MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE BÉRARD

Quelques théorèmes d'annulation et de majoration d'invariants géométriques

Mémoires de la S. M. F. 2^e^ série, tome 46 (1991), p. 19-26

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__19_0>

QUELQUES THÉORÈMES D'ANNULATION ET DE MAJORATION D'INVARIANTS GÉOMÉTRIQUES

par *Pierre BÉRARD (*)*

INTRODUCTION
CADRE GÉNÉRAL
GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BOCHNER : VARIÉTÉS COMPLÈTES
CAS DES VARIÉTÉS FERMÉES
RÉFÉRENCES

INTRODUCTION

En 1946, S. Bochner publiait le résultat suivant ([BO])

1. THÉORÈME. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne fermée et soit* Ric_g *sa courbure de Ricci. Alors*

(i) Si $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ *et s'il existe un point* $x_0 \in M$ *tel que* $\mathrm{Ric}_g(x_0) > 0$, *le premier nombre de Betti* $b_1(M)$ *de* M *vérifie* $b_1(M) = 0$;

(ii) Si $\mathrm{Ric}_g \geq 0$, *on a* $b_1(M) \leq \dim M$.

Ce théorème est optimal, comme le montre le cas d'un *tore plat*. La méthode développée par S. Bochner (connue maintenant sous le nom de *technique de Bochner*) a permis d'obtenir des théorèmes d'annulation d'autres invariants topologiques ou géométriques, en géométrie réelle comme en géométrie complexe (voir [WU] pour une synthèse).

L'énoncé ci-dessus soulève plusieurs questions naturelles.

2. QUESTIONS.

(a) Peut-on affaiblir l'hypothèse $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ (et éventuellement "il existe $x_0 \in M$ tel que $\mathrm{Ric}_g(x_0) > 0$") en une hypothèse de ***positivité en moyenne*** et obtenir encore $b_1(M) \leq \dim M$ (éventuellement $b_1(M) = 0$)?

(*) Recherche effectuée en partie dans le cadre du contrat CEE n° SC1 - 0105 - C "GADGET", U.A. au CNRS 080188

(b) Peut-on majorer $b_1(M)$ sous une hypothèse convenable sur Ric_g et moyennant une ***normalisation appropriée*** de la métrique (la nécessité d'une telle normalisation, quand la courbure peut devenir négative, apparaît dès la dimension 2 avec le théorème de Gauss-Bonnet : voir [B-G])?

(c) Peut-on généraliser le théorème de Bochner aux variétés complètes non compactes?

Le but de cette conférence est de décrire, sans souci d'exhaustivité, quelques résultats récents qui donnent des éléments de réponse aux questions ci-dessus (voir [BD], [GA] et [RO] pour plus de détails).

CADRE GÉNÉRAL

La méthode de Bochner prend comme point de départ la formule de Bochner–Weitzenböck

$$\Delta_H \omega = \overline{\Delta}\omega + \mathrm{Ric}(\omega^{\#},\bullet) \tag{3}$$

où ω est une 1–forme différentielle, Δ_H le Laplacien de Hodge–de Rham sur les 1–formes, $\overline{\Delta}$ le Laplacien de Bochner $\overline{\Delta} = D^*D$ (composé de la dérivation covariante de Levi–Civita et de son adjoint formel) et $\omega^{\#}$ le champ de vecteurs associé à ω par la métrique g .

Prenant le produit scalaire de (3) avec ω et intégrant, on trouve (ω harmonique)

$$0 = \int_M \langle \omega, \Delta_H \omega\rangle dx = \int_M \left\{|D\omega|^2 + \mathrm{Ric}(\omega^{\#},\omega^{\#})\right\} dx \ .$$

Si $\mathrm{Ric} \geq 0$, on en déduit que ω est parallèle et donc $b_1(M) \leq \dim T_x^* M = \dim M$; si de plus $\mathrm{Ric}(x_0) > 0$, on en déduit que $\omega(x_0) = 0$ d'où $\omega = 0$. Ceci démontre le Théorème 1.

