

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL GRANGER

Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 8 (1983)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1983_2_8__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Michel GRANGER

Résumé : Dans ce travail, on étudie les schémas de Hilbert $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$ paramétrisant les « points épais » de support $\{o\}$ dans \mathbb{C}^r , et l'existence de germes de déformations plates d'un type donné de ces points. Pour $r=2$, on montre que tout idéal d'ordre ν de $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ peut se déformer sur des idéaux de même colongueur n d'ordre $\nu-1$. On en déduit que le lieu singulier de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ (réduit) paramètre les idéaux d'ordre $\nu \geq 2$. Pour $r \geq 3$, la même méthode (minoration de dimensions) montre qu'une intersection complète n'est presque jamais alignable (déformable en points de dimension de plongement un). Dans la dernière partie on aborde l'étude de la partition en strates (lisses) d'Hilbert Samuel de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ et des relations d'incidence entre ces strates.

Summary : In this paper we study Hilbert schemes $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$ parametrizing « thick points » supported by $\{o\}$ in \mathbb{C}^r and the existence of germs of flat deformations of these points having a given type. For $r=2$, we prove that every ideal of order ν in $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ can be deformed to ideals of order ν , same colength n . We deduce that the singular locus of $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ (reduced) parametrizes ideals of order ≥ 2 . For $r \geq 3$, the same method (minimization of dimensions) shows that almost all complete intersections are non alignable. In the last part we begin to study the partition of $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ in (smooth) Hilbert-Samuel strata, and incidence relations between them.

Table des Matières

Introduction		
Notations		15
Partie 0	Généralités sur les schémas de Hilbert Ponctuels	
	Description en termes de platicateurs locaux	17
Partie I	Singularités des schémas de Hilbert ponctuels $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$	25
	I Calcul de dimensions d'espaces tangents	25
	II Démonstration des relations d'incidence $Z_\nu \subset \overline{Z}_{\nu-1}$	33
	III Le lieu singulier de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}_{\text{red}}$	39
	IV Quelques exemples explicites de déformations du type $Z_\nu \subset \overline{Z}_{\nu-1}$	44
	V Minoration de la dimension de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}_r$, $r \geq 3$ en une intersection complète	51
Partie 2	Relations d'incidence entre les strates d'Hilbert Samuel de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$	58
	VI Etude des conditions nécessaires pour que $Z_T \subset \overline{Z}_T$	59
	VII Etude de \overline{Z}_ν	64
	VIII Etude de l'irréductibilité de $\text{Hilb}^n (\mathbb{C}\{x, y\} / \mathcal{M}^p)$	69
Bibliographie		84

Michel GRANGER, Université de Nice, Institut de Mathématiques, Parc Valrose.
06034 NICE CEDEX

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des déformations plates de "points" ou germe d'espaces analytiques (non réduits !) de dimension zéro, dans un espace analytique complexe X . En pratique, on considère un point z à l'origine de \mathbb{C}^r de longueur $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{z,0}$, et les germes de déformations plates à un paramètre de ce point (les fibres sont alors de longueur constante). On se pose les problèmes suivants :

- 1) - En premier lieu peut-on lissifier z ? Il s'agit de trouver une déformation dont la fibre générale z_t , $t \neq 0$, soit lisse c'est à dire constituée de n points simples.

Dans les questions 2), 3), 4) on cherche une fibre à support constant $(z_t)_{\text{red}} = \{0\}$

- 2) - Peut on aligner z , c'est à dire trouver z_t de dimension de plongement un (i.e. $\mathcal{O}_{z_t,0} \cong \mathbb{C}[x]/(x^u)$) pour $t \neq 0$?
- 3) - Peut-on diminuer l'ordre $v(z)$, c'est à dire réaliser $v(z_t) = v(z) - 1$, si $v(z) \geq 2$? On note ici $v(z)$ la multiplicité minimum en $0 \in \mathbb{C}^r$ d'une hypersurface contenant z .
- 4) - Quels sont les types possibles pour z_t ? On appelle type de z la donnée (t_0, \dots, t_j, \dots) des dimensions des composantes de l'algèbre graduée associée à $\mathcal{O}_{z,0}$.
- 5) - Si $X \subseteq \mathbb{C}^r$ est un espace analytique contenant z comme sous-espace, étudier les questions 1) à 4) en exigeant en plus que X contienne z_t pour tout t (voir par exemple [B.G.S.] pour $X \subseteq \mathbb{C}^2$, courbe plane).

Voici un exemple illustrant ces questions

Considérons le point z de longueur 9, défini par un idéal I de $\mathbb{C}(x,y)$ engendré

par deux polynômes homogènes f et g de degré trois, premiers entre eux. (La dimension sur \mathbb{C} de $\mathcal{O}_{z,0} = \mathbb{C}(x,y)/I$ est la multiplicité d'intersection en zéro de f et g).

Son type est $T_0 = (1,2,3,2,1)$. Les types possibles pour z_t , tels que

$v(z_t) = v(z) - 1 = 2$, sont à chercher parmi les suivants :

$$T_1 = (1,2,2,2,1,1)$$

$$T_2 = (1,2,2,1,1,1,1)$$

$$T_3 = (1,2,1,1,1,1,1,1)$$

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Pour fixer les idées supposons $f = y^3 + cx^3$, $g = x^2y$, $c \neq 0$. Il s'agit de trouver $F(x,y,t)$ et $G(x,y,t)$ déformations de f et g , dont la multiplicité d'intersection en zéro pour t fixé reste constante. On trouve facilement une déformation de type

T_1 :

$$F = y^3 + cx^3 + txy, \quad G = x^2y.$$

et aussi une déformation de type T_3 :

$$F = y^3 + cx^3 + t(y-mx) \left(y - \frac{5m}{8}x\right)$$

$$G = x^2y - \frac{t}{6m^2} (y-mx) (y-4mx), \quad \text{avec } c = -\frac{m^3}{4}$$

Par contre une déformation de type T_2 est impossible dès que I ne contient pas d'élément non nul de la forme $(ax + by)^3$, $a, b \in \mathbb{C}$. (cf. Partie 2 VI.4).

Le cadre naturel pour exprimer ces problèmes est celui des schémas de Hilbert ponctuels : L'espace analytique $\text{Hilb}^n X$ paramètre les sous-espaces de dimension zéro et de longueur n de l'espace analytique complexe X . L'existence de $\text{Hilb}^n X$ résulte de théorèmes généraux de A. Douady ($[D]$) ou, dans un cadre algébrique, de A. Grothendieck ($[\text{Gr } 1]$) : $\text{Hilb}^n X$ est une réunion de composantes connexes de l'espace $H(X)$ paramétrant les sous espaces analytiques de X , construit par A. Douady, et si X est une variété projective, c'est aussi le schéma de Hilbert associé au polynôme constant $Q=n$. Pour étudier les questions 2) à 4) on est amené à introduire le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n A$, d'une algèbre analytique locale d'idéal maximal \mathcal{M} . On définit $\text{Hilb}^n A$ comme étant $\text{Hilb}^n_{Y_A}$ où $Y_A = \text{Spec } A/\mathcal{M}^n$: On paramètre ainsi les idéaux I de colongueur n de A , ou encore, si $A = \mathcal{O}_{X,x}$ est l'anneau local de X en x , les points z_I de X de support x , de longueur n et d'anneau local $\mathcal{O}_{z_I, x} = \mathcal{O}_{X,x}/I$.

Les questions présentées au début s'énoncent alors en termes de sous ensembles ou "strates" de $\text{Hilb}^n X$ ou de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_{X,x}$ et de relation d'incidence entre ces strates. On est ainsi amené à étudier la "géométrie" de $\text{Hilb}^n X$ (resp $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_{X,x}$) et de ces sous ensembles : Connexité, irréductibilité, détermination des lieux singuliers, calcul ou encadrement des dimensions. L'exemple du début permet par exemple de dire que la strate $Z_{T_0} \subseteq \text{Hilb}^n \mathbb{C}(x,y)$ paramétrant les idéaux de type T_0 est contenue dans les adhérences des strates Z_{T_1} et Z_{T_3} mais non dans celle de Z_{T_2} .

Michel GRANGER

Précisément nous notons :

- . $W_X \subseteq \text{Hilb}^n X$ l'ouvert des sous-espaces réduits constitués de n points simples de X .
- . $L \subseteq U \subseteq \text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\} \cap \bar{W}_{\mathbb{C}^r}$ les ouverts constitués respectivement par les points alignés et les intersections complètes, contenus dans le fermé des points lissifiables de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$.

Les problèmes de la lissification dans X et de l'alignement reviennent alors respectivement à déterminer les adhérences \bar{W}_X et \bar{L} de W_X et L .

Avant de résumer la contribution du présent travail divisé en parties 0, 1 et 2, nous rappelons d'abord quelques résultats connus. Dans ces rappels, nous distinguons le cas de $X = \mathbb{C}^2$, pour lequel on dispose des réponses les plus détaillées.

Signalons auparavant un résultat général de connexité dû à R. Hartshorne ([H]) et J. Fogarty ([F] Proposition 2.2 et 2.3): Si X est connexe, $\text{Hilb}^n X$ est connexe. En particulier, pour toute algèbre analytique locale A , $\text{Hilb}^n A$ est connexe.

Rappels sur $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^2$ (ou $\text{Hilb}^n F$, F surface lisse) et sur $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$

Théorème R-1. Si F est une surface lisse, $\text{Hilb}^n F$ est lisse réduit de dimension $2n$, connexe si F est connexe.

Ce résultat a été démontré d'abord par Hartshorne (non publié) et Fogarty ([F]) et implique que $\text{Hilb}^n F = \bar{W}_F$, c'est-à-dire que tout point de F est lissifiable : Il suffit de remarquer que W_F est un ouvert lisse de dimension $2n$. On trouve dans [B.G], [Lk], [S], des constructions explicites variées d'une lissification des points de \mathbb{C}^2 .

Le théorème suivant est le résultat principal de [B₂] et s'obtient en démontrant que les points de \mathbb{C}^2 sont alignables :

Théorème R-2. (J. Briançon [B₂]) L'espace analytique $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}_{\text{red}}$ est irréductible de dimension pure $n-1$.

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

La démonstration de ce théorème s'appuie sur une description précise des strates d'Hilbert-Samuel de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$. Rappelons certaines définitions (valables aussi pour $r \geq 3$). On note \mathcal{O}_r l'anneau $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$ et \mathcal{M}_r son idéal maximal:

Définition R-3. On appelle ordre de $f \in \mathcal{O}_r$ l'entier $v(f) = \sup\{v' \in \mathbb{N} \mid f \in \mathcal{M}_r^{v'}\}$ et ordre d'un idéal I de \mathcal{O}_r l'entier $v(I) = \inf\{v(f), f \in I\}$, ou encore $v(I) = \sup\{v' \in \mathbb{N}, I \subseteq \mathcal{M}_r^{v'}\}$

On note inf le polynôme homogène de degré $v(f)$, appelé partie initiale de f , tel que :

$f - \text{inf} \in \mathcal{M}_r^{v(f)+1}$, et inf l'idéal engendré par les inf $f \in I$, appelé idéal initial de I . $\mathcal{O}_r / \text{inf} I$ est l'algèbre graduée (par rapport à \mathcal{M}_r) associée à \mathcal{O}_r / I .

Définition R-4.

a) On appelle fonction d'Hilbert-Samuel de I la suite $T(I) = (t_0, \dots, t_j, \dots)$,

définie par : $t_j = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}_r^j + I}{\mathcal{M}_r^{j+1} + I}$

b) Si I est de longueur finie n ($t_j = 0$ pour $j \geq n$ et $\sum t_j = n$), on appelle strate d'Hilbert-Samuel de I le sous-espace $Z_{T(I)}$ de $(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r)_{\text{red}}$, paramétrant les idéaux J de \mathcal{O}_r tels que $T(J) = T(I)$.

Rappelons au passage que I et $\text{inf} I$ ont la même fonction d'Hilbert-Samuel.

Remarquons que l'ordre $v(I)$ d'un idéal I tel que $z_I \in Z_T$ ne dépend que de sa fonction d'Hilbert Samuel $T = T(I)$. On le note $v(T)$:

$$j < v(T) \Leftrightarrow t_j = \binom{r+j-1}{r-1} = \# \{\text{monomes de } \mathcal{O}_r \text{ de degré } j\}$$

Lorsque $r=2$, on a donc $t_j = j+1$ pour $j < v$ et on peut montrer que Z_T est non vide

si et seulement si T satisfait aux conditions suivantes :

- . $\sum t_j = n$
- . Il existe $v = v(T)$ tel que
 - $t_j = j+1$ pour $j \leq v-1$
 - $t_j \geq t_{j+1}$ pour $j \geq v-1$

De plus on a les résultats suivants, démontrés indépendamment par J. Briançon et

A. Iarrobino :

Théorème R-5. ($[B_2]$ théorème III.3.1, $[I_2]$. Th.2.12). Lorsque $r=2$, chaque strate d'Hilbert-Samuel Z_T est lisse et connexe de dimension :

$$\dim Z_T = n-v - \sum_{j \geq v-1} \delta(j) \frac{[\delta(j)-1]}{2}$$

où $\delta(j) = t_j - t_{j+1}$.

En particulier $\dim Z_T \leq n-v$ et l'égalité $\dim Z_T = n-v$ n'a lieu que si, pour tout d , $\delta(d) \leq 1$. Cette condition équivaut au fait que Z_T contient des intersections complètes qui forment alors un ouvert dense de Z_T (cf. Partie 1, remarque II.3.).

Rappels sur $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r$ et $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ pour $r > 3$

Dans $[I_3]$, A. Iarrobino montre que :

$$\dim (\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r) \geq a(r) n^{2-2/r}$$

où $a(r) > 0$ ne dépend que de r , et Briançon et Iarrobino ont montré qu'on a aussi ($[B-1]$) :

$$\dim \text{Hilb}^n \mathbb{C}^r \leq b(r) n^{2-2/r}$$

Le résultat de Iarrobino implique que pour tout $r \geq 3$ fixé et n assez grand :

$$\dim \text{Hilb}^n \mathbb{C}^r > nr = \dim W_{\mathbb{C}^r}$$

$$\dim \text{Hilb}^n \mathcal{O}_r > (n-1)(r-1) = \dim L$$

Il en résulte que $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ contient des points z_I qui ne sont pas lissifiables (resp. alignables) et d'autre part que $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r$ et $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ sont réductibles, puisque $\bar{W}_{\mathbb{C}^r}$ et \bar{L} respectivement en sont des composantes irréductibles. Ce résultat entraîne d'autre part l'existence d'algèbres artiniennes de dimension ≥ 2 "presque rigides", c'est à dire n'admettant comme déformations que des algèbres artiniennes, de même type.

Dans $[I.E]$, Iarrobino et Emsalem donnent explicitement une famille de telles algèbres (avec $n=8$, $r=4$). La dimension de cette famille est égale à

$\dim L = (n-1)(r-1)$. Dans le cas d'un point de $\bar{W}_{\mathbb{C}^r}$, on a la minoration suivante, pour la dimension de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$:

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

Proposition R-6. (T. Gaffney) Dès que z_I est lissifiable on a :

$$\dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_{z_I}) \geq (n-1)(r-1)$$

Dans le cas général le problème d'une minoration de la dimension locale de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ reste ouvert.

Considérons le cas particulier des intersections complètes, qui sont évidemment lissifiables : Dans [I₄], Iarrobino considère les intersections complètes (f_1, \dots, f_r) générales de type (v_1, \dots, v_r) , c'est à dire telles que $v(f_i) = v_i$ et de colongueur minimale $v_{\min} = v_1 \dots v_r$. Il calcule la dimension de l'ensemble $H(v_1, \dots, v_r)$ paramétrant ces idéaux et obtient :

Proposition R-7. Pour "presque tout" (v_1, \dots, v_r) , tel que $v_i \geq 2$, $r \geq 3$ (de façon précise différent de $(2, a, b)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 2, 2, 2)$) on a :

$$\dim H(v_1, \dots, v_r) \geq (n-1)(r-1) = \dim L.$$

Cette inégalité entraîne que dans presque tous les $H(v_1, \dots, v_r)$ les points paramétrant des idéaux alignables ne sont pas denses. Dans la partie 1 (§ V), nous étendons ce résultat à "presque toutes" les intersections complètes.

En résumé on a la situation suivante pour $r \geq 3$ et n assez grand :

$$\bar{L} \subsetneq \bar{U} \subsetneq \bar{W}_r \cap \text{Hilb}^n \mathcal{O}_r \subsetneq \text{Hilb}^n \mathcal{O}_r.$$

ce qui contraste avec le cas $r=2$ où on a :

$$\bar{L} = \text{Hilb}^n \mathcal{C}\{x, y\}.$$

Partie 0: Dans cette partie, de nature préliminaire, et qui reprend de façon plus systématique la partie 1 de [B.G.S.], nous commençons par donner les propriétés universelles caractérisant $\text{Hilb}^n X$ puis le germe de $\text{Hilb}^n X$ en un point z . Si le support z_{red} de z est $\{x_1, \dots, x_k\}$ ce germe est isomorphe au produit $\prod_{i=1}^k (\text{Hilb}^{n_i} X, z_i)$, où $n_i = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{O}_{z, x_i}$ et z_i est le point de X de support $\{x_i\}$ tel que $\mathcal{O}_{z_i, x_i} = \mathcal{O}_{z, x_i}$. On peut donc se contenter d'étudier le germe de $\text{Hilb}^n X$ au voisinage d'un point z_i de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_{x, X}$.

Dans le cas où $(X, x) = (\mathcal{C}^r, 0)$, la propriété universelle caractérisant

$(\text{Hilb}^n \mathcal{C}^r, z_I)$ permet de présenter ce germe comme le platicateur local

$([H, L, T])$ d'un germe de morphisme naturellement associé à un système de généra-

Michel GRANGER

teurs de I et une base sur \mathbb{C} de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}/I$ (Proposition 0.4).

Moyennant une inclusion naturelle $\text{Hilb}^n Y \hookrightarrow \text{Hilb}^n X$ pour tout sous-espace Y de X (Proposition 0.1), on en déduit une présentation analogue comme platicateur local de $(\text{Hilb}^n Y, z_I)$, où $Y \subseteq \mathbb{C}^r$ est un sous-espace analytique contenant 0 et $\bar{I} = I/I_{Y,0}$ est un idéal de colongueur n de $\mathcal{O}_{Y,0}$. Grâce à un calcul explicite du platicateur d'un germe de morphisme fini donné dans $[\text{Gal}_2]$, on a ainsi la possibilité d'exprimer les équations locales d'un schéma de Hilbert au voisinage de tout point et particulièrement les équations du germe de $\text{Hilb}^n Y$ en z_I , comme sous-germe de $(\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r, z_I)$, si $0 \in Y \subset \mathbb{C}^r$ (proposition 0.6). Cette présentation est utilisée dans la partie 1 avec $I_{Y,0} = \mathcal{N}_I^n$.

Partie 1: L'objet de cette partie est l'étude du schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$

($\mathcal{O}_r = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$). Dans un premier temps nous déterminons la partie lisse de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$, et si $r \geq 3$ de l'ouvert des intersections complètes de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$:

Proposition 1.2. Si $r=2$, L est la partie lisse de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$, et si $r \geq 3$, L est la partie lisse de l'ouvert des intersections complètes de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$
(Rappelons que L paramètre les idéaux isomorphes à $(x_1^n, x_2^n, \dots, x_r^n)$).

Pour démontrer ce résultat on utilise la caractérisation suivante des points singuliers de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$:

$$\dim T_{z_I}(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r) > \dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r, z_I),$$

où T_{z_I} désigne l'espace tangent de Zariski en z_I . On vérifie aisément que si $z_I \in L$:

$$\dim T_{z_I}(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r) = \dim L = (n-1)(r-1).$$

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

Comme $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ n'est pas en général réduit, la détermination du lieu singulier de $(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r)_{\text{red}}$ nécessite d'autres méthodes (cf. Remarque I.6). Dans les trois paragraphes suivants (II, III et IV) on résoud ce problème pour $r=2$.

On note Z_ν l'ensemble des $z_I \in \text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ tels que I soit d'ordre ν et $E_\nu = \bigcup_{\nu \leq T} Z_\nu$ l'ensemble des idéaux d'ordre au moins ν . On voit facilement que E_ν est un sous espace analytique fermé de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ (en utilisant par exemple la proposition 0.4). Chaque Z_ν est une réunion de strates d'Hilbert-Samuel :

$$Z_\nu = \bigcup_{\nu(T)=\nu} Z_T, \quad E_\nu = \bigcup_{\nu(T) \geq \nu} Z_T.$$

La démonstration du théorème R.2 consiste à montrer que pour $r=2$,

$\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}} = E_1$ est égal à l'adhérence \bar{Z}_1 de Z_1 . L'irréductibilité de E_1 résulte alors du fait que, comme $r=2$, Z_1 coïncide avec $L = Z_{(1, \dots, 1, 0, \dots)}$, donc est lisse connexe de dimension $n-1$ (théorème R5).

Dans le paragraphe II nous généralisons cette "relation d'incidence" $E_1 = \bar{Z}_1$ ce qui répond positivement à une conjecture de J. Briançon ($[B_2]$, v.1.3) :

Théorème II-1. L'espace E_ν est pour $r=2$, et tout $\nu \in \mathbb{N}^*$ égal à l'adhérence \bar{Z}_ν de Z_ν .

Ceci donne en particulier pour $\nu = 2$:

$$\bar{Z}_2 = E_2 = \text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}} - L$$

Dans le paragraphe suivant nous démontrons alors :

Théorème III-1. Le lieu singulier de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}}$ est égal à l'ensemble $\bar{Z}_2 = E_2$ paramétrant les idéaux de $\mathbb{C}\{x,y\}$ d'ordre au moins 2.

Lorsque $I(f_1, f_2)$ est une intersection complète, on peut interpréter n comme étant le nombre de Milnor de (f_1, f_2) , (Z, z_1) étant alors une déformation verselle et (Z', z_1) la strate à $\mu=n$ constant. On obtient ainsi tous les cas de non-lissité de cette strate pour les points intersection complète de \mathbb{C}^2 , en contraste avec le cas des courbes planes où la strate à μ constant est lisse.

Michel GRANGER

Pour démontrer ce dernier théorème on se ramène, par déformation, à $I = \mathcal{H}_2^2$, ou à une intersection complète d'ordre deux d'un type particulier.

La strate d'Hilbert Samuel $Z_{T(I)}$ est alors de dimension $n-2$ et on peut montrer qu'une section transverse de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$ au voisinage de Z_I est un germe de courbe singulière. (Preuve de la proposition III.3).

La démonstration du théorème II.1 utilise principalement un théorème de A. Grothendieck (voir théorème II.4) sur l'ordre de connexité d'un germe de sous-espace analytique défini par p équations dans un germe irréductible. On trouve dans $[Gf]$, $[L]$ des applications analogues de ce théorème. La présentation des schémas de Hilbert comme platicateurs locaux de germes de morphisme finis (proposition 0.4), joue un rôle essentiel dans l'utilisation qui en est faite ici.

Dans le paragraphe IV nous donnons quelques calculs explicites de déformations du type $Z_3 \subseteq \bar{Z}_2$ dont le paragraphe II démontre l'existence. Ceci fournit en particulier une méthode pour déformer dans Z_2 un idéal d'ordre trois et de colongueur ≤ 13 . Remarquons, pour terminer, que la démonstration donnée dans les paragraphes II et III permet d'explicitier les composantes irréductibles du lieu singulier \bar{Z}_2 de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}}$ (cf. Partie 2 proposition VII.2).

Dans le dernier paragraphe nous donnons quelques résultats sur $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ dans le cas $r \geq 3$ (obtenus par la même méthode que le théorème II.2) concernant seulement les intersections complètes. Le résultat principal est le suivant :

Proposition V.1. Soit I un idéal de définition, intersection complète, d'ordre v' .

Pour tout entier v tel que $1 \leq v \leq v'$ on a :

$$\dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r, Z_I) \geq \dim(E_v, Z_I) \geq (n-1)(r-1) + f(v,r) \text{ avec}$$

$$f(v,r) = v^r - I \binom{v+r-1}{r} + r-1.$$

Ce résultat implique que si I est une intersection complète d'ordre $v \geq 2$, on a $\dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r, Z_I) > \dim L$ dès que (v,r) n'est pas dans la liste suivante :

$$(v,r) = (2,3) (3,3) \text{ ou } (2,4)$$

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Ainsi pour "presque toute" valeur de $v \geq 2$ et $r \geq 3$, les idéaux non alignables sont denses dans E_v (cf. la proposition R7).

Remarquons pour terminer que tout point de $H(2,2,2)$ contient un voisinage paramétrant des idéaux alignables et que les valeurs exceptionnelles de v et r que nous donnons ne peuvent être toutes écartées.

Signalons qu'il reste de nombreux problèmes à résoudre sur $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$, parmi lesquels on peut citer (voir aussi $[I_2]$) :

Pour $r=2$, étude des relations d'incidence entre les Z_T , problème abordé dans la partie 2.

Pour $r \geq 3$. Détermination des lieux singuliers de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r$, de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$, de leurs réduits associés et des strates d'Hilbert Samuel (Quand sont elles lisses ?).

. Détermination ou du moins encadrement de la dimension des strates Z_T , de leurs composantes connexes, de leurs composantes irréductibles.

. Détermination des T telles que $Z_T \neq \emptyset$, que Z_T contienne des intersections complètes.

Partie 2: Le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\langle x, y \rangle_{\text{red}}$ admet une décomposition finie en variétés lisses, les strates d'Hilbert Samuel Z_T (cf. théorème R5).

