MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-MICHEL BISMUT

Superconnexions, indice local des familles, déterminant de la cohomologie et métriques de Quillen

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 46 (1991), p. 27-72
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__27_0>

Superconnexions, indice local des familles, déterminant de la cohomologie et métriques de Quillen

par

Jean-Michel BISMUT

L'objet de cet article est de donner une présentation systématique de travaux récents concernant les superconnexions, l'indice local des familles, le déterminant de la cohomologie et les métriques de Quillen.

Rappelons en effet qu'en utilisant le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1], nous avons démontré dans [B1] un Théorème d'indice local pour une famille d'opérateurs de Dirac. Le résultat de [B1] détermine une forme différentielle explicite sur la base B d'une submersion $\pi : M \to B$, canoniquement associée à certaines données naturelles de géométrie différentielle, qui représente en cohomologie le caractère de Chern de la famille d'opérateurs considérés. Ce résultat est une version précisée du Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2], où le caractère de Chern est calculé dans $H^*(B, Q)$.

Dans [BF1, 2], par transgression de formes de superconnexions de Quillen et en utilisant le Théorème d'indice local des familles de [B1], Bismut et Freed construisent une métrique et une connexion unitaire sur le fibré déterminant λ associé à une telle famille d'opérateurs de Dirac. Ces deux objets sont "naturels" dans le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1]. L'un des résultats importants de [BF1, 2] est de montrer que la courbure de la connexion ainsi construite est exactement la partie de degré deux de la forme sur B obtenue dans [B1].

Dans Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3], par utilisation de techniques de double transgression de formes de superconnexions de Quillen, les auteurs ont montré qu'on pouvait utiliser les résultats de [B1], [BF1, 2] pour construire une métrique "naturelle" C^∞ sur l'inverse $\lambda^G(\xi)$ du déterminant de l'image directe par une submersion holomorphe $\pi : X \to S$ du faisceau des sections holomorphes d'un fibré holomorphe

ξ sur X. Cette métrique est la métrique de Quillen sur $\lambda^G(\xi)$, par référence à la construction par Quillen [Q2] d'une telle métrique. Le résultat fondamental de [BGS1, 2, 3] est le calcul de la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne associée à la métrique de Quillen sur $\lambda^G(\xi)$, qui fournit une version précisée du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck appliqué au déterminant d'une image directe par submersion. Le calcul de courbure de [BGS1, 2, 3] est une généralisation d'un calcul correspondant de Quillen [Q2] dans le cas où X est une variété produit dont la fibre est une surface de Riemann fixe Z.

Dans une série de travaux de Bismut [B3, 4], Bismut-Gillet-Soulé [BGS4, 5], Bismut-Lebeau [BL1, 2], on a étudié diverses questions liées à l'obtention d'une version avec métriques du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les plongements complexes. Plus exactement soit $i : Y \to X$ un plongement de variétés compactes complexes, soit η un fibré holomorphe sur Y, et soit (ξ, v) un complexe de fibrés holomorphes sur X qui fournit une résolution du faisceau $i_* \mathcal{O}_Y(\eta)$, où $\mathcal{O}_Y(\eta)$ est le faisceau des sections holomorphes de η sur Y. Les fibres $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$, qui sont les inverses des déterminants de la cohomologie de η et ξ, sont alors canoniquement isomorphes [KM]. Quand $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$ sont munis de métriques de Quillen, une question naturelle est de calculer la norme de la section $\sigma \in (\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)$ identifiant $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$. Dans [B3, 4], [BGS4, 5] on construit des courants sur X naturellement associés au plongement et aux fibrés holomorphes Hermitiens considérés. Enfin dans Bismut-Lebeau [BL1, 2], on calcule la norme de σ à l'aide des objets locaux introduits dans [B3, 4], [BGS 4, 5]. Notons que les constructions de [B3, 4], [BGS4, 5] sont "naturelles" dans le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1], et que ce formalisme resurgit de manière implicite dans [BL1, 2].

Cet article couvre rapidement les sujets évoqués précédemment. La Section 1 est consacrée aux superconnexions de Quillen [Q1] et au Théorème d'indice des familles local de [B1]. Dans la Section 2, on présente certains résultats de Bismut-Freed [BF1, 2] sur le fibré déterminant associé à une famille C^∞ d'opérateurs de Dirac. Dans la Section 3, on introduit les métriques de Quillen et on énonce le Théorème de courbure de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3]. Enfin dans la Section 4, on expose certains résultats de Bismut [B3, 4], Bismut-Gillet-Soulé [BGS4, 5] et Bismut-Lebeau [BL1, 2] implicitement ou explicitement reliés au comportement de la métrique de Quillen par image directe associée à un plongement.

Comme nous l'avons dit plus haut, les superconnexions de Quillen [Q1] sont omniprésentes dans toutes les constructions. La compatibilité des superconnexions de Quillen [Q1] à la torsion analytique de Ray-Singer [RS], qui est exhibée dans [BGS1], joue également un rôle clef dans tous les travaux considérés dans les Sections 3 et 4.

Nous avons laissé de côté les motivations profondes qui justifient la construction de métriques de Quillen du point de vue de la théorie d'Arakelov. Nous n'évoquons que brièvement le Théorème de Faltings-Riemann-Roch [F, Théorème 3], [La, Théorème V 3.4], ainsi que les travaux de Gillet-Soulé [GS1, 2, 3, 4]. En particulier, en utilisant le résultat de [BL1, 2], Gillet et Soulé [GS4] viennent d'établir le Théorème de Riemann-Roch arithmétique à la Arakelov-Faltings conjecturé dans [GS3]. Le résultat de Gillet et Soulé [GS4] utilise en particulier la compatibilité entre des résultats de [GS3] et de [B4], [BL1, 2].

Les constructions géométriques exposées dans cet article devraient avoir d'autres applications, en particulier en théorie de de Rham et en géométrie complexe.

L'auteur remercie un rapporteur pous ses remarques et ses commentaires.

I - SUPERCONNEXIONS ET THÉOREME D'INDICE LOCAL DES FAMILLES

Dans cette section, nous introduisons les superconnexions de Quillen [Q1] et nous énonçons le Théorème d'indice local des familles de Bismut [B1].

En a), nous rappelons le formalisme classique de Chern-Weil pour la construction du caractère de Chern d'un fibré E. En b), nous montrons que les superconnexions de Quillen [Q1] sont une extension naturelle de la théorie de Chern-Weil permettant la construction de formes différentielles non triviales représentant le caractère de Chern d'une différence de fibrés, ou de manière équivalente d'un fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué. En c), on rappelle la formule de McKean-Singer [MKS] qui exprime l'indice d'un opérateur elliptique par une formule où intervient un opérateur de la chaleur associé. Enfin en d), on rappelle la construction dans [B1] de la superconnexion de Levi-Civita associée à une famille d'opérateurs de Dirac agissant sur les fibres d'une submersion $\pi : M \to B$, et on énonce le théorème d'indice des familles local correspondant [B1]. On explique brièvement les liens entre le théorème d'indice local usuel de Patodi [P], Gilkey [Gi1,2], Atiyah-Bott-Patodi [ABoP], et le théorème d'indice des familles local de [B1].

a) Connexions

Soit E un fibré complexe sur une variété B. Soit ∇^E une connexion sur E. ∇^E définit un opérateur différentiel du premier ordre agissant sur $\Gamma\left(\Lambda\left(T^* B\right) \otimes E\right)$, tel que si $\omega \in \Gamma\left(\Lambda\left(T^* B\right)\right)$, $e \in \Gamma(E)$, on a

$$\nabla^E(\alpha e) = d\alpha e + (-1)^{\deg\alpha} \alpha \nabla^E e. \tag{1.1}$$

Dans ce formalisme, la courbure R^E de ∇^E est une section de $\Lambda^2\left(T^* B\right) \otimes \operatorname{End}(E)$ donnée par la formule

$$R^E = (\nabla^E)^2 \tag{1.2}$$

Par la théorie de Chern-Weil, le caractère de Chern de E est représenté en cohomologie par la forme différentielle

$$\omega = \mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\frac{\left(\nabla^{E}\right)^{2}}{2i\pi}\right)\right]. \tag{1.3}$$

Vérifions brièvement que ω est fermée. On a l'identité de Bianchi

$$[\nabla^{E}, (\nabla^{E})^{2}] = 0. \tag{1.4}$$

Donc de (1.2)-(1.4), on tire

$$d\omega = d\,\mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\frac{\left(\nabla^{E}\right)^{2}}{2i\pi}\right)\right] = \mathrm{Tr}\left[\left[\nabla^{E}, \exp\left(-\frac{\left(\nabla^{E}\right)^{2}}{2i\pi}\right)\right]\right] = 0. \tag{1.5}$$

Notons que dans (1.5), on a implicitement utilisé le fait que si $A, B \in \mathrm{End}(E)$, alors $\mathrm{Tr}[A, B] = 0$.

Remarquons aussi que le fait que la classe de cohomologie de ω ne dépend pas de ∇^{E} résulte trivialement du fait que ω est universellement fermée.

b) Superconnexions.

Soit $E = E_{+} \oplus E_{-}$ un fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué sur E. Soit $\nabla^{E} = \nabla^{E_+} \oplus \nabla^{E_-}$ une connexion sur E préservant la $\mathbb{Z}_2$-graduation. Un représentant naturel du caractère de Chern du fibré virtuel $E_{+} - E_{-}$ est la forme ω donnée par

$$\omega = \mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\frac{\left(\nabla^{E_+}\right)^{2}}{2i\pi}\right)\right] - \mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\frac{\left(\nabla^{E_-}\right)^{2}}{2i\pi}\right)\right] \tag{1.6}$$

Dans [Q1], Quillen introduit de nouvelles formes fermées représentant en cohomologie $\mathrm{ch}(E_{+} - E_{-})$. Reprenons la construction de [Q1].

L'algèbre End(E) est $\mathbb{Z}_2$-graduée, les éléments pairs (resp. impairs) commutent (resp. anticommutent) avec l'opérateur τ de End (E) définisant la $\mathbb{Z}_2$-graduation ($\tau = \pm 1$ sur $E_\pm$). On forme alors l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\Lambda(T^* B) \widehat{\otimes} \mathrm{End}(E)$.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre $\mathbb{Z}_2$ graduée, si a, b $\in \mathcal{A}$, on définit le supercommutateur [a, b] par la formule

$$[a, b] = ab - (-1)^{\deg a \deg b}\, ba. \tag{1.7}$$

Le commutateur usuel correspond à une graduation triviale sur l'algèbre.