Pour obtenir des généralisations du théorème de Bochner, on est amené à introduire plus d'outils analytiques. La courbure de Ricci joue alors un double rôle : *(1)* celui de "potentiel" dans la formule de Bochner–Weitzenböck $\Delta_H = \overline{\Delta} + \mathrm{Ric}$ et *(2)* celui de "paramètre de contrôle" de l'analyse globale sur (M,g) (voir l'inégalité isopérimétrique (12) ci-dessous).

Pour mieux comprendre ce deuxième rôle, nous nous plaçons dans un cadre plus général.

On considère maintenant une variété riemannienne complète (M,g) et E un *fibré vectoriel riemannien* au-dessus de M (*i.e.* E est muni d'un produit scalaire $\langle\bullet,\bullet\rangle$ dans chaque fibre E_x et d'une connexion D qui est $\langle\bullet,\bullet\rangle$–compatible).

On suppose que l'on a aussi un *Laplacien naturel* $\widetilde{\Delta}$ agissant sur les sections de E et qui vérifie une *formule de Weitzenböck*

$$\widetilde{\Delta} = D^*D + \mathcal{R} \tag{4}$$

où D^* est l'adjoint formel de D et où $\mathcal{R}$ est un endomorphisme symétrique de E ($\overline{\Delta} = D^*D$ s'appelle encore le Laplacien de Bochner).

5. EXEMPLES (voir [GY] pour une discussion générale).

(i) $E = \Lambda^p T^*M$; $\widetilde{\Delta} = \Delta_H$ le Laplacien de Hodge–de Rham sur les p–formes (quand $p = 1$, $\mathcal{R} = \mathrm{Ric}$ comme endomorphisme symétrique de T^*M);

(ii) E = fibré des spineurs; $\widetilde{\Delta}$ = opérateur de Dirac (ici $\mathcal{R} = \frac{1}{4}\mathrm{Scal}_g$, la courbure scalaire de g : voir [WU]);

(iii) $M^n \to \mathbf{R}^n$ immersion isométrique minimale, $E = NM$ le fibré normal; $\widetilde{\Delta}$ = opérateur de Jacobi (variation seconde de "l'aire", $\mathcal{R}$ se calcule au moyen de la seconde forme fondamentale : voir [Si]).

On s'intéresse en général à l'***invariant géométrique***

$$\delta(E) = \dim\ker(\widetilde{\Delta}) \tag{6}$$

(en fait nombre de valeurs propres négatives de $\widetilde{\Delta}$ dans le cas de l'Exemple *(iii)* ci-dessus).

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BOCHNER : VARIÉTÉS COMPLÈTES

Il est immédiat que le Théorème 1 s'étend au cadre général : si $\mathcal{R} \geq 0$ alors $\delta(E) \leq \mathrm{rang}(E)$ et si de plus il existe $x_0 \in M$ tel que $\mathcal{R}(x_0) > 0$, alors $\delta(E) = 0$ (voir aussi la Remarque qui suit la Proposition 10).

Dans le cas où (M, g) est complète, on a le résultat suivant :

7. PROPOSITION. — *Soit (M,g) une variété riemannienne complète (non compacte) et soit λ_0 la borne inférieure (≥ 0) du spectre du Laplacien sur les fonctions. Soit $L^2\mathcal{H}(E) = \{s \in L^2(E) \mid \widetilde{\Delta}s = 0\}$.*

(i) Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$ et s'il existe $x_0 \in M$ tel que $\mathcal{R}(x_0) > -\lambda_0$, alors $L^2\mathcal{H}(E) = \{0\}$;

(ii) Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$ et si $\lambda_0 \in \mathcal{G}(M)$, la région de Green de M , alors $L^2\mathcal{H}(E) = \{0\}$;

(iii) Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$, alors $\dim L^2\mathcal{H}(E) \leq \mathrm{rang}(E)$.

8. COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du Théorème, si $E = T^*M$, alors $\mathrm{Ric} \geq -\lambda_0$ implique que $L^2\mathcal{H}(T^*M) = \{0\}$ i.e. il n'existe pas de 1–forme L^2 harmonique; dans ce cas, l'image de la cohomologie à support compact $H^1_{\mathrm{comp}}(M, \mathbf{R})$ dans la cohomologie est réduite à $\{0\}$.*

La proposition 7 est due en partie à J. Dodziuk [DK], pour *(i)* et *(iii)*, avec l'hypothèse moins générale $\mathcal{R} \geq 0$ (et $\mathcal{R}(x_0) > 0$ pour *(i)*); et à K.D. Elworthy-S. Rosenberg : voir [RO], pour *(i)* et *(ii)*. Elworthy et Rosenberg utilisent une technique d'équation de la chaleur via le mouvement brownien : pour cette raison, ils imposent en plus la condition Ric_g minorée inférieurement; ils posent le problème de l'existence d'une preuve "classique" *i.e.* sans utilisation du mouvement brownien. Nous indiquons ici les grandes étapes d'une telle preuve, inspirée de [DK]. Pour la notion de *région de Green*, nous renvoyons à D. Sullivan [SN].

Preuve de la Proposition 7. — Soit $\rho(x)$ la plus petite valeur propre de $\mathcal{R}_x$ dans E_x . On a donc $\rho(x) \geq -\lambda_0$. Soit $s \in L^2\mathcal{H}(E)$ une section $\widetilde{\Delta}$−harmonique, L^2; soit $\varphi = |s| \in L^2(M)$. De l'inégalité de Kato $\big|d|s|\big| \leq |Ds|$ (Cauchy Schwarz), on déduit

$$\Delta|s| \leq -\rho|s| \leq \lambda_0|s| \quad i.e.\ \Delta\varphi \leq -\rho\varphi \leq \lambda_0\varphi \tag{9}$$

(N.B. notre Laplacien s'écrit $\Delta = -d^2/dx^2$ sur $\mathbf{R}$).

Soit $\zeta : \mathbf{R}_+ \to [0,1]$, C^∞ t.q. supp $\zeta \subset [0,2]$, $\zeta|[0,1] \equiv 1$ et $|\zeta'| \leq 3$. Soit $f_A(x) = \zeta(\overline{xx_0}/A)$ où $\overline{xx_0}$ = distance riemannienne de x à x_0 (rappelons que M est complète). Multipliant (9) par $f_A^2\varphi$, on montre facilement (intégrations par parties, Cauchy-Schwarz...) que

$$\int_M |d(\varphi f_A)^2 dx \leq \int_M \varphi^2|df_A|^2dx + \int_M(-\rho)\varphi^2dx$$

$$(1-\varepsilon^2)\int_M f_A^2|d\varphi|^2dx \leq \int_M |d(\varphi f_A)|^2dx + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_M \varphi^2|df_A|^2dx\ , \quad (\forall\varepsilon>0, \forall A>0).$$

Si $\mathcal{R}(x) \geq C > -\lambda_0$ sur $B(x_0,\delta)$, on a alors (1ère inégalité et $\lambda_0 = \mathrm{Inf\ Spec}\ (\Delta)$)

$$0 \leq -(C+\lambda_0)\int_{B(x_0,\delta)} \varphi^2 dx$$

d'où $\varphi = 0$ sur $B(x_0,\delta)$ et donc $\varphi \equiv 0$ (principe du prolongement unique ([E-L], p. 11); d'où $s \equiv 0$. Ceci démontre l'Assertion *(i)*.

Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$, on montre que φ est une fonction propre L^2 du laplacien pour la valeur propre λ_0 et on en déduit l'Assertion (ii) (voir [SN]); l'Assertion (iii) se démontre en examinant le cas d'égalité dans l'inégalité de Kato (c'est-à-dire dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). ∎

Preuve du Corollaire 8. — Si $0 \neq \omega \in L^2\mathcal{H}(T^*M)$, on déduit de la preuve précédente que $\omega = \varphi\widetilde{\omega}$ avec $\widetilde{\omega}$ parallèle de norme 1 et $\mathrm{Ric}(\widetilde{\omega}^\#,\bullet) = -\lambda_0\widetilde{\omega}^\#$ (égalilté dans l'inégalité de Kato). Ceci n'est possible que si $\lambda_0 = 0$. On a alors φ = constante et $\mathrm{Ric} \geq 0$, d'où $\mathrm{Vol}(M) = \infty$ ([YA]) ce qui est incompatible avec $\omega \in L^2(T^*M)$. Pour la dernière assertion voir par exemple [YA]. ∎

CAS DES VARIÉTÉS FERMÉES

Dans toute cette section, on se place dans le cadre général décrit plus haut avec (M, g) fermée.

Soit $\rho(x)$ la plus petite valeur propre de l'endomorphisme symétrique $\mathcal{R}_x$ de E_x.

Un exemple très simple de ***théorème d'annulation avec positivité en moyenne*** est donné par la

10. PROPOSITION. — *Si la plus petite valeur propre $\lambda_1(\Delta + \rho)$ de l'opérateur $\Delta + \rho$ agissant sur $C^\infty(M)$ est strictement positive alors $\delta(E) = 0$.*

(Δ est le Laplacien positif agissant sur les fonctions).

Soit $s \in C^\infty(E)$ une section harmonique (i.e. $\tilde{\Delta} s = 0$). La formule de Weitzenböck (4) et la définition de ρ donnent

$$0 = \int_M \langle \tilde{\Delta} s, s\rangle d = \int_M \left(|Ds|^2 + \langle \mathcal{R}(s), s\rangle\right) d \geq \int_M \left(|Ds|^2 + \rho|s|^2\right) d \,.$$

L'inégalité de Kato, $\big|d|s|\big| \leq |Ds|$ et le min–max donnent finalement $0 \geq \lambda_1(\Delta + \rho) \int_M |s|^2 dv_g$ d'où la proposition. ∎

REMARQUE. — Rappelons que $\lambda_1(\Delta) = 0$. Si donc $\rho(x) \geq 0$ et $\rho(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in M$, on a immédiatement $\lambda_1(\Delta + \rho) > 0$, d'où $\delta(E) = 0$; on a ainsi l'assertion (1) du théorème de Bochner dans un cadre général.

Dans le cas où ρ peut prendre des valeurs négatives, on a le lemme suivant (dû à K. Elworthy et S. Rosenberg : [E-R], où l'on trouvera par ailleurs des extensions intéressantes du théorème de Bochner).

11. LEMME. — *Soit (M, g) une variété riemannienne fermée et $V : M \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Si*

(i) $\int_M V v_g > 0$ *et*

(ii) $\lambda_2(\Delta) \geq -V_{\min} + \int_M \left(V - \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M V dv_g\right)^2 dv_g \Big/ \int_M V dv_g$ *alors* $\lambda_1(\Delta + V) > 0$.

Ici $V_{\min} = \inf_M V$ et $\lambda_2(\Delta)$ est la première valeur propre non nulle du Laplacien Δ agissant sur $C^\infty(M)$).

Le Lemme 11 et la Proposition 10 conduisent donc à un théorème d'annulation dès que l'on sait comparer ρ à $\lambda_2(\Delta)$ (formule *ii)* ci-dessus). Contrairement au cas où $\rho \geq 0$, on est donc amené, quand ρ peut prendre des valeurs négatives, à comparer ρ avec un nombre qui prend en compte la ***la géométrie globale*** de (M, g). Dans la pratique, on utilisera *(ii)* en remplaçant $\lambda_2(\Delta)$ par un minorant, par exemple celui fourni par l'inégalité de J. Cheeger (*cf.* [BD], Appendix VI, Corollary 8).