Pour $n \leq 5$ on obtient ainsi une stratification, mais pour $n \geq 6$ la condition de frontière n'est plus satisfaite comme le prouvent les contre-exemples suivants (voir aussi $[B_2]$ remarque III.3.6):

Soit $I = (y^2, x^\alpha y, x^\beta)$ avec $\alpha \geq 2$, $\beta \geq \alpha+2$, $n=\alpha+\beta$. On a :

$$T(I) = (1, \underbrace{2, \dots, 2}_\alpha, \underbrace{1, \dots, 1}_{\beta-\alpha-1}, 0, \dots)$$

La déformation $I_t = (y^2, x^\alpha y, x^\beta + tx^\alpha y)$ est plate ce qui montre que $z_I \in \overline{Z_T}$, avec

$$T' = T(I_t) = (1, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{(\beta-\alpha+1)}, 0, \dots)$$

Ceci prouve que $Z_T \cap \overline{Z_T} \neq \emptyset$, alors que, T et T' étant des fonctions d'Hilbert-Samuel d'intersections complètes (cf. la remarque suivant le théorème R.5), on a :

Michel GRANGER

$$\dim Z_T = \dim Z_{T'} = n-2$$

Dans $[I_2]$, Iarrobino considère une relation d'ordre sur les fonctions d'Hilbert-Samuel à n fixé :

$$T \leq T' \text{ si } t_0 + \dots + t_j \leq t'_0 + \dots + t'_j \text{ pour tout } j$$

où $T = (t_0, \dots, t_j, \dots)$; $T' = (t'_0, \dots, t'_j, \dots)$

cette relation d'ordre a les propriétés suivantes (cf. $[I_2]$ lemme 4.12, théorème 4.13) :

- . Les réunions $\bigcup_{T' \geq T} Z_{T'}$, et $\bigcup_{T' > T} Z_{T'}$, sont des sous variétés fermées de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$.
- . Si $Z_{T'} \cap \bar{Z}_T \neq \emptyset$, on a $T' \geq T$

On ne connaît pas en général la dimension de $Z_{T'} \cap \bar{Z}_T$ ni des conditions suffisantes pour que $Z_{T'} \cap \bar{Z}_T \neq \emptyset$, ni une réponse complète au :

Problème : Déterminer les (T, T') tels que $Z_T \subset \bar{Z}_{T'}$. Dans la partie 2 sont abordés quelques aspects de cette question :

1) Dans un premier temps nous donnons trois conditions numériques nécessaires à

l'inclusion $Z_T \subset \bar{Z}_{T'}$:

(1) $\dim Z_T < \dim Z_{T'}$,

(2) $T \geq T'$ (cf. les remarques ci dessus)

(3) $r(T) \geq r(T')$ où $r(T)$ est le nombre minimum de générateurs d'un élément de Z_T , invariant numérique qu'on peut calculer en fonction des t_j (cf $[B_2]$ ou $[I_2]$ et la partie 2, §VI).

Ces conditions ne sont pas suffisantes comme le montrent deux contre-exemples donnés dans le §VI :

- . Un contre-exemple simple (VI.3) pour $n=7$ (valeur minimum).
- . Un deuxième contre-exemple (VI.4) pour $n=v^2$ et tout $v \geq 3$, plus intéressant par le fait qu'il concerne des strates d'intersections complètes.

Ces deux contre exemples font apparaître une obstruction au niveau de l'espace vectoriel in I des formes initiales d'ordre $v=v(I)$, d'éléments de I : L'exemple du début de cette introduction détaille le cas $v = 3, n=9$.

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

2) La relation $Z_\nu \subset \bar{Z}_{\nu-1}$ démontrée dans la partie 1 (§ II) peut être considérée comme un résultat plus grossier que des relations d'incidence entre strates puisque Z_ν est une réunion de certains Z_T .

Dans ce paragraphe sont données quelques propriétés simples des \bar{Z}_ν en particulier de \bar{Z}_2 , lieu singulier de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}}$: \bar{Z}_2 est de dimension pure $n-2$, ses composantes irréductibles étant les Z_T correspondant aux intersections complètes (leur nombre est la partie entière de $\frac{n-2}{2}$) dès que $n \geq 4$. Par contre, si $\nu \geq 3$, Z_ν n'est pas en général de dimension pure, mais Z_ν et \bar{Z}_ν sont connexes.

Soit T une fonction d'Hilbert Samuel d'ordre ν . On sait déjà que $Z_T \subset \bar{Z}_{\nu-1}$, d'après la partie 1 (II.1) mais on peut, en raffinant la méthode de démonstration de ce théorème associer à T des strates Z_{T_1}, \dots, Z_{T_s} d'ordre $\nu-1$, telles que $Z_T \subset \bar{Z}_{T_1} \cup \dots \cup \bar{Z}_{T_s}$. Il convient de remarquer que $Z_{T_1} \cup \dots \cup Z_{T_s}$ est en général distinct de $Z_{\nu-1}$. Dans certains cas on trouve même $s=1$, donc un exemple de réponse positive: $Z_T \subset \bar{Z}_{T_1}$, au problème posé plus haut.

A titre d'exemple, il en est ainsi si Z_T est la strate des idéaux intersections complètes généraux de type (ν, ν) , de colongueur ν^2 :

$$T = (1, 2, \dots, \nu, \nu-1, \dots, 2, 1, 0, \dots)$$

$$T_1 = (1, 2, \dots, \nu-1, \nu-1, \nu-1, \nu-2, \dots, 2, 1, 1, 0, \dots)$$

3) Le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_J$ (réduit) où J est un idéal de définition de $\mathbb{C}\{x,y\}$ contenant \mathcal{N}^n paramètre les idéaux de colongueur n de $\mathbb{C}\{x,y\}$ tels que $I \supset J$. Il est connexe d'après [F], prop. 2.2.

Considérons le cas $J = \mathcal{N}^p$ (p^{ie} voisinage infinitésimal de 0 dans \mathbb{C}^2). La condition $I \supset J$ a alors la particularité de ne dépendre que de $T(I)$ et le schéma de Hilbert correspondant (noté par la suite Hilb_p^n) est donc une réunion de strates Z_T , contenue dans $\bar{Z}_2 = \text{Hilb}_{n-1}^n$ dès que $p < n$.

En fait Hilb_p^n contient une strate minimum Z_{T_0} et on a $\text{Hilb}_p^n = \bigcup_{T \geq T_0} Z_T$. Cette remarque ramène le problème de déterminer les valeurs de (n,p)

telles que Hilb_p^n soit irréductible à un cas particulier du problème posé au début de la partie 2 :

Michel GRANGER

Caractériser les (n,p) tels que quel que soit $T \geq T_0$, on ait $Z_T \subset \bar{Z}_{T_0}$

Nous montrons ainsi que Hilb_p^n est généralement réductible en utilisant les conditions nécessaires du paragraphe VI: Il reste trois listes exceptionnelles et cinq cas "isolés" de valeurs de (n,p) pour lesquelles ces conditions nécessaires sont remplies par tous les $T \geq T_0$, tels que $Z_T \neq \emptyset$.

Pour démontrer l'irréductibilité de Hilb_p^n , on doit alors montrer par des calculs explicites que pour chacune de ces strates on a $Z_T \subset \bar{Z}_{T_0}$.

Ce travail a été réalisé partiellement ici pour deux listes exceptionnelles (pour lesquelles le résultat est immédiat), les premières termes de la troisième liste ($n=2p-2$ ou $2p-3$, pour $6 \leq n \leq 9$) et quatre cas isolés: Hilb_4^7 , Hilb_5^{11} , Hilb_6^{14} et Hilb_6^{17} .

●

C'est pour moi un très grand plaisir de remercier mes professeurs et amis Joël Briançon, Frédéric Pham, André Galligo, et Jean-Paul Speder pour leurs nombreux encouragements dans la préparation de ce travail.

Je remercie particulièrement Joël Briançon à qui je dois le sujet de cette thèse(1) et qui m'a fait généreusement part de son expérience et de ses idées et Frédéric Pham fondateur du Groupe des Singularités de NICE qui a accepté de la diriger.

Ma reconnaissance va également à André Galligo et Tony Iarrobino dont les commentaires m'ont été précieux et enfin à Terry Gaffney qui m'a indiqué la possibilité d'utiliser le théorème de Grothendieck dans la partie 1.

●

(1) Dont le présent mémoire reprend les parties 0,2 et 3, la partie 1 ayant été publiée dans[B.G.S.].

NOTATIONS

1) Ce travail utilise fréquemment le théorème de division par un idéal de $\mathcal{O}_r = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$, obtenu à partir du théorème de division de Weierstrass selon la méthode de Hironaka ([B₁]). A tout idéal I et toute direction L on peut associer l'ensemble des exposants privilégiés $E_L(I)$ de I, l'escalier $F_L(I)$ qui est le sous ensemble minimum (et fini) de \mathbb{N}^r tel que

$$E_L(I) = F_L(I) + \mathbb{N}^r$$

(voir [B₁], [Gal₂], [B₂, ch. I] consacré au cas $r=2$).

Rappelons que si $\Delta_L(I) = \mathbb{N}^r - E_L(I)$, il existe une unique base de I appelée base standard de I relativement à L et indexée par $F_L(I)$, $\{f_\alpha\}$ telle que :

$$f_\alpha(x) = \underline{x}^\alpha + \sum_{\beta \in \Delta_L(I)} a_\beta \underline{x}^\beta, \text{ si } \alpha \in F_L(I).$$

(On note $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$ et si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$, \underline{x}^α désigne le monôme $x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$)

Rappelons enfin que tout élément de \mathcal{O}_r est équivalent modulo I à un unique élément de \mathcal{O}_r/I de la forme :

$$\sum_{\beta \in \Delta_L(I)} a_\beta \underline{x}^\beta$$

En particulier, si I est de colongueur finie n, $\{\underline{x}^\beta\}_{\beta \in \Delta_L(I)}$ est une base sur \mathbb{C} de \mathcal{O}_r/I et $\#\Delta_L(I) = n$.

Signalons enfin qu'on dispose d'un théorème de division avec paramètres ([Gal₂]) utilisé dans la partie 0 (proposition 0.6), pour calculer explicitement un platificateur local, et des notions d'escalier et de base standard génériques ([Gal₁]).

2) Si X est un espace analytique (non nécessairement réduit), et $x \in X$ on note (X, x) son germe en x et :

$\mathcal{O}_{X, x}$ l'anneau local de X en x

$\mathcal{M}_{X, x}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X, x}$.

Pour $(X, x) = (\mathbb{C}^r, 0)$, $\mathcal{O}_{r, 0} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$ est noté \mathcal{O}_r et son idéal maximal

\mathcal{M}_r ou simplement \mathcal{M} (notamment si $r=2$).

Michel GRANGER

. X_{red} désigne l'espace analytique réduit associé à X .

3) . On note généralement si X est un espace analytique :

$$\text{Hilb}^n X = Z$$

. et si $x \in X$.

$\text{Hilb}^n \mathcal{O}_{X,x} = Z'_x$ (ou simplement Z' lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur x : en général $x = 0 \in \mathbb{C}^r$).

. Soit $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ un idéal de colongueur n :

On note z_I l'élément de $Z'_{\text{red}} \subset Z_{\text{red}}$ de support $(z_I)_{\text{red}} = \{0\}$, tel que

$\mathcal{O}_{z_I,0} = \mathcal{O}_x/I$. On dit que z_I est le point de Z'_{red} "paramétrant l'idéal I ",

et on dit parfois par abus de langage que I est alors un élément de Z'_{red}

(ou de Z_V , ou de Z_T).

4) . On note v_t la valuation naturelle de $\mathbb{C}\{t\}$.

Si $I = (f_1, \dots, f_r)$ est une intersection complète de \mathcal{O}_x , on a :

$$n = \dim \mathcal{O}_x/I = \sum_{\gamma} v_t(f_1(\gamma(t))) \quad \text{où les } \gamma \text{ sont les}$$

paramétrages irréductibles des branches de la courbe $f_2 = \dots = f_n = 0$ (éventuellement comptées plusieurs fois).

Partie 0

GÉNÉRALITÉS SUR LES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS
Description en termes de platificateurs locaux

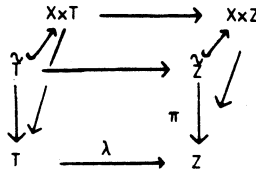
Soit X un espace analytique complexe. Pour tout entier $n > 0$, on peut définir un espace analytique $Z = \text{Hilb}^n X$, appelé schéma de Hilbert de X (cf. [D], 9.1) possédant les propriétés suivantes :

- (1) - Les points de l'espace réduit sous-jacent à Z sont les sous-espaces z de X de dimension zéro et de longueur n , c'est-à-dire que :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Z = \sum_{P \in Z_{\text{red}}} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,P} = n.$$

- (2) - Il existe un sous-espace analytique \tilde{Z} de $X \times Z$ tel que la projection $\pi: \tilde{Z} \rightarrow Z$ soit plate finie de fibre au-dessus de z égale à $z \times \{z\}$.
- (3) - Ces données sont caractérisées par la propriété universelle suivante : Pour tout morphisme $\varphi: \tilde{T} \rightarrow T$ d'espaces analytiques complexes, plat fini à fibres de longueur n tel que \tilde{T} soit un sous-espace de $X \times T$ et que φ soit la restriction de la projection sur T , il existe un unique morphisme $\lambda: T \rightarrow Z$ tel que $T = \tilde{Z} \times_Z T$ (si on identifie $(X \times Z) \times_Z T$, qui contient $\tilde{Z} \times T$, à $X \times_Z T$).

Ceci revient à dire que le diagramme :



est commutatif, les carrés étant cartésiens.

Soit $x \in X$ et I un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x}/I$ appelé colongueur de I soit égal à n . On associe à I l'élément $z = z_I$ de Z_{red} de support $z_{\text{red}} = \{x\}$ tel que $\mathcal{O}_{z,x} = \mathcal{O}_{X,x}/I$.

Le germe d'espace analytique (Z, z) est caractérisé par la propriété suivante analogue à (3) :

Michel GRANGER

(3') Soit (T, t) un germe d'espace analytique complexe et (\tilde{T}, \tilde{t}) où $\tilde{t} = (x, t)$ un germe de sous espace analytique de $X \times T$ en \tilde{t} , tel que la projection

$\varphi : (\tilde{T}, \tilde{t}) \rightarrow (T, t)$ soit une déformation plate de $z \approx z_x(t) = \pi^{-1}(t)$. Il existe un unique germe de morphisme $\lambda : (T, t) \rightarrow (Z, z)$ tel que :

$$(\tilde{T}, \tilde{t}) = (\tilde{Z}, \tilde{z}) \underset{(Z, z)}{\times} (T, t), \text{ où } \tilde{z} = (x, z).$$

Soit Y un sous-espace analytique de X . On note $Z' = \text{Hilb}^n Y$ et \tilde{Z}' le sous-espace de $Y \times Z'$ (donc de $X \times Z'$) fourni par la condition (2). On déduit de (3) l'existence d'un morphisme naturel $Z' \xrightarrow{i} Z$ tel que $\tilde{Z}' = \tilde{Z} \underset{Z'}{\times} Z'$.

Montrons que Z' apparaît ainsi comme un sous espace analytique de Z . D'abord est associée à i , l'inclusion évidente $Z'_{\text{red}} \subset Z_{\text{red}}$: L'élément $z' \in Z'_{\text{red}}$ de support $\{x_1, \dots, x_k\}$ associé aux idéaux $I'_j = I_j / I_{Y, z'_j}$ de $\mathcal{O}_{Y, x_j} \approx \mathcal{O}_{X, x_j} / I_{Y, x_j}$ n'est autre que l'élément $z \in Z_{\text{red}}$ associé aux I_j .

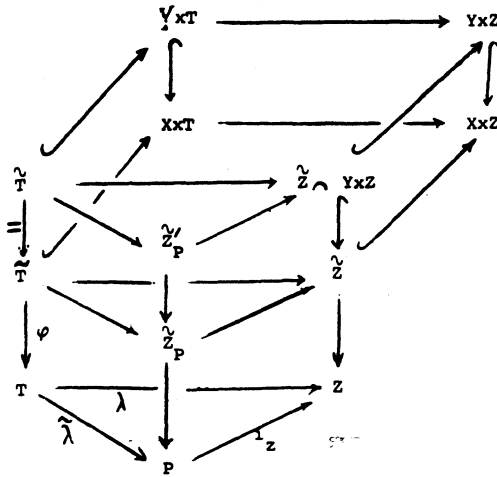
Rappelons d'autre part que le germe (Z, z) (resp (Z', z')) est naturellement isomorphe au produit des $(\text{Hilb}^{n_j}_{X, z_{I_j}})$ (resp. des $(\text{Hilb}^{n_j}_{Y, z_{I_j}})$) où $n_j = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X, x_j} / I_j$. Ainsi il suffit de démontrer la proposition suivante ($z = z_I, I \subset \mathcal{O}_{X, x}$, idéal de colongueur $n, x \in Y$) :

Proposition 0.1. Le germe (Z', z') est isomorphe au platificateur local du morphisme $\pi' : (\tilde{Z} \cap (Y \times Z), \tilde{z}) \rightarrow (Z, z)$ obtenu par restriction de π . Le morphisme naturel i restreint au germe (Z', z) , s'identifie alors à l'inclusion de ce platificateur dans (Z, z) .

Démonstration. Soient \tilde{T}, φ, T comme dans (3'). On suppose de plus que (\tilde{T}, \tilde{t}) est contenu dans $(Y \times T, \tilde{t})$. D'après (3'), $(\tilde{T}, \tilde{t}) = (\tilde{Z} \underset{T}{\times} T, \tilde{t})$ et l'image du morphisme $(\tilde{T}, \tilde{t}) \rightarrow (\tilde{Z}, \tilde{z})$ est contenue dans $(\text{Id}_X \lambda)(Y \times T, \tilde{t}) \subset (Y \times Z, z)$ donc dans le germe de $\tilde{Z} \cap (Y \times Z)$ en \tilde{z} (cf. le diagramme).

D'après la platitude de φ et la définition du platificateur (P, z) de π' , ceci implique l'existence d'un morphisme $\tilde{\lambda} : (T, t) \rightarrow (P, z)$ tel que $\lambda = i_2 \circ \tilde{\lambda}$ où $i_2 : (P, z) \hookrightarrow (Z, z)$ est l'inclusion. L'unicité de $\tilde{\lambda}$ résulte de celle de λ et on a le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens (Par souci de clarté les points spéciaux des germes sont omis).

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS



Il en résulte que $(\hat{T}, \hat{\mathcal{C}}) = (\hat{Z}'_P \times_P T, \hat{\mathcal{C}})$, avec $(\hat{Z}'_P, \hat{\mathcal{Z}}) \subset (YxP, \hat{\mathcal{Z}})$ ce qui montre que (P, z) satisfait à la propriété universelle qui caractérise (Z', z) et comme de plus $(\hat{Z}'_P, \hat{\mathcal{Z}}) = (Z'_P, \hat{\mathcal{Z}})$ (considérer le diagramme pour $T=P$) le morphisme naturel $i : Z' \rightarrow Z$ s'identifie au voisinage de z à i_z . ■

Considérons en particulier $Y_x = \text{Specan } \mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{M}_{X,x}^n$ où $\mathcal{M}_{X,x}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. L'espace réduit sous-jacent à $\text{Hilb}^n Y_x$ est l'ensemble des idéaux de colongueur n de $\mathcal{O}_{X,x}$, d'après le lemme classique :

Lemme 0.2. Tout idéal I de colongueur n dans $\mathcal{O}_{X,x}$ contient $\mathcal{M}_{X,x}^n$. ■

On note $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_{X,x}$ le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n Y_x$ qu'on peut ainsi associer à toute algèbre analytique $\mathcal{O}_{X,x}$.

Remarque 0.3. Pour tout idéal de définition J de $\mathcal{O}_{X,x}$, considérons

$Y_J = \text{Specan } \mathcal{O}_{X,x} / J$ L'espace réduit sous-jacent à $\text{Hilb}^n Y_J$ est l'ensemble des idéaux I de $\mathcal{O}_{X,x}$ de colongueur n tels que $I \supset J$.

Si X est lisse en x , $\mathcal{M}_{X,x}^n$ est minimum parmi les idéaux J tels que $(\text{Hilb}^n Y_J)_{\text{red}} = (\text{Hilb}^n Y_x)_{\text{red}} = \{I \text{ idéal de } \mathcal{O}_{X,x}, I \supset \mathcal{M}_{X,x}^n, \dim \mathcal{O}_{X,x} / I = n\}$.

Michel GRANGER

En effet soit $f \in \mathcal{M}_{X,x}^n$. Dans un système de coordonnées convenables de X en x , on peut supposer que $f(0, \dots, 0, x_r) = x_r^p$, $p < n$, où $r = \dim(X, x)$. Ceci entraîne que $f \notin I = (x_1, \dots, x_{r-1}, x_r^n)$ donc que $z_I \notin (\text{Hilb}^n Y_J)_{\text{red}}$ dès que $f \in J$. ■

Dans ce qui suit on suppose $X = \mathbb{C}^r$ et on note $Z' = \text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ ou $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$ le schéma de Hilbert de $Y_0 = \text{Specan } \mathcal{O}_r / \mathcal{M}_r^n$ dont le réduit sous-jacent est l'ensemble des idéaux de colongueur n de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$.

Soit I un tel idéal. On considère un système de générateurs (f_1, \dots, f_p) et une base du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{O}_r / I , notée $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, les $e_i(x)$ $i=1, \dots, n$ étant des représentants dans \mathcal{O}_r des éléments de cette base.

On note :

$$F_i(\underline{x}, \underline{a}) = f_i(\underline{x}) + \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j(\underline{x}) \quad \text{où } i=1, \dots, p$$

avec :

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r$$

$$\underline{a} = (a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq n) \in \mathbb{C}^{pn}$$

Proposition O-4. Soit (\mathcal{X}, O) le germe (lisse) de sous espace analytique de $(\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{pn}, O)$ défini par $F_1 = \dots = F_p = 0$ et $\pi : (\mathcal{X}, O) \rightarrow (S, O) = (\mathbb{C}^{pn}, O)$ la projection naturelle. Alors le germe de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r$ en z_I est isomorphe au platicateur local de π , noté (P, O) .

Cette proposition est utilisé dans la partie 1 avec $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ base monomiale de \mathcal{O}_r / I . D'autre part pour un calcul pratique des équations de (P, O) (voir plus loin) il est utile de supposer que les e_i sont les monomes \underline{x}^α , $\alpha \in \Delta_L(I)$ et que (f_1, \dots, f_p) est la base standard associée à une direction L ($[B_2], [Gal_2]$). Soit $\varepsilon > 0$ et B_ε la boule de \mathbb{C}^r de centre O de rayon ε . Il existe des représentants assez petits P_ε et Z_ε des germes (P, O) , (Z, z) et un isomorphisme $P_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$ (d'après la proposition O.4), tel que $(\underline{a}, \underline{b}) \in P_\varepsilon$ corresponde au sous espace de B_ε défini par les équations :

$$F_1(\underline{x}, \underline{a}) = \dots = F_p(\underline{x}, \underline{a}) = 0.$$

Cette précision sur la proposition O.4 sera utilisée dans la démonstration du théorème II.1 de la partie 2.

Démonstration de la proposition O-4.

Il suffit de montrer que pour $(T, t), \varphi, (\tilde{T}, \tilde{t}) \subset (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{\tilde{t}}, \tilde{t})$ comme dans (3'), il existe un unique germe de morphisme :

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

$\lambda : (T, t) \longrightarrow (S, O)$, tel que

$$(\tilde{T}, \tilde{t}) = \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \times_{\mathbf{S}} T, \tilde{t}$$

En effet par définition du platificateur, il existe un unique morphisme

$\mu : (T, t) \longrightarrow (P, O)$ tel que $\lambda = i_* \mu$, d'où :

$$(\tilde{T}, \tilde{t}) = (\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \times_{\mathbf{P}} \times_{\mathbf{P}} T, \tilde{t}) = (\mathcal{O}_{\mathbf{P}} \times_{\mathbf{P}} T, \tilde{t})$$

où on note $\mathcal{X}_{\mathbf{P}} = (\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \times_{\mathbf{P}} \mathbf{P}, O)$ le germe obtenu à partir de (\mathcal{X}, O) par le changement de base $(P, O) \xrightarrow{i} (S, O)$. On a $(\mathcal{X}_{\mathbf{P}}, O) \subset \mathbb{C}^r \times_{\mathbf{P}}$

Ceci montre que (P, O) , et la projection canonique $\pi_{\mathbf{P}} : (\mathcal{X}_{\mathbf{P}}, O) \longrightarrow (P, O)$

plate, à fibres finies de longueur n , satisfont à la propriété universelle (3') qui caractérise le germe de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r$ en z_1 .

Il reste à montrer l'existence et l'unicité de λ : Comme $\mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}}$ est un module plat de type fini sur $\mathcal{O}_{T, t}$, il est libre et la base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de $\mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}}/I$ permet d'en définir une base $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$. Précisément, le plongement $(\tilde{T}, \tilde{t}) \hookrightarrow (\mathbb{C}^r \times_{\mathbf{T}}, (O, t))$ fournit une présentation de $\mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}} : \mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}} = \mathcal{O}_{T, t} \{x_1, \dots, x_r\}/I$, et la projection $(\tilde{T}, \tilde{t}) \longrightarrow (T, t)$ correspond à l'inclusion $\mathcal{O}_{T, t} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}}$ naturellement obtenue à l'aide de cette présentation.

Considérons d'autre part la surjection canonique :

$$\chi : \mathcal{O}_{T, t} \{x\} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}} \text{ et la section } \mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}} \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{T, t} \{x\} \text{ de } \chi \text{ telle que } s(x_i) = x_i.$$

On note \hat{f} l'image de $sf \in s(\mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}})$ dans $\mathcal{O}_{T, t}$.