Si $A \in \mathrm{End}\, E$, on définit la supertrace $\mathrm{Tr}_s[A]$ par la formule

$$\mathrm{Tr}_s[A] = \mathrm{Tr}[\tau A] \tag{1.8}$$

On étend Tr_s en une application linéaire de $\Lambda(T^* B) \widehat{\otimes} \mathrm{End}(E)$ dans $\Lambda(T^* B)$ avec la convention que si $\omega \in \Lambda(T^* B)$, $A \in \mathrm{End}(E)$, alors

$$\mathrm{Tr}_s[\omega A] = \omega \mathrm{Tr}_s[A] \tag{1.9}$$

Une propriété fondamentale de la supertrace Tr_s est qu'elle s'annule sur les supercommutateurs [Q1].

Soit maintenant C un section C^∞ de $\left(\Lambda(T^* B) \widehat{\otimes} \mathrm{End}(E)\right)^{\text{impair}}$. $\nabla^E + C$, qui est un opérateur différentiel du premier ordre agissant sur $\Gamma\left(\Lambda(T^* B) \widehat{\otimes} \mathrm{End}(E)\right)$, est une superconnexion au sens de Quillen [Q1]. La courbure de la superconnexion $\nabla^E + C$ est son carré $(\nabla^E + C)^2$. Par les règles d'anticommutation sur $\Lambda(T^* B) \widehat{\otimes} \mathrm{End}(E)$, $(\nabla^E + C)^2$ est un tenseur et plus exactement une section C^∞ de $\left(\Lambda(T^* B) \widehat{\otimes} \mathrm{End}(E)\right)^{\text{pair}}$. En effet

$$(\nabla^E + C)^2 = (\nabla^E)^2 + C^2 + [\nabla^E, C]. \tag{1.10}$$

Or $[\nabla^E, C]$ est exactement la dérivée covariante $\nabla^E . C$ de C, i.e. un tenseur.

Soit φ l'homomorphism $\omega \in \Lambda^{pair}(T^*B) \to (2i\pi)^{-\deg\omega/2}\omega \in \Lambda^{pair}(T^*B)$. On a le résultat fondamental de Quillen [Q1].

Théorème 1.1 : La forme différentielle paire

$$\omega = \varphi \mathrm{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\nabla^E + C\right)^2\right)\right] \tag{1.11}$$

est fermée et représente en cohomologie $ch(E_+ - E_-)$.

Preuve : On a encore l'identité de Bianchi généralisée

$$[\nabla^E + C, (\nabla^E + C)^2] = 0. \tag{1.12}$$

En utilisant le fait que Tr_s s'annule sur les supercommutateurs, on tire de (1.12) que

$$d\mathrm{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\nabla^E + C\right)^2\right)\right] = \mathrm{Tr}_s\left[\left[\nabla^E + C\,,\ \exp\left(-\left(\nabla^E + C\right)^2\right)\right]\right] = 0\,. \tag{1.13}$$

ω est donc fermée. Comme pour $C = 0$, ω coincide avec la forme (1.6), un argument trivial de déformation montre que ω représente le caractère de Chern de $E_+ - E_-$.

$\square$

Exemple 1.2 : Supposons que C soit une section C^∞ de $T^*B \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{End}^{pair}(E)$. Alors $\nabla^E + C$ est encore une connexion sur E préservant la $\mathbb{Z}_2$-graduation . Le Théorème 1.1 est alors trivial.

Exemple 1.3 : Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$ une section de C^∞ de $\mathrm{End}^{impair}(E)$. Alors $\nabla^E + D$ est une superconnexion sur E. Sa courbure $(\nabla^E + D)^2$ est donnée par

$$(\nabla^E + D)^2 = (\nabla^E)^2 + D^2 + \nabla^E.D \tag{1.14}$$

où $\nabla^E.\,D$ est la dérivée covariante de D. La matrice de $(\nabla^E + D)^2$ est exactement

$$(1.15)\qquad \begin{pmatrix} \left(\nabla^{E_+}\right)^2 + D_-D_+ & \nabla^E D_- \\ \nabla^E D_+ & \left(\nabla^{E_-}\right)^2 + D_+D_- \end{pmatrix}$$

L'exemple 1.3 joue un rôle capital dans la suite.

<u>Remarque 1.4</u> : De manière remarquable, dans l'application que nous avons donnée des superconnexions de Quillen au théorème local de l'indice des familles [B1], le fait qu'on puisse perturber la connexion ∇^E par n'importe quelle section C^∞ de $\left(\Lambda\left(T^*B\right)\widehat{\otimes}\,\mathrm{End}\,(E)\right)^{\mathrm{impair}}$, et pas seulement par les perturbations décrites dans les exemples 1.2 et 1.3, joue un rôle essentiel.

c) Equation de la chaleur et théorème de l'indice

Soit Z une variété compacte. Soit $E = E_+ \oplus E_-$ un fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué sur Z, muni d'un produit hermitien tel que E_+ et E_- soient orthogonaux dans E.

Soit D un opérateur différentiel agissant sur $\Gamma(E)$ et échangeant $\Gamma(E_+)$ et $\Gamma(E_-)$. Dans le formalisme de la Section 1b), on a

$$D \in \mathrm{End}^{\mathrm{impair}}(\Gamma(E)).$$

Soit $D_\pm$ la restriction de D à $\Gamma(E_\pm)$. On écrit D sous la forme matricielle

$$(1.16)\qquad D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

On a en particulier

$$(1.17)\qquad D^2 = \begin{pmatrix} D_-D_+ & 0 \\ 0 & D_+D_- \end{pmatrix}.$$

Supposons de plus que D soit un opérateur elliptique du premier ordre de symbole prrincipal autoadjoint. D^2 est alors un opérateur elliptique du deuxième ordre de symbole principal défini positif. En particulier, pour $t > 0$, $\exp(-tD^2)$ est un opérateur à trace.

Soit $\mathrm{Ind}(D_+)$ l'indice de D_+, i.e.

$$\mathrm{Ind}(D_+) = \dim(\mathrm{Ker}\, D_+) - \dim(\mathrm{Ker}\, D_+^*). \tag{1.18}$$

Rappelons le résultat de Mc Kean-Singer [MKS] étendu dans [B2, Theorem 1.2].

<u>Théorème 1.5</u> : Pour tout $t > 0$, on a

$$\mathrm{Ind}\left(D_+\right) = \mathrm{Tr}_s\left[\exp\left(-tD^2\right)\right] \tag{1.19}$$

<u>Preuve</u> : Si D est autoadjoint, (1.19) est exactement la formule de McKean-Singer [MKS] , qu'on démontre très simplement par la théorie spectrale. Plus généralement comme D est à symbole principal autoadjoint, on peut déformer D en un opérateur autoadjoint D_1 par une famille C^∞ d'opérateurs $\ell \in [0,1] \to D_\ell$ telle que $D_0 = D$, ayant même symbole principal que D. On va alors utiliser le formalisme de la Section 1b), et manipuler les noyaux C^∞ des opérateurs considérés pour justifier les considérations formelles qui suivent. Trivialement

$$[D_\ell, D_\ell^2] = 0. \tag{1.20}$$

De (1.20) et du fait que Tr_s s'annule sur les supercommutateurs, on tire

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\mathrm{Tr}_s\left[\exp\left(-tD_\ell^2\right)\right]$$

$$= -t\,\mathrm{Tr}_s\left[\left[D_\ell, \frac{\partial D_\ell}{\partial \ell}\right]\exp\left(-tD_\ell^2\right)\right] = -t\,\mathrm{Tr}_s\left[\left[D_\ell, \frac{\partial D_\ell}{\partial \ell}\exp\left(-tD_\ell^2\right)\right]\right] = 0$$

On a donc montré le Théorème 1.5. □

Remarque1.6 : Le Théorème 1.5 a une valeur essentiellement pédagogique. Nous avons en effet appliqué le formalisme des superconnexions dans une situation très éloignée des motivations de la Section 1b).

La comparaison des formules (1.3) et (1.19) montre leur similarité formelle. La formule de Quillen (1.11) est une extraordinaire synthèse de la formule (1.3) pour le caractère de Chern en théorie de Chern-Weil et de la formule de McKean-Singer (1.19) pour l'indice d'un opérateur elliptique . Rappelons pour terminer la formule pour la densité de la loi gaussienne sur R

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right). \tag{1.21}$$

La ressemblance de (1.21) à (1.3) et (1.19) n'est, elle non plus, pas accidentelle.

d) Le théorème d'indice local des familles

Soit maintenant $\pi : M \to B$ une submersion de fibre compacte Z de dimension paire $n = 2\ell$. On suppose que le fibré tangent relatif TZ est orienté et spin. Soit g^{TZ} une métrique sur TZ, et soit $F = F_+ \oplus F_-$ le fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué des TZ spineurs correspondant.

Soit ξ un fibré Hermitien sur M, muni d'une connexion unitaire ∇^ξ.

Pour $b \in B$, soit D_b l'opérateur de Dirac agissant sur $\Gamma((F \otimes \xi)_{|Z_b})$ canoniquement associé à la connexion de Levi-Civita sur $TZ_{|Z_b}$ et à la connexion ∇^ξ [L], [AS1], [ABP]. D_b est un opérateur elliptique autoadjoint du premier ordre. Son symbole principal est $\sqrt{-1}\, c(\xi)$, où $c(\xi)$ est la multiplication de Clifford par $\xi \in T^*Z \cong TZ$ agissant sur $F \otimes \xi$. D_b échange $\Gamma\left((F_+ \otimes \xi)_{|Z_b}\right)$ et $\Gamma\left((F_- \otimes \xi)_{|Z_b}\right)$. Soit $D_{\pm,b}$ la restriction de D_b à $\Gamma\left((F_\pm \otimes \xi)_{|Z_b}\right)$. On écrit D_b sous la forme

$$D_b = \begin{bmatrix} 0 & D_{-,b} \\ D_{+,b} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.22}$$

Le théorème d'Atiyah-Singer pour les familles [AS2], qui est une extension du théorème d'Atiyah-Singer [AS1] (qui donne une formule pour $\mathrm{Ind}(D_{+,b}) \in \mathbb{Z}$) calcule le fibré virtuel $\mathrm{Ker}\, D_+ - \mathrm{Ker}\, D_- \in K^0(B)$ (qui est un fibré virtuel au sens classique si $\mathrm{Ker}\, D_+$ et $\mathrm{Ker}\, D_-$ sont eux-mêmes des fibrés). En particulier [AS2, Théorème 5.1] donne une formule pour le caractère de Chern de $\mathrm{Ker}\, D_+ - \mathrm{Ker}\, D_-$, qui est une classe de cohomologie sur B, qui est calculable explicitement à l'aide de classes caractéristiques de fibrés.

Dans [B1], en utilisant le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1], nous avons donné une version locale et précisée du Théorème d' Atiyah-Singer pour les familles [AS2], i.e. obtenu une forme différentielle fermée sur B calculable localement sur M, qui représente en cohomologie le caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mathrm{Ker}\, D_+ - \mathrm{Ker}\, D_-)$, canoniquement associée aux données précédentes et à la donnée d'un sous-fibré "horizontal" $T^H M$ de TM tel que $TM = TZ \oplus T^H M$. Le résultat obtenu dans [B1] est "naturel" dans le formalisme de superconnexions de Quillen [Q1], et se prête donc naturellement à toutes les opérations rendues possibles par ce formalisme.

