x^{h^{-1}}$ est un endomorphisme de G qui est un automorphisme si $h \notin H'$ et l'application $x \rightarrow 1$ si $h \in H'$. On a donc :

$$(2) \quad \chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \notin H' \times P \\ 0 & \text{pour } t \in H' \times P-H' \\ 1 & \text{pour } t \in H' \end{cases}$$

Le sous-espace M_1 engendré par la fonction φ définie par $\varphi(x) = 1$, pour tout x dans P , est un sous- $E[G]$ -module de M . La représentation définie par M_1 est la représentation unité de G . Les valeurs du caractère χ' de la représentation de G définie par $M' = M/M_1$ sont donc :

$$(3) \quad \chi'(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \notin H' \times P \\ -1 & \text{pour } t \in H' \times P-H' \\ 1-1 & \text{pour } t \in H' \end{cases}$$

Soient alors h_0 un générateur de H et a une racine primitive n -ième de l'unité contenue dans E . Pour $j = 0, 1, \dots, m-1$, les caractères de degré 1 de G définis par

(4) $\xi_j(h_0^k s) = a^{jk}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ et pour $s \in P$ sont rationnels sur G ; il en est donc de même du caractère $\eta = \sum_0^{m-1} \xi_j$. Les valeurs de la restriction de η à $H' \times P$ sont :

$$(5) \quad \eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in H' \times P-H' \\ -m & \text{si } t \in P \end{cases}$$

Si N est un $E[G]$ -module qui définit une représentation dont le caractère est η , le caractère de la représentation définie par le produit tensoriel $M' \otimes N$ est le produit $\chi \eta$ et on vérifie sur les valeurs des caractères que $\chi \eta = \theta_G$.

3 - Groupes de ramification.

3.1. - Soit K un corps local (c'est-à-dire un corps complet pour une valuation discrète). Soit p la caractéristique de son corps résiduel (on suppose $p \neq 0$). Soit L une extension galoisienne totalement ramifiée de K (les corps résiduels de L et de K sont les mêmes). Soit π une uniformisante de L et soit v la valuation de L normalisée de telle sorte que $v(\pi) = 1$. Pour tout s dans G , on pose :

$$(6) \quad \begin{cases} i_G(s) = v((s-1)^\pi/\pi) & \text{si } s \neq 1 \\ i_G(1) = +\infty. \end{cases}$$

Soit, pour tout entier i , G_i l'ensemble des s dans G tels que $i_G(s) \geq i$. La famille des G_i munit G d'une filtration dont la fonction d'ordre est i_G . Soit

$$(7) \quad i_1 < i_2 < \dots < i_q,$$

la suite des nombres de ramification strictement positifs de l'extension (c'est-à-dire la suite des entiers i strictement positifs tels que $G_i \neq G_{i+1}$). Posons $\Gamma_0 = G$, $\Gamma_j = G_{i_j}$ pour $j = 1, 2, \dots, q$, $\Gamma_{q+1} = \{1\}$. On obtient ainsi une suite de sous-groupes de G :

$$(8) \quad G = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \dots \supset \Gamma_q \supset \Gamma_{q+1} = \{1\}.$$

3.2. - Définition : Soit G un groupe de type R_p et soit

$$(8') \quad G = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \dots \supset \Gamma_q \supset \Gamma_{q+1} = \{1\},$$

une suite de sous-groupes invariants de G , tous distincts, sauf peut-être Γ_0 et Γ_1 . Nous dirons que (8') est une C_p -suite associée à G si les conditions suivantes sont réalisées :

- (i) le quotient Γ_0/Γ_1 est cyclique d'ordre premier à p ;
- (ii) pour $j = 1, 2, \dots, q$, Γ_j/Γ_{j+1} est un groupe abélien de type (p, \dots, p) contenu dans le centre de Γ_1/Γ_{j+1} qui, en tant que $\mathbb{F}_p[\Gamma_0/\Gamma_1]$ -module est isotypique.

On voit que si, avec les notations de 1.2., $G = H.P$, alors $P = \Gamma_1$ et H est isomorphe à Γ_0/Γ_1 . Pour $j = 1, 2, \dots, q$, $H \cdot \Gamma_j/\Gamma_{j+1}$ est un C_p -groupe qui ne dépend du choix de H qu'à un isomorphisme près.

