HYMAN BASS

Conjecture Jacobienne et opérateurs différentiels

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 38 (1989), p. 39-50
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1989_2_38__39_0>

Société Mathématique de France
Mémoire n° 38, 1989, p. 39-50.

CONJECTURE JACOBIENNE ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS*

Hyman BASS**

à Pierre SAMUEL

1.– Introduction et énoncés

Soient

$$A = \mathbb{C}[x] \subset B = \mathbb{C}[t]$$

deux algèbres de polynômes en n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $t = (t_1, \dots, t_n)$. Nous supposons que

$$\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(t_1,\dots,t_n)} = 1 . \tag{1}$$

Alors la Conjecture Jacobienn affirme que $A = B$. La condition (1) entraîne que B est étale (= plat et non ramifié) sur A, donc que toute dérivation de A se prolonge à B. Par exemple $\partial_i = \partial/\partial x_i$ opère sur $b = b(t) \in B$ par

$$\partial_i(b) = \frac{\partial(x_1,\dots,x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial(t_1,\dots \qquad \dots, t_n)} .$$

On peut donc considérer A et B comme des modules sur l'algèbre de Weyl

$$W = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n] .$$

---

* Une exposition plus élaborée des résultats présentés ici se trouve dans [B].

** Travail subventionné en partie par NSF Grant DMS 85–03754.

Dans W est contenue l'algèbre de Lie $\underline{gl}_n(\mathbb{C})$, de base $\epsilon_{ij} = x_i\partial_j$ $(i,j = 1,\dots,n)$. Soit $\underline{g} \subset \underline{gl}_n(\mathbb{C})$ une sous–algèbre de Lie.

1.1.– THEOREME. *Si* $\dim_{\mathbb{C}}(\underline{g}) > n$, *alors* B *est un module de torsion sur l'algèbre enveloppante* $U = U\underline{g}$.

En effet supposons que $b \in B$ engendre un U–module libre, $Ub \simeq U$. D'après le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, U est de croissance polynomiale de degré $\dim_{\mathbb{C}}(\underline{g})$. D'autre part $Ub \subset B$ et B est de croissance polynomial de degré Krull $\dim(B) = n$, d'où $\dim_{\mathbb{C}}(\underline{g}) \leq n$ (cf. [B], Prop. (3.2)).

Ce résultat fournit la stratégie suivante pour approcher la Conjecture Jacobienne. Choisissons une algèbre de Lie $\underline{g} \subset \underline{gl}_n(\mathbb{C})$ de dimension $> n$ et d'algèbre enveloppante $U = U\underline{g}$. Alors la condition :

(2) B/A est un U-module sans torsion

entraîne, d'après (1.1), que $A = B$. Plus explicitement, (2) signifie que :

(2′) Si $\phi \in U$, $\phi \neq 0$, $f \in B$, et $\phi f \in A$, alors $f \in A$.

Un élément non constant ϕ du U est dit irréductible si dans toute factorisation $\phi = \phi_1 \cdot \phi_2$ dans U on a $\phi_1 \in \mathbb{C}$ ou $\phi_2 \in \mathbb{C}$. La filtration de Poincaré–Birkhoff–Witt montre que tout élément de U est produit d'éléments irréductibles. Si on vérifie (2′) pour ϕ irréductible alors il est vrai en général (par récurrence sur le nombre de facteurs irréductibles de ϕ). **Il suffit donc de considérer (2′) pour ϕ irréductible.**

Quitte à remplacer $x(t)$ par $x(t) - x(0)$, on peut supposer que $x(0) = 0$. Alors la condition (1) entraîne que les complétés $\hat{A}$ et $\hat{B}$ à l'origine coïncident. D'où les inclusions :

$$A = \mathbb{C}[x] \subset B \subset \hat{A} = \mathbb{C}[[x]] .$$

Notons A_d le $\mathbb{C}$–module des polynômes en $x = (x_1, \dots, x_n)$ homogènes de degré d. On a

$$A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d \subset \hat{A} = \prod_{d \geq 0} A_d . \tag{3}$$

Les opérateurs $\epsilon_{ij} = x_i\partial_j$ sont homogènes, donc les A_d dans (3) sont des U–modules.