D'après une propriété bien connue de la platitude, (voir par exemple [Gal₂]

annexe) il existe $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_p$ tels que $\chi(\hat{F}_i) = f_i$ et $\tilde{I} = (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_p)$.

Comme $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ est une base de $\mathcal{O}_{\tilde{T}, \tilde{t}}$ sur $\mathcal{O}_{T, t}$, il existe d'uniques $\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_{T, t}$

tels que :

$$(1) \quad \hat{F}_i = - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \hat{e}_j \quad i=1, \dots, p$$

$$\text{ou encore } \hat{F}_i = f_i(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_j(x) \in (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_p)$$

Michel GRANGER

Il est clair que $\chi(\lambda_{i,j}) = 0$, donc $\chi(\hat{F}_i) = f_i = \chi(\hat{F}_i)$

On en déduit que les idéaux $(\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_p)$ et I , ont la même image par χ , et on a $(\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_p) \subset I$, donc ces idéaux sont égaux (cf. [Gal₂] annexe, lemme 3).

Notons $\lambda : (T, t) \rightarrow (S, 0)$ le germe de morphisme défini par les λ_{ij} .

$$\text{On a : } \mathcal{O}_{T,t}^{\vee} = \mathcal{O}_T\{\underline{x}\} / (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_p) = \mathcal{O}_{T,t}\{\underline{x}\} / \lambda^*(F_1, \dots, F_p)$$

$$\text{donc } (\hat{T}, \hat{t}) = (\mathbb{T} \times_{\mathbb{S}} \hat{\mathcal{X}}, \hat{t})$$

L'unicité de λ résulte du fait que la relation $\mathcal{O}_{T,t}^{\vee} = \mathcal{O}_T\{\underline{x}\} / \lambda^*(F_1, \dots, F_p)$

implique immédiatement les égalités (1) ■

Considérons un germe d'espace analytique $(Y, 0) \subset (\mathbb{C}^r, 0)$ d'équations

$$g_i(x_1, \dots, x_r) = 0, \text{ où } g_i \in \mathcal{O}_Y, i = 1, \dots, k.$$

Soit I un idéal de \mathcal{O}_Y contenant g_1, \dots, g_k et $I' = I / (g_1, \dots, g_k)$, l'idéal correspondant de $\mathcal{O}_{Y,0}$.

On note $\mathcal{X}' \subset \mathbb{C}^r \times \mathbb{S}$ le sous espace de \mathcal{X} d'équations $F_1 = \dots = F_p = g_1 = \dots = g_k = 0$.

Proposition 0-5. Le germe de $\text{Hilb}^n Y$ en z_1 , est isomorphe au platificateur local $(P', 0)$ de la projection $\pi' : (\mathcal{X}', 0) \rightarrow (S, 0) = (\mathbb{C}^{pn}, 0)$

Démonstration : Le germe (\hat{Z}, \hat{z}) s'identifie à $(\hat{\mathcal{X}}_p, 0) = (\hat{\mathcal{X}} \times_P \mathcal{O}_P, 0)$. Notons :

$$\hat{\mathcal{X}}_p' = \hat{\mathcal{X}}' \times_{\hat{\mathbb{S}}} P = \hat{\mathcal{X}}' \times_{\hat{\mathcal{X}}} \hat{\mathcal{X}}_p$$

On a le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{X}_p & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{C}^r \times \mathbb{S} \\
 & \nearrow & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 \mathcal{X}'_p & \longrightarrow & \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathbb{Y} \times \mathbb{S} & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & & & \\
 P & \longrightarrow & S & & & &
 \end{array}$$

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Le platificateur de $(\mathcal{G}', 0) \rightarrow (S, 0)$ est isomorphe à celui de $(\mathcal{G}'_P, 0) \rightarrow (P, 0)$.

Comme $\mathcal{X}'_P = \mathcal{X}'_P \times_{\mathbb{C}^r_{X'P}} X$ ($Y \times P$) le germe $(\mathcal{G}'_P, 0)$ s'identifie à $(\hat{Z} \cap (Y \times P), \hat{Z})$ et

la proposition en résulte d'après la proposition 0.1. ■

Remarquons que l'inclusion $(P', 0) \hookrightarrow (P, 0)$ s'identifie ainsi à l'inclusion i_2 de la proposition 0.1.

On suppose maintenant que (f_1, \dots, f_p) est une base standard de I pour une direction L

et que $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ est la base monomiale $\{\bar{x}^\alpha\}_{\alpha \in \Delta_L(I)}$ de \mathcal{O}_r/I . Les équations

du platificateur $(P, 0)$ peuvent alors être calculées de la façon suivante d'après

[Gal₂], proposition 1.4.7. :

On considère un système de générateurs

$$r_\ell = (u_{\ell,1}, \dots, u_{\ell,p}) \quad \ell = 1, \dots, s$$

du module des relations entre les f_i ($\sum_{i=1}^p u_{\ell,i} f_i = 0$) et les éléments

suyvants de $\mathcal{O}_S\{\underline{x}\}$:

$$m_\ell = u_{\ell,1} F_1 + \dots + u_{\ell,p} F_p$$

On construit alors les restes de la division des m_ℓ par la famille (F_1, \dots, F_p)

(voir [Gal]₂ théorème 1.2.7) qu'on note :

$$\sum_{\alpha \in \Delta_L(I)} h_{\ell,\alpha}(\underline{a}) x^\alpha$$

N.B.: ce reste n'est pas nul si $\mathcal{O}_S\{\underline{x}\}/(F_1, \dots, F_p)$ n'est pas un \mathcal{O}_S -module plat.

Les équations de $(P, 0)$ sont alors (dans S) :

$$h_{\ell,\alpha}(\underline{a}) = 0, \quad \ell = 1, \dots, s, \quad \alpha \in \Delta_L(I)$$

Les équations de $(P', 0)$ s'obtiennent de la même façon en considérant les relations

entre $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_k$ et en divisant par la famille $(F_1, \dots, F_p, g_1, \dots, g_k)$

Dans la proposition suivante on détermine les équations de $(P', 0)$ dans $(P, 0)$

donc à isomorphisme près du germe de $\text{Hilb}^n Y$ dans celui de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r$ en z_I :

Michel GRANGER

Proposition 0-6. Soient (F_1, \dots, F_p) comme dans (0.4), avec (f_1, \dots, f_p) base standard de I pour une direction L . Alors $(P', 0)$ est le germe de sous espace de $(P, 0)$ défini par l'idéal $(h_{i,\alpha})_{1 \leq i \leq k, \alpha \in \Delta_L(I)}$ où $\sum_{\alpha \in \Delta_L(I)} h_{i,\alpha} x^\alpha$ est le reste de la division de g_i par la famille (F_1, \dots, F_p) .

Démonstration : Le module des relations entre $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_k)$ est engendré par les relations r_1, \dots, r_s entre f_1, \dots, f_p et des relations du type :

$$g_i = v_{i,1} f_1 + \dots + v_{i,p} f_p, \quad i=1, \dots, k$$

Le platicateur $(P', 0)$ s'obtient donc en divisant les $m_l, l=1, \dots, s$,

et les $m'_i = g_i - (v_{i,1} f_1 + \dots + v_{i,p} f_p)$ par $(F_1, \dots, F_p, g_1, \dots, g_k)$.

Comme $g_i \in (f_1, \dots, f_p) = I$ pour $i=1, \dots, k$ cela revient au même que de diviser

par la famille (F_1, \dots, F_p) . Ainsi les restes des divisions des m_l fournissent

les équations de $(P, 0)$ dans $(S, 0)$ et les équations de $(P', 0)$ dans $(P, 0)$ sont données

par les $h_{i,\alpha} \in \mathcal{O}_{P,0}$ où $\sum_{\alpha \in \Delta_L(I)} h_{i,\alpha} x^\alpha$ est le reste de la division de m'_i par

(F_1, \dots, F_p) . Il est immédiat de constater que ce reste est le même que celui

de la division de g_i par la famille (F_1, \dots, F_p) . ■

Exemples 0-7.

1) Si I est une intersection complète, on peut supposer $p=r$ et le morphisme π de la proposition 0.4 est plat. On a donc $(P, 0) = (\mathbb{C}^{nr}, 0)$ et $\text{Hilb}^n \mathbb{C}^r$ est lisse en z de dimension nr .

2) Les considérations des propositions 0.5 et 0.6 s'appliquent en particulier au germe $(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r, z)$. Il suffit de prendre pour $\{g_1, \dots, g_k\}$ l'ensemble des monômes

$\{x^\alpha\} \mid |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ qui engendrent \mathcal{M}_r^n .

Partie 1

SINGULARITÉS DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$

I - CALCUL DE DIMENSIONS D'ESPACES TANGENTS

Proposition I-1 (voir [D] 9.1 Remarque 3)

L'espace tangent de Zariski de $Z = \text{Hilb}^n X$ en un point $z = z_I$ de support x , $x \in X$, où I est un idéal de colongueur n de $\mathcal{O}_{X,x}$ est : $T_z(Z) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}} (I, \mathcal{O}_{X,x}/I)$ ■

Soient $Z = \text{Hilb}^n \mathbb{A}^r$, $Z' = \text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ et I un idéal de colongueur n de \mathcal{O}_r . Les espaces tangents de Zariski de Z et Z' sont donc respectivement :

$$T_z(Z) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_r} (I, \mathcal{O}_r/I)$$

$$T_z(Z') = \text{Hom}_{\mathcal{O}_r/\mathcal{M}_r^n} (I, \mathcal{O}_r/I) = \{\varphi \in T_z(Z), \varphi(\mathcal{M}_r^n) = 0\}$$

Soit LCZ_1 , l'ensemble des idéaux de dimension de plongement un, c'est-à-dire isomorphes à $(x_1, \dots, x_{r-1}, x_r^n)$ ($L = Z_1$ si $r = 2$).

Dans ce paragraphe on se propose de démontrer le résultat suivant :

Proposition I-2. Si $r = 2$, L est la partie lisse de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ et si $r \geq 3$, L est la partie lisse de l'ouvert des intersections complètes de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$

La démonstration de cette proposition consiste à montrer que $\dim(T_z(Z')) > \dim(Z', z)$, inégalité équivalente au fait que Z' est singulier en z , où $z = z_I$ paramètre un idéal I de dimension de plongement $d(I) \geq 2$, et intersection complète lorsque $d(I) \geq 3$.

Lemme I-3. On a la relation $(x_1^n) + I^2 = \mathcal{M}_r^n + I^2$ dans chacun des cas suivants : ($r \geq 3$ et $\nu \geq 2$), ou ($r = 2$, $\nu \geq 3$), pour un système générique de coordonnées.

Démonstration. Considérons l'escalier générique de I pour la direction canonique (cf [Gal 1] th.2, §3) noté $F(I)$.

On note $E(I) = F(I) + \mathbb{N}^r$ l'ensemble des exposants privilégiés $\exp f$ où $f \in I$,

$$E(I) \subset \mathbb{N}^r = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{r-1} \quad \text{et} \quad \Delta(I) = \mathbb{N}^r - E(I)$$

Michel GRANGER

Considérons le sous-ensemble de \mathbb{N}^{r-1} noté $\Delta'(I)$ et la famille d'entiers $\{\alpha_u, u \in \Delta'(I)\}$ définis par :

$$\begin{aligned} \{0\} \times \Delta'(I) &= \Delta(I) \cap \{0\} \times \mathbb{N}^{r-1} \\ \Delta(I) &= \{(\beta, u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{r-1}, u \in \Delta'(I), 0 \leq \beta < \alpha_u\} \end{aligned}$$

On a $n = \# \Delta(I) = \sum_{u \in \Delta'(I)} \alpha_u$.

On remarque que $\# \Delta'(I) \geq 3$, sous chacune des hypothèses du lemme I-3, d'où

(1) $n > \alpha_0 + \alpha_u$ quelque soit $u \in \Delta'(I) - \{0\}$.

Considérons l'ensemble $E(I^2)$ des exposants privilégiés des éléments de I^2 . Il est clair que :

$$\begin{aligned} E(I^2) &\supset E(I) + E(I) \quad (\text{cf } [B_2] \text{ chapitre I}) \\ \text{donc } \Delta(I^2) &\subset \Delta(I) + (\Delta(I) \cup F(I)) \\ \Delta'(I^2) &\subset \Delta'(I) + (\Delta'(I) \cup F'(I)) \end{aligned}$$

Tout élément de $\Delta(I^2)$ est du type

$$(\beta, u+v), \text{ où } v \in \Delta'(I), u \in \Delta'(I) \cup F'(I)$$

Soient $f, g \in I$ tels que $\exp f = (\alpha_u, u)$, $\exp g = (\alpha_v, v)$, $\alpha_u = 0$ si $u \in F'(I)$

On a $\exp fg = (\alpha_u + \alpha_v, u+v) \in E(I^2)$, d'où :

(2) $\beta < \alpha_u + \alpha_v$ si $(\beta, u+v) \in \Delta(I^2)$

Il résulte de la description de l'escalier générique ([Gal 1] th.2, §3) que si $u, v \in \Delta'(I)$, $u-v \in \mathbb{N}^{r-1}$, on a :

(3) $\alpha_u \leq \alpha_v - |u-v|$
(où $|u| = u_2 + \dots + u_r$ si $u = (u_2, \dots, u_r) \in \mathbb{N}^{r-1}$).

Supposons que dans (2), $v \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \beta + |u| + |v| &< \alpha_u + |u| + \alpha_v + |v| && \text{d'après (2)} \\ &< \alpha_0 + \alpha_{\epsilon_i} + 1 && \text{d'après (3)} \end{aligned}$$

où $\epsilon_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ représente le monôme x_i et i est choisi tel que $v_i \neq 0$ ($v = (v_1, \dots, v_r)$).

Ainsi dès que $u+v \neq 0$ on a :

$$\beta + |u| + |v| < \alpha_0 + \alpha_{\epsilon_i} + 1 \leq n \text{ d'après (1)}$$

et les seuls monômes x^p tels que $p \in \Delta(I^2)$, $|p| \geq n$ sont donc de la forme x_1^{n+i} , $i \geq 0$, ce qui démontre le lemme I-3. Remarquons que l'ensemble de ces

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

monômes peut être vide, si $\mathcal{M}^n \subset I^2$.

Proposition I-4.

1) Pour tout idéal I de θ_r , d'ordre $\nu > 2$ tel que $r > 3$, la codimension de $T_z(Z')$ dans $T_z(Z)$ satisfait à :

$$\text{codim } T_z(Z') \leq (\alpha-s)^+ = \sup(\alpha-s, 0) \text{ où}$$

$$s = \sup\{s' : \mathcal{M}_r^n \subset \mathcal{M}_r^{s'+1} I^2\}, \quad \alpha = \inf\{\alpha' : \mathcal{M}_r^{\alpha'} \subset I\}$$

2) Si de plus I est une intersection complète, on a l'égalité :

$$\dim T_z(Z') = nr - (\alpha-s)^+.$$

Démonstration.

1) D'après le lemme I-3 un idéal de dimension de plongement $d(I) > 3$ satisfait à :

$$(x_1^n) + I^2 = \mathcal{M}_r^n + I^2.$$

Donc pour $\varphi \in T_z(Z)$, on a :

$$\varphi \in T_z(Z') \Leftrightarrow \varphi(x_1^n) = 0.$$

Reprenons les notations de la démonstration du lemme I-3. On remarque que $\alpha = \alpha_0$ et que pour $(\beta, u) \in \Delta(I)$ tel que $u \neq 0$ ($u_1 \neq 0$), on a :

$$\beta + |u| < \alpha_u + |u| \leq \alpha_{\epsilon_i} + |u| - |u - \epsilon_i| = \alpha_{\epsilon_i} + 1.$$

Donc : $\beta + |u| \leq \alpha_{\epsilon_i} < n - \alpha_0 = n - \alpha$ d'après (1).

On en déduit par le même argument que dans la démonstration du lemme I-3 que les monômes de degré $\geq n - \alpha$ correspondant aux points de $\Delta(I)$ sont du type $x_1^{s_i}$, d'où :

$$\mathcal{M}^{n-\alpha} + I = (x_1^{n-\alpha}) + I$$

Or $s \geq n - \alpha$, d'après l'inclusion $\mathcal{M}_r^n = \mathcal{M}_r^{n-\alpha} \cdot \mathcal{M}_r^\alpha \subset \mathcal{M}_r^{n-\alpha} I$ donc on a aussi

$$(x_1^s) + I = \mathcal{M}_r^s + I \text{ ou } s = +\infty.$$

• Si $s = +\infty$, on a par définition de s : $\mathcal{M}_r^n \subset I^2$,

donc $\text{codim } T_z(Z') = 0$ car pour tout $\varphi \in T_z(Z)$ on a alors $\varphi(\mathcal{M}_r^n) \subset \varphi(I^2) = 0$

• Si s est fini, on a $s < \alpha$, car $s > \alpha$ implique :

$$\mathcal{M}_r^n \subset \mathcal{M}_r^\alpha I + I^2 = I^2, \text{ d'où } s = +\infty.$$

Tout élément de $\mathcal{M}_r^s \cdot \theta_r / I$ a alors un représentant de la forme :

$$\sum_{i=0}^{\alpha-s-1} a_i x_1^{s+i}$$

Michel GRANGER

En particulier comme $x_1^n \in \mathcal{M}_r^s I + I^2$, donc $\varphi(x_1^n) \in \mathcal{M}_r^s \cdot \theta_r / I = \frac{\mathcal{M}_r^s + I}{I}$, il existe α -s formes linéaires $a_i(\varphi)$ sur $T_z(Z)$ telles que :

$$\varphi(x_1^n) = \sum_{i=0}^{\alpha-s-1} a_i(\varphi) x_1^{s+i}$$

• $T_z(Z')$ est défini dans $T_z(Z)$ par les $(\alpha-s)$ équations $a_i(\varphi) = 0$.

Ceci démontre la première partie de la proposition I-4.

2) Soit $I = (f_1, \dots, f_r)$, $\nu(f_i) \geq 2$, une intersection complète d'ordre $\nu \geq 2$ telle que $s < \alpha$. On peut définir α -s éléments $\varphi_i \in T_z(Z)$, $i = 0, \dots, \alpha-s-1$, de la façon suivante :

$$\varphi_i(f_1) = x_1^i$$

$$\varphi_i(f_j) = 0 \quad \text{pour } j = 2, \dots, r.$$

D'autre part il existe $u_1, \dots, u_r \in \mathcal{M}_r^s$ tels que

$$x_1^n = u_1 f_1 + \dots + u_r f_r \pmod{I^2}.$$

Après division des u_q par I on est ramené à

$$u_q = \lambda_q(x_1) x_1^s, \quad q = 1, \dots, r, \quad \lambda_q \in \mathfrak{C}[x_1].$$

De plus on peut supposer (après réindexation éventuelle des f_i) que $\lambda_1(0) \neq 0$. En effet si on avait pour tout q , $\lambda_q(0) = 0$, on aurait $x_1^n \in \mathcal{M}_r^{s+1} I + I^2$ donc $\mathcal{M}_r^n \subset \mathcal{M}_r^s + I^2 = (x_1^n) + I^2 \subset \mathcal{M}_r^{s+1} + I^2$, contrairement à la définition de s .

On a $\varphi_i(x_1^n) = u_1 \varphi_i(f_1) = \lambda_1(x_1) x_1^{s+i}$ donc :

$$\bullet a_j(\varphi_i) = 0 \quad \text{si } 0 < j < i < \alpha-s-1$$

$$\bullet a_i(\varphi_i) = \lambda_1(0) \neq 0, \quad \text{si } 0 < i < \alpha-s-1$$

ceci prouve que (dès que $s < \alpha$) les a_i définis dans la première partie de la démonstration sont linéairement indépendants. Ceci termine la preuve de la proposition I-4. ■

Preuve de la proposition I-2 dans le cas $r \geq 3$.

Soit I une intersection complète d'ordre $\nu \geq 2$ et $\pi : (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (S, 0)$ le morphisme de la proposition 0.4. Le germe de Z en $z = z_I$ s'identifie à $(S, 0)$ (exemple 0.7.1), et on note $(\underline{a}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$ les coordonnées sur S qu'on

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

identifiée à $T_z(Z)$.

L'idéal définissant le germe (Z'_{red}, z) dans (S, o) contient des éléments $A_k(\underline{a})$, $0 \leq k \leq \alpha - s - 1$ (si $\alpha > s$) dont les parties linéaires sont les formes linéaires $a_k(\varphi)$ considérées dans la démonstration de la proposition I-4. D'autre part il contient les $a_{i,1}$, $i=1, \dots, r$ car le fait que l'idéal engendré par les $F_i(x, \underline{a})$ a pour support $\{o\}$ implique $a_{i,1} = 0$, si on suppose que $e_1(\underline{x}) = 1$.

Le système $(A_k, k=0, \dots, \alpha-s-1, a_{i,1}, i=1, \dots, r)$ est de rang r si $s = +\infty$ et

sinon de rang au moins $(\alpha-s)^+ + r - 1$. En effet la matrice $\left(\frac{\partial A_k}{\partial a_{1,\ell}}(o) \right)_{0 \leq k, \ell-1 \leq \alpha-s-1}$

(où on suppose que $e_2(\underline{x}) = x_1^{\ell-1}$) est triangulaire à déterminant $\lambda_1(o)^{\alpha-s}$ dans le cas $s < \alpha$ (cf. Démonstration de I-4.2)).

On a donc $\dim(Z', z) \leq \dim T_z(Z') - (r-1) < \dim T_z(Z')$

Ceci prouve que Z' est singulier en z .

Il reste à étudier le cas d'une intersection complète de dimension de plongement $d(I)$, $2 \leq d(I) < r$.

- Si $3 \leq d(I) < r$, le raisonnement précédent s'applique sans changement, le lemme I-3 restant valable.
- Si $d(I) = 2$ on peut même montrer que (Z', z_I) est singulier sans supposer que I est intersection complète.

Montrons comment ce résultat se déduit du même résultat pour $r=2$ qui fait l'objet de la proposition I-5 qui suit :

Soit $I = (f_1, \dots, f_p, x_3, \dots, x_r)$ où $f_i \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$, et $r \geq 3$, un idéal de colon-gueur n . Appliquons la proposition I-5 à $I' \subset \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$, $I' = (f_1, \dots, f_p)$:

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_2/\mathcal{M}_2^n}(I', \mathcal{O}_2/I') > \dim \text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, x_2\} = n-1.$$

D'autre part on trouve facilement

$$\dim T_z(Z') = (n-1)(r-2) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_2/\mathcal{M}_2^n}(I', \mathcal{O}_2/I')$$

d'où $\dim T_z(Z') > (n-1)(r-1)$.

Michel GRANGER

Soit, dans les notations de la proposition 0.4, $p: S \rightarrow S'$, la projection sur l'espace des paramètres de déformation des $f'_i = x_i$, $i=3, \dots, r$:

$$x_i(x, \underline{a}) = x_i + a_{i,1} + \sum_{j=2}^n a_{i,j} e_j(x_1, x_2)$$

$$S' = \mathbb{C}^{n(r-2)}$$

$p(Z')$ est l'ensemble d'équations $a_{3,1} = \dots = a_{r,1} = 0$, chaque fibre de $Z' \rightarrow p(Z')$ étant isomorphe au germe de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ en z_I .

$$\begin{aligned} \dim(Z', z) &= (n-1)(r-2) + \dim \text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x_1, x_2\} \\ &= (n-1)(r-1) < \dim T_z(Z') \end{aligned}$$

donc Z' est singulier en z . ■

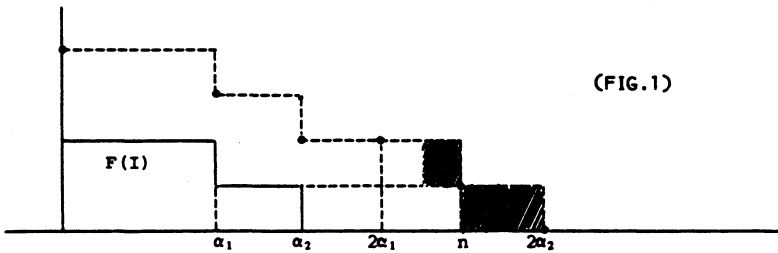
Pour terminer la démonstration de la proposition I-2, il reste donc à examiner le cas $r=2$.

Proposition I-5. Le lieu singulier de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ est l'ensemble E_2 des idéaux I d'ordre $\nu(I) \geq 2$.

Démonstration. Si $\nu(I) \geq 3$, le lemme I-3 et donc le raisonnement de la démonstration de I-4 1) s'appliquent:

$$\begin{aligned} \dim T_z(Z') &\geq \dim T_z(Z) - (\alpha-s)^+ = 2n - (\alpha-s)^+ \\ &> n-1 = \dim(Z', z). \end{aligned}$$

Donc Z' est singulier en z . Il reste donc à traiter le cas $\nu(I) = 2$



L'escalier générique $F(I)$ ayant la forme indiquée (Fig.1), soient $\alpha'_1, \dots, \alpha'_4$ tels que celui de I^2 soit $F(I^2) = \{(0,4), (\alpha'_1,3), (\alpha'_2,2), (\alpha'_3,1), (\alpha'_4,0)\}$. On a comme dans la démonstration de I-3, $E(I^2) \supset E(I) + E(I)$,

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \alpha_1' &\leq \alpha_1 = n - \alpha_2 \\ \alpha_2' &\leq \inf(2\alpha_1, \alpha_2) \\ \alpha_3' &\leq \alpha_1 + \alpha_2 = n \\ \alpha_4' &\leq 2\alpha_2 \end{aligned}$$

• 1er cas :

Supposons $\inf(2\alpha_1, \alpha_2) \leq n-2 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2$.