Définition : nous appellerons l'ensemble des $H.\Gamma_j/\Gamma_{j+1}$ pour $j = 1, 2, \dots, q$ un système complet de C_p -groupes associés à la C_p -suite (8').

On démontre (cf par exemple [3], § 1) :

PROPOSITION 3.1. - Sous les hypothèses et les notations de 3.1., le groupe de Galois G de l'extension L/K est de type R_p et la suite (8) est une C_p -suite associée à G .

Définition. Soit, pour $j = 1, 2, \dots, q$, L_j (resp. N_j) le corps fixe de Γ_{j+1} (resp. $H.\Gamma_j$). Nous appellerons l'ensemble des L_j/N_j un système complet de C_p -extensions associées à L/K .

L'extension L_j/N_j est une extension galoisienne dont le groupe de Galois est le C_p -groupe $H.\Gamma_j/\Gamma_{j+1}$; on peut montrer (cf CL, cor. à la prop. 3 et prop. 2, p. 70-71) qu'elle a un seul nombre de ramification strictement positif et qu'il est égal à i_j . Le choix de N_j n'est pas en général unique mais pour deux choix distincts les groupes de Galois sont isomorphes en tant que groupes filtrés.

3.3. - Définition : Avec toujours les mêmes notations, posons, pour $j=0, 1, \dots, q$, $e_j = (G : \Gamma_{j+1})$ et

$$(9) \quad u_j = i_1/e_0 + (i_2 - i_1)/e_1 + \dots + (i_j - i_{j-1})/e_{j-1} .$$

La suite

$$(10) \quad u_1 < u_2 < \dots < u_q ,$$

est appelée la suite des nombre supérieurs de ramification strictement positifs de l'extension L/K . Les i_j sont donnés, à partir des u_j , par :

$$(II) \quad i_j = u_1 (e_0 - e_1) + \dots + u_{j-1} (e_{j-2} - e_{j-1}) + u_j e_{j-1} .$$

On peut alors démontrer :

PROPOSITION 3.2. - (a) pour tout entier j compris entre 1 et q , $(e_{j-1} u_j - i_j)/e_0$ est un entier rationnel.

(b) si L/K est une C_p -extension, c'est-à-dire si $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 = \{1\}$, G est un C_p -groupe et, avec les notations de 2.1., $(i_1, n) = m$.

4 - Représentations d'Artin et de Swan.

4.1. - Définition : Avec les notations et les hypothèses de 3.1. , considérons les applications de G dans Z définies par

$$(I2) \quad \begin{cases} sw_G(s) = -i_G(s) & \text{si } s \neq 1 \\ sw_G(1) = \sum_{s \neq 1} i_G(s) \end{cases}$$

$$(I3) \quad \begin{cases} a_G(s) = -(i_G(s) + 1) & \text{si } s \neq 1 \\ a_G(1) = \sum_{s \neq 1} (i_G(s) + 1) \end{cases}$$

On démontre (CL , chap. VI, théorème 1) que a_G est le caractère d'une représentation linéaire du groupe G . On vérifie qu'il en est de même pour sw_G et que a_G et sw_G sont liés par la relation

$$(I4) \quad sw_G = a_G - u_G$$

où u_G désigne le caractère de la représentation d'augmentation de G (quotient de la représentation régulière par la représentation unité). La représentation définie par sw_G (resp. a_G), à un isomorphisme près, s'appelle la représentation de Swan (resp. d'Artin) de l'extension L/K .

4.2. - PROPOSITION 4.1. - Avec les hypothèses et les notations du paragraphe 3 :

(a) soit, pour $j = -1, 0, 1, \dots, q$, r_j le caractère de la représentation régulière de G/Γ_{j+1} . Posons $\varphi_j = r_j - r_{j-1}$ ($j \geq 0$) . Alors les φ_j sont des caractères de représentations de G , deux à deux orthogonaux.

(b) si on pose $u_0 = 0$, on a les relations

$$(I5) \quad sw_G = \sum_0^q u_j \varphi_j$$

$$(I6) \quad a_G = \sum_0^q (u_j + 1) \varphi_j$$

(c) pour $j = 1, 2, \dots, q$, $u_j \varphi_j$ est le caractère d'une représentation de G .