Soient $\phi \in U$ et $f \in B$ comme dans (2′). Ecrivons $f = \sum_{d\geq 0} f_d$ où $f_d \in A_d$. On a $\phi f = \sum_{d\geq 0} \phi f_d$ avec $\phi f_d \in A_d$. La condition $\phi f \in A$ signifie que $\phi f_d = 0$ pour tout $d > N$, pour N suffisamment grand. Si $f_{(N)} = \sum_{d\leq N} f_d$ on a $f_{(N)} \in A$ et $\phi(f - f_{(N)}) = 0$; d'ailleurs $f \in A \Leftrightarrow f - f_{(N)} = 0$; d'ailleurs $f \in A \Leftrightarrow f - f_{(N)} \in A$. Ainsi dans (2′) on peut remplacer l'hypothèse "$\phi f \in A$" par "$\phi f = 0$".

NOTATION. Pour tout opérateur linéaire D sur un module V notons

$$V_0^D = \operatorname{Ker}(V \xrightarrow{D} V)\,.$$

Avec cette notation, on voit maintenant que les conditions (2) et (2′) sont équivalents à la condition :

(2″) $\qquad B_0^\phi \subset A$ **pour tout élément irréductible** ϕ de $U = U_{\mathfrak{g}}$.

Pour le cas $n = 2$ nous avons obtenu les résultats suivants. Posons $x = x_1$, $y = x_2$, $\epsilon_x = x\frac{\partial}{\partial x}$, $\epsilon_y = y\frac{\partial}{\partial y}$, $\delta = x\frac{\partial}{\partial y}$, $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y$. On a

$$A = \mathbb{C}[x,y] \subset B \subset \hat{A} = \mathbb{C}[[x,y]]\,.$$

1.2.– PROPOSITION. *B/A est un module sans torsion sur $\mathbb{C}[\epsilon,\delta]$. Plus précisément :*

(a) $\quad B_0^\delta = \mathbb{C}[x] \subset A$ *et* $\hat{A}_0^\delta = \mathbb{C}[[x]]$.

(b) $\quad$ *Si* $\phi = \phi(\epsilon,\delta)$ *et* $\phi(\epsilon,0) \neq 0$ *alors* $B_0^\phi = \hat{A}_0^\phi \subset A$ *et* $\dim_{\mathbb{C}}(\hat{A}_0^\phi) < \infty$.

1.3.– THEOREME. *Soit* $\phi = a\epsilon_x - b\epsilon_y - c$ *où* $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $a,b \geq 0$, $\operatorname{pgdc}(a,b) = 1$, $c \leq 0$ *si* $a = 0$, *et* $c \geq 0$ *si* $b = 0$. *Posons* $u = x^b y^a$. *Alors*

$$B_0^\phi = x^r y^s \mathbb{C}[u] \subset A \quad \textit{et} \quad \hat{A}_0^\phi = x^r y^s \mathbb{C}[[u]]\,,$$

où (r,s) *est le point de* $\mathbb{N}^2$ *le plus près de l'origine sur la droite* $ax - by = c$.

Appelons **spécial linéaire** tout élément ϕ de la forme $\phi = a\epsilon_x - b\epsilon_y - c$ comme dans (1.3).

1.4.— THEOREME. *B/A est un module sans torsion sur $\mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y]$. Plus précisément soit ϕ un élément irréductible de $\mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y]$. Il y a trois cas possibles :*

(a) $B_0^\phi = \hat{A}_0^\phi \subset A$ *et* $\dim_{\mathbb{C}}(\hat{A}_0^\phi) < \infty$.

(b) *Il existe un $k \neq 0$ dans $\mathbb{C}$ tel que $k\phi$ soit spécial linéaire* (cf. (1.3))

(c) $\dim_{\mathbb{C}}(A_0^\phi) = \infty$ *mais tout $f \in \hat{A}_0^\phi$ qui est algébrique sur $\mathbb{C}(x,y)$ appartient à A. En particulier $B_0^\phi \subset A$.*

Pour démontrer la Conjecture Jacobienne (pour $n = 2$) il suffit, d'après (1.1), de montrer que B/A est un module sans torsion sur

$$U = \mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y, \delta] = U\underline{g},$$

où $\underline{g}$ désigne l'algèbre triangulaire supérieure de $\underline{gl}_2(\mathbb{C})$.

1.5.— THEOREME. *Soit $\phi = \phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \delta) \in U$ et posons $\phi_0 = \phi(\epsilon_x, \epsilon_y, 0) \in \mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y]$. Supposons que ϕ_0 ne soit pas multiple d'un élément spécial linéaire. Alors tout $f \in \hat{A}_0^\phi$ qui est algébrique sur $\mathbb{C}(x,y)$ appartient à A. En particulier $B_0^\phi \subset A$.*

Les démonstrations de (1.4) et (1.5) font intervenir le théorème de Siegel sur les courbes algébriques ayant un nombre infini de points entiers, ainsi que le théorème de Fabry sur les séries lacunaires.