Cette inégalité équivaut à :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 - 2, \text{ ou } 0 \leq \alpha_1 - 2$$

et exclut donc seulement le cas $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ ($I = \mathcal{M}^2$ où \mathcal{M} est l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x, y\}$).

On a donc sous cette hypothèse

$$\begin{aligned} \alpha_2 &> 3 \text{ et } \alpha_2' \leq n-2 \\ \alpha_1' &\leq n - \alpha_2 \leq n-3 \end{aligned}$$

donc $I^2 + \mathcal{M}^n / I^2$ est engendré par les classes modulo I^2 de x^n et $x^{n-1}y$.

Notons d'autre part que $\varphi(x^{\alpha_2}) \in \mathcal{M}$: ceci résulte du fait que si I est une intersection complète $x^{\alpha_2} \in \mathcal{M} \cdot (f_0, f_1)$ et sinon $\varphi(I) \subset \mathcal{M}/I$, pour tout $\varphi \in T_2(\mathbb{Z})$, d'après [B.G.S.] proposition II.1.

On a donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x^n) &= \dot{x}^{n-\alpha_2} \varphi(x^{\alpha_2}) = \sum_{i=1}^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} a_i(\varphi) \dot{x}^{\alpha_1+i} \\ \varphi(x^{n-1}y) &= \dot{x}^{n-\alpha_2-1} \dot{y} \varphi(x^{\alpha_2}) = \sum_{i=1}^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} b_i(\varphi) \dot{x}^{\alpha_1+i} \end{aligned}$$

où \dot{x} et \dot{y} sont les classes de x et y modulo I .

Dans ces égalités on utilise le théorème de division pour écrire la classe (modulo I) d'un élément de \mathcal{M}^{α_1+1} comme un polynôme en \dot{x} .

On a évidemment $\dot{x} \varphi(x^{n-1}y) = \dot{y} \varphi(x^n)$, donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x^n) = 0 &\Rightarrow \dot{x} \varphi(x^{n-1}y) = \sum_{i=1}^{\alpha_2 - \alpha_1 - 2} b_i(\varphi) \dot{x}^{\alpha_1+i+1} = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(x^{n-1}y) = b_{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}(\varphi) \dot{x}^{\alpha_2-1} \end{aligned}$$

Michel GRANGER

Ainsi on a puisque $\mathcal{M}^n + I^2 = (x^n, x^{n-1}y) + I^2$

$$\varphi(\mathcal{M}^n) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x^n) = \varphi(x^{n-1}y) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1(\varphi) = \dots = a_{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}(\varphi) = b_{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}(\varphi) = 0$$

Finalement $T_z(Z')$ est défini dans $T_z(Z)$ par $\alpha_2 - \alpha_1$ équations, donc $\dim T_z(Z') \geq 2n - \alpha_2 + \alpha_1 = n + 2\alpha_1$

$$> n - 1 = \dim(Z', z)$$

ce qui montre que $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ est singulier en z .

• 2^{ème} cas : $I = \mathcal{M}^2$.

On a $\varphi(I) \subset \mathcal{M}/I$, d'après la partie 1 (proposition II-1 rappelée plus haut), ou par un calcul élémentaire.

$$\text{Donc } \varphi(\mathcal{M}^n) = \varphi(\mathcal{M}^3) = \varphi(\mathcal{M} \cdot I) \subset \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}/I = 0$$

on a donc $T_z(Z) = T_z(Z')$ qui est donc de dimension $2n = 6 > \dim Z' = 2$. Ainsi \mathcal{M}^2 est encore un point singulier de $\text{Hilb}^3 \mathbb{C}\{x, y\}$. ■

Remarque I-6 : Les calculs faits dans ce paragraphe ne donnent pas de renseignements suffisants sur Z'_{red} si $r=2$ ou $(Z' \cap U)_{\text{red}}$ si $r > 3$.

- Il est facile de construire des exemples où $I^2 \supset \mathcal{M}^n$ ce qui implique $T_z(Z) = T_z(Z')$. Il suffit de s'assurer que $n \geq 2\alpha$ (cf. proposition I-4). Dans un tel cas on a $T_z(Z'_{\text{red}}) \subset T_z(Z')$ car Z'_{red} est contenu dans l'espace d'équations $a_{i,1} = 0$ (cf. preuve de la proposition I-2) ; Z' n'est donc pas réduit en un tel z_I et on ne peut donc affirmer que Z'_{red} est singulier en z_I en utilisant seulement le fait que Z' l'est.

- Dans le §V, on montrera que pour $r \geq 3$, L n'est pas dense dans U qui contient donc des composantes irréductibles entièrement singulières.

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

II - DÉMONSTRATION DES RELATIONS D'INCIDENCE $Z_\nu \subset \bar{Z}_{\nu-1}$

Dans ce paragraphe on suppose $r=2$. Rappelons que Z_ν (resp. E_ν) est l'ensemble des idéaux d'ordre ν (resp. $\geq \nu$) de $Z' = \text{Hilb}^n \mathbb{O}_T$. Il s'agit dans ce paragraphe de démontrer :

Théorème II-1. L'espace E_ν est pour $r=2$, et tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, la fermeture \bar{Z}_ν de Z_ν dans Z'_{red} .

A - Réduction au cas des intersections complètes

Soit $U_\nu \subset Z'_{\text{red}}$ l'ensemble des $z = z_I$ tels que I soit une intersection complète d'ordre ν :

Lemme II-2. Pour tout $\nu \geq 2$, on a $Z_\nu \subset \bar{U}_\nu \cup \bar{Z}_{\nu-1}$

Démonstration. Soit I un idéal d'ordre ν de $\mathbb{C}\langle x, y \rangle$ de fonction d'Hilbert - Samuel $T = T(I) = (t_0, \dots, t_j, 0, \dots)$.

Deux cas sont à distinguer :

1) Il n'existe pas d'intersection complète I' telle que $T(I') = T$ (ou encore $U_\nu \cap Z_T = \emptyset$). Ceci équivaut à l'existence de $j \in \mathbb{N}$ tel que $t_j - t_{j+1} \geq 2$. Dans ce cas $z_I \in \bar{Z}_{\nu-1}$, d'après $[B_2]$, proposition II-3.1.

2) Pour tout j , $t_j - t_{j+1} \leq 1$.

Dans ce cas, on a $z_I \in \bar{U}_\nu$ et en fait une affirmation plus précise résulte de la preuve de la proposition II-3.3 de $[B_2]$:

Soit $\mathcal{F} \subset Z'_{\text{red}}$ l'ensemble des touffes, c'est-à-dire des intersections complètes de la forme :

$$\left[\prod_{i=1}^{\nu} \gamma_i(x, y), \prod_{i=1}^{\nu} \delta_i(x, y) \right],$$

les $\gamma_i^{-1}(0)$, $i=1, \dots, \nu$ (resp. $\delta_i^{-1}(0)$, $i=1, \dots, \nu$) étant des germes de courbes lisses à tangentes distinctes.

On note $\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F} \cap Z_\nu \subset U_\nu$, et on a $z_I \in \bar{\mathcal{F}}_\nu$ (donc $z_I \in \bar{Z}_{T(I)} \subset \bar{U}_\nu$).

En effet l'hypothèse $t_j - t_{j+1} \leq 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ équivaut à :

Michel GRANGER

$\alpha_{i+1} - \alpha_i > 2$ pour $i=1, \dots, \nu-1$ où $F(I) = \{(0, \nu), \dots, (\alpha_1, \nu-1), \dots, (\alpha_\nu, 0)\}$ est l'escalier générique de I , c'est-à-dire à la condition (C) de la proposition II-3.3 de [B₂]. Soit $f_i = x^{\alpha_i} g_i$, $i=0, \dots, \nu$, la base standard pour la direction canonique dans un système de coordonnées génériques.

D'après la preuve de cette proposition on peut trouver une déformation

$I_t = (F_0, \dots, F_\nu)$, $F_i = x^{\alpha_i} G_i$ de I telle que :

- Pour $t \neq 0$, I_t est une intersection complète précisément engendrée par (F_0, F_1) ([B₂] proposition II-2.2).
- Le cône tangent de $G_i^{-1}(0)$ est constitué par $\nu-i$ droites distinctes.

En particulier F_1 est d'ordre $\alpha_1 + \nu - i > \nu$, F_0 est d'ordre ν et $I_t = (F_0, F_1)$ est pour $t \neq 0$ une touffe d'ordre ν . ■

Remarques II-3 :

- a) Le lemme II-2 peut se préciser ainsi : Si $Z_{T(I)} \cap U_\nu \neq \emptyset$, $z_I \in \bar{\mathcal{J}}_\nu$. Cette forme sera utilisée au paragraphe III.
- b) Dans la déformation I_t ci-dessus, l'exposant privilégié de F_1 est constant, ce qui implique que l'escalier générique, ou ce qui revient au même, pour $r=2$, la fonction d'Hilbert-Samuel de I est constante. Ainsi on a montré que si $Z_T \cap U_\nu \neq \emptyset$, $\bar{Z}_T = \overline{Z_T \cap U_\nu} = \overline{Z_T \cap \mathcal{J}_\nu}$ ou que $Z_T \cap \mathcal{J}_\nu$ est dense dans Z_T .

B - Minoration de la dimension de E_p

On utilise le résultat suivant, d'après un théorème de Grothendieck ([Gr₂] SGA 2 théorème XIII.2.1) :

Théorème II-4. Soient (X, x) un germe d'espace analytique irréductible de dimension n et $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{X, x}$. Le sous-espace Y de X défini par les p équations $f_i = 0$, $i=1, \dots, p$, est connexe en dimension $> n-p-1$.

Dire que Y est connexe en dimension $> k$ signifie que si W est un sous-espace de Y et si $\dim W < k$, alors $Y-W$ est connexe. On appliquera le théorème 4.2 sous la forme suivante :

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Si Y_1 est une réunion de composantes irréductibles de Y , distincte de Y , et si $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_2 = \overline{Y - Y_1}$ étant la réunion des autres composantes on a $\dim Y_1 \cap Y_2 \geq n-p-1$.

L'énoncé de Grothendieck concerne en fait des spectres d'anneaux locaux complets. Pour en déduire une version analytique complexe remarquons d'abord que si (X, x) est irréductible, donc $\mathcal{O}_{X,x}$ intègre, le complété $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie $\mathcal{M}_{X,x}$ -adique est aussi intègre. C'est une conséquence facile d'un théorème de Artin (cf. [To] p.62, cor.4.4).

Ainsi, d'après [Gr₂, th.XIII.2.1], $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{Y,x} = \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{X,x} / (f_1, \dots, f_p) \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est connexe en dimension $\geq n-p-1$, et il en résulte a fortiori que $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,x}$ est connexe en dimension $\geq n-p-1$.

Il suffit d'appliquer les résultats suivants (cf [Ab], (17.5)) :

Si \mathcal{A} est un idéal de $\mathcal{O}_{Y,x} = R$, on a

$$\mathcal{A} \hat{\cap} R = \mathcal{A}, \quad R/\mathcal{A} = \hat{R}/\mathcal{A} \hat{R};$$

et de remarquer que si \mathcal{A} est premier $\mathcal{A} \hat{R}$ est aussi premier (d'après le fait que R/\mathcal{A} est intègre).

Remarquons enfin que la connexité de $Y-W$ pour la topologie de $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,x}$ entraîne la connexité pour la topologie usuelle ce qui serait faux avec des espaces analytiques réels.

On se propose d'utiliser d'autre part la proposition 0-4 pour donner une présentation de E_ν comme sous-espace de (\mathbb{C}^{2n}, o) , au voisinage d'un point $z = z_I$ de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ tel que $I = (f_0, f_1)$ soit une intersection complète d'ordre $\nu(I) = \nu' \geq \nu$: on peut supposer que $e_1 = 1$, que e_1, \dots, e_N sont les monômes de degré $\leq \nu-1$ de $\mathbb{C}\{x, y\}$, où $N = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, et que e_1, \dots, e_n sont des monômes.

On note $F_0 = f_0 - a_1 + \sum_{i=2}^n a_i e_i(x, y)$, $F_1 = f_1 - b_1 + \sum_{i=2}^n b_i e_i(x, y)$ où

où $(\underline{a}; \underline{b}) = (-a_1, a_2, \dots, a_n; -b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$.

$\underline{a}' = (a_2, \dots, a_n)$, $\underline{a}'' = (a_{N+1}, \dots, a_n)$, $\underline{b}' = (b_2, \dots, b_N)$, $\underline{b}'' = (b_{N+1}, \dots, b_n)$

$F_0'(x, y; \underline{a}'; \underline{a}'') = F_0(x, y, o; \underline{a}'; \underline{a}'')$

$F_1'(x, y; \underline{b}'; \underline{b}'') = F_1(x, y, o; \underline{b}'; \underline{b}'')$

$F_0''(x, y; \underline{a}'') = F_0'(x, y; o; \underline{a}'')$; $F_1''(x, y; \underline{b}'') = F_1'(x, y; o; \underline{b}'')$.

La projection $(x, y, -a_1; \underline{a}; -b_1; \underline{b}; \underline{b}'') \rightarrow (x, y, 0; \underline{b}; \underline{b}'' ; 0; \underline{a}; \underline{a}'')$ définit un isomorphisme $(\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n}, 0)$. Ceci permet de remplacer l'application $\pi : (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n}, 0)$ considérée dans la proposition 0.4 par :

$$(\mathbb{C}^{2n}, 0) \xrightarrow{\pi_1} (\mathbb{C}^{2n}, 0) ; \pi_1(x, y; \underline{a}; \underline{a}''; \underline{b}; \underline{b}'') = (F_0', F_1'; \underline{a}; \underline{a}''; \underline{b}; \underline{b}'')$$

Considérons la restriction de π_1 , notée π_ν , à l'ensemble $\underline{a}' = \underline{b}' = 0$:

$$\begin{aligned} \pi_\nu : (\mathbb{C}^{2+2(n-N)}, 0) = (S', 0) &\longrightarrow (S', 0) \\ \pi_\nu(x, y; \underline{a}''; \underline{b}'') &= (F_0''(x, y; \underline{a}''), F_1''(x, y; \underline{a}''); \underline{a}''; \underline{b}'') \end{aligned}$$

Soit $R^k(\pi_\nu)$ l'ensemble des $(x, y, \underline{a}'', \underline{b}'') = u \in S'$ tels que le degré local de π_ν en u soit $\geq k+1$. C'est un espace analytique tel que $0 \in R^k(\pi_\nu)$ pour $k=0, \dots, n-1$ et $0 \notin R^n(\pi_\nu)$, et appelé $k^{\text{ième}}$ ensemble de ramification de π_ν .

Lemme II-5. Les germes de E_ν et de $\pi_\nu (R^{n-1}(\pi_\nu) \cap \{0\} \times \mathbb{C}^{2(n-N)})$ en 0 sont isomorphes.

Démonstration. Pour que $(\underline{a}; \underline{b}) \in \mathbb{C}^{2n}$ corresponde à $z_I \in E_\nu$, il faut et

il suffit que l'idéal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ engendré par $\{F_i(x, y; \underline{a}; \underline{b}) \mid i=1, 2\}$ soit d'ordre $\nu' \geq \nu$, (i.e. $a_1 = b_1 = \underline{a}' = \underline{b}' = 0$), et de colongueur n , ce qui équivaut à $(0, 0, \underline{a}''; \underline{b}'') \in R^{n-1}(\pi_\nu)$.

Il résulte de la proposition 0.4 que le germe de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ en z_I s'identifie ensemblistement au germe de $\pi_1[R^{n-1}(\pi_1) \cap \{x=y=0\}]$ en 0

et $(E_\nu, z_I) = (\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}, z_I) \cap \{\underline{a}' = \underline{b}' = 0\} = [\pi_\nu(R^{n-1}(\pi_\nu) \cap \{x=y=0\}), 0]$, selon cette identification.

Proposition II-6. La dimension de $E_\nu = \bigcup_{\nu' > \nu} Z_{\nu'}$ en z_I , I intersection complète de $\mathbb{C}\{x, y\}$ est égale à $n-\nu$. Ainsi E_ν est de dimension pure $n-\nu$.

Démonstration. D'après le lemme précédent et le fait que π_ν est fini, il suffit de montrer que $\dim(R^{n-1}(\pi_\nu) \cap \{0\} \times \mathbb{C}^{2(n-N)}, 0) \geq n-\nu$. En effet on en déduit que $\dim(E_\nu, z_I) \geq n-\nu$ et la proposition II-6 en découle car l'inégalité opposée $\dim(E_\nu, z_I) \leq n-\nu$ résulte du théorème R.5 de l'introduction.

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

Remarquons que $\{o\} \times \mathbb{C}^{2(n-N)} = W_0 \subset R^{\nu^2-1}(\pi_\nu)$.

En effet la colongueur d'un idéal (g_0, g_1) intersection complète d'ordre $\nu(I) > \nu$ est égale à la multiplicité d'intersection des germes de courbes $g_0^{-1}(o)$ et $g_1^{-1}(o)$. Cette colongueur satisfait donc à : $\dim \mathbb{C}\{x,y\}/I \geq \nu^2$.

On se propose de démontrer par récurrence sur k l'affirmation suivante :

Si $0 \leq k \leq n - \nu^2$,	il existe $W_k \subset W_0$, W_k irréductible et contenant (o,o)
tel que :	<ul style="list-style-type: none"> • $\text{codim } W_k \leq 2+k$ (codimension dans S') • $W_k \subset R^{\nu^2-1+k}(\pi_\nu)$

Comme $\text{codim } W_0 = 2$, W_0 satisfait à ces hypothèses.

Supposons W_k construit pour k tel que $0 \leq k < n - \nu^2$, on se propose de trouver un tel $W_{k+1} \subset W_k$.

Considérons l'application $\pi_\nu \times \pi_\nu : W_k \times S' \longrightarrow S' \times S'$, $\Delta = \{(u,u), u \in S'\}$ la diagonale de S' et $W'_k = (\pi_\nu \times \pi_\nu)^{-1}(\Delta)$, enfin $\Delta_k = \{(u,u), u \in W_k\} \subset W'_k$ la diagonale de W_k .

Comme W'_k est défini dans $W_k \times S'$ par un nombre d'équations égal à $\dim S'$, W'_k est connexe en dimension $\geq (\dim W_k - 1)$, d'après le théorème de Grothendieck (théorème II-4), appliqué à $Y = W'_k \subset X = W_k \times S'$.

Distinguons deux cas :

Cas 1) Δ_k n'est pas une composante irréductible de W'_k .

Alors pour tout $u \in W_k$, $(u,u) \in W'_k - \Delta_k$. On a donc $u = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} u'_p$ où

(u_p, u'_p) est une suite de points de $W_k \times S'$ tels que $u_p \neq u'_p$ et $\pi_\nu(u_p) = \pi_\nu(u'_p)$.

Or le degré local satisfait la propriété suivante

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \epsilon > 0 \text{ tel que } u \text{ soit isolé dans} \\ \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu(u)) \cap B_\epsilon(u) \text{ où } B_\epsilon(u) = \{u' \in S', \|u' - u\| < \epsilon\}. \\ \text{Alors il existe } \eta > 0 \text{ tel que si } \|v - \pi_\nu(u)\| < \eta \\ \text{deg}_u(\pi_\nu) = \sum_{u' \in \pi_\nu^{-1}(v) \cap B_\epsilon(u)} \text{deg}_{u'}(\pi_\nu) \end{array} \right.$

Il en résulte que $\text{deg}_u(\pi_\nu) \geq \text{deg}_u(\pi_\nu) + \text{deg}_{u_p}(\pi_\nu) \geq \nu^2 + k + 1$ pour p assez grand,

donc $u \in R^{\nu^2+k}(\pi_\nu)$

Donc $W_k \subset R^{\nu^2+k}(\pi_\nu)$ et on peut prendre $W_{k+1} = W_k$.

Cas 2) Δ_k est une composante irréductible de W'_k .

a) Si $W_k \subset R^{\nu^2+k}(\pi_\nu)$ on conclut comme précédemment.

b) Si $W_k \not\subset R^{\nu^2+k}(\pi_\nu)$, W'_k n'est pas irréductible.

En effet il existe alors une suite u_p dans W_k telle que $\lim u_p = o$ et $\deg_{u_p}(\pi_\nu) = \nu^2+k < n$.

D'après la propriété (*) et le fait que $\deg_o(\pi_\nu) = n$ il existe donc

$u'_p \in S'$, tel que $u_p \neq u'_p$, $\pi_\nu(u_p) = \pi_\nu(u'_p)$ c'est-à-dire $(u_p, u'_p) \in W'_k - \Delta_k$, et $\lim u'_p = o$.

Donc $(o, o) \in \overline{W'_k - \Delta_k}$.

Il reste à remarquer que si $(u, u) \in \Delta_k \cap \overline{W'_k - \Delta_k}$ on a $u \in R^{\nu^2+k}(\pi_\nu)$ par le même raisonnement que dans le premier cas. Soit \tilde{W}_{k+1} une composante irréductible de $\Delta_k \cap \overline{W'_k - \Delta_k}$ de dimension $\geq \dim W_k - 1$, dont l'existence est assurée par la connexité de W'_k en dimension $\geq \dim W_k - 1$. Soit $W_{k+1} \subset W_k$ isomorphe à \tilde{W}_{k+1} défini par $\tilde{W}_{k+1} = \{(u, u), u \in W_{k+1}\}$; W_{k+1} satisfait à l'hypothèse de récurrence car :

$$\text{codim}_S W_{k+1} \leq \dim S' - (\dim W_k - 1) = \text{codim } W_k + 1 \leq 2+k+1.$$

En appliquant ce résultat pour $k = n - \nu^2$, on obtient $W = W_{n-\nu^2} \subset R^{n-1}(\pi_\nu) \cap W_o \cong E_\nu$, tel que $\text{codim } W \leq n - \nu^2 + 2$, donc :

$$\dim W \geq \dim S' - n + \nu^2 - 2 = 2(n - \frac{\nu(\nu+1)}{2}) - n + \nu^2 = n - \nu, \text{ ce qui termine la démonstration de la proposition II-6.} \quad \blacksquare$$

C -

Démonstration du théorème II-1

D'après le lemme II-2 il reste à montrer que si $z = z_I \in U_\nu$ on a $z \in \overline{Z_{\nu-1}}$ pour tout $\nu \geq 2$.

D'après la proposition II-6, $\dim(E_\nu, z) = n - \nu$ et $\dim(E_{\nu-1}, z) = n - \nu + 1$, donc : $z \in \overline{E_{\nu-1} - E_\nu} = \overline{Z_{\nu-1}}$. ■

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

III - LE LIEU SINGULIER DE $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}}$

Dans ce paragraphe on se propose de démontrer le résultat suivant, version améliorée (cf. remarque I-6) de la proposition I-2, dans le cas $r=2$:

Théorème III-1. Le lieu singulier de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}}$ est égal à l'ensemble $\bar{Z}_2 = E_2$ paramétrant les idéaux de $\mathbb{C}\{x,y\}$ d'ordre au moins 2.

L'égalité $\bar{Z}_2 = E_2$ résulte du paragraphe II et le lieu singulier de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{\text{red}}$ (noté Z'_{red} par la suite) est fermé dans Z'_{red} . Il suffit donc de démontrer qu'il contient une partie dense Z'_2 de Z_2 , ce qui est l'objet de deux propositions qui suivent.

Proposition III-2. Soit $Z'_2 \subset Z'_{\text{red}}$ paramétrant l'ensemble des idéaux de $\mathbb{C}\{x,y\}$ de colongueur n d'ordre 2 qui sont isomorphes à l'un des idéaux $I_{p,q} = (x^p + y^q, xy)$ où $p \geq q \geq 2$, $p+q=n$ dans le cas $n \geq 4$. Pour $n=3$, on note $Z'_2 = Z_2 = \{\mathcal{M}^2\}$. Alors Z'_2 est dense dans Z_2 .

Démonstration. Remarquons que si $n \geq 4$, $Z'_2 = \mathcal{G}_2$ est l'ensemble des touffes d'ordre 2. Soit I un idéal d'ordre 2. Il s'agit de montrer que $z_1 \in \bar{Z}_2$. Soit $F(I) = \{(0,2), (\alpha_1, 1), (\alpha_2, 0)\}$ l'escalier générique de I , et soit $f_0, f_1 = x^{\alpha_1} g_1, f_2 = x^{\alpha_2}$, la base standard pour la direction canonique dans un système de coordonnées génériques.

- Si $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 2$, on est dans le deuxième cas de la preuve du lemme II-2, donc I peut être déformé sur une touffe d'ordre 2, d'après cette preuve.
- Si $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$, on a nécessairement :

$$I = (f_0, f_1 = x^{\alpha_1} y, x^{\alpha_1+1}) = (f_0) + \mathcal{M}^{\alpha_1+1}.$$

On peut supposer, après un changement de coordonnées que f_0 est sans terme en x^2 :

$$f_0(x,y) = y^2 + a xy + g_0(x,y), \quad a \in \mathbb{C}, \quad g_0 \in \mathcal{M}^3$$

L'idéal I peut être déformé de la façon suivante :

$$F_0 = f_0, \quad F_1 = f_1, \quad F_2 = x^{\alpha_1+1} + t x^{\alpha_1-1} y.$$

Michel GRANGER

Pour $t \neq 0$, on a
$$I_t = (f_0, x^{\alpha_1} y, x^{\alpha_1+1} + t x^{\alpha_1-1} y) \\ = (f_0, t x^{\alpha_1-1} y + x^{\alpha_1+1}, x^{\alpha_1+2})$$

On peut vérifier facilement que pour $t \neq 0$, I_t est encore de colongueur $n = 2\alpha_1 + 1$ (donc la déformation est plate), d'escalier générique :

$$\{(0, 2), (\alpha_1 - 1, 1), (\alpha_1 + 2, 0)\},$$

ce qui montre d'après le premier cas que $I_t \in \overline{\mathcal{F}}_2$ donc aussi $I \in \overline{\mathcal{F}}_2$. ■

Proposition III-3. Pour tout idéal $I \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ du type $I_{p,q}$ où $p \geq q \geq 2$, ou égal à \mathcal{M}^2 , Z'_{red} est singulier en $z = z_1$.