Démonstration. Pour démontrer (a) il suffit de calculer les valeurs des φ_j et de vérifier que si $j \neq j'$, $(\varphi_j, \varphi_{j'}) = 0$.

Soit alors, pour $j = 0, 1, \dots, q$, sw_j le caractère de la représentation de Swan de l'extension L_j/K (L_j désignant le corps fixe de Γ_{j+1}). On a $sw_G = sw_q = \sum_0^q (sw_j - sw_{j-1})$ car $sw_0 = 0$. On vérifie sur les valeurs des caractères que $sw_j - sw_{j-1} = u_j \varphi_j$, d'où (I5). Comme $a_G = sw_G + u_G$ et $u_G = r_G - l_G = \sum_0^q r_j - r_{j-1} = \sum_0^q \varphi_j$, on en déduit (I6).

L'assertion (c) résulte alors de ce que les φ_j sont deux à deux orthogonaux et de ce que a_G et sw_G sont des caractères de représentations de G .

COROLLAIRE. Soit E un corps de caractéristique 0. Pour que la représentation d'Artin (ou, ce qui revient au même, la représentation de Swan) de l'extension L/K soit rationnelle sur E , il faut et il suffit que, pour $j = 1, 2, \dots, q$, $u_j \varphi_j$ soit rationnel sur E .

(C'est évident, puisque les $u_j \varphi_j$ sont à valeurs dans \mathbb{Q} et deux à deux orthogonaux).

PROPOSITION 4.2. - Soit E un corps de caractéristique 0 (si $p = 2$, on suppose de plus que E neutralise le corps des quaternions usuels sur \mathbb{Q}). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la représentation d'Artin (ou de Swan) de L/K est rationnelle sur E ;
- (ii) les représentations d'Artin (ou de Swan) d'un système complet de C_p -extensions associées à L/K sont rationnelles sur E .

Démonstration. Avec les notations du paragraphe 3, soit $\{A_j = H.P_j ; j=1, 2, \dots, q\}$ l'ensemble des groupes de Galois d'un système complet de C_p -extensions associées à L/K . Le groupe H est cyclique d'ordre $n = e_0$ premier à p et $P_j = \Gamma_j / \Gamma_{j+1}$ est un p -groupe d'ordre e_j / e_{j-1} , invariant dans A_j .

Soit R_j (resp. R_0) le caractère de la représentation régulière de A_j (resp. A_j/P_j , isomorphe à H). La fonction $\Phi_j = R_j - R_0$ est le caractère d'une représentation de A_j rationnelle sur E , et (I5) appliquée à A_j s'écrit :

$$(I7) \quad sw_{A_j} = \frac{1}{n} \times i_j \Phi_j .$$

Posons $e'_{j-1} = e_{j-1}/n$. La proposition 3.2. montre que $e'_{j-1} u_{j-1} \varphi_j/n$ est un entier rationnel. Le caractère sw_{A_j} est donc rationnel sur E si et seulement si $e'_{j-1} u_j \Phi_j$ l'est. Compte-tenu du corollaire de la proposition précédente, il suffit alors de montrer :

LEMME. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) le caractère $u_j \varphi_j$ est rationnel sur E ;
- (ii) le caractère $e'_{j-1} u_j \Phi_j$ est rationnel sur E .

Démonstration. Si l'on considère A_j comme sous-groupe de G/Γ_{j+1} , on observe que la restriction de φ_j à A_j est $e'_{j-1} \Phi_j$, celle de $u_j \varphi_j$ est donc $e'_{j-1} u_j \Phi_j$ et (i) implique (ii).

Inversement, on constate sur les valeurs des caractères que φ_j est le caractère de G/Γ_{j+1} induit par le caractère Φ_j du sous-groupe A_j de G/Γ_{j+1} . Par conséquent, si $e'_{j-1} u_j \Phi_j$ est rationnel sur E , $e'_{j-1} u_j \varphi_j$ l'est aussi. Comme $u_j \varphi_j$ est à valeurs dans \mathbb{Q} , pour que $u_j \varphi_j$ soit rationnel sur E , il faut et il suffit que, quel que soit le caractère absolument irréductible χ de G , l'entier $c_\chi = (\chi, u_j \varphi_j)$ soit divisible par $m_E(\chi)$. Or $e'_{j-1} c_\chi = (\chi, e'_{j-1} u_j \varphi_j)$ est divisible par $m_E(\chi)$ puisque $e'_{j-1} u_j \varphi_j$ est rationnel sur E . Comme e'_{j-1} est une puissance de p et comme $m_E(\chi)$ est premier à p (prop. 1.1.), $m_E(\chi)$ divise aussi c_χ .