2.— Deux lemmes préliminaires.

Soient $A \subset B$ des anneaux commutatifs intègres de corps de fractions $F \subset E$. Notons $A^\times$ et $B^\times$ leurs groupes des éléments inversibles

$$\begin{array}{ccc} F & \subset & E \\ \cup & & \cup \\ A & \subset & B \end{array}.$$

2.1.— LEMME. *Supposons que A soit factoriel, que B soit plat sur A, et que $A^\times = B^\times$. Alors $F \cap B = A$ (autrement dit, B/A est un A-module sans torsion).*

En effet soit $p/q \in F \cap B$ où $p,q \in A$ sont étrangers. Alors la suite $0 \longrightarrow A/qA \xrightarrow{p} A/qA$ est exacte. Tensorisant avec le A–module plat B on trouve que la suite $0 \longrightarrow B/qB \xrightarrow{p} B/qB$ est exacte. Or $p/q \in B$, c'est–à–dire $p \in qB$, donc la dernière application injective est nulle ; d'où $q \in B^{\times} = A^{\times}$ et $p/q \in A$.

Supposons maintenant que

$$A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d \,, \quad A_0 = \mathbb{C} \,,$$

soit une $\mathbb{C}$–algèbre factorielle graduée, que B soit étale sur A, que $B^{\times} = A^{\times}$ $(= \mathbb{C}^{\times})$, et que E soit unirationel sur $\mathbb{C}$.

2.2.– Lemme. *Soit* $u \in A_d$, $d > 0$, *tel que* u *ne soit pas une puissance supérieure à* 1 *d'un élément de* A. *Alors* $\mathbb{C}(u)$ *est algébriquement clos dans* E, *et* $\mathbb{C}(u) \cap B = \mathbb{C}[u]$.

En effet soit L la clôture algébrique de $\mathbb{C}(u)$ dans E. Puisque E est unirationnel sur $\mathbb{C}$ le théorème de Lüroth ([N], p. 137) entraîne que L est une extension rationnelle de $\mathbb{C}$, $L = \mathbb{C}(v)$. Soit $R = L \cap B \supset \mathbb{C}[u]$. Alors R est intégralement clos dans L (car B est normal), donc L est le corps de fractions de R. De plus $R^{\times} \subset B^{\times} = \mathbb{C}^{\times}$, donc R est une algèbre de polynômes, et on peut choisir le générateur v de L tel que $R = \mathbb{C}[v]$..

Notons D la dérivation "d'Euler" de A ; $D(a) = ma$ pour $a \in A_m$. Le prolongement de D à E laisse B invariant, car B est étale sur A. On a $D(u) = du$, donc D laisse invariant $\mathbb{C}(u)$, aussi bien que son extension algébrique L. Il s'ensuit que $R = L \cap B$ est D–invariant. Alors $u \in R = \mathbb{C}[v]$, donc $du = D(u) = \frac{du}{dv} . D(v)$. On voit ainsi que $\deg_v(D(v)) = 1$, $D(v) = av + b$ $(a \in \mathbb{C}^{\times}, b \in \mathbb{C})$. Quitte à remplacer v par $v - a^{-1}b$, on peut supposer que $D(v) = av$. Par suite $D(v^m) = amv$ pour tout $m \geq 0$. Puisque $u \in \mathbb{C}[v]$ est un vecteur propre de D on conclut que $u = cv^m$ ou $c \in \mathbb{C}^{\times}$ et $am = d$. On a donc $uB = (vB)^m$. D'autre part, par hypothèse, l'idéal uA n'est pas une puissance supérieure à 1 dans A. Puisque B est étale, donc non ramifié, sur A l'idéal uB ne peut pas être non plus une puissance supérieure à 1. Donc $m = 1$, $u = cv$, et $\mathbb{C}[u] = \mathbb{C}[v]$; d'où le lemme.

2.3.– COROLLAIRE. *Supposons ci-dessus que* $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ *soit une algèbre de polynômes, et soit* ∂_i *le prolongement de* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *à* E. *Alors*

$$\bigcap_{i=2}^{n} B_0^{\partial_i} = \mathbb{C}[x_1] ,$$

et $\mathbb{C}(x_1)$ *est algébriquement clos dans* E.