Démonstration. Considérons le cas $I = I_{p,q}$.

L'application π de la proposition 0.4 s'écrit (sous la forme utilisée dans II-B) :

$$\pi_1 : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}, \quad \pi_1(x, y; \underline{a}; \underline{b}; \underline{a}'; \underline{b}') = (F_0, F_1; \underline{a}; \underline{b}; \underline{a}'; \underline{b}')$$

avec
$$F_0 = x^p + y^q + \sum_{i=1}^p a_i x^i + \sum_{j=1}^{q-1} b_j y^j \\ F_1 = xy + \sum_{i=1}^p a'_i x^i + \sum_{j=1}^{q-1} b'_j y^j$$

La strate de Hilbert-Samuel $Z_{T(I)}$ de z s'identifie au voisinage de z à un germe de sous-variété en 0, de dimension $n-2$ (cf. Intr. th. R-5), de $S_1 = \{0\} \times \mathbb{C}^{2n-2}$ paramétré par le système de coordonnées $(0, 0, \underline{a}, \underline{b}, \underline{a}', \underline{b}')$, et $(Z'_{red}, 0)$ est aussi un germe de sous-espace analytique, de $(S_1, 0)$ de dimension $n-1$.

On peut matérialiser $n-2$ vecteurs tangents à $Z_{T(I)}$, indépendants, par les déformations suivantes, contenues dans $Z_{T(I)}$:

- $(x^p + y^q - \epsilon_i (-a'_i x^{i-1})^q, xy + a'_i x^i) \quad 2 \leq i \leq p$
avec $\epsilon_i = 1$ si $q(i-1) < p$, $\epsilon_i = 0$ sinon.
- $(x^p + y^q, xy + b'_j y^j) \quad 2 \leq j \leq q-1$.
- $(x^p + y^q + a_p x^p, xy)$.

On en déduit que l'application $G : (\mathbb{C}^{2n+2}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{2n+2}, 0)$

définie par : $G = (G_0, G_1, a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{q-1}, a'_1, b'_1)$
où : $G_0 = x^p + y^q + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + b_1 y + \dots + b_{q-1} y^{q-1}$
 $G_1 = xy + a'_1 x + b'_1 y$

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

est une déformation de I transverse à $Z_{T(I)}$; c'est-à-dire que $i(\mathbb{C}^n)$ où $i : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{2n-2} = S_1$ est le plongement $i(a_1, \dots, b_1) = (a_1, \dots, a_{p-1}, 0, b_1, a_1', 0, b_1', 0)$ est transverse à $Z_{T(I)}$.

Pour démontrer la proposition III-3 dans le cas où $I = I_{p,q}$ il suffit donc de montrer que $(Z'', z) = (Z'_{\text{red}}, z) \cap (i(\mathbb{C}^n), 0)$ n'est pas un germe de courbe lisse, car la dimension de Z'_{red} est $1 + \dim Z_{T(I)}$.

Dans ce qui suit on identifie le germe de Z'' en z_I à un germe en 0 de sous-espace de \mathbb{C}^n (par i^{-1}). L'application G est quasi homogène les poids des variables étant : $\bar{\omega}(a_i) = (p-i)q$, $\bar{\omega}(b_j) = (q-j)p$, $\bar{\omega}(a_i') = p$, $\bar{\omega}(b_j') = q$, et G_0, G_1 sont de poids respectifs pq et $p+q$.

D'autre part si $(a_1, \dots, b_1') \in \mathbb{C}^n$ représente un point de $Z'' - \{0\}$, on a $a_i' \neq 0$ et $b_j' \neq 0$. En effet la colongueur n' de l'idéal $(G_0, G_1)_{(a_1, \dots, b_1')}$ de $\mathbb{C}\langle x, y \rangle$ est la multiplicité d'intersection en 0, notée $G_0 \cdot G_1$ des germes de courbes $G_0^{-1}(0), G_1^{-1}(0)$ donc :

- 1) Si $a_i' = b_j' = 0$
 $n' = G_0 \cdot x y = \inf\{i, a_i' \neq 0\} + \inf\{j, b_j' \neq 0\}$
 et $n' < p+q = n$ dès que $(a_1, \dots, b_1') \neq 0$

- 2) Si $a_i' \neq 0, b_j' = 0$ (resp $a_i' = 0, b_j' \neq 0$)
 $n' = G_0 \cdot x \leq q < n$ (resp $n' \leq p < n$)

Remarquons que $\dim(Z'', z_I) \geq 1$. Soit $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{b}_1')$ un point de $Z'' - \{0\}$. Comme G est quasi homogène Z'' l'est aussi et contient donc la branche irréductible paramétrée : $\Gamma : (a_1(t), \dots, b_1'(t)) = t \cdot (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{b}_1') = (\tilde{a}_1 t^{(p-1)q}, \dots, \tilde{a}_{p-1} t^q, \tilde{b}_1 t^{(q-1)p}, \dots, \tilde{b}_{q-1} t^p, \tilde{a}_1' t^p, \tilde{b}_1' t^q)$

où $t \cdot (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{b}_1')$ est l'action de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^n provenant de la quasi homogénéité. On en déduit que Z'' contient un germe de courbe singulière de la façon suivante :

- 1) Si $d = \text{pgcd}(p, q) < q$ ($\leq p$), Γ est singulière paramétrée par $u = t^d$.

- 2) Sinon il existe $\lambda \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $p = \lambda q$.
 Soit ξ une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité et $(G_{0,\xi}, G_{1,\xi})$ la déformation de I :

$$G_{0,\xi} = G_0(x, \xi^{-1}y) = x^p + y^q + \sum_{i=1}^{p-1} a_i x^i + \sum_{j=1}^{q-1} b_j \xi^{-j} y^j$$

$$G_{1,\xi} = \xi G_1(x, \xi^{-1}y) = x y + a_1' \xi x + b_1' y.$$

Michel GRANGER

Soit $\varphi_\xi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme

$$\varphi_\xi(a_1, \dots, b'_1) = (\underline{a}, \xi^{-1} b_1, \dots, \xi^{-(q-1)} b_{q-1}, \xi a'_1, b'_1)$$

Comme $G_{i,\xi}(x,y,a_1, \dots, b'_1)$ et $G_i(x, \xi^{-1}y, \varphi_\xi(a_1, \dots, b'_1))$ sont proportionnels, pour $i=1,2$, les idéaux de $\mathbb{C}\{x,y\}$ ($G_{0,\xi}(x,y,u)$, $G_{1,\xi}(x,y,u)$) et ($G_0(x,y,\varphi_\xi(u))$, $G_1(x,y,\varphi_\xi(u))$) sont isomorphes pour tout $u \in \mathbb{C}^n$. On en déduit que Z'' est invariant par le groupe $\{\varphi_\xi, \xi^p=1\}$. Les deux dernières coordonnées de la paramétrisation de $\varphi_\xi(\Gamma)$, $a'_1 = \xi \tilde{a}'_1 t^p$, $b'_1 = \tilde{b}'_1 t^q$ sont non nulles et satisfont à $a'_1/b'_1 = \xi \tilde{a}'_1/\tilde{b}'_1$. Ceci montre que les branches lisses $\varphi_\xi(\Gamma)$ sont deux à deux distinctes et que Z'' contient la courbe singulière $\bigcup_{\xi^p=1} \varphi_\xi(\Gamma)$.

Il reste à traiter le cas de $I = \mathcal{M}^2$, lorsque $n=3$.

Les déformations suivantes de I :

$$I_t^{(1)} = (x^2 + ty, xy, y^2) \quad \text{et} \quad I_t^{(2)} = (x^2, xy, y^2 + tx)$$

sont plates et définissent donc deux vecteurs v et w du cône tangent noté $C_z(Z'_{\text{red}})$ de Z'_{red} en $z = z_{\mathcal{M}^2}$.

Si Z'_{red} était lisse en z , on aurait $C_z(Z'_{\text{red}}) = T_z(Z'_{\text{red}})$ et $v+w$ serait aussi un vecteur du cône tangent $C_z(Z'_{\text{red}})$. Ceci est impossible car il existerait alors une déformation de \mathcal{M}^2 de la forme :

$$I_t = (x^2 + ty + t^2 h_1, xy + t^2 h_2, y^2 + tx + t^2 h_3)$$

avec $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{M}_{x,y} \mathbb{C}\{x,y,t\}$, à colongueur constante, alors que pour tout t assez petit un tel idéal I_t est égal à \mathcal{M} . Ceci termine la démonstration de la proposition III-3. ■

Un calcul plus détaillé aboutit en fait au résultat suivant :

Proposition III.4. Au voisinage de $I_{p,q}$, $Z' = \text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$ est isomorphe au produit $Z_T \times C_{p,q}$ où $C_{p,q}$ est le germe de courbe d'équation $x^p + y^q = 0$.

Comme tous les idéaux de l'ouvert dense $\mathcal{I}_2 \cap Z_T$ de Z_T sont isomorphes entre eux, et à $I_{p,q}$, le type analytique du germe (Z', z_I) est constant lorsque z_I parcourt $\mathcal{I}_2 \cap Z_T$ (i.e. $I \approx I_{p,q}$). Ceci implique que Z' est localement analytiquement trivial le long de Z_T (c'est-à-dire : $(Z', z_I) \cong (Z_T \times Z'', z_I \times z_I)$) d'après le :

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Lemme III-5. Soit W un espace analytique complexe, Y un sous-espace lisse de W tel que pour Y_1, Y_2 quelconques dans Y les germes $(W, Y_1), (W, Y_2)$ soient isomorphes. Alors W est localement analytiquement trivial le long de Y .

Ce lemme est une conséquence d'un résultat analogue (cf. [Te] théorème 2-1) où on suppose que le type analytique $(r^{-1}(y), y)$ des fibres d'une projection $r : W \rightarrow Y$ (définie localement) est constant. Il suffit d'appliquer ce résultat à $W \times Y$ pour obtenir la trivialité analytique de $W \times Y$ le long de la diagonale de Y . Le lemme III-5 s'en déduit finalement.

Il reste à montrer que Z'' est isomorphe à $C_{p,q}$:

Calculons le résultant $R(x)$ de G_0 et G_1 considérés comme des polynômes en y . On trouve :

$$R = (-a_1' x)^q + b_{q-1} (-a_1' x)^{q-1} (b_1' + x) + \dots + b_1 (-a_1' x) (b_1' + x)^{q-1} + (x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x) (b_1' + x)^q$$

La condition $v_x(R) = p+q = n$ équivaut à $(n-1)$ équations algébriques qui déterminent un germe $(\tilde{S}, 0)$ de sous-espace de \mathbb{C}^n en 0 de dimension ≥ 1 .

Si $\tilde{u} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{b}_1) \in \tilde{S}$, on a par définition du résultant pour \tilde{u}, x, y assez petits

$$G_0(x, y, \tilde{u}) = G_1(x, y, \tilde{u}) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Il en résulte que si $\tilde{b}_1' \neq 0$, et $\tilde{u} \in \tilde{S}$

$$G_i(x, y, \tilde{u}) = 0 (i=1, 2) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Ainsi on a : $\tilde{S} \cap \{b_1' \neq 0\} = Z'' \cap \{b_1' \neq 0\}$
 $= Z'' - \{0\}$

cette dernière inégalité résultant de la preuve de la proposition III-3.

Pour obtenir les équations de $Z'' = \overline{\tilde{S} \cap \{b_1' \neq 0\}}$ il suffit donc de calculer celles de \tilde{S} en simplifiant autant qu'il est possible par b_1' . On trouve des équations du type suivant :

$$a_i = \lambda_i b_1'^{p-i} \quad i = 1, \dots, p-1$$

$$b_j = \mu_j a_1'^{q-j} \quad j = 1, \dots, q-1$$

$$a_1'^q + \beta b_1'^p = 0$$

Il est nécessaire que $\beta \neq 0$, car d'après la preuve de la proposition III.3 tout point (a_1, \dots, b_1) de $Z'' - \{0\}$ satisfait à : $a_1' \neq 0$ et $b_1' \neq 0$.

Il est clair qu'on obtient ainsi une courbe isomorphe à la courbe plane d'équation $a_1'^q + \beta b_1'^p = 0$, donc aussi à $C_{p,q}$. ■

Michel GRANGER

On peut remarquer que ce calcul fournit des exemples de points z_I en lesquels le germe de Z'_{red} est réductible.

IV - QUELQUES EXEMPLES EXPLICITES DE DEFORMATIONS DU TYPE $Z_\nu \subset \overline{Z}_{\nu-1}$

L'objet de ce paragraphe est de donner dans quelques cas particuliers une réponse au problème suivant :

Problème IV-1.

Trouver une méthode permettant de déterminer explicitement pour un idéal I d'ordre ν de $\mathbb{C}\{x,y\}$ une déformation I_t telle que pour $t \neq 0$, I_t soit d'ordre $\nu-1$ et de colongueur n (en abrégé une déformation dans $Z_{\nu-1}$).

L'existence d'une telle déformation est assurée par les résultats du § II.

On peut montrer par une méthode calquée sur $[B_2]_{ch.V}$ que $\bigcup_{\nu \geq 2} Z_\nu \subset \overline{Z}_2 \cup \overline{Z}_3 = \overline{Z}_2 \cup \overline{\mathcal{J}}_3$

(cf. lemme 4.1 remarque 1). Pour obtenir une démonstration de la relation $E_2 = \overline{Z}_2$ (donc du théorème III-1) différente de celle du § II il suffirait de donner une solution au problème plus particulier suivant :

Problème IV-2.

Déterminer pour tout $I \in \mathcal{J}_3$ (touffes d'ordre 3) une déformation dans Z_2 .

Dans ce qui suit on donne une réponse à ce problème, dans un grand nombre de cas. La déformation de I est donnée, après avoir choisi par des opérations explicites une forme standard pour des générateurs de I , dans un système de coordonnées convenable. De façon plus précise, on sera fréquemment amené à utiliser le lemme technique suivant :

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Lemme IV-3. Soit $I = (f_0, f_1)$ un idéal de définition, intersection complète, de colongueur n , de $\mathbb{C}(x, y)$ et g un élément de $\mathbb{C}(x, y)$ tel que f_1 divise une puissance g^k de g . Alors la déformation $I_t = (f_0 + tg, f_1)$ est dans Z' (c'est-à-dire pour $t \neq 0$ I_t reste de colongueur n).

En effet si $f_1 = u_1^{\alpha_1} \dots u_r^{\alpha_r}$, on a $g = u_1^{\beta_1} \dots u_r^{\beta_r}$ avec $\beta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, r$ et la colongueur de I_t est $n(I_t) = (f_0 + tg) \cdot f_1$ (multiplicité d'intersection)

$$= \sum_{i=1}^r \alpha_i [(f_0 + tg) \cdot u_i] = \sum_{i=1}^r \alpha_i (f_0 \cdot u_i) = n \quad \blacksquare$$

Pour obtenir une déformation de I dans $Z_{\nu-1}$ il suffit donc de trouver une présentation de I et g d'ordre $\nu-1$ satisfaisant aux hypothèses de ce lemme.

Soit $I \in \mathcal{F}_3$. On a $I = (f_0, f_1)$, $f_0 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, $f_1 = \delta_1 \delta_2 \delta_3$, $C_i = \gamma_i^{-1}(0)$ (resp. $D_i = \delta_i^{-1}(0)$) étant les branches (lisses) de $C = f_0^{-1}(0)$ (resp. $D = f_1^{-1}(0)$).

Les seules paires de branches tangentes peuvent être choisies comme étant : $\{(C_i, D_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$, où $k = 0, 1, 2$ ou 3 est le nombre de tangentes communes à C et D (k ne dépend que de I).

IV-4. Solution du problème IV-2 pour $k = 0, 1$ ou 2

Soit $V = \{f = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dy^3\}$, l'espace des formes homogènes de degré 3. Si $f \in V - \{0\}$, notons $[f]$ son image dans $P^3(V) = \text{Hilb}^3 P^1(\mathbb{C})$, espace des "triplets" de $P^1(\mathbb{C})$.

Soit $S \subset P^3(V)$ l'ensemble des $[f]$ dégénérés ($f^{-1}(0)$ contient une droite double). C'est une hypersurface de degré 4 de $P^3(V)$.

Soient $\text{in } f_0, \text{in } f_1 \in V$ les formes initiales de f_0 et f_1 . Dès que $k \neq 3$ c'est-à-dire $[\text{in } f_0] \neq [\text{in } f_1]$, on considère la droite projective :

$$\Delta = \{[\lambda \text{in } f_0 + \mu \text{in } f_1] ; (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}$$

Soit $g = \tilde{\lambda} f_0 + \tilde{\mu} f_1$ tel que : $[\text{in } g] = [\tilde{\lambda} \text{in } f_0 + \tilde{\mu} \text{in } f_1] \in \Delta \cap S$.

Comme $[\text{in } f_0], [\text{in } f_1] \notin S$, $g \neq f_0$, $g \neq f_1$ donc I est engendrée par f_0 et g . Choisissons un système de coordonnées tel que $\text{in } g = x^2y$ (resp. x^3).

Michel GRANGER

IV-4 a) Etude du cas où $k=0$ ou $k=1$

Montrons qu'il existe un système de coordonnées (x,y) et un système de générateurs (f_0, g) de l'idéal I tel que $ing = x^2 y$ (ou x^3) et que f_0 soit de la forme suivante.

$$(1) \quad f_0 = y^3 + a_1(x) y^2 + a_2(x) y + a_3(x) \quad , \quad \text{où } v_x(a_i) \geq i$$

Si la droite $x=0$ est transverse à la courbe $C = f_0^{-1}(0)$, le système de coordonnées précédemment choisi convient. Il en est ainsi dès que $k=0$.

Sinon, $k=1$ et x divise inf_0 :

$$inf_0 = x(a y^2 + b x y + c x^2) \quad a \neq 0$$

On a alors :

$$inf_0 + \lambda g = x(a y^2 + (b+\lambda) x y + c x^2) \\ (\text{resp.} = x(a y^2 + b x y + (c+\lambda) x^2))$$

d'où l'existence de $\tilde{\lambda}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que :

$$inf_0 + \tilde{\lambda} g = a x(y + \alpha x)^2$$

Soit $g' = f_0 + \tilde{\lambda} g$: $[ing'] \in \Delta \cap S$. Il suffit de faire le changement de coordonnées $y' = x$, $x' = y + \alpha x$ et de remplacer g par g' pour être ramené au premier cas, car $y + \alpha x$ ne peut pas diviser inf_0 . (Si $y + \alpha x$ divise inf_0 , la droite $y + \alpha x = 0$ est une deuxième tangente commune contrairement à l'hypothèse $k < 1$).

Soit $h \in \mathcal{M}^4$ tel que $g = ing + h$, et h_1 le reste de la division de h par f_0 :

$$h_1 = b_2(x) y^2 + b_3(x) y + b_4(x) \in \mathcal{M}^4$$

On a $v(b_i) \geq i$, donc x^2 divise h_1 .

On en déduit que $I = (f_0, g_1)$, où $g_1 = ing + h_1$ est divisible x^2 , précisément $g_1 = x^2 \ell(x,y)$, $\ell(x,y)$ d'ordre un.

La construction d'une déformation de I dans Z_2 est alors immédiate d'après le lemme IV-3 :

$$F_0(x,y,t) = f_0(x,y) + t x \ell(x,y) \\ G_1(x,y,t) = g_1(x,y) = x^2 \ell(x,y)$$

IV-4-b b) Etude du cas où $k=2$

On peut supposer que xy divise inf_0 et inf_1 :

$$inf_0 = xy(y+ax) \\ inf_1 = xy(y+bx) \quad a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$$

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

Dans ce cas $\Delta \cap S = \{[in g_0], [in g_1]\}$ où :

$$g_0 = \frac{b f_0 - a f_1}{b - a}, \quad g_1 = \frac{f_0 - f_1}{a - b} \quad \text{et}$$

$$I = (g_0, g_1), \quad in g_0 = x y^2, \quad in g_1 = x^2 y.$$

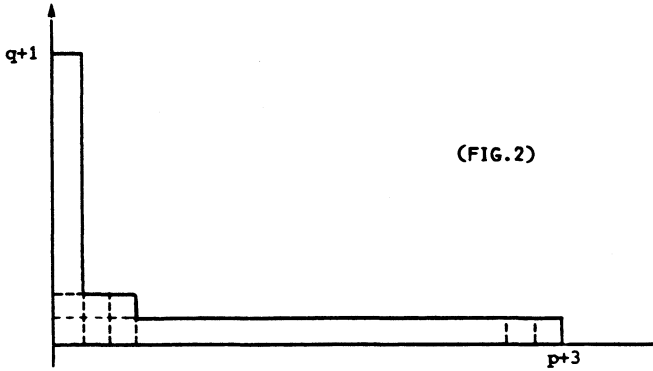
Il existe un système de coordonnées (x, y) tel que x (resp. y) divise g_0 (resp. g_1), ce qui permet en appliquant le théorème de préparation aux quotients respectifs de g_0 et g_1 par x et y , de supposer que I admet des générateurs de la forme suivante :

$$g_0 = x(y^2 + a_1(x)y + a_2(x))$$

$$g_1 = y(x^2 + b_1(y)x + b_2(y))$$

avec $v_x(a_1) \geq 2$, $v_y(b_1) \geq 2$, et $v_x(a_2) = p \geq 3$, $v_y(b_2) = q \geq 3$.

L'escalier de I pour la direction verticale est le suivant :



car $\exp_v(g_1) = (0, q+1)$, $\exp_v(g_0) = (1, 2)$, $\exp_v(g_2) = (3, 1)$

où $g_2 = x g_1 - \frac{b_2(y) + x b_1(y)}{y} g_0$ et $n = p+q+5$.

Le reste de la division de $x b_1(y) + b_2(y)$ par I est de la forme :

$$\lambda y^q + c x^2 y + a_3(x), \quad v_x(a_3) \geq 3, \quad \lambda \neq 0$$

et en utilisant le changement de coordonnées :

$$x' = x(1 + c y + a_3(x)/x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y' = y,$$

on se ramène à $g_1 = y(x^2 + \lambda y^q)$.

Le reste de la division de $x a_1(x)y$ par I est de la forme $a_4(x)$, $v_x(a_4) \geq p+1$

car $I = [x(y^2 + a_2(x) + a_4(x)/x), g_1]$ est de colongueur $p+q+5$. Après division par $x^{p+3} \in I$ on est ramené à $I = [x(y^2 + \mu x^p + \nu x^{p+1}), y(x^2 + \lambda y^q)]$,

avec $\mu \neq 0$, puis à $\lambda=1$ par une transformation du type $x = \lambda^{\frac{1}{2}} x'$, $y = y'$ et enfin $\mu=1$ par $x = \mu^{q/(4-pq)} x'$, $y = \mu^{2/(4-pq)} y'$.

Michel GRANGER

Ainsi on suppose : $g_0 = x(y^2 + x^p + \nu x^{p+1})$

$$g_1 = y(x^2 + y^q)$$

1er Cas : q est pair (ou de même p est pair)

$$q = 2\beta \quad \beta \geq 2$$

On a $g_1 = y(x+y^\beta)^2 - 2xy^{\beta+1}$ et grâce aux formules :

$$xy^2 \equiv -ux^{p+1} \pmod{I}, \text{ avec } u = 1 + \nu x$$

$$x^2y \equiv -y^{q+1} \pmod{I}$$

on vérifie que $xy^{\beta+1} \in I$:

$$\begin{aligned} xy^{\beta+1} &\equiv -ux^{p+1}y^{\beta-1} \equiv ux^{p-1}y^{\beta+q-1} \\ &\equiv -u^2x^{2p-1}y^{\beta+q-3} \equiv u^3x^{3p-1}y^{\beta-2+q-3} \equiv 0 \pmod{I} \end{aligned}$$

car $x^{p+3} \in I$ et $p \geq 3$, donc $3p-1 \geq p+5$.

L'idéal I est donc engendré par g_0 et $g_1' = y(x+y^\beta)^2$ et peut être déformé dans Z_2 :

$$G_0 = g_0 + ty(x+y^\beta)$$

$$G_1' = g_1' = y(x+y^\beta)^2 \quad (\text{cf. lemme IV-3}).$$

2ème Cas : p et q impairs $p = 2\alpha - 1$, $q = 2\beta - 1$

Dans ce cas la déformation suivante convient :

$$\begin{aligned} G_0 = xy^2 + x^{2\alpha} + \nu x^{2\alpha+1} + t^{(\alpha-1)(2\beta-1)}x^{\alpha+1} + \dots + t^{(\alpha-j)(2\beta-1)}x^{\alpha+j} + \\ \dots + t^{2\beta-1}x^{2\alpha-1} - t^2xy + ty^{\beta+1} \end{aligned}$$

$$G_1' = x^2y + y^{2\beta} + t^{2(\beta-1)}y^{\beta+1} + \dots + t^{2(\beta-j)}y^{\beta+j} + \dots + t^2y^{2\beta-1} - t^{2\beta-1}xy + t^{\alpha(2\beta-1)-2}x^{\alpha+1}.$$

C'est le premier cas où je n'ai pu réduire I à la forme $(f_0, u^k v^l)$, u, v d'ordre un permettant une déformation évidente dans Z_2 , $(f_0 + tuv, u^k v^l)$, en appliquant le lemme IV-3.