Soit en effet $T^H M$ un sous-fibré de TM choisi comme indiqué précédemment.

Pour $b \in B$, soit $H_b^\infty, H_{\pm,b}^\infty$ les espaces vectoriels $\Gamma((F_\pm \otimes \xi)|_{Z_b}))$. Alors $H_b = H_{+,b}^\infty \oplus H_{-,b}^\infty$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué. On va considérer les H_b^∞ comme les fibres d'un fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué de dimension infinie sur B. D est alors une section de $\mathrm{End}^{\mathrm{impair}}(H^\infty)$.

Utilisons le formalisme de Quillen [Q1] décrit à la Section 1b). On va tout d'abord construire une connexion $\tilde{\nabla}$ sur H^∞ préservant la $\mathbb{Z}_2$-graduation.

Comme il est montré dans [B1, Théorème 1.9], la métrique g^{TZ} sur TZ et le fibré $T^H M$ déterminent canoniquement une connexion euclidienne ∇^{TZ} sur TZ. ∇^{TZ} est la projection orthogonale sur TZ de la connexion de Levi-Civita sur TM associée à une métrique g^{TM} sur TM dont la restriction à TZ est égale à g^{TZ}, et qui est telle que TZ et $T^H M$ sont orthogonaux. On vérifie simplement que la connexion ∇^{TZ} ainsi construite ne dépend que de g^{TZ} et $T^H M$. Soit ∇^F la connexion induite par ∇^{TZ} sur F.

Soit $\nabla^{F\otimes\xi}$ la connexion sur $F \otimes \xi$

$$\nabla^{F\otimes\xi} = \nabla^F \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^\xi \tag{1.23}$$

Si $U \in TB$, soit U^H le relèvement de U dans T^HM.

Définition 1.7 : Si h est une section C^∞ de $F \otimes \xi$ sur M, si $U \in TB$, on pose

$$\tilde{\nabla}_U h = \nabla^{F\otimes\xi}_{U^H} h . \tag{1.24}$$

On vérifie très simplement que $\tilde{\nabla}$ est une connexion sur le fibré $H^\infty = H^\infty_+ \oplus H^\infty_-$ préservant la $\mathbb{Z}_2$-graduation , dont la courbure $(\tilde{\nabla})^2$ est une deux-forme sur B à valeurs dans les opérateurs différentiels d'ordre un le long des fibres de Z.

Pour tout $t > 0$, $\tilde{\nabla} + \sqrt{t}\, D$ est une superconnexion sur H^∞ , dont la courbure $\left(\tilde{\nabla} + \sqrt{t}\, D\right)^2$ est un opérateur elliptique le long des fibres Z, de symbole principal autoadjoint défini positif.

Le premier résultat démontré dans [B1, Théorème 2.6] est le suivant.

Théorème 1.8 : Pout tout $t > 0$, la forme $\varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\tilde{\nabla} + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right]$ est fermée et représente en cohomologie le caractère de Chern de $\operatorname{Ker}D_+ - \operatorname{Ker}D_-$.

Preuve : La preuve du Théorème 1.8 donnée dans [B1] se compose de trois étapes :

• On montre d'abord que les formes considérées sont fermées.

• Quand $\operatorname{Ker} D_- = \{0\}$, on vérifie directement le résultat par un argument de déformation.

• On se ramène au cas considéré précédemment en utilisant un argument classique d'Atiyah-Singer [AS2].

Berline-Vergne [BeV] ont donné une preuve du Théorème 1.8 quand $\operatorname{Ker}D_+$ et $\operatorname{Ker}D_-$ sont des fibrés en faisant tendre t vers $+\infty$ dans $\varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\tilde{\nabla} + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right]$.

Cette technique a un intérêt propre. Nous retrouverons un problème voisin à la Section 4.

Quand B est un point, le Théorème 1.8 se réduit à la formule de McKean-Singer [MKS], rappelée au Théorème 1.5. La technique classique de Patodi [P], Gilkey [Gi1,2] et Atiyah-Bott-Patodi [ABoP] consiste alors à faire tendre t vers 0 dans la formule

$$\operatorname{Ind} D_+ = \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-tD^2\right)\right] \tag{1.25}$$

Pour $x, x' \in Z$, soit en effet $P_t(x, x')$ le noyau C^∞ de l'opérateur $\exp(-tD^2)$ relativement à la mesure de volume dx'. Alors, si $x \in Z$, $P_t(x, x) \in \operatorname{End}^{\mathrm{pair}}((F \otimes \xi)_x)$. La formule (1.25) s'écrit

$$\operatorname{Ind} D_+ = \int_Z \operatorname{Tr}_s\left[P_t(x, x)\right] dx . \tag{1.26}$$

Le développement asymptotique quand $t \to 0$ de $\operatorname{Tr}_s[P_t(x, x)]$ est en principe donné par

$$\operatorname{Tr}_s\left[P_t(x, x)\right] = \frac{a_{-\ell}(x)}{t^\ell} + \ldots + a_0(x) + O(t) . \tag{1.27}$$

Le mécanisme des "extraordinary cancellations" conjecturé par McKean-Singer [MKS] et démontré dans [P], [G], [ABoP] montre qu'en fait

$$\begin{gathered} a_j = 0 \qquad \text{pour } j < 0 \\ a_0\, dx = \left\{ \hat{A}\left[\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right] \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^\xi}{2i\pi}\right)\right]\right\}^{\max} \end{gathered} \tag{1.28}$$

où dans (1.28) R^{TZ} et L^ξ sont les courbures de ∇^{TZ} et ∇^ξ et où $\hat{A}(x) = \frac{x/2}{\operatorname{sh}(x/2)}$ est le $\hat{A}$ genre de Hirzebruch. On obtient ainsi la formule d'Atiyah-Singer [AS1], [ABoP]

$$\operatorname{Ind}(D_+) = \int_Z \widehat{A}\left[\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right] \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi}}{2i\pi}\right)\right]. \tag{1.29}$$

Si on cherche à appliquer la même stratégie à la situation où B n'est plus réduit à un point, elle échoue lamentablement. Plus exactement, quand $t \to 0$, $\varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(\left(\tilde{\nabla} + \sqrt{t}\ D\right)^2\right)\right]$ a en général un développement asymptotique singulier.

Le Théorème 1.8 ne permet donc pas de redémontrer le Théorème d'Atiyah-Singer pour les familles [AS2, Théorème 5.1], puisque les formes sur B considérées au Théorème 1.8 ne sont pas calculables explicitement.

Dans [B1, Section 3], nous avons introduit une nouvelle superconnexion, dite superconnexion de Levi-Civita, qui permet d'obtenir une version locale du Théorème de l'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2]. Soit en effet dx la mesure de volume sur les fibres Z. Si $U \in TB$ on pose

$$L_{U^H} dx = 2k(U)dx \tag{1.30}$$

Soit $\tilde{\nabla}^u$ la connexion sur le fibré H^∞

$$\tilde{\nabla}^u = \tilde{\nabla} + k. \tag{1.31}$$

Alors on vérifie simplement que $\tilde{\nabla}^u$ est une connexion unitaire sur H^∞ pour le produit Hermitien naturel L_2 sur H^∞.

Soit T la courbure de la connexion naturelle sur la fibration $\pi : M \to B$ associée à $T^H M$. Plus exactement, si P^{TZ} est l'opérateur de projection $TM = TZ \oplus T^H M \to TZ$, si f, f' sont des champs de vecteurs C^∞ sur B, on pose

$$T(f, f') = -P^{TZ}\left[f^H, f'^H\right] \tag{1.32}$$

T est une deux forme sur B à valeurs dans les champs de vecteurs sur les fibres Z.

Rappelons que $F \otimes \xi$ est un TZ module de Clifford.

Définition 1.9 : Pour $t > 0$, soit A_t la superconnexion

$$A_t = \tilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D - \frac{c(T)}{4\sqrt{t}}. \tag{1.33}$$

Notons que dans (1.33), $c(T)$ est une deux-forme sur B à valeurs dans $\mathrm{End}^{\mathrm{impair}}(H^\infty)$.

Soit R^{TZ}, L^ξ les courbures des connexions ∇^{TZ}, ∇^ξ. On montre dans [B1] le résultat essentiel suivant.

Théorème 1.10 : Pour tout $t > 0$, les formes paires $\varphi \mathrm{Tr}_s[\exp(-A_t^2)]$ sont fermées et représentent en cohomologie le caractère de Chern de $\mathrm{Ker}\, D_+ - \mathrm{Ker}\, D_-$. De plus, on a l'égalité de formes sur B

$$\lim_{t \to 0} \varphi \mathrm{Tr}_s\left[\exp\left(-A_t^2\right)\right] = \int_Z \hat{A}\left[\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right] \mathrm{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^\xi}{2i\pi}\right)\right]. \tag{1.34}$$

Remarque 1.11 : Le résultat de [B1] est en fait plus précis, puisqu'il assure que si $Q_t^b(x, x')$ $(x, x' \in Z_b)$ est le noyau C^∞ de $\exp(-A_t^2)$, quand $t \to 0$, $\varphi \mathrm{Tr}_s[Q_t^b(x, x)]$ converge vers la composante de degré maximal vertical 2 dim Z dans l'intégrale à droite de (1.34).

Une explication élémentaire de la raison pour laquelle A_t est la "bonne" superconnexion est que A_t est en fait un opérateur de Dirac associé à la connexion de Levi-Civita sur les spineurs de TM, pour une métrique infinie sur $T^H M$. Bien que (1.34) contienne comme cas particulier le théorème d'indice local ordinaire de [P], [Gi1,2], [ABoP], (1.34) peut en fait être lui-même interprété comme une version singulière du Théorème d'indice local usuel.

Une autre preuve du théorème d'indice local des familles a été donnée par Berline-Vergne [BeV]. Par ailleurs un texte récent de Berline-Getzler-Vergne [Be Ge V] contient en particulier un traitement très complet des superconnexions de Quillen, et du théorème d'indice local des familles.

Remarque 1.12 : Naturellement, on déduit du Théorème d'indice local des familles de [B1] le Théorème d'Atiyah-Singer [AS2, Théorème 5.1] pour les familles d'opérateurs de Dirac, qui calcule $\mathrm{ch}(\mathrm{Ker}D_+ - \mathrm{Ker}D_-)$ dans $H^*(B, \mathbb{Q})$.