En effet on voit facilement que $L = \bigcap_{i=2}^{n} E_0^{\partial_i}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{C}(x_1)$ dans E. Il suffit donc d'appliquer (2.2) avec $u = x_1$.

3.– **Les calculs en dimension 2**.

Revenons au cadre des résultats (1.2),...,(1.5). On a

$$\begin{array}{ccc} A = \mathbb{C}[x,y] \subset B \subset & \hat{A} = \mathbb{C}[[x,y]] \\ \| & \| \\ \bigoplus_{d \geq 0} A_d & \prod_{d \geq 0} A_d \end{array}$$

où A_d désigne le $\mathbb{C}$–module des polynômes en x,y homogènes de degré d. Il nous suffit de supposer que B soit étale sur A, que $B^\times = \mathbb{C}^\times$, et que le corps de fractions de B soit (uni)rationnel sur $\mathbb{C}$.

Rappelons que $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\epsilon_x = x\partial_x$, $\epsilon_y = y\partial_y$, $\delta = x\partial_y$, et $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y$. Ces dérivations opèrent sur les monômes par :

$$(1) \qquad \begin{cases} \epsilon_x(x^p y^q) = px^p y^q \\ \epsilon_y(x^p y^q) = px^p y^q \\ \delta(x^p y^q) = qx^{p+1} y^{q-1} \end{cases}$$

Remarquons d'abord que

$$\hat{A}_0^{\delta} = \hat{A}_0^{\partial_y} = \mathbb{C}[[x]]$$

et que

$$B_0^\delta = \mathbb{C}[x] \subset A ,$$

d'après (2.3), d'où (1.2)(a).

Prenons pour base de A_d les monômes :

$$x^d , x^{d-1}y ,..., xy^{d-1} , y^d .$$

Alors les matrices de ϵ_x et ϵ_y sont diagonales, et celle de δ est

(3)
$$\delta|_{A_d} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & d \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $\phi = \phi(\epsilon_x , \epsilon_y , \delta) \in \mathbb{C}[\epsilon_x , \epsilon_y , \delta]$. On peut écrire ϕ sous la forme :

$$\phi = \sum_{i=0}^{N} \phi_i(\epsilon_x , \epsilon_y)\delta^i .$$

Alors la matrice de ϕ sur A_d est triangulaire supérieure,

(4)
$$\phi|_{A_d} = \begin{bmatrix} \phi_o(d,0) & x\, x & & \\ & \phi_o(d\text{-}1,1) & * & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & \phi_o(0,d) \end{bmatrix}$$

Posons

$$C = \{(p,q) \in \mathbb{C}^2 \mid \phi_o(p,q) = 0\} .$$

Supposons que $\phi_o \neq 0$, de sorte que C est une courbe plane. Pour $d \in \mathbb{N}$ posons

$$N_d = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = d\}$$
$$\{(d,0), (d\text{-}1,1), \ldots, (0,d)\} .$$

Alors on voit que :

$$(5)\begin{cases}\text{Card}(C\cap N_d)\ \text{est la multiplicité de } 0 \text{ comme valeur propre de particulier}\\ \phi|_{A_d}\ .\ \text{En}\quad \dim_{\mathbb{C}}((A_d)_0^{\phi})\geq \text{Card}(C\cap N_d)\\ \text{et}\quad \phi|_{A_d}\ \text{est inversible} \Leftrightarrow C\cap N_d=\emptyset\ .\end{cases}$$

Remarquons que :

$$\hat{A}_0^{\phi}=\prod_{d\geq 0}(A_d)_0^{\phi}\ .$$

Par conséquent :

Les conditions suivantes sont équivalentes

$$(6)\qquad\begin{cases}\text{(a) } \hat{A}_0^{\phi}\subset A\\ \text{(b) } \dim_{\mathbb{C}}(\hat{A}_0^{\phi})<\infty\\ \text{(c) } \text{Card}(C\cap \mathbb{N}^2)\ \text{est fini.}\end{cases}$$

Exemple : Supposons que $\phi_o=\phi_o(\epsilon)\in\mathbb{C}[\epsilon]$ (rappelons que $\epsilon=\epsilon_x+\epsilon_y$), par exemple que $\phi\in\mathbb{C}[\epsilon,\delta]$. Alors les éléments de la diagonale de $\phi|_{A_d}$ sont tous égaux à $\phi_o(d)$. Puisque $\phi_o\neq 0$, $\phi_o(d)$ ne s'annule que pour un nombre fini de valeurs de d, d'où les conditions de (6). Cecic donne (1.2) (b).

