

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

B. BENZAGHOU

**Suites d'unité algébriques satisfaisant à une
relation de récurrence linéaire**

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 29-31

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__29_0

© Mémoires de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUITES D'UNITÉ ALGÈBRIQUES
 SATISFAISANT A UNE RELATION DE RECURRENCE LINÉAIRE

par

Benali BENZAGHOU

-:-:-:-

THEOREME 1. Soit (a_n) une suite de S-unités d'un corps de nombres algébriques k satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.
Alors il existe des S-unités $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, $m \geq 1$ telles que pour $\mu = 0, 1, \dots, m-1$:

$$a_{\mu+tm} = a_{\mu} \cdot \alpha_{\mu}^t, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Pour démontrer ce théorème, introduisons les notations suivantes :

Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro.

$\mathcal{R}(K) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n, a_n \in K, (a_n) \text{ satisfait à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants} \}$.

Munie de l'addition des séries habituelles et du produit (de Hadamard) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n.$$

$\mathcal{R}(K)$ est une K -algèbre (pour $K = \mathbb{C}$, c'est une algèbre de convolution de fractions rationnelles).

Pour $E \subset K$, notons

$$\mathcal{R}(E, K) = \{ \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K), a_n \in E \text{ pour tout } n \}.$$

LEMME 1. Soit k un corps de nombres, \mathcal{U} son groupe d'unités. Alors $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ est un sous-groupe du groupe des unités de $\mathcal{R}(k)$.

Nous pouvons toujours supposer k galoisien sur \mathbb{Q} et soit $G = \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$.
 Soit $a = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$, alors pour $\sigma \in G$, $\sigma a = \sum \sigma(a_n) X^n \in \mathcal{R}(k)$ et

$$b = \prod_{\sigma \in G} \sigma a = \sum N(a_n) X^n \in \mathcal{R}(k)$$

Comme $b^2 = \delta = \sum X^n$ (unité de $\mathcal{R}(k)$)

a est inversible dans $\mathcal{R}(k)$.

LEMME 2. [1] - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Un élément $a = \sum a_n X^n$ de $\mathcal{R}(K)$ est inversible dans $\mathcal{R}(K)$ si et seulement si il existe des éléments non nuls $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ de K , $m \geq 1$, tels que pour $\mu = 0, 1, \dots, m-1$, on ait :

$$\text{et} \quad \begin{array}{l} a_\mu \neq 0 \\ a_{\mu+tm} = a_\mu \cdot \alpha_\mu^t, \quad \forall t \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Par ces deux lemmes, le théorème 1 est démontré dans le cas des unités d'un corps de nombres.

Définition : Une suite (a_n) de \mathbb{Q} est dite de Polya si presque toutes les valuations de \mathbb{Q} sont triviales sur la suite (a_n) .

Une suite de nombres algébriques (a_n) est de Polya si la suite $(N(a_n))$, où $N(a)$ est la norme absolue de a , est de Polya dans \mathbb{Q} .

La démonstration du théorème 1 s'achève par la généralisation suivante d'un résultat de Polya [3] :

LEMME 3. [2] - Soit (a_n) une suite de Polya de nombres algébriques. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\bar{\mathbb{Q}}) \Leftrightarrow \exists \alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in \bar{\mathbb{Q}}, \quad m \geq 1 \quad \text{tels que} \\ \alpha_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t \quad \text{pour } \mu=0, 1, \dots, m-1 ; t \in \mathbb{N}$$

Soit K un corps commutatif, notons :

$$\mathcal{S}_j(K) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n, \exists P_0, \dots, P_{m-1} \in K[X] \text{ tels que} \right. \\ \left. d^{\circ} P_\mu \leq j \quad \text{et} \quad a_{\mu+tm} = P_\mu(t) \right\}$$

et $\mathcal{S}_j(E, K) = \{ \sum a_n X^n \in \mathcal{S}_j(K), a_n \in E \text{ pour tout } n \}$.

THEOREME 2. Soit k un corps de nombres, \mathcal{U} son anneau d'entiers, \mathcal{U} son groupe d'unités. Alors :

- $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ est une $\mathcal{R}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ -algèbre entière, libre de type fini.
- $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ est son groupe d'unités et $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k) \simeq \mathcal{S}'_0 \times \mathcal{S}'_1^r$

où \mathcal{S}'_0 est un groupe abélien dont tous les éléments sont d'ordre $\leq e$ (ordre du groupe des racines de l'unité de k)

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$$

r le nombre de Dirichlet de k .

PROPOSITION. Si k_s est le groupe des S-unités de k , alors

$$\mathfrak{R}(k_s, k) \simeq \mathfrak{S}'_0 \times \mathfrak{S}_1^{\ell}$$

où ℓ est le nombre de S-unités fondamentales de k_s .

Si une suite d'éléments d'un sous-groupe multiplicatif de type fini de $\bar{\mathbb{Q}}$ satisfait à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, alors elle est formée d'un nombre fini de progressions géométriques régulièrement emboîtées.

--:--:--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. BENZAGHOU. - Comptes rendus de l'Ac. des Sc. Paris, série A, t. 266 (1968) 652-654.
- [2] B. BENZAGHOU. - Comptes rendus de l'Ac. des Sc. Paris, série A, t. 267 (1968) p. 212-214.
- [3] G. POLYA. - J. für reine und angew. Math. t. 151, (1921), 1-31.

--:--:--

Université de Paris 6
U.E.R. de mathématiques
Tour 46
9, quai Saint-Bernard
75-PARIS 5e (France)