Toutefois, le Théorème 1.10 raffine le résultat de [AS2]. En effet ce Théorème fournit une forme différentielle explicite qui représente $\mathrm{ch}(\mathrm{Ker}D_+ - \mathrm{Ker}D_-)$, et qui a les deux propriétés essentielles suivantes :

• Elle est rigidement déterminée par les données de géométrie différentielle du problème considéré, c'est à dire par la métrique g^{TZ}, le fibré T^HM et la connexion ∇^ξ.

• L'évaluation de la forme en $b \in B$ ne dépend que de données de géométrie locale au voisinage de la fibre Z_b.

• Elle est obtenue par un appareil d'analyse fonctionnelle qui permet aussi d'attteindre des objets globaux dans les fibres tels que $\mathrm{Ker}D_+$ et $\mathrm{Ker}D_-$.

Le théorème d'indice local de Patodi [P], Gilkey [Gi1,2], Atiyah-Bott-Patodi [ABoP] était essentiellement un remarquable outil pour démontrer simplement le théorème d'indice d'Atiyah-Singer [AS1]. Une autre application de ce théorème a été l'établissement par Atiyah-Patodi-Singer [APS] d'un théorème d'indice pour un opérateur de Dirac sur une variété à bord. Nous allons voir dans la suite comment on peut utiliser le Théorème d'indice des familles local de [B1] pour rigidifier le Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2], et pour nous ramener à une version de ce théorème directement compatible au Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

II - LE DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE C^∞ D'OPÉRATEURS DE DIRAC : UN THÉOREME DE COURBURE

Dans cette section, nous rappelons la construction analytique par Quillen [Q2] et Bismut-Freed [BF2] du fibré déterminant de l'image directe d'une famille d'opérateurs de Dirac opérant sur les fibres d'une submersion C^∞ $\pi : M \to B$. On énonce aussi les résultats de Bismut-Freed [BF1, 2] concernant la construction d'une métrique et d'une connexion unitaire sur ce fibré en droites, ainsi que le Théorème de [BF2], généralisant un résultat de Quillen [Q2] qui calcule la courbure de cette connexion à l'aide de quantités locales sur M. Ce dernier résultat est lui-même une conséquence du Théorème d'indice local des familles [B1].

En a), on construit le fibré déterminant. En b), grâce au Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2], on calcule la première classe de Chern du fibré déterminant. Enfin en c), on énonce le théorème de courbure de Bismut-Freed [BF2].

a) Le fibré déterminant

On fait les mêmes hypothèses qu'à la Section 1d).

Si E est un espace vectoriel de dimension fini, on pose

$$\det(E) = \Lambda^{\max}(E) \tag{2.1}$$

Bien que $\mathrm{Ker}D_+ - \mathrm{Ker}D_-$ ne soit qu'un fibré <u>virtuel</u> sur B, son déterminant $\lambda(\xi)$ est lui un vrai fibré. Rappelons en effet la construction par Quillen [Q2] de $\lambda(\xi)$.

Pour $b \in B$, le spectre de l'opérateur D_b^2 est discret. Pour $a \in R_+^*$, soit U_a l'ouvert de B

$$U_a = \{\, b \in B \,;\, a \notin \mathrm{Sp}(D_b^2)\}. \tag{2.2}$$

Soit $H_b^{\infty,a}$ la somme directe des espaces propres de D_b^2 pour des valeurs propres $\leq a$. Alors $H_b^{\infty,a}$ se scinde en $H_b^{\infty,a} = H_{+,b}^{\infty,a} \oplus H_{-,b}^{\infty,a}$. $H^{\infty,a}$ est un fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué de dimension finie sur U_a. Posons

$$\lambda^a(\xi) = \left(\det\left(H_+^{\infty,a}\right)\right)^{-1} \otimes \det\left(H_-^{\infty,a}\right) \tag{2.3}$$

Pour $0 < a < a' < +\infty$, soit $H_b^{\infty,(a,a')} = H_{+,b}^{\infty,(a,a')} \oplus H_{-,b}^{\infty,(a,a')}$ la somme directe des espaces propres de D_b^2 pour des valeurs propres $\mu \in]a, a']$. Soit $D_{+,b}^{(a,a')}$ la restriction de $D_{+,b}$ à $H_{+,b}^{\infty,(a,a')}$. Alors classiquement $D_{+,b}^{(a,a')}$ est une application linéaire inversible $H_{+,b}^{\infty,(a,a')}$ dans $H_{-,b}^{\infty,(a,a')}$. Posons

$$\lambda^{(a,a')}(\xi) = \left(\det\left(H_+^{\infty,(a,a')}\right)\right)^{-1} \otimes \det\left(H_-^{\infty,(a,a')}\right). \tag{2.4}$$

Alors $\lambda^{(a,a')}(\xi)$ est un fibré C^∞ sur $U^a \cap U^{a'}$, et $\det(D_+^{(a,a')})$ est une section C^∞ non nulle de $\lambda^{(a,a')}(\xi)$ sur $U^a \cap U^{a'}$.

Suivant Quillen [Q2], on définit le fibré déterminant $\lambda(\xi)$ de la manière suivante.

<u>Définition 2.1</u> : $\lambda(\xi)$ désigne le fibré en droite C^∞ sur B déterminé par les fibrés en droite C^∞ $(\lambda^a(\xi), U^a)$ et les fonctions de transition

$$s \in \lambda^a(\xi) \to s \otimes \det(D_+^{(a,a')}) \in \lambda^{a'}(\xi) \text{ sur } U^a \cap U^{a'},\ 0 < a < a' < +\infty \tag{2.5}$$

Notons que pour tout $b \in B$, on a un isomorphisme canonique

$$\lambda_b(\xi) \cong \left(\det\left(\operatorname{Ker} D_{+,b}\right)\right)^{-1} \otimes \det\left(\operatorname{Ker} D_{-,b}\right) \tag{2.6}$$

b) La première classe de Chern de $\lambda(\xi)$

Du Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2, Théorème 5.1], il résulte que la première classe de Chern du fibré $\lambda(\xi)$ est représentée en cohomologie par la forme différentielle de degré deux sur B

$$(2.7) \qquad -\left\{\int_Z \widehat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi}}{2i\pi}\right)\right]\right\}^{(2)}$$

Cette forme différentielle est ici réelle. On peut donc se demander si la forme différentielle

$$(2.8) \qquad 2i\pi\left\{\int_Z \widehat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi}}{2i\pi}\right)\right]\right\}^{(2)}$$

est la courbure d'une connexion "naturelle" sur $\lambda(\xi)$ qui soit unitaire pour une métrique "naturelle".

Dans [Q2], Quillen avait résolu cette question dans le cas où Z est une surface de Riemann fixe, et où l'espace des paramètres B est ensemble des structures holomorphes sur un fibré donné sur Z. Dans la situation considérée par Quillen [Q2], $\lambda(\xi)$ est naturellement un fibré holomorphe, et métrique et connexion sont directement liées.

Dans Bismut-Freed [BF1,2], on a montré que le théorème d'indice local des familles [B1] permet de résoudre en toute généralité le problème posé dans le cadre que nous avons considéré jusqu'à présent, i.e. pour une fibration C^{∞}.

c) Le théorème de courbure du fibré déterminant : le cadre C^∞

Rappelons qu 'il s'agit de construire une métrique "naturelle" et une connexion unitaire "naturelle sur $\lambda(\xi)$. Nous allons vérifier que le formalisme des superconnexions fournit une réponse presque immédiate à cette question.

Une première observation essentielle faite dans Bismut-Freed [BF2, Théorème 1.19] est la suivante.

Si $\omega \in \Lambda(T_R^*, B)$, soit $\omega^{(2)}$ la composante de ω dans $\Lambda^2(T_R^* B)$.

Proposition 2.2 : Pour tout t > 0, on al l'égalité

$$\varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-A_t^2\right)\right]^{(2)} = \varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right]^{(2)} \tag{2.9}$$

Preuve : On reprend la preuve de [BF2]. Pour $\ell \in [0, 1]$, on pose

$$A_t^\ell = \tilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D - \frac{\ell\, c(T)}{4\sqrt{t}} \tag{2.10}$$

Par une formule de transgression à la Chern-Simons, on a

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(A_t^\ell\right)^2\right)\right] = d \operatorname{Tr}_s\left[\frac{c(T)}{4\sqrt{t}} \exp\left(-\left(A_t^\ell\right)^2\right)\right] \tag{2.11}$$

Or c(T) est une forme de degré deux. Le membre de droite de (2.11) est donc une forme de degré au moins trois (et même quatre puisque le membre de gauche est de degré pair). De (2.11), on tire donc que

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(A_t^\ell\right)^2\right)\right]^{(2)} = 0 . \tag{2.12}$$

La proposition est démontrée. □

Remarque 2.3 : L'introduction du terme $\frac{c(T)}{4\sqrt{t}}$ dans A_t ne modifie donc pas la partie de degré deux de la forme $\varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right]$, bien qu'il puisse modifier la partie de degré deux de la supertrace locale correspondante.

Du Théorème 1.10 et de la Proposition 2.2, on tire donc que

$$\lim_{t\to 0} \varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right]^{(2)} = \tag{2.13}$$
$$\left[\int_Z \widehat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi}}{2i\pi}\right)\right]\right]^{(2)}$$

Comme en (2.11), par une formule de transgression à la Chern-Simons pour les superconnexions, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right] = \tag{2.14}$$
$$- d \operatorname{Tr}_s\left[\frac{D}{2\sqrt{t}} \exp\left(-\left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right]$$

De (2.14), on tire que

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\widetilde{\nabla}^u + \sqrt{t}\, D\right)^2\right)\right]^{(2)} =$$

(2.15)

$$\frac{d}{2} \operatorname{Tr}_s\left[\ \widetilde{\nabla}^u DD \exp\left(-\, t D^2\right)\right].$$

Rappelons un résultat d'indice local de Bismut-Freed [BF2, Théorème 3.4].

Proposition 2.4 : Quand $t \to 0$, on a

$$\operatorname{Tr}_s\left[\left(\widetilde{\nabla}^u D\right) D \exp\left(-\, t D^2\right)\right] = O(1) \tag{2.16}$$

Supposons maintenant que la famille d'opérateurs D_+ soit d'indice zéro. Soit V l'ouvert de B

$$V = \{ b \in B \,;\, D_b \text{ est inversible} \}. \tag{2.17}$$

Sur tout compact de V, quand $t \to +\infty$, $\operatorname{Tr}_s\left[\left(\widetilde{\nabla}^u D\right) D \exp\left(-\, t D^2\right)\right]$ tend vers 0 plus vite que e^{-ct} ($c > 0$).