Démonstration de (1.3). Considérons un élément ϕ non constant de la forme $\phi=\phi_o=a\epsilon_x-b\epsilon_y-c$ $(a,b,c\in\mathbb{C})$, et soit C la droite

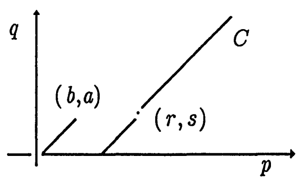
$$C=\{(p,q)\mid ap-bq=c\}\ .$$

Pour montrer que $B_0^{\phi}\subset A$ il suffit, d'après (6), de traiter le cas où $C\cap\mathbb{N}^2$ est infini, donc C est une droite rationnelle. Quitte à multiplier ϕ par une constante on peut supposer que a et b sont des sentiers étrangers (donc $c\in\mathbb{Z}$ aussi) et que $a,b\geq 0$ (donc $c\leq 0$ si $a=0$, et $c\geq 0$ si $b=0$). Ainsi ϕ est "special lineaire" au sens de (1.3). Soit (r,s) le point de $C\cap\mathbb{N}^2$ le plus près de l'origine. Alors

$$C \cap \mathbb{N}^2 = \{(r,s) + n(b,a) \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Donc

(7) $$\hat{A}_0^{\phi} = x^r y^s \mathbb{C}[[u]] \text{ , où } u = x^b y^a .$$



Posons $\partial = a\epsilon_x - b\epsilon_y$, de sorte que $\hat{A}_0^{\partial} = \mathbb{C}[[u]]$. Soit E le corps de fractions de B. Alors E_0^{ϕ} est une extension algébrique de $\mathbb{C}(u)$. D'autre part $u = x^b y^a$ n'est pas une puissance supérieure à 1 d'un élément de A. Du lemme (2.2) on conclut que $E_0^{\phi} = \mathbb{C}(u)$. Soit alors $f \in B_0^{\phi}$. D'après (7) on a $f = x^r y^s g(u)$ où $g(u) \in \mathbb{C}[[u]] \cap E \subset E_0^{\phi} = \mathbb{C}(u) \subset \mathbb{C}(x,y)$. Donc $f \in \mathbb{C}(x,y) \cap B = A$, d'après le lemme (2.1) ; d'où (1.3).

Démonstration de (1.4) : Soit $\phi = \phi_o(\epsilon_x, \epsilon_y)$ un élément **irréductible** de $\mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y]$, et posons $C = \{(p,q) \mid \phi(p,q) = 0\}$. Puisque $\phi|_{A_d}$ est diagonal on a

(8) $$\hat{A}_0^{\phi} = \prod_{(p,q) \in C \cap \mathbb{N}^2} \mathbb{C} x^p y^q .$$

Si $C \cap \mathbb{N}^2$ est fini (cf. (6)) on a le cas (1.4) (a). Supposons désormais que

(9) $C \cap \mathbb{N}^2$ **soit infini** .

Alors d'après un théorème classique de Siegel (cf. [L], Ch. 8) la courbe irréductible C est rationnelle. De plus les résultats de Siegel nous permettent de donner une paramétrisation rationnelle de C (cf. [B], Appendix E), à savoir :

$$(10)\begin{cases}\text{Il existe des fonctions rationnelles } p = p(t),\ q = q(t) \text{ dans } \mathbb{Q}(t) \\ \text{telles que } \mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(p,q) \text{ et } C\cap \mathbb{Q}^2 = \{(p(\tau),q(\tau)) \mid \tau \in \mathbb{Q}\}. \\ \text{De plus on a l'un des cas suivants :} \\ \text{(a) } p(t),\ q(t) \in Q[t] \text{, ils ont des coefficients dominants } \geq 0, \\ \text{et } (p(\tau),q(\tau)) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow \tau \in \mathbb{Z} \\ \text{(b) } p(t) = P(t)/(t^2-d)^e \text{ et } q(t) = Q(t)/(t^2-d)^e, \text{ où } P,\ Q \in \mathbb{Q}[t] \\ \text{sont de degrés } > 2e, \text{ et } d \text{ est un entier } > 1 \text{ sans facteur carré.}\end{cases}$$

Si ϕ est linéaire c'est-à-dire si C est une droite, alors la démonstration de (1.3) nous donne le cas (1.4) (b). Supposons donc que C ne soit pas une droite. Ceci entraîne que :