Un moyen commode, pour prendre en compte la géométrie globale de (M,g), consiste à introduire le "*profil isopérimétrique*" $h(M,g;s)$ de (M,g) défini par

$$h(M,g;s) = \inf\left\{\frac{\mathrm{Vol}(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}(M)} \ :\ \Omega \subset M \text{ régulier t.q. } \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(M)} = s\right\} .$$

Soit (S^n, can) la sphère canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ (de rayon 1) muni de la métrique induite.

Etant donné $R > 0$, on dira que $(M,g) \in \mathcal{J}_R$ si $\dim M = n$ et si M vérifie l'*inégalité isopérimétrique*

$$\forall s \in [0,1]\ ,\ h(M,g;s) \geq R^{-1} h(S^n, \mathrm{can}; s)\ . \tag{12}$$

Soient $\varepsilon \in \{-1,0,1\}$, $\alpha \in \mathbf{R}_+^\bullet$, $D \in \mathbf{R}_+^\bullet$. Il résulte de [B-B-G] qu'il existe un nombre $a(n,\varepsilon,\alpha) > 0$ tel que l'ensemble $\mathcal{J}_{a(n,\varepsilon,\alpha)D}$ contienne l'ensemble

$$\left\{(M,g) :\ \dim M = n\ ,\ \mathrm{Diam}(M) \leq D\ ,\ \mathrm{Diam}(M)^2 \,\mathrm{Ric}_g \geq (n-1)\varepsilon\alpha^2\right\}$$

(voir [GA] pour d'autres résultats de ce type).

Le résultat suivant répond en partie aux Questions 2 *(a)-(b)*.

13. Théorème ([B-B]). — *Si* $\dim M = n \geq 3$, *il existe une constante positive* $C(n)$, *telle que si* $(M,g) \in \mathcal{J}_R$, $(R > 0)$ *alors*

$$\delta(E) \leq C(n)\,\mathrm{rang}(E)\cdot\sup\left\{1, \left(\lambda_1(\Delta+\rho^+)R^2\right)^{-n/2}\right\}\cdot\frac{1}{\mathrm{Vol}(M,g)}\int_M (R^2\rho^-)^{n/2}dv_g\ .$$

Remarques.

(i) La majoration n'a d'intérêt que si $\rho^+ \not\equiv 0$, ce qui implique $\lambda_1(\Delta+\rho^+) > 0$. Dans ce cas, on peut minorer $\lambda_1(\Delta+\rho^+)$ en fonction de R , $\|\rho^+\|_{L^1}$, $\|\rho^+\|_{L^\infty}$ (voir [B-B], Appendix 2);

(ii) Les différents facteurs sont invariants par dilatation des métriques;

(iii) Si $E = T^*M$ et $\widetilde{\Delta} = \Delta_H$, alors $\delta(E) = b_1(M)$ et la plus petite valeur propre $r(x)$ de $\mathrm{Ric}_g(x)$ peut apparaître à la fois dans l'évaluation de R (*cf.* l'inégalité isopérimétrique (12)) et dans le second membre de l'inégalité du Théorème 13. L'introduction du cadre général permet donc de découpler les deux rôles joués par Ric_g dans le cas particulier où $E = T^*M$.

La preuve du Théorème 13 repose, *(1)* sur la caractérisation variationnelle des valeurs propres (min–max), *(2)* sur l'inégalité de Kato (9) et sur une notion de domination d'opérateurs qui lui est associée ([BE]), *(3)* sur le contrôle du noyau de l'équation de la chaleur sur M ([BD], Appendix 7) et *(4)* sur l'adaptation d'une technique développée par E. Lieb ([LB]) pour évaluer le nombre d'états liés d'un opérateur de Schrödinger.

Pour d'autre résultats, analogues au Théorème 13, nous renvoyons à [B-B] et [BD] (pour un commentaire sur l'hypothèse $n \geq 3$ dans le Théorème 13, voir [B-B], Appendix 1).