Définition 2.5 : Sur V, on définit la un-forme δ_0 par la formule

$$\delta_0 = \int_0^{+\infty} \operatorname{Tr}_s\left[\left(\widetilde{\nabla}^u D\right) D \exp\left(-\, t D^2\right)\right] dt\ . \tag{2.18}$$

De manière équivalente on a

$$\delta_0 = \lim_{t \to 0} \operatorname{Tr}_s\left[\left(\widetilde{\nabla}^u D\right) D^{-1} \exp\left(-\, t D^2\right)\right]. \tag{2.19}$$

Proposition 2.6 : La forme δ_0 est imaginaire pure. Sur V, on a l'identité

$$\left[2i\pi \int_Z \widehat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi}}{2i\pi}\right)\right]\right]^{(2)} = d\left(-\frac{\delta_0}{2}\right) \tag{2.20}$$

Preuve : Comme $\tilde{\nabla}^u$ est une connexion unitaire, $\tilde{\nabla}^u D$ est une forme à valeurs dans l'espace des opérateurs autoadjoints. En utilisant (2.18) et le fait que la supertrace d'un supercommutateur est nulle comme en [B1, Théorème 1.5 et Section 1h)], on tire que δ_0 est imaginaire. (2.20) résulte de (2.13), (2.15), (2.18). □

Sur V, $\lambda(\xi)$ possède une section C^∞ canonique, qui s'identifie à $\det(D_+^{(0,a)}) \in \lambda^a(\xi)$ sur $V \cap U_a$, et qu'on note $\det(D_+)$. De (2.8), (2.20), on tire que $-\frac{\delta_0}{2}$ est candidat à être la partie imaginaire d'une forme de connexion A sur $\lambda(\xi)_{|V}$.

Pour $b \in V$, $\operatorname{Re}(s) > \ell$, on pose

$$\zeta_b(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left[\left[D_b^2\right]^{-s}\right]. \tag{2.21}$$

Alors par Seeley [Se], ζ_b s'étend en une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$, qui est holomorphe en $s = 0$.

Definition 2.7 : Pour $b \in V$, on pose

$$\|\det(D_{+,b})\|_{\lambda(\xi)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial \zeta_b}{\partial s}(0)\right\}.$$

(2.22)

$$\gamma_{0,b} = -\frac{\partial \zeta_b}{\partial s}(0).$$

Définition 2.8 : Sur V, on définit la connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ sur le fibré $\lambda(\xi)$ par

$$\nabla^{\lambda(\xi)} \det(D_+) = \frac{1}{2}(\gamma_0 - \delta_0) \det(D_+) \tag{2.23}$$

Proposition 2.9 : La connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ sur $\lambda(\xi)_{|V}$ est unitaire pour la métrique $\| \ \|_{\lambda(\xi)}$. Sa courbure est donnée par

$$2i\pi \left[\int_Z \widehat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi}}{2i\pi}\right)\right] \right]^{(2)} \tag{2.24}$$

Preuve : La Proposition 2.9 est une conséquence triviale de la Proposition 2.6 . □

La Proposition 2.9 n'a a priori pas grand intérêt. En effet, elle ne s'applique qu'aux familles d'opérateurs D_+ d'indice zéro, et sur l'ouvert V où D_+ est inversible, i.e. où $\lambda(\xi)$ est canoniquement trivialisé.

Le vrai miracle est que, comme il est montré dans Bismut-Freed [BF1, Sections 1g), 1h)], la construction précédente puisse être étendue à toute la base B et ceci même quand la famille d'opérateurs D_+ n'est pas d'indice zéro. Plus précisément, sur U_a, on commence par munir le fibré $\lambda^a(\xi) \cong \lambda(\xi)$ de la métrique $| \ |_{\lambda^a(\xi)}$ induite par la métrique L_2 naturelle sur H^∞ et de la connexion ${}^0\nabla^a$ induite par la projection orthogonale de la connexion $\tilde{\nabla}^u$ sur $H^{\infty,a}$. Les métriques $| \ |_{\lambda^a(\xi)}$ et les connexions ${}^0\nabla^a$ ne se recollent en général pas en une métrique et une connexion sur $\lambda(\xi)$, i.e. elles ne sont pas compatibles avec les fonctions de transition (2.5). Soit P^a le projecteur orthogonal de H^∞ sur $H^{\infty,a}$. Soit $Q^a = 1 - P^a$. On pose

$$\delta_0^a = \int_0^{+\infty} \operatorname{Tr}_s\left[\tilde{\nabla}^u D\, D \exp\left(-tD^2\right) Q^a\right] dt \tag{2.25}$$

De même si $\zeta^a(s)$ est la fonction

$$\zeta^a(s) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[\left(D^2\right)^{-s} Q^a\right], \tag{2.26}$$

soit γ_0^a la un-forme sur U^a

$$\gamma_0^a = - d\frac{\partial\zeta^a}{\partial s}(0). \tag{2.27}$$

Definition 2.10 : Soit $\| \; \|_{\lambda^a(\xi)}$ la métrique sur $\lambda^a(\xi)$

$$\| \; \|_{\lambda^a(\xi)} = | \; |_{\lambda^a(\xi)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta^a}{\partial s}(0)\right\}. \tag{2.28}$$

Soit ${}^1\nabla^a$ la connexion sur $\lambda^a(\xi)$

$${}^1\nabla^a = {}^0\nabla^a + \frac{1}{2}(\gamma_0^a - \delta_0^a). \tag{2.29}$$

Le résultat fondamental de Bismut-Freed [BF2, Théorème 1.21] est alors le suivant.

Théorème 2.11 : Les métriques $\| \; \|_{\lambda^a(\xi)}$ et les connexions ${}^1\nabla^a$ sur les fibrés $\lambda^a(\xi)$ induisent une métrique C^∞ $\| \; \|_{\lambda(\xi)}$ et une connexion C^∞ $\nabla^{\lambda(\xi)}$ sur $\lambda(\xi)$. La connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ est unitaire relativement à la métrique $\| \; \|_{\lambda(\xi)}$, et sa courbure est donnée par

$$2i\pi\left[\int_Z \widehat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right)\operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^\xi}{2i\pi}\right)\right]\right]^{(2)} \tag{2.30}$$

<u>Remarque 2.12</u> : La Proposition 2.2 joue un rôle clef dans tout l'édifice. C'est elle qui assure la compatibilité entre le Théorème d'indice local de la Section 1d) et la construction analytique du déterminant de la Section 2a).

Pour interpréter correctement le Théorème 2.11, on doit en fait "penser" à $\lambda(\xi)$ comme étant le fibré $(\det H_-^\infty)^{-1} \otimes \det H_+^\infty$. Naturellement comme H_+^∞ et H_-^∞ sont de dimension infinie, ce dernier objet n'a pas de sens "a priori". Au bout du compte, il en prend un, par la technique d'approximation de ces fibrés de dimension infinie par les fibrés de dimension finie $H_+^{\infty,a}$ et $H_-^{\infty,a}$, et par les techniques d'indice local.

III - MÉTRIQUES DE QUILLEN SUR L'INVERSE DU DÉTERMINANT DE L'IMAGE DIRECTE ET THÉOREME DE COURBURE

Dans cette section, on décrit brièvement certains résultats obtenus par Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3] relatifs aux métriques de Quillen [Q2] sur l'inverse du déterminant de l'image directe par une submersion holomorphe $\pi : M \to B$ du faisceau des sections holomorphes d'un fibré holomorphe ξ sur M. Les preuves des résultats de [BGS1, 2, 3] reposent partiellement sur la compatibilité des constructions de [BF1, 2] à la structure holomorphe naturelle sur le déterminant de l'image directe.

En a), on spécialise les résultats rappelés à la section 2 au cas où M et B ont des variétés complexes et où $\pi : M \to B$ est une submersion holomorphe. En b), on construit la métrique de Quillen sur l'inverse du déterminant de l'image directe (au sens de Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM]) et on énonce le Théorème de courbure de [BGS1, 2, 3] qui donne une formule explicite pour la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne sur l'inverse du déterminant de l'image directe muni de la métrique de Quillen.

a) Une submersion holomorphe

On fait les mêmes hypothèses qu'à la Section 1d). On suppose de plus que M et B sont des variétés complexes, et que $\pi : M \to B$ est holomorphe.

Soit g^{TM} une métrique Kählérienne sur le fibré tangent complexe TM.

Soit TZ le fibré tangent complexe à la fibre Z. Soit g^{TZ} la métrique induite par g^{TM} sur TZ. Soit T^HM l'orthogonal à TZ dans T^HM pour la métrique g^{TM}.

On vérifie très simplement que la connexion ∇^{TZ} construite à la Section 1d) associée à la métrique g^{TZ} et au fibré T^HM est exactement la connexion holomorphe Hermitienne sur le fibré (TZ, g^{TZ}).

Soit ξ un fibré holomorphe sur M, muni d'une métrique Hermitienne h^{ξ}.

Soit $\bar{\partial}^{Z_b}$ l'opérateur $\bar{\partial}$ agissant sur $\Gamma\left(\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right)\otimes\xi\right)_{|Z_b}\right)$ et soit $\bar{\partial}^{Z_b *}$ son adjoint relativement au produit Hermitien L_2 usuel sur $\Gamma\left(\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right)\otimes\xi\right)_{|Z_b}\right)$. On pose

$$D_b = \bar{\partial}^{Z_b} + \bar{\partial}^{Z_b *} . \tag{3.1}$$

Alors $\sqrt{2}\,D_b$ est un opérateur de Dirac usuel au sens de la Section 1d). Plus précisément, par [H], on a

$$\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right) \cong F \otimes (\det TZ)^{1/2} \tag{3.2}$$

On peut construire alors le fibré en droite $\lambda(\xi)$ sur B associé à la famille d'opérateur $D_{+,b}$ comme à la Section 2a). De (2.6) et de la Théorie de Hodge, il résulte que pour tout $b \in B$, on a un isomorphisme canonique

$$\lambda_b(\xi) \cong \bigotimes_{i=0}^{\dim Z} \left(\det\left(H^i\left(Z_b\,,\,\xi_{|Z_b}\right)\right)\right)^{(-1)^{i+1}} \tag{3.3}$$

Par la construction de Bismut-Freed [BF1,2] exposée à la Section 2c), on peut munir le fibré $\lambda(\xi)$ d'une métrique $\|\ \|_{\lambda(\xi)}$ et d'une connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ unitaire relativement à $\|\ \|_{\lambda(\xi)}$, dont la courbure est donnée par

$$2i\pi\left[\int_Z \mathrm{Td}\left(TZ, g^{TZ}\right)\mathrm{ch}\left(\xi, h^{\xi}\right)\right]^{(2)} \tag{3.4}$$

où $\mathrm{Td}(TZ, g^{TZ})$, $\mathrm{ch}(\xi, h^{\xi})$ dénotent les représentants canoniques en théorie de Chern-Weil associés aux genres Todd, ch, relativement aux connexions holomorphes Hermitiennes correspondantes.

On observe immédiatement que la forme (3.4) est de type (1,1). Par application d'un résultat de Newlander-Nirenberg [AHS, Théorème 5.1], on tire qu'il existe une structure holomorphe sur le fibré $\lambda(\xi)$ tel que $\nabla^{\lambda(\xi)}$ soit exactement la connexion holomorphe Hermitienne sur $(\lambda(\xi)\ ,\ \|\ \|_{\lambda(\xi)})$.