Pour vérifier (et auparavant trouver...) le fait que la colongueur de l'idéal I_t engendré par G_0 et G_1' est constante égale à $n = 2\alpha + 2\beta + 3$, on calcule un développement $y = \gamma_1(x)$, $x = \gamma_2(y)$ (resp. $y = \delta_1(x)$, $x = \delta_2(y)$) des équations de chacune des branches lisses de $G_0^{-1}(o)$ (resp. $G_1'^{-1}(o)$) pour $t \neq 0$.

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

On trouve :

$$\gamma_1 \equiv \delta_1 \equiv t^{(\alpha-1)(2\beta-1)-2} x^\alpha + \dots + t^{(\alpha-j-1)(2\beta-1)-2} x^{\alpha+j} + \dots + t^{2\beta-3} x^{2\alpha-2} + \frac{1}{t^2} x^{2\alpha-1} \pmod{x^{2\alpha}}$$

$$\gamma_2 \equiv \delta_2 \equiv \frac{y^\beta}{t} + \dots + \frac{y^{\beta+j}}{t^{2j+1}} + \dots + \frac{y^{2\beta}}{t^{2\beta+1}} \pmod{y^{2\beta+1}}.$$

D'où $G_0 \cdot G_1 = \gamma_1 \cdot \delta_1 + \gamma_1 \cdot \delta_2 + \gamma_2 \cdot \delta_1 + \gamma_2 \cdot \delta_2 \geq 2\alpha + 1 + 1 + (2\beta + 1) = n$ et finalement $G_0 \cdot G_1 = n$ (semi-continuité de la colongueur de I_t).

IV-5. Remarques sur le cas $k=3$

Un calcul "expérimental" du type précédent semble peu accessible en général pour $k=3$. Cependant dans de nombreux cas la forme de l'idéal permet de trouver une déformation.

On peut supposer $f_0 = xy(y-x)$. On se ramène d'abord à $\text{in } f_0 = xy(y-x)$ par un changement de coordonnées linéaires et on utilise le fait que c'est un jet d'ordre de détermination 3. Puis en divisant $f_0 - f_1 \in \mathcal{M}^4$ par f_0 :

$$I = (f_0, g_1), \quad g_1 = y^q + a_1(x)y + a_2(x), \quad v_x(a_i) \geq i+2.$$

Soient $p = y \cdot f_1$, $q = x \cdot f_1$, $r = (y-x) \cdot f_1$. On a $n = p+q+r$. Supposons $r \leq \inf(p, q)$ quitte à permuter le rôle des branches.

La donnée à l'ordre près du triplet (p, q, r) équivaut à la donnée de $T(I)$ (cf. partie 2, lemme VII.4)

1er Cas : $r = q \leq p$ (ou $r = p \leq q$).

Considérons la forme initiale de g_1 : $\text{in } g_1 = y^q + \alpha x^{q-1} y + \beta x^q$, $1 + \alpha + \beta \neq 0$.

On montre facilement que l'équation :

$$\text{in } g_1 \equiv (y + \lambda x)^{q-1} (y + \mu x) \pmod{f_0}$$

admet une solution (λ, μ) dans \mathbb{C} avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -1$ (d'après $1 + \alpha + \beta \neq 0$, qui résulte du fait que $r = v_x g_1(x, x) = q$).

Considérons le changement de coordonnées :

$$x' = y + \lambda x, \quad y' = y.$$

Comme $y + \lambda x$ ne divise pas f_0 , f_0 est un polynôme distingué de degré 3 en y' et après division par f_0 on peut remplacer g_1 par :

$g_1' = x^{q-1} \ell(x', y') + h$, $h \in \mathcal{M}^{q+1}$, ℓ forme linéaire et h polynôme de degré 2 en y' .

Ceci implique que x^{q-1} divise h , d'où :

$$g_1' = x^{q-1}(\ell + h_1) \quad h_1 \in \mathcal{M}^2, \text{ et la déformation de } I \text{ dans } Z_2 :$$

$$F_0 = f_0 + t x' (\ell + h_1), \quad G_1' = g_1' \quad (\text{cf. lemme IV-3}).$$

2ème Cas : $r < \inf(p, q)$, $v(a_1) = r - 1$, $v(a_2) = p$.

On peut réduire g_1 à la forme suivante :

$$g_1(x, y) = y^q + x^{r-1} y + \lambda x^p + \mu x^{p+1}, \quad \lambda \in \mathfrak{e}^*, \quad \mu \in \mathfrak{e}$$

en utilisant l'escalier vertical de I (Fig.3)

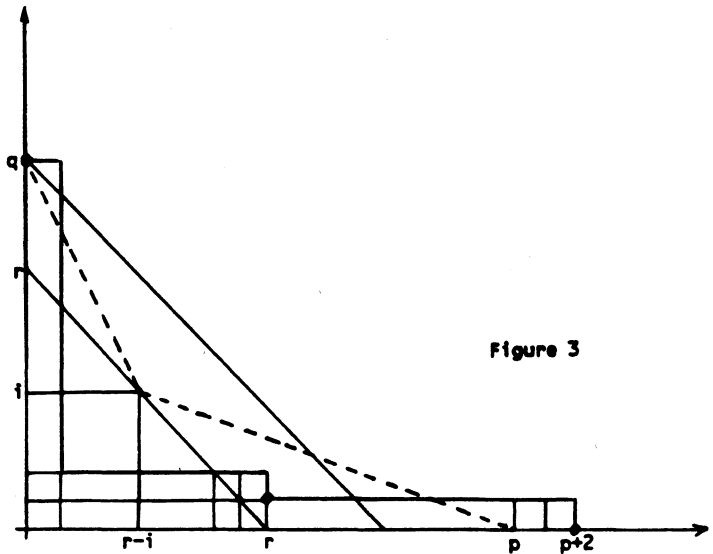


Figure 3

$\exp g_1 = (0, q)$, $\exp f_0 = (1, 2)$, $\exp f_2 = (r, 1)$

où $f_2 = (x a_1(x) + x^q) y + x a_2(x) \equiv x g_1 \pmod{f_0}$ et $x^{r+1} y, x^{p+2} \in I$.

On peut construire une déformation de I dans Z_2 lorsque p, q, r sont de la forme suivante :

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

$$(C) \quad \begin{cases} r = m+n \\ p = m+an \\ q = n+bm \end{cases} \quad m > n > 1, \quad a > 2, \quad b > 2$$

Ceci correspond au fait (Fig.3) qu'il existe $i \in \{1, \dots, r-1\}$ tel que $g_{1,i} = y^q + x^{r-i} y^i + \lambda x^p + \mu x^{p+1}$ a un polygone de Newton dont les côtés ont des pentes respectivement égales à : $-a, -1/b, a, b \in \mathbb{N}$.

Remarquons que $(f_0, g_1) = (f_0, g_{1,i}) = I$.

On peut en fait trouver λ', μ' , et par suite $g'_{1,i} = (x+y)^b (y + \lambda' x^a + \mu' x^{a+1})^n$, tels que $I = (f_0, g'_{1,i})$, ce qui permet encore de déformer I dans Z_2 (lemme IV-3)

$$F_0 = f_0 + t(x+y)^b (y + \lambda' x^a + \mu' x^{a+1}),$$

$$G'_{1,i} = g'_{1,i} = (x+y)^b (y + \lambda' x^a + \mu' x^{a+1})^n$$

Pour terminer ces calculs il resterait à trouver une déformation dans Z_2 lorsque p, q, r ne satisfont pas à la condition (C).

Les calculs effectués dans ce paragraphe donnent l'inclusion $\mathcal{F}_3 \subset \bar{Z}_2$ (d'où $E_2 = \bar{Z}_2$) et le fait que le lieu singulier de Z'_{red} est \bar{Z}_2) sans utiliser le paragraphe II, pour $n < 14$ et $n=16$.

V - MINORATION DE LA DIMENSION DE $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_r$, $r \geq 3$ EN UNE INTERSECTION COMPLETE

On note dans ce paragraphe :

$$Z = \text{Hilb}^n \mathcal{O}^r, \quad Z' = \text{Hilb}^n \mathcal{O}_r.$$

On se propose de donner un encadrement de la dimension de Z' au voisinage d'un point z_I paramétrant une intersection complète I de \mathcal{O}_r , $r \geq 3$. Notons d'abord que $\dim(Z, z_I) = nr$

$$\dim(Z', z_I) \leq (n-1)r.$$

En effet au voisinage de tout point z_I , Z' est contenu dans le sous-espace d'équations $a_{1,1} = \dots = a_{r,1} = 0$ de S (avec les notations de la proposition 0-4).

On a aussi d'après la démonstration de la proposition I-4 :

$$\dim(Z', z_I) \leq nr - (\alpha-s)^+ - r + 1.$$

Rappelons qu'en général cette dimension peut seulement être majorée par $a(r)n^{2-2/r}$ où $a(r)$ ne dépend que de r (cf. introduction et $[I_3]$). Dans la proposition suivante on donne une minoration de la dimension de Z' en une intersection complète en utilisant la même technique que dans le paragraphe II :

Proposition V-1. Soit I un idéal intersection complète d'ordre ν' . Pour tout entier ν tel que $1 < \nu \leq \nu'$, on a :

$$\dim(Z', z_I) \geq \dim(E_\nu, z_I) \geq (n-1)(r-1) + f(\nu, r)$$

avec

$$f(\nu, r) = \nu^r - r \binom{\nu+r-1}{r} + r - 1 .$$

Démonstration. Elle est calquée sur celle de la proposition II-6.

Soient $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_N$, où $N = \binom{\nu+r-1}{r}$, les monômes de degré inférieur ou égal à $\nu-1$ de \mathcal{O}_r , et $\{e_1, \dots, e_n\}$ ($n \geq N$) une base monômiale de \mathcal{O}_r/I (telle que dans la proposition O-4). Ainsi $\deg e_i \geq \nu$ si $i \geq N+1$.

Soit $\pi_\nu = (G_1, \dots, G_r, \underline{a}) : (\mathbb{C}^{r+r(n-N)}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{r+r(n-N)}, 0)$

où $\underline{a} = (a_{ij})_{i=1, \dots, r, j=N+1, \dots, n}$ et $G_i(x_1, \dots, x_r, \underline{a}) = f_i(x_1, \dots, x_r) + \sum_{j=N+1}^n a_{i,j} e_j(x)$.

On a comme dans le lemme II-5, au voisinage de 0 :

$$E_\nu = \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu) \cap W_0, \text{ où } W_0 = \{0\} \times \mathbb{C}^{r(n-N)}$$

On a encore : $W_0 \subset \mathbb{R}^{\nu^r-1}(\pi_\nu)$.

En effet si (g_1, \dots, g_r) est une intersection complète telle que $\nu(g_i) \geq \nu_i$ pour $i=1, \dots, r$ on a :

$$\dim \mathcal{O}_r / (g_1, \dots, g_r) \geq \nu_1 \dots \nu_r .$$

Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition II-6 on peut trouver des germes de sous-ensembles analytiques W_k , $k=0, \dots, n-\nu^r$ de W_0 en 0 tels que :

- $W_0 \supset \dots \supset W_k \supset \dots \supset W_{n-\nu^r} = W$
- $\text{codim } W_{k+1} \leq \text{codim } W_k + 1$
- $W_k \subset \mathbb{R}^{\nu^r-1+k}(\pi_\nu)$

D'où $W \subset \mathbb{R}^{n-1}(\pi_\nu) \cap W_0 \cong E_\nu$;

$$\text{et } \text{codim } W \leq \text{codim } W_0 + n - \nu^r = n - \nu^r + r$$

ou encore $\dim W \geq r + r(n-N) - n + \nu^r - r$

$$= (r-1)(n-1) + \nu^r - rN + (r-1)$$

ce qui démontre la proposition V-1. ■

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

En appliquant cette proposition pour $\nu=1$ on obtient d'abord :

Corollaire V-2. Pour tout idéal de \mathcal{O}_r , intersection complète on a
 $\dim(Z', z_I) \geq \dim L = (n-1)(r-1)$.

On retrouve ainsi un résultat démontré par T.Gaffney dans [Gf 1], pour tout idéal lissifiable. Selon [Gf 1], la codimension du lieu de ramification $R^d(\varphi)$ d'un morphisme fini stable $\varphi: (\mathbb{A}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{A}^p, 0)$ est minorée par $d(p-n+1)$. Il suffit d'appliquer ce résultat au morphisme π de la proposition 0-4 en remarquant que l'hypothèse sur I entraîne que $0 \in R^{n-1}(\pi)$.

Si $\nu(I) \geq 2$, les inégalités $\dim(Z', z_I) \geq \dim(E_\nu, z_I)$ permettent d'obtenir pour $\nu = 2, \dots, \nu(I)$ différentes minorations autres que celle du corollaire V.2. Dès que $r \geq 3$ et bien que l'on passe par l'intermédiaire de E_ν sous-espace de Z' cette minoration est en général meilleure pour au moins une valeur de ν . Ainsi, hormis quelques valeurs exceptionnelles de (ν, r) on trouve $\dim(E_\nu, z_I) \geq \dim L$ avec $2 < \nu \leq \nu(I)$. Ceci implique que, dans E_ν , les idéaux alignables (cf. introduction) constituent un fermé analytique strict. Précisément on a :

Corollaire V-3. Si $r \geq 5$ ou si $r = 4, \nu(I) \geq 3$, ou si $r = 3, \nu(I) \geq 4$, on a
 $\dim(Z', z_I) > (n-1)(r-1)$ pour tout idéal intersection complète I d'ordre $\nu(I) \geq \nu$
et I admet une déformation dans $Z' - \bar{L}$ ensemble des idéaux non alignables.

En effet $f(2, r) = 2^r - r^2 - 1 > 0$ si $r \geq 5$
 et $f(3, 4) > 0, f(4, 3) > 0$. ■

N.B. : Dans chacun des cas exceptionnels $(\nu, r) = (2, 3) (3, 3)$ ou $(2, 4)$ on a $f(\nu, r) < 0$ et pour $(\nu, r) = (2, 3)$ on peut trouver des exemples d'idéaux I tels que z_I soit intérieur à \bar{L} (cf. Remarque V-7).

Lorsque z_I est un point quelconque de Z' le même argument donne le résultat suivant :

Proposition V-4. Pour tout idéal de $\mathbb{A}\{x_1, \dots, x_r\}$ on a :

$$\dim(\text{Hilb}^n \mathbb{A}\{x_1, \dots, x_r\}, z_I) \geq \dim(\text{Hilb}^n \mathbb{A}^r, z_I) - (n-1)(p-r+1) - r,$$

où p est le nombre minimum de générateurs de I .

Michel GRANGER

Démonstration. Soient f_1, \dots, f_p des générateurs de I et $e_1=1, e_2, \dots, e_n$ une base monômiale de \mathcal{O}_r/I . On note comme précédemment :

$$F_i(\underline{x}, \underline{a}) = f_i(\underline{x}) + \sum_{j=2}^p a_{ij} e_j(\underline{x}),$$

$$\underline{a} = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{(n-1)p}, \text{ avec } 1 \leq i \leq p.$$

Le germe (Z, z_r) s'identifie au platificateur local du morphisme fini :

$$X = \mathbb{C}^{r+(n-1)p} \xrightarrow{\pi} Y = \mathbb{C}^{np}$$

$$\pi = (\underline{x}, \underline{a}) = (F_1(\underline{x}, \underline{a}), \dots, F_p(\underline{x}, \underline{a}), \underline{a}).$$

Etant donné $\underline{u} = (\underline{x}^0, \underline{a}^0)$ on note $I_{\underline{u}}$ l'idéal de \mathcal{O}_r engendré par les $F_i(\underline{x}, \underline{a}^0) - F_i(\underline{u})$, $i = 1, \dots, p$:

- (1) $\underline{u} \in \pi^{-1}(Z) \Leftrightarrow \sum_{\pi(\underline{v}) = \pi(\underline{u})} \dim \mathcal{O}_r/I_{\underline{v}} = n$
- (2) $\underline{u} \in \pi^{-1}(Z') \Leftrightarrow \dim \mathcal{O}_r/I_{\underline{u}} = n$, et $\underline{x}^0 = 0$.

Ainsi on a : $\pi^{-1}(Z') = \{0\} \times \mathbb{C}^{(n-1)p} \cap W$ où $W = \{\underline{u}, \dim \mathcal{O}_r/I_{\underline{u}} = n\}$.

Donc : $\dim Z' = \dim \pi^{-1}(Z') > \dim W - r$.

Soit W_0 une composante irréductible de $\pi^{-1}(Z)$ de dimension égale à $\dim Z$. On se propose de construire $W_i \subset W_0$ tel que :

- (3) $\begin{cases} 0 \in W_i, & W_i \text{ irréductible} \\ \text{Si } \underline{u} \in W_i & \dim \mathcal{O}_r/I_{\underline{u}} > i+1 \\ \dim W_i > \dim W_0 - (p-r+1)i, & \text{pour } i \leq n-1. \end{cases}$

Si $i \leq n-2$, et $W_i \subset W_0$ satisfait à (3) on considère : $W_i \times X \xrightarrow{\varphi = \pi \times \pi} Y \times Y$ et Δ_Y diagonale de Y . D'après le théorème de Grothendieck (II.4), $\varphi^{-1}(\Delta_Y)$ est connexe en dimension supérieure à : $\dim(W_i \times X) - \dim Y - 1 = \dim W_i - (p-r+1)$.

En utilisant le fait que $W_i \subset \pi^{-1}(Z)$ et la semi-continuité de $\sum_{\pi(\underline{u}) = \pi(\underline{v})} \dim \mathcal{O}_r/I_{\underline{v}}$ au voisinage de \underline{u} dans X , on en déduit l'existence de $W_{i+1} \subset W_i$, satisfaisant à (3) par une preuve analogue à la précédente.

Pour $i = n-1$ on obtient $W_{n-1} \subset W$, donc : $\dim Z' > \dim W_{n-1} - r > \dim Z - (n-1)(p-r+1) - r$ ■

Remarque V-5. Remplaçons π , par l'application suivante :

$$\pi_{\nu_1, \dots, \nu_r} = (G'_1, \dots, G'_r, \underline{a}) : (\mathbb{C}^{r+M}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{r+M}, 0)$$

où

$$G'_i(x_1, \dots, x_r, \underline{a}) = f_i(x_1, \dots, x_r) + \deg \sum_{j \geq \nu_i} a_{ij} e_j(\underline{x})$$

$$\nu_i = \nu(G'_i)$$

$$M = \sum_{i=1}^r (n - N_i), \quad N_i = \#\{j, \deg e_j < \nu_i - 1\} = \sum_{k=0}^{\nu_i-1} t_k$$

où $T = (t_0, \dots, t_k, \dots)$ est la fonction d'Hilbert-Samuel de I .

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

On obtient ainsi une minoration d'un sous-espace E_{ν_1, \dots, ν_r} de Z' (suggérée par A. Iarrobino).

$$(1) \quad \dim(E_{\nu_1, \dots, \nu_r}, z_I) \geq r + \sum_{i=1}^r (n - N_i) - (r + n - \nu_1 \dots \nu_r) . \quad \blacksquare$$

Remarque V-6. Soit $H(\nu_1, \dots, \nu_r)$ l'ensemble des idéaux $I = (f_1, \dots, f_r)$ tels que

- 1) $\nu(f_i) = \nu_i$
- 2) $(\text{in } f_1, \dots, \text{in } f_r)$ est une intersection complète.

Cette deuxième condition équivaut au fait que la colongueur de I est minimale (pour ν_1, \dots, ν_r fixés) et vaut $n_{\min} = \nu_1 \dots \nu_r$. Si $z_I \in H(\nu_1, \dots, \nu_r)$, l'ensemble $H(\nu_1, \dots, \nu_r)$ coïncide au voisinage de z_I avec E_{ν_1, \dots, ν_r} et n'est autre que la strate d'Hilbert Samuel de I . La fonction d'Hilbert Samuel d'un tel idéal $T^o(I) = (t_0^o, \dots, t_k^o, \dots)$ ne dépend que de ν_1, \dots, ν_r .

Soit $z_I \in E_{\nu_1, \dots, \nu_r}$. On note $\Delta_{n-n_{\min}} = n - \nu_1, \dots, \nu_r$ et $h(\nu_1, \dots, \nu_r)$ la dimension de $H(\nu_1, \dots, \nu_r)$ (calculée par A. Iarrobino dans [I₃]). La formule (1) s'écrit :

$$(2) \quad \dim(E_{\nu_1, \dots, \nu_r}, z_I) \geq (r-1) \Delta_n + h(\nu_1, \dots, \nu_r) - s(I)$$

$$\text{où } s(I) = \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{d < \nu_i \\ \nu_i - 1 \\ d=0}} (t_d^o - t_d^o) = \sum_{i=1}^r N_i - N_i^o$$

$$N_i^o = \sum_{d=0}^{\nu_i - 1} t_d^o$$

d'après l'expression de $h(\nu_1, \dots, \nu_r)$:

$$h(\nu_1, \dots, \nu_r) = \sum_{i=1}^r (n_{\min} - N_i^o) . \quad \blacksquare$$

On peut montrer (cf. [I₃]) que $h(\nu_1, \dots, \nu_r) > (r-1)(n_{\min} - 1)$ dès que pour tout i , $\nu_i \geq 2$, $r \geq 3$ et que (ν_1, \dots, ν_r) n'est pas de l'un des types suivants :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2, a, b) \quad 2 \leq a \leq b, \quad a, b \in \mathbb{N} \\ (3, 3, 3) \\ (2, 2, 2, 2) \end{array} \right.$$

La conclusion du corollaire V-3 est encore valable pour tous les idéaux dans $H(\nu_1, \dots, \nu_r)$ tels que $\nu_i \geq 2$, $r \geq 3$ et (ν_1, \dots, ν_r) ne soit pas l'un des types de la liste (3).

Remarque V-7. On peut remarquer que le premier de ces cas exceptionnels (ν_1, \dots, ν_r) correspond effectivement à des idéaux alignables et non déformables en des idéaux non alignables. En effet on a, si $z_I \in H(2,2,2)$:

$$\dim_{z_I} H(2,2,2) = 12 < (r-1)(n-1) = 14$$

Donc d'après le corollaire V-2, $H(2,2,2) \subset \overline{Z^r - H(2,2,2)}$ et dans un voisinage de z_I , les points z_J qui ne sont pas dans $H(2,2,2)$ sont dans Z_1 (idéaux de dimension de plongement ≤ 2), donc sont alignables.

Ainsi \overline{L} contient un voisinage de z_I . ■

Cette remarque conduit à poser les questions suivantes :

Question 1 : Les idéaux de $H(\nu_1, \dots, \nu_r)$ tels que (ν_1, \dots, ν_r) satisfasse à la condition (3) sont-ils alignables ? Ont-ils un voisinage contenu dans \overline{L} ?

Question 2 (*) : Est-ce qu'un idéal intersection complète tel que $\nu_1 \geq 2$, $r \geq 3$, et que $(\nu(f_1), \dots, \nu(f_r))$ ne soit pas dans la liste (3) est déformable en un idéal non alignable ? D'après le corollaire V-3 il reste seulement à examiner les cas où $(\nu, E) = (2,3), (3,3)$ ou $(2,4)$. Une telle déformation existe, d'après la remarque V-5 dès que $s(I) = 0$ (cf. formule (1)) c'est-à-dire dès que $t_k = t_k^0$ pour $k < \sup \nu_i$. ■

Considérons $(X, \mathfrak{o}) \subset (\mathbb{C}^r, \mathfrak{o})$ un germe d'espace analytique de dimension d , et intersection complète défini par les équations :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_r) &= 0 \\ \dots \\ f_{r-d}(x_1, \dots, x_r) &= 0 \end{aligned}$$

Soient $\nu_i = \nu(f_i)$, $i = 1, \dots, r-d$, et $I = (f_1, \dots, f_{r-d})$ un idéal intersection complète contenant l'idéal de (X, \mathfrak{o}) .

On note $\overline{I}^d = I / (f_1, \dots, f_{r-d})$, intersection complète de $\mathfrak{O}_{X, \mathfrak{o}}$.

En utilisant la même méthode que dans les propositions II-6 ou V-1 on peut minorer la dimension de $\text{Hilb}^n \mathfrak{O}_X$ (selon une idée de T.Gaffney) :

(*) Dans [14] une réponse positive à cette question a été fournie.

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Proposition V-8. Avec les notations précédentes on a :

$$\dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_X, z_{\bar{I}}) \geq (d-1)(n-1) + \nu_1 \dots \nu_{n-d} - 1 \quad \blacksquare$$

En particulier, si $C = f_1^{-1}(o)$ est un germe de courbe plane de multiplicité ν_1 et $I = (f_1, f_2) \subset \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ est de colongueur n ($\bar{I} = f_2 \mathcal{O}_C$ est principal). La formule obtenue est $\dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\bar{I}}) \geq \nu_1 - 1$.

C'est un cas particulier (précisément d'après [B.G.S.] les \bar{I} principaux sont paramétrés par les points de $\text{Hilb}^n \mathcal{O}_C$ lisse sur $\text{Hilb}^n C$) de la formule suivante valable pour tout idéal de \mathcal{O}_C ([B.G.S.] proposition IV.3).

$$(4) \quad \dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_C, z_{\bar{I}}) \geq \inf(\nu_1 - 1, n-1).$$

Question : Lorsque $r \geq 3$ et \bar{I} non intersection complète dans $\mathcal{O}_{X,o}$, la proposition V-8 est-elle valable sous la forme :

$$\dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_X, z_{\bar{I}}) \geq \inf((n-1)(d-1) + \nu_1 \dots \nu_{n-d} - 1, \dim \text{Hilb}^n(\mathcal{O}_X, z_{\bar{I}}))$$

En particulier pour $X = \mathbb{C}^r$ a-t-on :

$$\dim(\text{Hilb}^n \mathcal{O}_X, z_{\bar{I}}) \geq (r-1)(n-1) ?$$

Partie 2
RELATIONS D'INCIDENCE ENTRE LES STRATES D'HILBERT SAMUEL
DE $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$

Notations :

1) Soient R_j l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré j à deux variables ($R_j \subset \mathbb{C}\{x,y\}$), \mathcal{M} l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x,y\}$.

