MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS DRESS

Intersections d'ensembles normaux

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 55-58
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__55_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 55-58

INTERSECTIONS D'ENSEMBLES NORMAUX

par

François DRESS

-:-:-:-

1. - Introduction

La notion d'ensemble normal, introduite par M. Mendès France [5] généralise les nombres simplement normaux et normaux étudiés par E. Borel en 1909. Un nombre x normal en base g peut se définir comme un réel x tel que la suite (xg^n) soit équirépartie modulo 1 .

Si $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on désigne par $B(\Lambda)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $(x\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équirépartie modulo 1 . $B(\Lambda)$ est parfois appelé "ensemble des nombres normaux en base Λ ". On dit enfin qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R} - \{0\}$ est un ensemble normal s'il existe une suite Λ telle que $E = B(\Lambda)$.

On connait un certain nombre d'ensembles normaux particuliers :

- $\emptyset$ (pour Λ = suite constante) ,
- $\mathbb{Z}-\{0\}$ (pour Λ = suite équirépartie de nombres appartenant à l'intervalle $[0,1[$) ,
- $\mathbb{R}-\{0\}$ (pour $\lambda_n = \sqrt{n}$) ,
- $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (pour $\lambda_n = n$) ,
- $\mathbb{R}-K$, où K est un corps de nombres algébriques réels (M. Mendès France[6], résultat amélioré par Y. Meyer [7] qui a montré qu'on pouvait prendre les λ_n entiers),
- $\mathbb{T}$, ensemble des nombres transcendants (Y. Meyer [8]).

Ces deux derniers résultats, ainsi que la caractérisation complète des sous-ensembles de $\mathbb{Z}-\{0\}$ qui sont normaux (F. Dress et M. Mendès France [4]) donnaient à penser que toute intersection, finie ou dénombrable, d'ensembles normaux est un ensemble normal. C'est ce que nous démontrons dans un article à paraître prochainement [3]. Nous allons donner ici, sans entrer dans le détail des démonstrations, l'essentiel des méthodes utilisées et des résultats obtenus (signalons qu'une démonstration, dans un cas particulier et avec des méthodes différentes, a été donnée par J.F. Colombeau [1]).

2. - Mixage de deux suites

Etant donné deux suites $\Lambda = (\lambda_n)$ et $M = (\mu_n)$, nous définissons une suite $\Theta = (\theta_n)$, appelée mixée de Λ et de M et notée Λ mix M , de la manière suivante :

$$
\begin{array}{llll}
\theta_1 = \lambda_1 \;, & & & \\
\theta_2 = \mu_1 \;, & & & \\
\theta_3 = \lambda_1 \;, & \theta_4 = \lambda_2 \;, & & \\
\theta_5 = \mu_1 \;, & \theta_6 = \mu_2 \;, & \theta_7 = \mu_3 \;, & \theta_8 = \mu_4 \;, \\
\ldots\ldots \;, & & & \\
\theta_{2^{2p-1}+1} = \lambda_1 \;, & \theta_{2^{2p-1}+2} = \lambda_2 \;, & \ldots \;, & \theta_{2^{2p}} = \lambda_{2^{2p-1}} \;, \\
\theta_{2^{2p}+1} = \mu_1 \;, & \theta_{2^{2p}+2} = \mu_2 \;, & \ldots \;, & \theta_{2^{2p+1}} = \mu_{2^{2p}} \;, \\
\ldots\ldots \;, & & &
\end{array}
$$

Nous démontrons alors les deux lemmes suivants, dont la conjonction permet de montrer que toute intersection finie d'ensembles normaux est un ensemble normal.

LEMME 1. - <u>si</u> $\Theta = \Lambda$ mix M , <u>alors</u> $B(\Theta) \subset B(\Lambda) \cap B(M)$.

La démonstration s'effectue en considérant, pour un intervalle $[\alpha,\beta[$ inclus dans $[0,1[$ et un nombre réel x , les fonctions $\eta_\Lambda(n)$ (resp. $\eta_M(n)$, $\eta_\Theta(n)$) qui représentent le nombre de termes des suites $(x\,\lambda_j)$ (resp. $(x\,\mu_j)$, $(x\,\theta_j)$) , pour $1 \le j \le n$, qui appartiennent modulo 1 à l'intervalle $[\alpha,\beta[$. On montre alors sans difficulté que $\frac{1}{n}\,\eta_\Theta(n) \to \beta - \alpha$ lorsque $n \to \infty$ entraîne $\frac{1}{n}\,\eta_\Lambda(n) \to \beta - \alpha$ (resp. $\frac{1}{n}\,\eta_M(n) \to \beta - \alpha$).

LEMME 2. - <u>si</u> $\Theta = \Lambda$ mix M , <u>alors</u> $B(\Lambda) \cap B(M) \subset B(\Theta)$.