Or par une construction de Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM], on peut construire sur B un fibré déterminant holomorphe canonique, dit déterminant de l'image directe de ξ par π, dont l'inverse $\lambda^G(\xi)$ est tel que pour $b \in B$

$$\lambda_b^G(\xi) \cong \bigotimes_{i=0}^{\dim Z}\left(\det\left(H^i\left(Z_b\,,\,\xi_{|Z_b}\right)\right)\right)^{(-1)^{i+1}} \tag{3.5}$$

Une première question naturelle est donc de savoir si l'isomorphisme canonique des fibres de $\lambda(\xi)$ et $\lambda^G(\xi)$ (évident par (3.3), (3.5)) induit un isomorphisme C^∞ de fibrés, où même un isomorphisme de fibrés holomorphes. Si c'était le cas, la métrique $\|\ \|_{\lambda(\xi)}$ sur $\lambda(\xi)$ se transporterait en une métrique $\|\ \|_{\lambda^G(\xi)}$ sur $\lambda^G(\xi)$ et la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne sur $(\lambda^G(\xi)\,,\ \|\ \|_{\lambda^G(\xi)})$ serait alors donnée par la forme (3.4).

Une deuxième question fondamentale est alors de savoir si on peut élargir la classe de métriques admissibles sur TZ, de telle sorte que le Théorème de courbure précédent reste vrai.

C'est à cet ensemble de questions que répondent les articles de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3].Nous ne couvrirons dans la suite qu'une partie des résultats de [BGS1,2,3].

b) Métriques de Quillen et Théorème de courbure.

Soit g^{TZ} une métrique Hermitienne arbitraire sur le fibré tangent relatif TZ. Soit $<\ ,\ >$ le produit Hermitien sur $\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right)\right)\otimes\xi$ associé aux métriques g^{TZ} et h^ξ. Nous allons maintenant construire la métrique de Quillen sur les fibres $\lambda_b^G(\xi)$ de $\lambda^G(\xi)$.

On munit $\Gamma\left(\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right)\otimes\xi\right)_{|Z_b}\right)$ du produit Hermitien

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle_b = \int_{Z_b} \langle \alpha, \alpha' \rangle \frac{dv_{Z_b}}{(2\pi)^{\dim Z}} \tag{3.6}$$

Dans (3.6), dv_{Z_b} désigne la forme volume sur Z_b relativement à la métrique g^{TZ}.

Par la théorie de Hodge, on peut identifier $H\left(Z_b, \xi_{|Z_b}\right)$ aux formes harmoniques correspondantes sur Z_b. De (3.6), on tire que $\lambda_b^G(\xi)$ porte une métrique $|\ |_{\lambda_b^G(\xi)}$, dite aussi métrique L_2 sur $\lambda_b^G(\xi)$. Cette métrique n'est en général pas lisse sur $\lambda^G(\xi)$.

Soit P_b le projecteur orthogonal de $\Gamma\left(\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right) \otimes \xi\right)_{|Z_b}\right)$ sur l'espace vectoriel des formes harmoniques sur Z_b. On pose $Q_b = 1 - P_b$. Soit N_V l'opérateur agissant sur $\Lambda^p\left(T^{*(0,1)}Z\right) \otimes \xi$ par multiplication par p.

<u>Définition 3.1</u> : Pour $b \in B$, $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > \dim Z$ on pose

$$\theta_b(s) = -\operatorname{Tr}_s\left[\left[N_V\left(\bar\partial^{Z_b} + \bar\partial^{Z_b *}\right)^2\right]^{-s} Q_b\right]. \tag{3.7}$$

Par Seeley [Se], on sait que $\theta_b(s)$ s'étend une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui est holomorphe en $s = 0$.

<u>Définition3.2</u> : On appelle métrique de Quillen sur la fibre $\lambda_b^G(\xi)$ la métrique $\|\ \|_{\lambda_b^G(\xi)}$ donnée par

$$\|\ \|_{\lambda_b^G(\xi)} = |\ |_{\lambda_b^G(\xi)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_b}{\partial s}(0)\right\}. \tag{3.8}$$

L'expression $\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_b}{\partial s}(0)\right\}$ est la torsion analytique de Ray et Singer [RS].

On a alors le résultat fondamental de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, Théorème 0.1].

Théorème 3.3 : Les métriques $\| \ \|_{\lambda_b^G(\xi)}$ sur les fibres de $\lambda^G(\xi)$ induisent une métrique C^∞ sur le fibré holomorphe $\lambda^G(\xi)$.

Si M est Kählérienne, et si la métrique g^{TZ} induit une métrique Kählrienne sur les fibres Z, alors la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne $\nabla^{\lambda^G(\xi)}$ sur le fibré $(\lambda^G(\xi), \| \ \|_{\lambda^G(\xi)})$ est donnée par

$$(3.9) \qquad 2i\pi\left[\int_Z \left(\mathrm{Td}\, TZ, g^{TZ}\right) \mathrm{ch}\left(\xi, h^\xi\right)\right]^{(2)}$$

Preuve : Il est hors de question de décrire en détail la preuve du Théorème 3.3. Disons seulement que quand M est Kählérienne, si g^{TM} est une métrique Kählérienne sur TM, et si g^{TZ} est la métrique induite sur TZ par g^{TM}, on montre (3.9) en prouvant la compatibilité des constructions précédentes aux constructions de Bismut-Freed [BF1,2]. Une étape clef est une construction analytique explicite d'une structure holomorphe naturelle sur un fibré en droites proche du fibré considéré par Bismut-Freed.

Dans une deuxième étape, on calcule comment varie la métrique $\| \ \|_{\lambda_b^G(\xi)}$ dans une fibre Z_b quand on varie la métrique g^{TZ} dans la classe de métriques Kählériennes sur Z_b . Cette étape est essentiellement nouvelle par rapport à [BF1,2]. On obtient ainsi une généralisation en dimension arbitraire de la formule d'anomalie de Polyakov [Po] établie par Polyakov pour des surfaces de Riemann.

La combinaison de ces deux étapes permet d'obtenir la formule (3.9) pour la courbure $\nabla^{\lambda(\xi)}$. □

Remarque 3.4 : Inversement, du Théorème 3.3, on peut déduire la formule d'anomalie généralisée de [BGS3].

Remarque 3.5 : Les résultats de [BGS 1, 2, 3] représentent une rigidification considérable des résultats de [BF1,2]. Ils ne sont en aucun cas une conséquence immédiate de [BF1,2].

IV - IMMERSIONS COMPLEXES ET METRIQUES DE QUILLEN

Soit $i : Y \to X$ un plongement de variétés compactes complexes, soit η un fibré holomorphe sur Y et soit (ξ, v) un complexe de fibrés holomorphes sur X qui résoud le faisceau $i_* \mathcal{O}_Y(\eta)$. Par Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM], les déterminants de la cohomologie de η et ξ sont canoniquement isomorphes. Il est alors naturel de comparer les métriques de Quillen correspondantes, pour obtenir ainsi un raffinement du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les immersions.

L'objet de cette section est d'énoncer le résultat de Bismut-Lebeau [BL1,2] qui répond complètement à cette question.

Dans a), on rappelle la construction par Bismut [B3], et Bismut-Gillet-Soulé [BGS4] de courants dits de Bott-Chern sur X, naturellement associés aux données précédentes, et à des métriques Hermitiennes sur les différents fibrés considérés. Ces courants interviennent de manière essentielle dans la formule finale de [BL1,2]. Dans b), on rappelle brièvement les résultats de Bismut-Gillet-Soulé [BGS5] de compatibilité fonctorielle des courants [BGS4] à une formule raffinée de Riemann-Roch-Grothendieck. Enfin dans c), on énonce les résultats de Bismut-Lebeau [BL1,2], où interviennent les courants de [BGS4] et un genre additif $R(X)$ introduit par Gillet et Soulé [GS4] dans une conjecture sur une généralisation en dimension arbitraire du Théorème de Faltings-Riemann-Roch [F, Théorème 3], [La, Théorème V 3.4] sur les courbes.

En conjuguant les résultats de [B3], [BL1,2], [BGS1-5], [GS1-3], Gillet et Soulé [GS4] viennent d'obtenir la version souhaitée d'un Théorème à la Faltings-Riemann-Roch pour le déterminant de la cohomologie.

a) Plongements complexes

Soit $i : Y \to X$ un plongement de variétés compactes complexes. Soit η un fibré holomorphe sur Y. Soit

$$(\xi, v) \; : \; 0 \to \xi_m \underset{v}{\to} \xi_{m-1} \cdots \underset{v}{\to} \xi_0 \to 0 \tag{4.1}$$

un complexe de fibrés holomorphes sur X, et soit r une application de restriction $\xi_{0|Y} \to \eta$ telle qu'on ait la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_X(\xi_m) \underset{v}{\to} \cdots \to \mathcal{O}_X(\xi_0) \underset{r}{\to} i_* \mathcal{O}_Y(\eta) \to 0 \tag{4.2}$$

De manière équivalente, le complexe (ξ, v) résoud le faisceau $i_* \mathcal{O}_Y(\eta)$.

Soit N le fibré normal à Y dans X. Par l'unicité locale des résolutions [S, Chapitre IV, Appendice 1], [E, Théorème 8] on sait que si (y, z) est un système de coordonnées locales près de $y_0 \in Y$ tel que $z = 0$ soit l'équation de Y, si $\tilde{N}, \tilde{\eta}$ sont des extensions de N, η sur un voisinage U de y_0, alors sur U, on a

$$(\xi, v) \cong \left(\Lambda \tilde{N}^* \otimes \eta, \; i_z\right) \oplus (A, a) \tag{4.3}$$

où $(\Lambda \tilde{N}^*, i_z)$ est le complexe de Koszul de $\tilde{N}^*$ et où (A,a) est un complexe acyclique.

Pour $y_0 \in Y$, soit $H_{y_0}(\xi, v)$ l'homologie du complexe $(\xi, v)_{y_0}$. Pour $z \in N_{y_0}$, soit $\partial_z v\,(y_0)$ la dérivée de v dans une direction Z représentant z dans TX_{y_0}. On montre dans [B3, Théorème 1.2] que $\partial_z v\,(y_0)$ est défini sans ambiguïté, agit sur $H_{y_0}(\xi, v)$ et que de plus $(\partial_z v\,(y_0))^2 = 0$.

Soit π la projection $N \to Y$. Par [S], [E], [B3, Théorème 1.2], on a un isomorphisme canonique de complexes sur N

$$(\pi^* H(\xi, v), \partial_z v) \cong (\pi^* (\Lambda N^* \otimes \eta), i_z) \tag{4.4}$$

En particulier les $H_{y_0}(\xi, v)$ sont les fibres d'un fibré holomorphe $\mathbb{Z}$-gradué sur Y.