4.3. - **THEOREME 1.** - Soit E un corps de caractéristique 0 (si $p = 2$, on suppose de plus que E neutralise le corps des quaternions usuels sur \mathbb{Q}). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la représentation d'Artin (ou de Swan) de L/K est rationnelle sur E ;
- (ii) si $(A_j)_{j=1,2,\dots,q}$ est un système complet de C_p -groupes associées à L/K , les algèbres $E[A_j]$ sont toutes décomposées.

Démonstration. Compte-tenu de la proposition 4.2., il suffit de montrer que, si L/K est une C_p -extension, la représentation de Swan de L/K est rationnelle sur E si et seulement si l'algèbre $E[G]$ est décomposée. Soit i l'unique nombre de ramification strictement positif de l'extension. Le groupe G est de type C_p et, avec les notations du paragraphe 2, on vérifie sur les valeurs des caractères que $\text{sw}_G = \frac{1}{m} \times i \theta_G$. Posons $i' = i/m$. Le nombre i' est un entier positif premier à d (prop. 3.2., (b)). On a $\text{sw}_G = i' \theta_G$. Soit χ un carac-

tère absolument irréductible de G qui divise sw_G . On a $(\chi, \theta_G) = 1$ et, par conséquent $(\chi, sw_G) = i'$. Comme $m_E(\chi)$ divise d qui est premier à i' , (χ, sw_G) sera divisible par $m_E(\chi)$ si et seulement si $m_E(\chi) = 1$, d'où le résultat.

THEOREME 2. - Si le corps résiduel k de K est parfait, les représentations d'Artin et de Swan de l'extension L/K sont rationnelles sur le corps des vecteurs de Witt de k .

Démonstration. Si $p \neq 2$, on peut appliquer le théorème 1. Si n désigne le degré de l'extension maximale modérément ramifiée (c'est-à-dire de degré premier à p) de K contenue dans L , le corps résiduel k de K contient les racines n -ièmes de l'unité (CL, cor. 1 à la prop. 7, p. 75), donc aussi le corps E des vecteurs de Witt de k . Chaque A_j est un C_p -groupe d'ordre $np^{r(j)}$, avec $r(j)$ entier positif et d'après la proposition 2.1., l'algèbre $E[A_j]$ est décomposée.

Si $p = 2$ et si le corps résiduel k de K contient les racines cubiques de l'unité, le corps des vecteurs de Witt neutralise le corps des quaternions usuels sur \mathbb{Q} et la même démonstration s'applique.

Si $p \neq 2$ et si le corps résiduel ne contient pas les racines cubiques de l'unité, la démonstration se fait en se ramenant au cas où G est un groupe de quaternions. On montre qu'on a alors des congruences entre les nombres de ramification qui sont plus fortes que celles qui peuvent se déduire du théorème de Hasse-Arf.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRAUER (R.). - On the algebraic structure of group rings, J. Math. Soc. Japan, 3 (1951) p. 237-251.
- [2] FEIT (W.). - Characters of finite groups, New-York, Benjamin, 1967.
- [3] MAUS (E.). - Die gruppentheoretische Struktur der Verzweigungsgruppenreihen, J. reine ang. Math., 230, (1968) p. I-28.
- [4] ROQUETTE (P.). - Realisierung von Darstellugen endlicher nilpotenter Gruppen, Arch. Math., 9 (1958) p. 241-250.

- [5] SERRE (J.P.). - Corps locaux. Paris, Hermann, 1962 (cité CL).
- [6] SERRE (J.P.). - Sur la rationalité des représentations d'Artin. Annals of Math., 72 (1960) p. 405-420.

-:-:-:-

6, rue Gounod
Paris 17e (France)