2) On note $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ l'espace vectoriel engendré par g_1, \dots, g_k éléments d'un espace vectoriel E (en général R_j).

3) Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{x,y\}$. On appelle idéal initial de I l'idéal engendré par les inf où $f \in I$, inf étant défini par :

$$f = \text{inf} + f' \quad \text{inf} \in R_\nu, \quad f' \in \mathcal{M}^{\nu+1},$$

où ν est l'ordre de f , si $f \neq 0$.

On note cet idéal $\text{in } I$, $(\text{in } I)_j$ sa partie homogène de degré j .

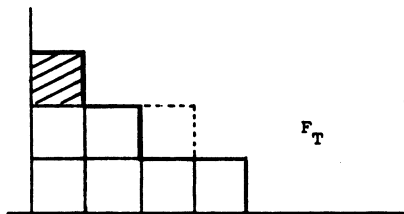
4) Rappelons que I et $\text{in } I$ ont la même fonction d'Hilbert Samuel $T(I) = T(\text{in } I)$.

5) Soit $T = (t_0, \dots, t_n, \dots)$ une suite d'entiers telle que $\sum t_j = n$.

On note $Z_T = \{z_I, T(I) = T\}$.

Lorsque $Z_T \neq \emptyset$ (i.e. il existe ν ; $t_i = i+1$ pour $i < \nu$, et $t_{i-1} > t_i$ pour $i > \nu$), notons F_T l'escalier générique [Gal 1] commun à tous les idéaux I tels que $z_I \in Z_T$, $E_T = F_T + \mathcal{N}^2$ et $\Delta_T = \mathcal{N}^2 - E_T$.

6) Lorsque I_t est une déformation à un paramètre telle que $z_{I_0} \in Z_T$ et $z_{I_t} \in Z_{T'}$, pour $t \neq 0$, les escaliers génériques correspondant à T et T' seront représentés de la façon suivante. (Rappelons que pour deux variables la donnée de T équivaut à celle de F_T) :



(FIG.1)

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

les parties hachurées (resp. en pointillé) indiquant ce qu'il faut enlever (resp. ajouter) à Δ_T pour obtenir $\Delta_{T'}$.

Si un idéal I de Z_T (resp. tout idéal de Z_T) admet une telle déformation dite dans $Z_{T'}$, on dit que la déformation I_t (resp. l'inclusion $Z_T \subset \overline{Z_{T'}}$) correspond à ce diagramme, et qu'elle est du type $T \rightarrow T'$.

VI - ÉTUDE DES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR QUE $Z_T \subset \overline{Z_{T'}}$

Proposition VI-1. L'inclusion $Z_T \subset \overline{Z_{T'}}$ implique les trois conditions suivantes.

(1) $\dim Z_{T'} < \dim Z_T$,

(2) $T \geq T'$ c'est-à-dire :

$$t_0 + \dots + t_j > t'_0 + \dots + t'_j \text{ pour tout } j$$

(3) $r(T) \geq r(T')$, $r(T)$ (resp. $r(T')$) étant la valeur minimum de $r(I)$

(nombre minimum de générateurs de I), lorsque $I \in Z_T$ (resp. $Z_{T'}$).

Démonstration. La condition (1) est évidente.

Si $z_I \in Z_T$ on a $t_0 + \dots + t_j = \dim \mathbb{C}\{x, y\}/I + \mathcal{M}^{j+1}$ et les conditions (2) et (3) expriment respectivement la semi-continuité de la colongueur de $I_t + \mathcal{M}^{j+1}$ et de $r(I_t) = \dim_{\mathbb{C}} I_t / \mathcal{M} I_t$ dans une déformation plate I_t . ■

Remarques VI-2.

a) Il est facile de voir qu'aucune des conditions (1), (2), (3) n'est une conséquence des deux autres.

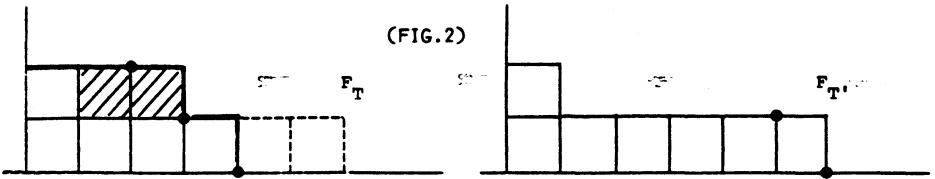
b) Ces conditions sont des conditions numériques sur les suites des t_j et des t'_j faciles à vérifier grâce aux formules explicites donnant la dimension de Z_T (cf. Introduction, théorème R.5) et la valeur de $r(T)$ ($[B_2]$ proposition III.2.1 ou $[I_2]$ prop.4.3 et 4.4) : $r(T) - 1 = \sup_{k \geq \nu - 1} [\delta_\alpha(k)]$ est le nombre maximum de marches consécutives de longueur un (i.e. $\alpha_{i+1} - \alpha_i = 1$), à partir de $(\alpha_1, \nu - 1)$, de l'escalier $F_T = \{(0, \nu), \dots, (\alpha_1, \nu - 1), \dots, (\alpha_\nu, 0)\}$. Rappelons qu'il existe un ouvert dense de Z_T tel que $r(I) = r(T)$ pour tout z_I dans cet ouvert.

Michel GRANGER

c) Si la condition (2) n'est pas satisfaite on a $Z_T \cap \bar{Z}_T = \emptyset$. Par contre on peut avoir $Z_T \cap \bar{Z}_T \neq \emptyset$ (mais non $Z_T \subset \bar{Z}_T$.) même si l'une des conditions (1) ou (3) n'est pas satisfaite.

Les conditions (1), (2) et (3) ne suffisent pas à assurer que $Z_T \subset \bar{Z}_T$. : Dans $[B_2]$ on trouve le calcul des relations d'incidences pour $n \leq 6$. Le premier contre exemple est pour $n=7$, et avec Z_T strate d'intersections complètes pour $n=9$.

Contre exemple VI.3. Soient $T = (1, 2, 2, 2, 0, \dots)$ et $T' = (1, 2, 1, 1, 1, 1, 0, \dots)$. Les escaliers génériques correspondants sont :



et on remarque que

- 1) $\dim Z_T = 4 < \dim Z_{T'} = 5$
- 2) $r > r'$
- 3) $r(T) = 3 > r(T') = 2$.

Cependant l'élément $I = (xy) + \mathcal{A}^4$ de Z_T n'admet pas de déformations du type $T \rightarrow T_4$.

(Remarquons que Z_T contient un ouvert dense constitué d'idéaux isomorphes à I : les $f_0 + \mathcal{A}^4$, tels que inf_0 soit une forme quadratique non dégénérée).

Le germe (Z_2, z_I) admet un plongement dans $\mathfrak{c}^{12} = \mathfrak{c}^{3(n-3)}$ espace des paramètres de la déformation (non plate) de I :

$$\begin{cases} xy + a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}x^3 + a_{14}y^3 \\ x^4 + a_{21}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}x^3 + a_{24}y^3 \\ y^4 + a_{31}x^2 + a_{32}y^2 + a_{33}x^2 + a_{34}y^3 \end{cases}$$

Dans \mathfrak{c}^{12} le sous-espace H d'équations $a_{1j} = 0$, $j=1, \dots, 4$ est transverse à Z_T et si on avait $z_I \in \bar{Z}_T$, le germe $H \cap \bar{Z}_T$, serait de dimension au moins un.

Or le germe de $H \cap Z_2 (\supset H \cap Z_T)$ n'est autre que celui de $\text{Hilb}^n \theta_C$ en z_I où C est le germe de courbe plane d'équation $xy = 0$ dont il existe un représentant qui ne contient que I et les idéaux de la forme :

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

$$(x^4 + ay^3, xy) \text{ ou } (xy, y+bx^3) \quad a \neq 0, b \neq 0.$$

Comme un tel idéal a pour fonction d'Hilbert Samuel $T'' = (1, 2, 2, 1, 1, 0, \dots) \neq T'$, on en conclut que $z_I \notin \overline{Z_{T'}}_I$.

Contre exemple VI.4. Soit $\nu \geq 3$.

Soit $T = (1, 2, \dots, \nu-1, \nu, \nu-1, \dots, 2, 1, 0, \dots)$

d'escalier générique $F_T = \{(0, \nu), \dots, (\alpha_i, \nu-i), \dots, (\alpha_\nu, 0)\}$

avec $\alpha_i = 2i-1$ pour $i=1, \dots, \nu$.

La strate Z_T contient un ouvert dense d'intersections complètes $I = (f_0, f_1)$ d'ordre ν de colongueur minimale $n(T) = \nu^2$. Dans ce cas inf_0 et inf_1 sont d'ordre ν et engendrent $\text{in } I$.

Montrons que si f_0 et f_1 sont homogènes et assez généraux dans R_ν , I n'admet pas de déformation dans $Z_{T'}$, lorsque T' est une fonction d'Hilbert Samuel d'intersections complètes satisfaisant les conditions suivantes :

1) $\nu(T') = \nu-1$ et $n(T') = n(T) = \nu^2$ (d'où $\dim Z_{T'} = n-\nu+1 > \dim Z_T = n-\nu$)

2) $T' < T$; et $\alpha'_1 = 2$ où :

$$F_{T'} = \{(0, \nu-1), \dots, (\alpha'_1, \nu-i-1), \dots, (\alpha'_{\nu-1}, 0)\}$$

N.B. $r(T') = r(T) = 2$.

L'idéal I admet dans $\mathbb{C}^{\nu+1} \supset E_{\nu-1}$, la déformation $I_{\underline{u}, \underline{v}}$ transverse à Z_T suivante :

$$\begin{cases} F_0(x, y, \underline{u}, \underline{v}) = f_0 + \sum_{i=0}^{\nu-1} u_i x^i y^{\nu-i-1} \\ F_1(x, y, \underline{u}, \underline{v}) = f_1 + \sum_{i=0}^{\nu-1} v_i x^i y^{\nu-i-1} \end{cases}$$

où $\underline{u} = (u_0, \dots, u_{\nu-1})$, $\underline{v} = (v_0, \dots, v_{\nu-1})$.

(La méthode du contre exemple précédent ne s'applique pas d'emblée car en raison du fait que dans les déformations considérées l'ordre de l'idéal diminue, le germe $(Z_T \cap \overline{Z_{\nu-1}}, z_I)$ n'est pas contenu dans un $\text{Hilb}^n \theta_C$).

Supposons que $z_I \in \overline{Z_{T'}}$: on peut trouver un chemin $\underline{u}(t)$, $\underline{v}(t)$ dans $\mathbb{C}^{2\nu}$ tel que pour $t \neq 0$, $I_t = I_{\underline{u}(t), \underline{v}(t)} \in Z_{T'}$, et comme F_0 et F_1 sont homogènes (par rapport à $x, y, \underline{u}, \underline{v}$) on peut supposer $\underline{u}(t), \underline{v}(t)$ homogènes en t :

$$\begin{aligned} I_t &= (G_0, G_1), \text{ avec } G_0 = f_0 + t g_0 \\ & \quad G_1 = f_1 + t g_1 \quad g_0, g_1 \in R_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Michel GRANGER

La condition $\alpha_1' = 2$ impose $\dim_{\mathbb{C}} \langle g_0, g_1 \rangle = 1$, soit par exemple $g_0 \neq 0$ et $g_1 = \alpha g_0$.
On se ramène en remplaçant G_1 par $G_1 - \alpha G_0$ à :

$$G_0 = f_0 + t g \quad \text{où } g \in \mathbb{R}_{\nu-1}$$

$$G_1 = f_1 = a_0 y^\nu + \dots + a_1 x^i y^{\nu-i} + \dots + a_\nu x^\nu$$

et par le choix d'un système de coordonnées convenable :

$$g = (y - \lambda_1 x)^{m_1} \dots (y - \lambda_k x)^{m_k} \quad \text{où :}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{si } i \neq j ; \quad m_1 + \dots + m_k = \nu - 1 .$$

Soit $\gamma = G_0^{-1}(0)$ et γ_i , $i=1, \dots, k$, la i^e composante tangentielle de γ (réunion des branches de γ de tangente $y = \lambda_i x$).

La colongueur de I_t est la multiplicité d'intersection $\gamma \cdot G_1$,

$$\text{donc : } \gamma \cdot G_1 = \gamma_1 \cdot G_1 + \dots + \gamma_k \cdot G_1$$

$$= \nu^2 = \nu(\nu - 1) + \nu = \nu(m_1 + \dots + m_k) + \nu .$$

Montrons qu'on est forcément dans la situation suivante :

(i) Il existe i tel que $\gamma_i \cdot G_1 \geq m_i \nu + 3$,

ou (ii) Il existe i_1, i_2 tels que $\gamma_{i_1} \cdot G_1 \geq m_{i_1} \nu + 2$

$$\gamma_{i_2} \cdot G_1 \geq m_{i_2} \nu + 2 .$$

Comme $\sum_{i=1}^k (\gamma_i \cdot G_1 - m_i \nu) = \nu \geq 3$, c'est immédiat si $k \leq \nu - 2$. Si $k = \nu - 1$, on a $m_1 = \dots = m_{\nu-1} = 1$, et g ne divise pas f_1 (car $\alpha_1' = 2$ implique que

(in I_t) $\nu = \langle xg, yg, f_1 \rangle$ est de dimension 3), donc il existe i_0 tel que $(y - \lambda_{i_0} x)$ ne divise pas f_1 d'où $\gamma_{i_0} \cdot G_1 = \nu$. On a alors :

$$\sum_{i \neq i_0} (\gamma_i \cdot G_1 - m_i \nu) = \nu \geq 3 \quad \text{et on conclut comme pour } k \leq \nu - 2 .$$

Supposons que $\lambda_{i_0} = 0$ (cas auquel on se ramène par un changement de coordonnées), l'indice i satisfaisant l'une des conditions (i) ou (ii) précédentes.

1) Si y divise f_0 (donc aussi G_0), y ne divise pas f_1 , donc $a_\nu \neq 0$.

$$\text{Soit } x_j(s) = s^{\alpha_j}$$

$$y_j(s) = \sum_{\beta > \beta_j} C_\beta t^\beta, \quad \text{le paramétrage des branches de } \gamma_i, \text{ avec } \beta_j > \alpha_j .$$

La valuation en s de $G_1(x_j(t), y_j(t))$ est $\alpha_j \nu$ d'où $\gamma_i \cdot G_1 = \sum \alpha_j \nu = m_i \nu$, contrairement à l'hypothèse faite sur i . On est donc ramené à la situation suivante :

2) y ne divise pas f_0 , ce qui implique que γ_i est irréductible avec un paramétrage de la forme :

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

$$\begin{cases} x_i(s) = s^{m_i} \\ y_i(s) = C_i s^{m_i+1} + \dots = s^{m_i+1} h_i(s), h_i(0) \neq 0 \end{cases}$$

Cas (i) :

La condition $v_s(\sigma_1(x_i(s), y_i(s))) \geq \nu m_i + 3$,

avec $G_1(x_i(s), y_i(s)) = a_\nu s^{\nu m_i + \dots} + a_{\nu-k} s^{\nu m_i + k} h_i^k(s) + \dots + a_0 s^{\nu m_i + \nu} h_i^\nu(s)$

implique successivement $a_\nu = 0, a_{\nu-1} = 0, a_{\nu-2} = 0$. Ainsi y^3 divise $G_1 = f_1$.

Cas (ii) :

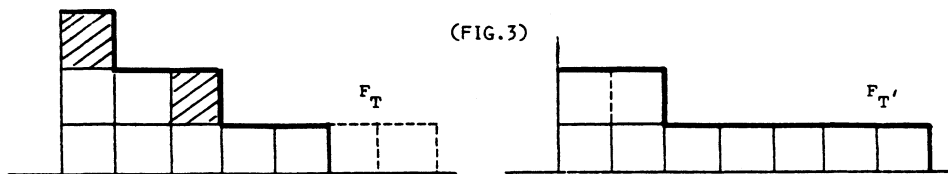
Si $\gamma_i \cdot G_1 \geq \nu m_i + 2$, on montre de même que y^2 divise G_1 .

En revenant au système de coordonnées initial on constate que $G_1 = f_1$ est divisible par $(y - \lambda_i x)^3$ dans le cas (i) et par $(y - \lambda_{i1} x)^2 (y - \lambda_{i2} x)^2$ dans le cas (ii). Or la condition suivante sur $v = \langle f_0, f_1 \rangle$:

$$\left[\begin{array}{l} \exists f \in v, \exists \ell, \ell' \in R_1 \text{ non proportionnels tels que :} \\ \ell^3 \text{ divise } f, \text{ ou } \ell^2 \ell'^2 \text{ divise } f, \end{array} \right.$$

n'est pas satisfaite sur un ouvert dense \mathcal{Q} de la Grassmannienne $G(2, \nu+1)$. Ceci démontre le résultat annoncé. ■

Le premier cas correspond aux escaliers suivants :



On a $Z_T \not\subset \overline{Z_T}$. Par contre $Z_T \subset \overline{Z_T''}$ où $T'' = (1, 2, 2, 2, 1, 1, 0, \dots)$ d'après VII-6 et $Z_T \subset \overline{Z_T''}$ $T''' = (1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots)$ par un argument plus compliqué. (Voir aussi l'introduction, premier exemple).

VII- ETUDE DE \bar{Z}_ν

Proposition VII.1. Dans $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$, Z_ν et \bar{Z}_ν sont connexes.

Démonstration. Il suffit de démontrer que Z_ν est connexe.

Il existe dans Z_ν une strate Z_{T_ν} minimum (pour la relation d'ordre de la proposition VI.1, condition (2)) , $T_\nu = (1,2,3,\dots,\nu,1,1,\dots,1,0,\dots)$ contenant

l'idéal monomial $I_\nu = y \cdot \mathcal{M}^{\nu-1} + \left(x^{\frac{n-\nu(\nu-1)}{2}} \right)$. Comme chaque strate Z_T est connexe, il suffit de montrer que pour tout T tel que $Z_T \subset Z_\nu$, $T \neq T_\nu$ (donc $T > T_\nu$), il existe un idéal I de Z_T tel que :

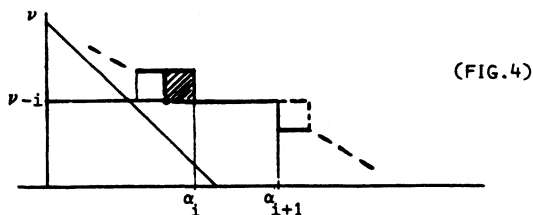
$$z_I \in \bar{Z}_{T'} \text{, avec } T' \neq T \text{ et } T > T' > T(I) \text{ .}$$

Soit $F_T = \{(0,\nu), \dots, (\alpha_i, \nu-i), \dots, (\alpha_\nu, 0)\}$ et I l'idéal monomial engendré par les $x^{\alpha_i} y^{\nu-i}$. Comme $T(I) > T_\nu$, il existe $i \in \{1, \dots, \nu-1\}$ tel que $\alpha_i - \alpha_{i-1} \geq 2$, donc $\deg(x^{\alpha_i} y^{\nu-i}) = \alpha_i + \nu - i > \nu$.

Considérons alors la déformation suivante, correspondant à la figure 4 :

$$F_{\nu-j} = f_{\nu-j} = x^{\alpha_j} y^{\nu-j} \text{ si } j \neq i+1$$

$$F_{\nu-i-1} = x^{\alpha_{i+1}} y^{\nu-i-1} + t x^{\alpha_i-1} y^{\nu-i}$$



C'est une déformation plate de I , telle que pour $t \neq 0$, $T_\nu \leq T' = T(I_t) < T(I) = T$ car l'ensemble Δ des points sous l'escalier F de I_t $t \neq 0$, pour la direction canonique est

$$\Delta = [\Delta_T \setminus (\alpha_i - 1, \nu - 1)] \cup \{(\alpha_{i+1}, \nu - 1)\} \quad \blacksquare$$

N.B. : Il n'est pas nécessaire que F soit l'escalier générique $F_{T'}$.

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Proposition VII-2. Les composantes irréductibles du lieu singulier \bar{z}_2 de $\text{Hilb}^n \mathbb{A}(x,y)$ sont :

- 1) Si $n=3$ $z_2 = \bar{z}_2 = \{\mathcal{M}^2\}$
- 2) Si $n > 3$, les \bar{z}_{T_α} où les T_α sont les fonctions

d'Hilbert Samuel d'intersections complètes :

$$T_\alpha = (\underbrace{1, 2, \dots, 2}_\alpha, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1-2\alpha}, 0, \dots) ; \quad 1 < \alpha \leq \frac{n-2}{2} .$$

En particulier \bar{z}_2 est de dimension pure $n-2$, réductible sauf pour $n=3,4,5$.

Démonstration. Le cas $n=3$ est évident.

Si $n > 3$:
 $z_2 = \cup z_{T_\alpha}$ pour n pair
 $z_2 = \cup z_{T_\alpha} \cup z_{(1, 2, \dots, 2, 0, \dots)}$ pour n impair.

Or on a vu (cf. partie 1, preuve de III.2) que :

$$z_{(1, 2, \dots, 2, 0, \dots)} \subset \bar{z}_{T_{n-3/2}}$$

Ainsi pour tout n :

$$z_2 \subset \cup \bar{z}_{T_\alpha} \subset \bar{z}_2, \text{ donc } \bar{z}_2 = \cup \bar{z}_{T_\alpha}$$

et comme les z_{T_α} sont tous de même dimension $n-2$ et irréductibles cette égalité représente la décomposition de \bar{z}_2 en composantes irréductibles. ■

Remarque VII-3. Si $\nu \geq 3$, \bar{z}_ν n'est pas en général de dimension pure. En effet la strate minimale T_ν de \bar{z}_ν est un ouvert de dimension

$$\dim T_\nu = n - \nu - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}, \text{ si } n > \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Dès que $n \geq \frac{\nu(\nu+1)}{2} + 2$, \bar{z}_ν contient une strate z_T , $T=(1, 2, \dots, \nu, 2, 1, \dots, 1, 0, \dots)$ de dimension $\dim z_T \geq n - \nu - \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2} - 1 = \dim z_{T_\nu} + \nu - 3$ et $\dim z_T = \dim z_{T_\nu} + \nu - 2$, si $n \geq \frac{\nu(\nu+1)}{2} + 3$. Ceci prouve que $\dim z_T > \dim z_{T_\nu}$ dès que $\nu \geq 3$ sauf pour $\nu=3, n=8$ (\bar{z}_3 est alors de dimension pure, avec deux composantes). ■

Lorsque $n \geq \nu^2$, z_ν contient des intersections complètes qui forment un ouvert U_ν . L'adhérence \bar{U}_ν de cet ouvert est la réunion des composantes de dimension maximum de \bar{z}_ν , les autres composantes irréductibles étant les \bar{z}_T maximaux de \bar{z}_ν , tels que $z_T \not\subset \bar{U}_\nu$. Un ouvert dense de \bar{U}_ν est constitué par l'ensemble \mathcal{F}_ν des touffes d'ordre ν (cf. partie 1, II-A).

Michel GRANGER

Rappelons qu'une touffe d'ordre ν est une intersection complète $I = (f_0, f_1)$ du type suivant :

$$f_0 = \gamma_1 \dots \gamma_\nu, \quad f_1 = \delta_1 \dots \delta_\nu$$

$\gamma_i^{-1}(o)$ et $\gamma_j^{-1}(o)$ (resp. $\delta_i^{-1}(o)$ et $\delta_j^{-1}(o)$) germes de courbes

lisses, transverses si $i \neq j$.

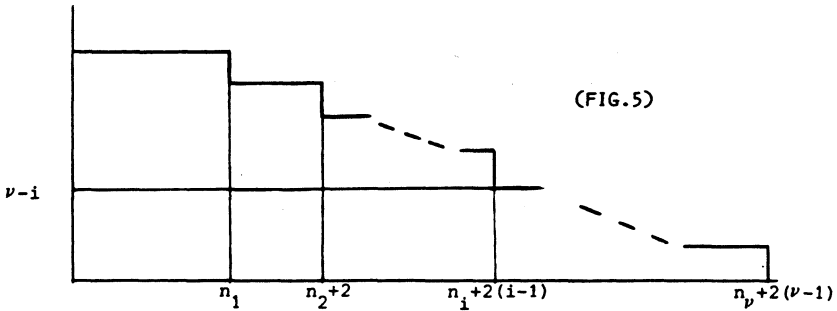
Quitte à renuméroter les γ_i et les δ_i supposons que les nombres d'intersection de $\gamma_i^{-1}(o)$ et $\delta_j^{-1}(o)$ notés $\gamma_i \cdot \delta_j$ satisfont à :

$$\begin{aligned} \gamma_i \cdot \delta_j &= 1 \quad \text{si } i \neq j \\ \gamma_i \cdot \delta_i &= n_i \quad \text{avec } n_1 \leq \dots \leq n_\nu. \end{aligned}$$

On a : $n = n_1 + \dots + n_\nu + \nu(\nu-1)$ et on dit que la touffe $I = (f_0, f_1)$ est de type (n_1, \dots, n_ν) . La donnée du type de I est équivalente à celle de sa fonction d'Hilbert Samuel. Précisément on a :

Lemme VII-4. La fonction de Hilbert-Samuel d'une touffe de type (n_1, \dots, n_ν) est :
 $T(n_1, \dots, n_\nu) = (1, 2, \dots, \nu-1, \underbrace{\nu, \dots, \nu}_{n_1}, \underbrace{\nu-1, \dots, \nu-1}_{n_2 - n_1 + 1}, \dots, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_\nu - n_{\nu-1} + 1}, 0, \dots)$

L'escalier générique correspondant est :



Démonstration. Dans un système générique de coordonnées I a des générateurs du type suivant :

$$f_0 = (y - u_1(x)) \dots (y - u_\nu(x))$$

$$f_1' = x^{\alpha_1} g_1(x, y)$$

où g_1 est un polynôme distingué en y de degré $\nu-1$.