Les méthodes utilisées pour démontrer le Théorème 13 (et l'existence sur une variété minimale M^n de $\mathbf{R}^N$ d'une bonne inégalité isopérimétrique) permettent de démontrer le résultat suivant ([B-B]) :

14. THÉORÈME. — *Soit* $M^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}^N$ *une immersion minimale isométrique complète de dimension* $n \geq 3$. *Soit* $\|B\|$ *la norme de la seconde forme fondamentale de l'immersion. Alors*

$$\textit{Indice de Morse } (f) \leq c(n,N) \int_M \|B\|^n \mathrm{dvol}$$

(où $c(n,N)$ *est une constante universelle).*

REMARQUE. — Un problème ouvert intéressant est celui posé par la Question 2,*(b)* pour M complète non compacte.

RÉFÉRENCES

[B-B] BÉRARD P., BESSON G. — *Number of bound states and estimates on some geometric invariants*, J. Funct. Anal., à paraître 1990.

[B-B-G] BÉRARD P., BESSON G., GALLOT S. — *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math., 80 (1985), 25–308.

[BD] BÉRARD P. — *From vanishing theorems to estimating theorems : the Bochner technique revisited*, Bull. Amer. Math. Soc., 19 (1988), 371–406.

[BE] BESSON G. — *On symmetrization, Appendix A in Spectral Geometry : direct and inverse problems*, P. Bérard, Lecture Notes 1207, Springer, 1986.

[B-G] BÉRARD P., GALLOT S. — *Inégalités isopérimétriques pour l'équation de la chaleur et applications à l'estimation de quelques invariants*, Exp. XV, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 83-84, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1984.

[BO] BOCHNER S. — *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 776–797.

[DK] DODZIUK J. — *Vanishing theorems for square-integrable harmonic forms*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 90 (1981), 21–27.

[E-L] EELLS J., LEMAIRE L. — *Selected topics in harmonic maps*, CBMS n° 50, Amer. Math. Soc., 1980.

[E-R] ELWORTHY K.D., ROSENBERG S. — *Compact manifolds with a little negative curvature*, Bull. Amer. Math. Soc., 20 (1989), 41–44.

[GA] GALLOT S. — *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque Soc. Math. France, 157-158 (1989), 191–216.

[GY] GILKEY P. — *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Differential Geom., 10 (1975), 601–618.

[LB] LIEB E. — *The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem*, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 36 (1980), 241–252.

[RO] ROSENBERG S. — *Semigroup domination and vanishing theorems*, (Proceedings 1987 Cornel Conf. on Geometry of Random Motion) Contemp. Math., 73, Amer. Math. Soc. (1988), 287–302.

[SI] SIMONS J. — *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math., 88 (1968), 62–105.

[SN] SULLIVAN D. — *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, J. Differential Geom., 25 (1987), 327–351.

[WU] WU H. — *The Bochner technique in differential geometry*, Math. Report Series, Harwood Academic Publishers, 1987.

[YA] YAU S.T. — *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*, Indiana U. Math. J., 25 (1976), 659–670.

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on décrit divers résultats récents concernant l'extension et la généralisation du théorème d'annulation de S. Bochner (théorème d'annulation pour les sections harmoniques L^2 d'une fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne M complète; théorème de majoration de la dimension de l'espace vectoriel de telles sections dans le cas où M est fermée; des résultats d'annulation avec hypothèse de "positivité en moyenne".

ABSTRACT. — In this paper we describe recent results extending the classical Bochner vanishing theorem (vanishing theorem for L^2–harmonic section of a riemannian bundle over a complete riemannian manifold M; upper bound on the dimension of the vector space of such sections; vanishing results with a weak positivity assumption.

– ◊ –

P. BÉRARD
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques (UA 188)
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
B.P.74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)
PBERARD@FRGREN81.BITNET