(11) **Dans le cas (10)(a), l'un au moins de $p(t)$ et $q(t)$ est de degré ≥ 2 .**

Sous ces conditions on peut montrer que :

(12) **Les points de $C\cap \mathbb{N}^2$ "tendent rapidement vers l'infini".**

(voir [B], Appendix E pour un énoncé précis).
Soit $f\in \hat{A}_0^{\phi}$. D'après (8) et (10) on peut écrire

$$f(x,y) = \sum_{\tau} a_{\tau} x^{p(\tau)} y^{q(\tau)} ,$$

où $a_{\tau} \in \mathbb{C}$ et τ parcourt les éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $(p(\tau), q(\tau)) \in \mathbb{N}^2$. Pour $b\in \mathbb{C}$ posons

$$f_b(x) = f(x,bx) = \sum_{\tau} a_{\tau} b^{q(\tau)} x^{r(\tau)} \in \mathbb{C}[[x]] ,$$

où $r(t) = p(t) + q(t)$. Si $f\notin A = \mathbb{C}[x,y]$ on a $f_b \notin \mathbb{C}[x]$ pour tout $b\in \mathbb{C}$ en dehors d'un ensemble dénombrable. De plus si f est algébrique sur $\mathbb{C}(x,y)$ alors f_b sera algébrique sur $\mathbb{C}(x)$ pour tout sauf un nombre fini de valeurs de b .

Pour achever la démonstration de (1.4) il nous reste à montrer que tout $f\in \hat{A}_0^{\phi}$ qui est algébrique sur $C(x,y)$ est un polynôme $(f\in A)$. Supposons au contraire que $f\in \hat{A}_0^{\phi}$, $f\notin A$, et f soit algébrique sur $C(x,y)$. Choisissons b tel que $f_b\notin \mathbb{C}[x]$ et f_b est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$. Ecrivons

$$f_b = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{n_m} ,$$

où $c_m \in \mathbb{C}^\times$ et $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$. Alors il résulte de (12) que

(13) $$n_m/m \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad m \longrightarrow \infty ,$$

Autrement dit f_b est une série "lacunaire". Il résulte alors du théorème de Fabry (1896) (cf. [D], Ch. XI, 93.II) que tout point du cercle de convergence de f_b est singulier. Mais une fonction algébrique ne peut avoir qu'un nombre fini de points singuliers. Par suite f_b converge partout dans $\mathbb{C}$. Mais une série partout convergente qui est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$ est un polynôme (cf. [B], Prop. (D.1)). Cette contradiction conclut la démonstration.

REMARQUE. C'est R. Narasimhan qui m'a signalé le théorème de Fabry et son application dans ce cadre. Je tiens à l'en remercier.

Démonstration de (1.5) : Revenons au cas général, $\phi = \sum_{i=0}^{N} \phi_i(\epsilon_x , \epsilon_y)\delta^i$, et $C = \{(p,q) \mid \phi_0(p,q) = 0\}$. Supposons que ϕ_0 n'est pas multiple d'un polynôme spécial linéaire (au sens de (1.3)). Soit $C = C_1 \cup \ldots \cup C_h$ la décomposition de C comme réunion de courbes irréductibles. Notre hypothèse entraîne, vu la démonstration de (1.4), que pour tout $i = 1,\ldots,h$ soit $C_i \cap \mathbb{N}^2$ est fini, soit les points de $C_i \cap \mathbb{N}^2$ tendent rapidement vers l'infini. Ainsi si $f \in \hat{A}_0^\phi$, $f \notin A$, on a $f = \sum_{m=0}^{\infty} f_{d_m}$, où $f_{d_m} \in A_{d_m}$ et $d_m/m \longrightarrow \infty$ lorsque $m \longrightarrow \infty$. Comme dans la démonstration de (1.4), on voit qu'une telle fonction ne peut pas être algébrique sur $\mathbb{C}(x,y)$.

REFERENCES

[B] H. Bass.– *Differential structure of étale extensions of polynomial algebras*, to appear, Proc. Workshop on Commutative Algebra, MSRI (1987).

[D] P. Dienes.– *The Taylor Series : An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Clarendon Press, Oxford (1931).

[L] S. Lang.– *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer–Verlag, New York (1983).

[N] N. Nagata.– *Field Theory*, M. Dekker, New York (1977).

Hyman BASS
Mathematics Department
Columbia University
Morningside Heights
New York, N.Y. 10027 (U.S.A)