Soient $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ des métriques Hermitiennes sur $\xi_0, \dots, \xi_m$. On pose $h^{\xi} = \bigoplus_0^m h^{\xi_k}$. Soit g^N, g^{η} des métriques Hermitiennes sur N, η. Alors g^N, g^{η} induisent une métrique naturelle sur $\Lambda N^* \otimes \eta$.

Soit v^* l'adjoint de v relativement à la métrique h^{ξ} sur ξ. Par la théorie de Hodge, si $y_0 \in Y$, on a l'identification

$$H_{y_0}(\xi, v) \cong \{f \in \xi_{y_0} ; vf = 0 ; v^* f = 0\} \tag{4.5}$$

De (4.5), on tire que $H_{y_0}(\xi, v)$ hérite d'une métrique h^H, qui est la restriction de la métrique $h^{\xi} = \bigoplus_0^m h^{\xi_m}$ au membre de droite de (4.5).

Par [B3, Proposition 1.6], on sait qu'étant données g^N, g^{η}, on peut trouver des métriques $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ telles que (4.4) soit un isomorphisme de complexes de fibrés hermitiens. Dans toute la suite, on supposera que cette hypothèse, dite hypothèse (A), est vérifiée.

Soit ∇^{ξ} la connexion holomorphe Hermitienne sur (ξ, h^{ξ}). On pose

$$V = v + v^* . \tag{4.6}$$

On utilise maintenant le formalisme de la Section 1. δ_Y désigne le courant d'intégration sur Y. On a le résultat fondamental de [B3, Théorème 3.2].

<u>Théorème 4.1</u> : Quand $u \to +\infty$, on a la convergence de courants sur X

$$\varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\nabla^{\xi} + \sqrt{u}\, V\right)^2\right)\right] \to \operatorname{Td}^{-1}\left(N, g^N\right) \operatorname{ch}\left(\eta, g^{\eta}\right) \delta_Y \tag{4.7}$$

Preuve : La preuve de [B3] est assez technique. Elle utilise de manière très précise la théorie de Hodge de $(\xi, v)_{|Y}$. Le calcul final résulte d'une formule de Mathai-Quillen [MQ, Théorème 4.5]. □

Remarque 4.2 : Dans [B3], V^2 joue le rôle d'un potentiel, et Y d'un puits de potentiel, où l'opérateur autoadjoint positif V^2 à des valeurs propres nulles.

Soit $N_H \in \mathrm{End}(\xi)$ l'opérateur agissant sur ξ_k par multiplication par k. On a la formule de [BGS1, Théorème 1.15], [B3, Théorème 2.4].

Théorème 4.3 : Pour tout $u > 0$ on a

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi \operatorname{Tr}_s\left[\exp\left(-\left(\nabla^{\xi}+\sqrt{u}\ V\right)^2\right)\right] = \tag{4.8}$$

$$\frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \varphi \operatorname{Tr}_s\left[\frac{N_H}{u} \exp\left(-\left(\nabla^{\xi}+\sqrt{u}\ V\right)^2\right)\right]$$

Soit $(Td^{-1})'(x_1, \ldots, x_q)$ le genre

$$\left(Td^{-1}\right)'\left(x_1, \ldots, x_q\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left[Td\left(x_1+b, \ldots, x_q+b\right)\right]_{b=0}. \tag{4.9}$$

Par [B3, Théorème 4.3], dans l'espace de Sobolev adéquat, quand $u \to +\infty$, on a

$$\varphi \operatorname{Tr}_s\left[N_H \exp\left(-\left(\nabla^{\xi}+\sqrt{u}\ V\right)^2\right)\right] = \tag{4.10}$$

$$-\left(Td^{-1}\right)'\left(N, g^N\right) \mathrm{ch}\left(\eta, g^{\eta}\right) \delta_Y + O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

En suivant Bismut-Gillet-Soulé [BGS4, Définition 2.1], on pose maintenant la définition suivante.

Définition 4.4 : Pour $s \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$, soit $R(\xi, h^{\xi})(s)$ le courant sur X

$$R\left(\xi, h^{\xi}\right)(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} u^{s-1} \left(\varphi \operatorname{Tr}_s\left[N_H \exp\left(-\left(\nabla^{\xi} + \sqrt{u}\ V\right)^2\right)\right] \right.$$

$$\left. + \left(\mathrm{Td}^{-1}\right)'\left(N, g^N\right) \operatorname{ch}\left(\eta, g^{\eta}\right) \delta_Y \right) du \qquad (4.11)$$

Alors $R(\xi, h^{\xi})(s)$ s'étend en une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$, qui est holomorphe en 0.

Definition 4.5 : Soit $T(\xi, h^{\xi})$ le courant sur X

$$T\left(\xi, h^{\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial s} R\left(\xi, h^{\xi}\right)(0) \qquad (4.12)$$

On a le résultat de [BGS4, Théorème 2.5]

Théorème 4.6 : Le courant $T(\xi, h^{\xi})$ est somme de courants de type (p, p). Le front d'onde du courant $T(\xi, h^{\xi})$ est inclus dans N_R^*. De plus, on a l'équation de courants sur X

$$\frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} T\left(\xi, h^{\xi}\right) = \frac{\operatorname{ch}\left(\eta, g^{\eta}\right)}{\mathrm{Td}\left(N, g^N\right)} \delta_Y - \operatorname{ch}\left(\xi, h^{\xi}\right). \qquad (4.13)$$

b) Compatibilité des courants $T(\xi, h^{\xi})$ à une formule raffinée de Riemann-Roch-Grothendieck.

Par (4.13), les courants $ch(\xi, h^{\xi})$ et $\dfrac{ch\left(\eta, g^{\eta}\right)}{Td\left(N, g^{N}\right)}\delta_Y$ sont cohomologues. Ce résultat exprime un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les immersions. La compatibilité de la formule de Riemann-Roch-Grothendieck aux immersions est en particulier liée à la multiplicativité du genre Todd.

Les courants $T(\xi, h^{\xi})$ sont déterminés par l'immersion i et par les fibrés hermitiens considérés Une question naturelle est alors de savoir si ces courants sont, en un sens naturel, fonctoriellement compatibles aux immersions.

Soit Y, Y' deux sous-variétés complexes transversales de X. Soit η, η' des fibrés holomorphes sur Y, Y', soient $(\xi, v), (\xi', v')$ des complexes de fibrés holomorphes sur X résolvant η, η'. Alors $\left(\xi \widehat{\otimes} \xi', v + v'\right)$ résoud $\eta_{|Y\cap Y'} \otimes \eta'_{|Y\cap Y'}$.

On a le diagramme commutatif d'immersions

(4.14)

$$\begin{tikzcd}
Y \cap Y' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\
Y' \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Etant données des métriques sur les fibrés considérés, on peut attacher un courant à chaque flèche de (4.14).

On montre dans Bismut-Gillet-Soulé [BGS5, Théorème 2.7] qu'il existe des relations naturelles entre les courants $T(\xi, h^{\xi})$, $T(\xi', h^{\xi'})$, $T(\xi \widehat{\otimes} \xi', h^{\xi} \widehat{\otimes} h^{\xi'})$ qui raffinent de manière "évidente" les relations existantes au niveau des formes de caractères de Chern pour ξ, ξ' et $\xi \,\widehat{\otimes}\, \xi'$. Ce résultat fonde au plan analytique la possibilité d'une version raffinée du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

De plus on a montré dans [BGS5, Théorème 4.13] la compatibilité des courants $T(\xi, h^{\xi})$ aux classes caractéristiques arithmétiques de Gillet et Soulé [GS1,2].

c) Une formule de Riemann-Roch-Grothendieck raffinée pour les immersions complexes

Soit $\lambda^G(\eta)$ l'inverse du déterminant de la cohomologie de η. De même pour $0 \le i \le m$, soit $\lambda^G(\xi_i)$ l'inverse du déterminant de la cohomologie de ξ_i. On pose

$$\lambda^G(\xi) = \bigotimes_{i=0}^{m} \left(\lambda^G(\xi_i)\right)^{(-1)^i}. \tag{4.15}$$

Comme le complexe (ξ, v) résoud $i_*\eta$, par Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM], les fibres $\lambda^G(\xi)$ et $\lambda^G(\eta)$ sont canoniquement isomorphes. Soit $\sigma \in (\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)$ la section non nulle définissant cet isomorphisme.

Supposons que g^{TX} soit une métrique Kählérienne sur TX, induisant une métrique Kählérienne g^{TY} sur TY. En identifiant N à l'orthogonal de TY dans $TX_{|Y}$, N est muni d'une métrique g^N. Soit g^η une métrique Hermitienne sur η.

Soient $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ des métriques sur $\xi_0, \dots, \xi_m$ vérifiant l'hypothèse de compatibilité (A) de [B3] relativement aux métriques g^N, g^η sur N, η.

Soient $\| \ \|_{\lambda^G(\eta)}$ et $\| \ \|_{\lambda^G(\xi)}$ les métriques de Quillen sur les fibres $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$ (la métrique $\| \ \|_{\lambda^G(\xi)}$ est naturellement définie comme le produit alterné des métriques de Quillen $\| \ \|_{\lambda^G(\xi_i)}$). Soit $\| \ \|_{(\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)}$ la métrique sur $(\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)$ associée aux métriques $\| \ \|_{\lambda^G(\eta)}$, $\| \ \|_{\lambda^G(\xi)}$.

Il est naturel de chercher une formule pour $\mathrm{Log}(\|\sigma\|^2_{(\lambda^G(\eta))^{-1}\otimes\lambda^G(\xi)})$. Ce calcul vise en effet à raffiner au niveau des métriques de Quillen un calcul de compatibilité pour les formes de courbure des connexions holomorphes Hermitiennes sur les fibrés holomorphes Hermitiens $(\lambda^G(\eta), \|\ \|_{\lambda^G(\eta)})$, $(\lambda^G(\xi), \|\ \|_{\lambda^G(\xi)})$par composition d'une immersion suivie d'une submersion, qu'on vérifie facilement grâce aux résultats de Bismut-Gillet-Soulé [BGS3, 4] rappelés aux Théorèmes 3.15 et 4.13.

Le calcul de $\mathrm{Log}(\|\sigma\|^2_{(\lambda^G(\eta))^{-1}\otimes\lambda^G(\xi)})$ est l'objet d'un travail de Bismut-Lebeau [BL2], dont les résultats on été annoncés dans [BL1].

Nous nous contenterons ici d'énoncer le résultat principal de [BL2], dont la preuve est difficile.

Soit P^Y l'ensemble des formes C^∞ sur Y, qui sont sommes de formes de type (p, p). Soit $P^{Y,0}$ le sous-espace de P^Y formé de formes de type $\partial\alpha + \bar{\partial}\beta$, où α et β sont C^∞ sur Y.