En fait, nous ne démontrons pas le lemme 2 mais un résultat plus fort, indispensable pour l'étude des intersections infinies d'ensembles normaux.

LEMME 2 bis. - <u>si</u> $\Theta = \Lambda$ mix M , <u>on a les inégalités</u>

$$\ell^+_\Theta < a\ell^+_\Lambda + b\ell^+_M \;, \quad \underline{\text{avec}} \quad a+b = 1 \quad \underline{\text{et}} \quad 1/4 \le a \;,\; b \le 3/4$$

<u>et</u>

$$\ell^-_\Theta > c\ell^-_\Lambda + d\,^-_M \;, \quad \underline{\text{avec}} \quad c+d = 1 \quad \underline{\text{et}} \quad 1/4 \le c \;,\; d \le 3/4 \;.$$

(ℓ^+ et ℓ^- désignent respectivement lim sup et lim inf , lorsque $n \to \infty$, de $\frac{1}{n}\,\eta(n)$).

La démonstration, ainsi qu'ensuite l'utilisation de ce lemme, est essentiellement une question de barycentre (sur le plan technique, on utilise des majorations valables pour tout n du type $\mathcal{N}_\Lambda(n) \leq (\ell_\Lambda^+ + \varepsilon)n+H)$.

3. - Mixage infini des suites

Nous nous donnons maintenant une infinité dénombrable $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m, \ldots$ de suites dont il s'agit d'effectuer un mixage convenable.

LEMME 3. - Il existe une infinité dénombrable de suites, Θ_0 , Θ_1 , $\Theta_2, \ldots, \Theta_m$, ... vérifiant les relations

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \Lambda_1 \text{ mix } \Theta_1 \\ \Theta_1 &= \Lambda_2 \text{ mix } \Theta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_m &= \Lambda_{m+1} \text{ mix } \Theta_{m+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Il s'agit en définitive de montrer l'existence d'un produit infini à droite pour la loi mix . La démonstration est fastidieuse mais ne présente aucune difficulté théorique.

THEOREME. - La suite Θ_0 construite au lemme 3 vérifie la propriété

$$B(\Theta_0) = \bigcap_{m=1}^{\infty} B(\Lambda_m) .$$

La démonstration s'effectue en prouvant les inclusions dans les deux sens. Le lemme 1 permet de montrer par récurrence que $B(\Theta_0) \subset B(\Lambda_m)$ pour tout m . On utilise ensuite le lemme 2 bis en écrivant

$$\Theta_0 = \Lambda_1 \text{ mix } \Lambda_2 \text{ mix } \ldots \text{ mix } \Lambda_m \text{ mix } \Theta_m$$

et en remarquant que l'on peut toujours choisir m assez grand pour que le "poids" de Θ_m soit aussi faible qu'on le désire.

COROLLAIRE. - Toute intersection finie ou dénombrable d'ensembles normaux est un ensemble normal.

C'est le résultat essentiel de notre article. Signalons l'existence de résultats complémentaires relatifs aux ensembles normaux pour des suites d'entiers et pour des suites croissantes.

NOTE.

Très récemment, G. Rauzy [9] vient de résoudre le problème de la caractérisation des ensembles normaux (et retrouve ainsi la presque totalité des résultats antérieurs). Il démontre qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est normal si et seulement si :

(i) $0 \notin E$;

(ii) pour tout $q \in \mathbb{Z}-\{0\}$, $qE \subset E$;

(iii) il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$x \in E \Leftrightarrow f_n(x) \to 0 \text{ quand } n \to \infty .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.F. COLOMBEAU. - Ensembles normaux et ensembles normaux au sens large. C.R. Acad. Sc. Paris, 269, série A (1969), 270-272.

[2] F. DRESS. - Sur l'équirépartition de certaines suites $(x\,\lambda_n)$. Acta Arithmetica, 14 (1968), 169-175.

[3] F. DRESS. - Intersections d'ensembles normaux. J. Number Theory, 2 (1970), p. 352-362.

[4] F. DRESS et M. MENDES FRANCE. - Caractérisation des ensembles normaux dans $\mathbb{Z}$. Acta Arithmetica, 17, (1970), 115-120.

[5] M. MENDES FRANCE. - Deux remarques concernant l'équirépartition des suites. Acta Arithmetica, 14, (1968), 163-167.

[6] M. MENDES FRANCE. - Nombres transcendants et ensembles normaux. Acta Arithmetica, 15 (1969), 189-192.

[7] Y. MEYER. - Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique. Lecture notes in Mathematics, vol. 117 (1970).

[8] Y. MEYER. - Nombres transcendants et équirépartition modulo 1 . A paraître in Acta Arithmetica.

[9] G. RAUZY. - Caractérisation des ensembles normaux. A paraître in Bull. Soc. Math. Fr.

-:-:-:-

Faculté des Sciences de Bordeaux
Département de Mathématiques
351, cours de la Libération
33 - Talence (France)