Par une construction de [BGS1, Section 1f)], à la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens

$$0 \to TY \to TX_{|Y} \to N \to 0., \tag{4.16}$$

on peut associer une classe de formes C^∞ $\widetilde{\mathrm{Td}}(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}) \in P^Y/P^{Y,0}$, telle que

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}) \\ &= \mathrm{Td}(TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}) - \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\,\mathrm{Td}(N, g^N) \end{aligned} \tag{4.17}$$

Cette classe est normalisée par le fait qu'elle vérifie des conditions naturelles de fonctorialité et qu'elle est nulle si la suite exacte (4.16) est scindée holomorphiquement et métriquement.

Introduisons maintenant une série formelle de Gillet et Soulé [GS3]. Soit $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann.

Définition 4.7 : Soit $R(x)$ la série formelle

$$R(x) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left(2 \frac{\zeta'(-n)}{\zeta(-n)} + \sum_{1}^{n} \frac{1}{j} \right) \zeta(-n) \frac{x^n}{n!} \tag{4.18}$$

Gillet et Soulé [GS3] ont obtenu la série $R(x)$ par un calcul difficile et explicite de la torsion analytique de Ray-Singer de $P^n(\mathbb{C})$ muni de la métrique de Fubini-Study. Ils ont conjecturé que le genre additif correspondant devrait intervenir dans une formule à la Faltings-Riemann-Roch [F, Théorème 3], [La, Théorème V 3.4] pour des variétés arithmétiques de dimension arbitraire.

Dans un calcul préparatoire à l'établissement d'une formule pour $\mathrm{Log}(\|\sigma\|^2_{(\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)})$, nous avons construit dans [B4] une classe caractéristique secondaire naturelle associée à une suite exacte courte

$$0 \to L \to M \to N \to 0 \tag{4.19}$$

de fibrés holomorphes Hermitiens. Cette classe est essentiellement une sorte de caractère de Chern secondaire associé à une famille non triviale d'opérateurs elliptiques agissant sur les fibres de M. Dans ce calcul intervient le genre additif associé à la fonction $D(x)$, qui est la dérivée en 0 par rapport à $s \in \mathbb{C}$ de la transformée de Mellin en la variable u de la dérivée logarithmique par rapport à $x \in \mathbb{C}$ de l'inverse de la fonction

$$\varphi(u, x) = \frac{4}{u} \operatorname{sh}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4u}}{4} \right) \operatorname{sh}\left(\frac{-x + \sqrt{x^2 + 4u}}{4} \right) \tag{4.20}$$

On obtient alors dans [B4, Théorème 6.2] la formule de produit remarquable

$$\varphi(u, x) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{ix}{2k\pi} + \frac{u}{4k^2\pi^2} \right) \left(1 - \frac{ix}{2k\pi} + \frac{u}{4k^2\pi^2} \right) \tag{4.21}$$

qui rend particulièrement plaisante l'expression de la dérivée logarithmique de $\varphi(u, x)$ en la variable en x. On notera au passage - ce qui n'est pas un hasard - que

$$\varphi(0, x) = \widehat{A}^{-1}(x) \tag{4.22}$$

Dans un calcul mené avec Soulé dans [B4, Appendice], nous avons obtenu la formule

$$D(x) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left(2 \frac{\zeta'(-n)}{\zeta(-n)} + \sum_{1}^{n} \frac{1}{j} + \Gamma'(1) \right) \zeta(-n) \frac{x^n}{n!} \tag{4.23}$$

Dans l'établissement de (4.22), l'équation fonctionnelle de la fonction ζ joue un rôle essentiel.

La similarité des formules (4.18) et (4.23) est incroyable, car les calculs qui y mènent sont radicalement différents. On peut espérer donner une interprétation géométrique de cette singularité.

Rappelons que R est identifié au genre additif corrrespondant.

Nous énonçons maintenant le résultat essentiel de Bismut-Lebeau [BL2, Théorèmes 0.1 et 6.1].

Théorème 4.8 : On a la formule

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}\left(\|\sigma\|^2_{\left(\lambda^G(\eta)\right)^{-1} \otimes \lambda(\xi)} \right) = & - \int_X \operatorname{Td}\left(TX, g^{TX}\right) T\left(\xi, h^{\xi}\right) \\ & + \int_Y \frac{\widetilde{\operatorname{Td}}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right)}{\operatorname{Td}\left(N, g^N\right)} \operatorname{ch}\left(\eta, g^{\eta}\right) \\ & - \int_X \operatorname{Td}(TX) R(TX) \operatorname{ch}(\xi) + \int_Y \operatorname{Td}(TY) R(TY) \operatorname{ch}(\eta) \end{aligned}$$

Il est hors de question de donner ici des indications, même brèves, sur la preuve du Théorème 4.8. On utilise l'ensemble des techniques d'indice local, la théorie spectrale dans des situations très dégénérées, les propriétés de propagation à vitesse finie des équations hyperboliques etc...

La simplicité relative de la formule finale est elle-même le résultat d'un concours invraisemblable de circonstances analytiques et algébriques. Les calculs de [B4] interviennent dans la phase finale de la démonstration.

Le résultat de Bismut-Lebeau [BL1,2] a permis récemment à Gillet et Soulé [GS4] d'obtenir une version d'un Théorème deRiemann-Roch arithmétique à la Arakelov-Faltings. En particulier les calculs de [GS3] et [B4] se conjuguent pour expliquer la simplicité de la formule finale.

REFERENCES

[ABoP] Atiyah, M.F., Bott, R., Patodi, V.K. : On the heat equation and the Index Theorem. Invent. Math. 19, 279-330 (1973).

[AHS] Atiyah,M. F., Hitchin, N.J., Singer, I.M. : Self-duality in four dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. Lond. A 362, 425-461 (1978).

[APS] Atiyah, M.F., Patodi V.K., Singer I.M. : Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77, 43-69 (1975).

[AS1] Atiyah, M.F., Singer I.M. : The index of elliptic operators. III Ann. of Math. 87, 546-604 (1968).

[AS2] Atiyah, M.F., Singer I.M. : The index of elliptic operators. IV Ann. Math. 93, 119-138 (1971).

[BeV] Berline N., Vergne M. : A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators. Topology 26, 435-463 (1987).

[BeGeV] Berline N., Getzler E., Vergne M. : Heat kernels and the Dirac operator. En préparation 1989.

[B1] Bismut, J.M. : The index Theorem for families of Dirac operators : two heat equation proofs. Invent. Math. 83, 91-151 (1986).

[B2] Bismut, J.M.: Formules de Lichnerowicz et théorème de l'indice. Proceedings of the Conference in honour of A. Lichnerowicz. D. Bertrand, Y. Choquet-Brutat ed. Vol. Géom. Diff., pp. 11-31. Travaux en cours. Paris : Hermann 1988.

[B3] Bismut, J.M.: Superconnection currents and complex immersions. Invent. Math. 59-113 (1990).

[B4] Bismut, J.M.: Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class. J.A.M.S. 3, 159-256 (1990).

[BF1] Bismut, J.-M., Freed D.S. : The analysis of elliptic families I, Metrics and connections on determinant bundles. Comm. Math. Phys. 106, 159-176 (1986).

[BF2] Bismut, J.-M., Freed D.S. : The analysis of elliptic families II, Dirac operators, eta invariants and the holonomy Theorem. Comm. Math. Phys. 107, 103-163 (1986).

[BGS1] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Comm. Math. Phys. 115, 49-78 (1988).

[BGS2] Bismut J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Comm. Math. Phys. 115, 79-126 (1988).

[BGS3] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Comm. Math. Phys. 115, 301-351 (1988).

[BGS4] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Bott-Chern currents and complex immersions. Duke Math. Journal 60, 255-284(1990).

[BGS5] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Complex immersions and Arakelov geometry. The Grothendieck Festschrift, P. Cartier et al. eds. Vol I, pp. 249-331. Progress in Math. n° 86. Boston : Birkhaüser 1990.

[BL1] Bismut, J.M., Lebeau, G. : Immersions complexes et métriques de Quillen. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math 309, 487-491 (1989).

[BL2] Bismut, J.M., Lebeau, G. Complex immersions and Quillen metrics. Preprint Orsay 90-13 (1990). A paraître aux Publ. Math. IHES.

[E] Eilenberg, S. : Homological dimension and local syzygies. Ann. of Math. 64, 328-336 (1956).

[F] Faltings G. : Calculus on arithmetic surfaces. Ann. of Math. 119, 387-424 (1984)

[Ge] Getzler, E. : A short proof of the Atiyah-Singer Index Theorem. Topology 25, 111-117 (1986).

[Gi1] Gilkey, P. : Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. Adv. Math. 10, 344-382 (1973).

[Gi2] Gilkey, P. : Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem. Washington : Publish or Perish 1984.

[GS1] Gillet, H., Soulé, C. : Arithmetic Intersection Theory, 1988, Preprint IHES/M/88/30.

[GS2] Gillet, H., Soulé, C : Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metrics. Ann. Math. I. 131, 163-203 (1990). II 131, 205-238 (1990).

[GS3] Gillet, H., Soulé, C : Analytic torsion and the arithmetic Todd genus. A paraître dans Topology. Preprint IHES/M/88/12.

[GS4] Gillet, H., Soulé, C : Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique. C.R.A.S. Série I, 309, 929-932 (1989).

[H] Hitchin, N.J. : Harmonic spinors. Adv. in Math. 14, 1-55 (1974).

[KM] Knudsen, F.F., Mumford, D. : The projectivity of the moduli space of stable curves, I : Preliminaries on "det" and "div". Math. Scand. 39, 19-55 (1976).

[L] Lichnerowicz, A. : Spineurs harmoniques. C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A, 257, 7-9 (1963).

[La] Lang, S. : Introduction to Arakelov Theory. Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1988.

[MQ] Mathai V. Quillen D. : Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. Topology 25, 85-110 (1986).

[P] Patodi , V.K. : Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J. Differ. Geom. 5, 233-249 (1971)

[Po] Polyakov, A.M. : Quantum geometry of bosonic strings. Phys. Letters 103B, 207-210 (1981).

[Q1] Quillen, D.: Superconnections and the Chern character. Topology, 24, 89-95 (1985).

[Q2] Quillen, D.: Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface. Funct. Anal. Appl. 14, 31-34 (1985).

[RS] Ray, D.B., Singer, I.M. : Analytic torsion for complex manifolds. Ann.of Math.98, 154-177 (1973) .

[S] Serre, J.P. : Algèbre locale. Multiplicités. Lecture Notes in Math. n° 11. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1965.

[Se] Seeley, R.T. : Complex powers of an elliptic operator. Proc. Symp. Pure and Appl. Math. AMS 10, 288-307 (1967)

Département de Mathématique
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
91405 - Orsay
FRANCE