On a $v_x(f_1'(x, u_i(x))) = n_i + \nu - 1$ soit $\alpha_1 + v_x(g_1(x, u_i(x))) = n_i + \nu - 1$, d'où $\alpha_1 = n_1$.

Les deux premiers éléments de la base standard pour la direction canonique sont f_0 et f_1' , les autres étant : $f_i = x^{\alpha_i} g_i(x, y)$, g_i polynôme distingué en y de degré $\nu-i$, $i = 2, \dots, \nu$.

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Il existe, d'après ([B₂], preuve de la proposition II-3.3), une déformation I_t de I, telle que T(I_t) soit constante, et pour t ≠ 0 le cône tangent de g_{i,t}⁻¹(o) soit formé de ν-i droites distinctes. On est ramené au cas où I possède déjà cette propriété :

- I' = (I : x^{n₁'}) = (f_o, g₁) = (g₁, x^{α₂-n₁'} g₂) est alors une touffe
- On a g₁ = (y - v₂(x)) ... (y - v_ν(x)), les v_i'(o) étant deux à deux distincts, et (quitte à renuméroter les v_i)

$$\begin{aligned} n_1' - n_1 + \nu - 1 &= v_x(g_1(x, u_1(x))) = \nu - 2 + v_x(v_1 - u_1) \\ v_x(v_1 - u_1) &= n_1 - n_1 + 1. \end{aligned}$$

Le type (n₂' , ... , n_ν') de la touffe I' est donné par :

$$\begin{aligned} n_1' + \nu - 2 &= (y - v_1(x)) \cdot (x^{\alpha_2 - n_1'} g_2) \\ &= (y - v_1(x)) \cdot f_o = \nu - 1 + v_x(v_1 - u_1) \\ &= n_1 - n_1 + \nu \end{aligned}$$

d'où n₁' = n₁ - n₁ + 2.

La forme de l'escalier F_{T(I)} résulte alors de celle de I' = (I : x^{n₁'}) (cf. [B₂] III-3.3) qui est F_{T(n₂' , ... , n_ν') par hypothèse de récurrence sur ν. ■}

Inversement pour toute fonction d'Hilbert Samuel d'intersections complètes T, le lemme fournit un moyen de calculer une unique suite d'entiers n₁ , ... , n_ν tels que T = T(n₁ , ... , n_ν) donc le type des touffes qui forment un ouvert dense de Z_T (cf. partie 1, Remarque II-3). Comme une touffe ne peut se déformer, à ν constant que sur une touffe de même type et que Z_T est lisse on obtient :

Corollaire VII-5. Les touffes d'ordre ν forment un ouvert dense de la partie lisse de U_ν. ■

Pour terminer ce paragraphe considérons un idéal I d'ordre ν , d'escalier générique {(o, ν) , ... , (α₁ , ν-1) , ... , (α_ν , 0)}. On a z_I ∈ Z_{ν-1} (partie 1), ce qui permet de se demander quelles sont les fonctions d'Hilbert Samuel T' d'ordre ν-1 telles que z_I ∈ Z_{T'}. Lorsque I est une intersection complète, la proposition suivante donne une première indication (on note T(I) = {t_o , ... , t_j , ...}) :

Proposition VII-6. Avec les notations ci-dessus il existe une fonction d'Hilbert Samuel T' = (t'_o , ... , t'_j , ...) d'ordre ν-1, telle que z_I ∈ Z_{T'}, et qu'on ait :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad n(T') = t'_o + \dots + t'_j + \dots = n(T(I)) = n \\ \text{(ii)} \quad \text{Pour tout } j \geq \nu - 2 + \alpha_1 \quad t'_o + \dots + t'_j \geq t'_o + \dots + t'_j - \alpha_1. \end{array} \right.$$

Michel GRANGER

Les conditions (i) et (ii) ne dépendent que de $T(I) = T$ donc :

$Z_T \subset \bigcup_{T' \in \mathcal{E}} \bar{Z}_{T'}$, où \mathcal{E} est l'ensemble des T' d'ordre $\nu-1$, d'intersections complètes

qui satisfont à (i) et (ii). On en déduit une relation d'incidence $Z_T \subset \bar{Z}_{T'}$, lorsque \mathcal{E} possède un seul élément c'est-à-dire dans les cas où :

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = 2, \quad \text{pour } 2 \leq i \leq \nu-1$$

Démonstration de VII-6. Reprenons les notations de la partie 1, lemme II-5 et proposition II-6. Le sous-espace E_ν de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$ est, au voisinage de z_I , l'image par $\pi_\nu : (\mathbb{C}^{2+2(n-N)}, 0) = (S', 0) \rightarrow (S', 0)$ de l'ensemble $R^{n-1}(\pi_\nu)$ des points où π_ν est de degré n .

Remarquons que la déformation $I_t = (f_0 + t g_1, f_1)$ où f_0 et $f_1 = x^{\alpha_1} g_1$, sont les deux premiers éléments de la base standard de I satisfait aux propriétés suivantes :

- 1) Le support de I_t est : $\{(0,0); (0,-t)\}$, avec $\theta_{z_{I_t}(0,0)}$ de dimension $n - \alpha_1$
 et $\dim_{\mathbb{C}} \theta_{z_{I_t}(0,-t)} = \alpha_1$

- 2) L'escalier générique de l'idéal $I_t \subset \mathbb{C}\{x,y\}$ est :

$$F_1 = \{(0, \nu-1), (\alpha_2, \nu-2), \dots, (\alpha_\nu, 0)\}$$

Ainsi le sous-espace W de $\{(0,0)\} \times \mathbb{C}^{2(n-N)} \subset S'$ constitué des points $(0,0,\underline{a})$ tels que $\pi_\nu^{-1}(0,0,\underline{a})$ ait à l'origine un point de colongueur $n - \alpha_1$ et d'escalier F_1 est tel que $0 \in \bar{W}$. Soit W_0 une composante de \bar{W} de dimension $\dim W$. On a donc :

$$\dim W_0 = (n - \alpha_1) - (\nu - 1) + 2\alpha_1 = n + \alpha_1 + 1 - \nu$$

$$W_0 \subset R^{n - \alpha_1 - 1}(\pi_\nu)$$

Par le même argument que dans la proposition II-6 de la partie 2, on peut construire un sous-espace W_1 de W_0 tel que :

$$W_1 \subset R^{n-1}(\pi_\nu), \quad 0 \in \bar{W}_1$$

$$\dim W_0 - \dim W_1 \leq (n-1) - (n - \alpha_1 - 1) = \alpha_1$$

d'où $\dim W_1 \geq n + \alpha_1 + 1 - \nu - \alpha_1 = n - (\nu - 1) > \dim E_\nu$. Ceci implique que $W_1 \cap Z_{\nu-1} \neq \emptyset$.

Soit I' un idéal de $W_1 \cap Z_{\nu-1}$ et I'_t une déformation de I' dans W (on a $W_1 \subset W_0 \subset \bar{W}$) et T' la fonction d'Hilbert Samuel de I' : les conditions (i) et (ii) de la proposition II-6 expriment la semi-continuité de la colongueur de l'idéal $I'_t + \mathcal{M}^{j+1}$ de $\mathbb{C}\{x,y\}$. ■

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

VIII - ÉTUDE DE L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}\{x,y\}/\mathcal{M}^P)$

A) - Dans ce paragraphe on se propose d'étudier le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}\{x,y\}/\mathcal{M}^P)$ et particulièrement son (éventuelle) irréductibilité. Dans tout ce qui suit on le note $\text{Hilb}_P^n(\mathbb{C}\{x,y\})$ ou simplement Hilb_P^n et on suppose (afin que $\text{Hilb}_{P,\text{red}}^n \neq \emptyset$) :

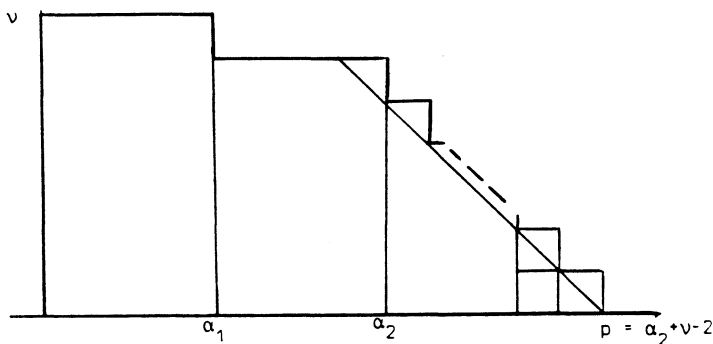
$$p \leq n \leq p(p+1)/2 = \binom{p}{2}.$$

Les cas $n=p$ et $n-1=p$ sont déjà connus. En effet ($n=p$), $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}\{x,y\})$ est irréductible pour tout $n \geq 1$ (c'est le résultat principal de [B₂]) et $\text{Hilb}_{n-1}^n(\mathbb{C}\{x,y\})$ est (ensemblément) égal à \bar{Z}_2 , donc réductible sauf pour $n=3,4,5$ d'après la proposition VII-2.

Proposition VIII-1.

- 1) Pour tout (n,p) , Hilb_P^n est une réunion de strates d'Hilbert Samuel de $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}\{x,y\})$.
- 2) Il existe dans Hilb_P^n une strate minimum, au sens de la relation d'ordre intervenant dans la condition (2) de la proposition VI-1. C'est la strate Z_{T_0} définie par : $T_0 = (1, 2, \dots, \underbrace{v, \dots, v}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{v-1, \dots, v-1}_{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}, 0, \dots)$; Hilb_P^n est la réunion des strates Z_T telles que $T \geq T_0$.

La démonstration est immédiate d'après le fait que la condition $I \supset \mathcal{M}^P (z_I \in \text{Hilb}_P^n)$ ne dépend que de $T(I)$. L'escalier générique correspondant à T_0 est :



Michel GRANGER

α_1 et v (donc $\alpha_2 = p-v+2$) sont déterminés en fonction de n et p par les formules suivantes :

$$(v-1)p - \frac{(v-1)(v-2)}{2} < n \leq p + (p-1) + \dots + [p-(v-1)] = vp - \frac{v(v-1)}{2}$$

$$\alpha_1 = n - (v-1)p - (v-1)(v-2)/2$$

De la minimalité de T_0 il résulte immédiatement :

Corollaire VIII-2. La strate Z_{T_0} est un ouvert de Hilb_p^n . Pour que Hilb_p^n soit irréductible il faut et il suffit que $\text{Hilb}_p^n = \overline{Z_{T_0}}$. ■

N.B. Tous les diagrammes indiqués par la suite, (cf. les notations 6) introduites au début de cette partie 2 correspondent à des déformations (éventuelles) de type $T \rightarrow T_0$. Commençons par déterminer les valeurs de n et p pour lesquelles Hilb_p^n contient une strate Z_T ($T \geq T_0$) telle que : $\dim Z_T \geq \dim Z_{T_0}$

$$\text{ou } r(T) < r(T_0)$$

Pour de telles valeurs de n et p , Hilb_p^n est réductible, d'après la proposition VI-1.

On obtient :

Proposition VIII-3. Dès que (n,p) ne figure pas dans la liste suivante, Hilb_p^n est réductible:

a) $(n,n) \quad n \geq 1$

b) $n=2p-3$ où $p \geq 4$, $n = 2p-2$ où $p \geq 3$

c) $n = p(p+1)/2 - i$, avec $i = 0 \quad p \geq 2$

$i = 1 \quad p \geq 3$

$i = 2 \quad p \geq 4$

d) $(n,p) = (7,4), (11,5), (14,6), (17,6)$ ou $(17,7)$

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

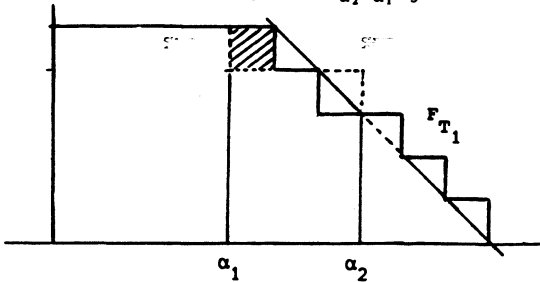
Démonstration. On cherche à mettre en évidence une ou deux strates Z_{T_1}, Z_{T_2} dont le choix dépend de $\alpha_2 - \alpha_1$, définies pour α_1 assez grand, et satisfaisant à l'une des conditions $\dim Z_{T_1} > \dim Z_{T_0}$, ou $r(T_1) < r(T_0)$.

La liste des (n, p) pour lesquelles un tel phénomène est impossible (on vérifiera aisément que les conditions de VI-1 sont satisfaites pour tout $T > T_0$) est appelée liste des cas exceptionnels. On notera au passage leur indexation $(a_i), (b_i), (c_i)$ et (d_i) .

Le cas a) étant évident on suppose $p < n$, donc $v > 2$.

Cas 1 : Supposons d'abord $\alpha_2 - \alpha_1 > 3$

Soit $T_1 = (1, 2, \dots, v-1, \underbrace{v, \dots, v}_{\alpha_1+1}, \underbrace{v-1, \dots, v-1}_{\alpha_2-\alpha_1-3}, v-2, 0, \dots)$



(fig. 7)

On a $T_1 > T_0$ (cf. figure 7) et :

$$\dim Z_{T_0} = n - v - (v-1)(v-2)/2 \quad (\text{car } \alpha_2 - \alpha_1 > 2)$$

$$\dim Z_{T_1} = n - v - (v-2)(v-3)/2 \quad \text{si } \alpha_2 - \alpha_1 > 1$$

$$\dim Z_{T_1} = n - v - (v-2)(v-3)/2 - 1 = \dim Z_{T_0} + v - 3, \quad \text{si } \alpha_2 - \alpha_1 > 3$$

Ainsi $\dim Z_{T_1} > \dim Z_{T_0}$ dès que $v > 3$, ou $\alpha_2 - \alpha_1 > 4$.

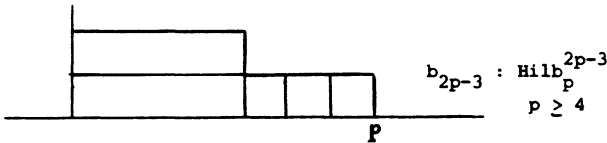
Supposons $v=2, \alpha_2 - \alpha_1 = 3$ d'où : $p = \alpha_2 = \alpha_1 + 3, n = \alpha_1 + \alpha_2 = 2p - 3$.

Dans ce cas, pour toute strate Z_T autre que Z_{T_0} de Hilb_p^n , on a $T = T_1$ ou $v(T) > 3$, d'où

$$\bullet \dim Z_T \leq n - 3$$

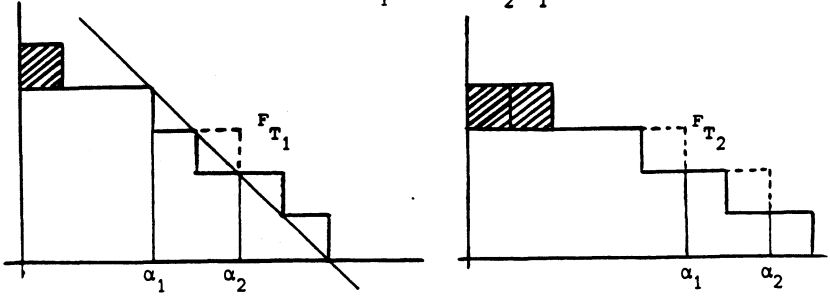
$$\bullet r(T) \geq 2 = r(T_0)$$

On obtient ainsi la première liste exceptionnelle $(b_n), n > 5$ impair.



Cas 2 : Supposons $\alpha_2 - \alpha_1 = 2$

Soit $T_1 = (1, 2, \dots, \nu, \nu+1, \underbrace{\nu, \dots, \nu}_{\alpha_1 - 2}, \underbrace{\nu-1, \dots, \nu-1}_{\alpha_2 - \alpha_1 - 2}, \nu-2, 0, \dots) \geq T_0$ (fig. 8_a)

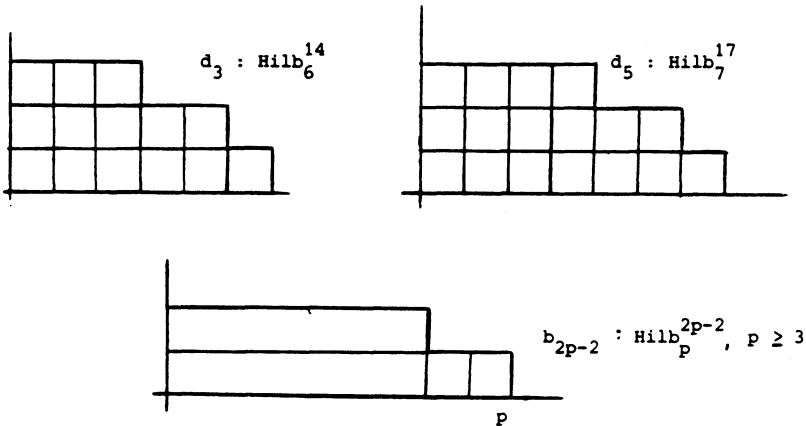


i) Si $\alpha_1 \geq 3$:

$$\begin{aligned} \dim Z_{T_1} &= n - (\nu+1) - (\nu-2) - (\nu-3)/2 - 1 \\ &= \dim Z_{T_0} + \nu - 4 \geq \dim Z_{T_0} \text{ dès que } \nu \geq 4. \end{aligned}$$

Si $\nu = 3$ et $\alpha_1 \geq 5$ on peut considérer une strate Z_{T_2} (cf. fig 8_b) de Hilb_p^n de dimension égale à celle de Z_{T_0} ($n-4$).

Les cas exceptionnels restants sont $\nu = 3, \alpha_1 = 3, 4$, et la liste exceptionnelle b_n , n pair correspondant à $\nu = 2, n=2p-2, p \geq 4$ (à laquelle on adjoint $b_4(\alpha_1=1)$ par commodité). Les escaliers F_{T_0} correspondants sont :



GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

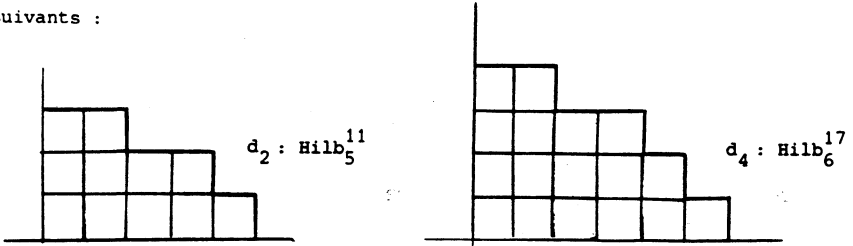
(ii) Si $\alpha_1 = 2$:

$$\dim Z_{T_1} = n - (v+1) - \frac{(v-2)(v-3)}{2} - \frac{3 \times 2}{2}$$

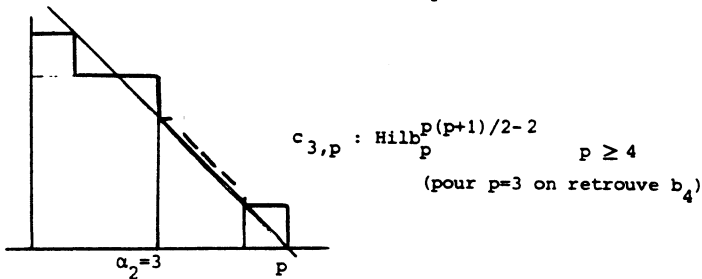
$$= \dim Z_{T_0} + v - 6 \geq \dim Z_{T_0} \text{ si } v \geq 6.$$

Dans le cas $v=5$ correspondant à Hilb_7^{24} on trouve $r(T_0)=5 > r(T_1)=4$ ce qui assure encore la réductibilité.

Il reste deux cas exceptionnels pour $v=3, v=4$ (pour $v=2$ on retrouve b_0) correspondant aux F_{T_0} suivants :



(iii) Pour $\alpha_1=1$ on obtient seulement une liste exceptionnelle :



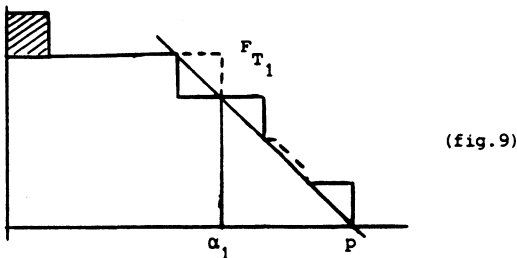
Cas 3 : $\alpha_2 - \alpha_1 = 1$, ou $I = (f_0) + \mathcal{M}^p$, f_0 d'ordre v .

L'expression de $\dim Z_{T_0}$ est différente de celle des cas précédents :

$$\dim Z_{T_0} = n - v - v(v-1)/2$$

$$\text{Soit } T_1 = (1, 2, \dots, v, \underbrace{v+1, v, \dots, v}_{\alpha_1-3}, v-1, 0, \dots),$$

définie si $\alpha_1 \geq 3$ (fig.9)

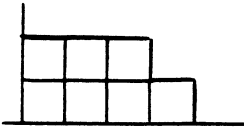


Michel GRANGER .

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha_1 \geq 4 \quad \dim Z_{T_1} &= n - (v+1) - \frac{(v-1)(v-2)}{2} \\ &= \dim Z_{T_0} + v - 2 \geq \dim Z_{T_0} \end{aligned}$$

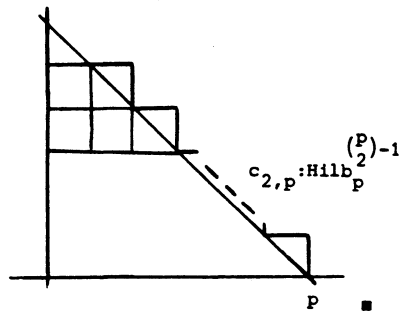
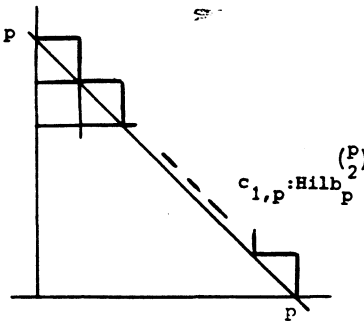
$$\text{Si } \alpha_1 = 3, \quad \dim Z_{T_1} = \dim Z_{T_0} + v - 3$$

ainsi pour $\alpha_1 = 3$ on a un cas exceptionnel pour $v=2$:



$d_1 : \text{Hilb}_4^7$

Enfin pour $\alpha_1 = 1$ ou 2 on trouve deux listes exceptionnelles triviales :



B - Étude de cas exceptionnels

On a déjà l'irréductibilité de Hilb_P^n dans les cas suivants :

- . liste a) d'après [B₂]
- . liste c) ainsi que b₄ en remarquant que Hilb_P^n est alors réduit à Z_{T_0} et b₅ d'après [B.G.S.] preuve de IV-3, cas B₃.

Dans les autres cas il faut expliciter les différentes strates Z_T de Hilb_P^n et examiner si $Z_T \subset \bar{Z}_{T_0}$ (grâce à une chaîne d'inclusions entre les \bar{Z}_T) pour toutes ces strates. Ceci donne lieu à des calculs d'une complexité croissante et les calculs qui suivent donnent l'irréductibilité de Hilb_P^n dans une partie des cas exceptionnels. L'état actuel de nos connaissances est résumé dans le tableau suivant :

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

	p											
n		1										
1		a_1	2									
2				3								
3			e_{12}		4							
4				b_4		5						
5				e_{23}	b_5		6					
6				e_{13}	b_6			7				
7					d_1	b_7			8			
8					e_{34}	b_8				9		
9					e_{24}		b_9				10	
10					e_{14}		$b_{10} ?$					a_{10}
11						d_2		$b_{11} ?$				
12								$b_{12} ?$				
13						e_{35}			?			
14						e_{25}	d_3			?		
15						e_{15}						
16												
17							d_4	$d_5 ?$?
18												?
19							e_{36}					
20							e_{26}					
21							e_{16}					

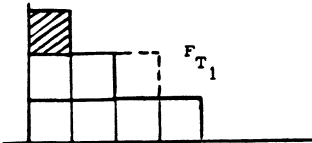
Liste de cas d'irréductibilité : x_i
 (les cas non résolus sont notés : $x_i ?$)

Dans tous les calculs qui suivent on considère uniquement des bases standard pour la direction canonique dans un système générique de coordonnées appelées "bases standard génériques".

Proposition VIII-4. (Les cas d_1, d_2, d_4) $Hilb_4^7, Hilb_5^{11}$ et $Hilb_6^{17}$ sont irréductibles.

Démonstration : Remarquons que outre $Z_{T_0}, Hilb_4^7$ contient une seule strate Z_{T_1}

(fig.10)



(fig.10)

Michel GRANGER

Soit $\{f_0, f_1, f_2, f_3 = x^4\}$, base standard générique de I où $z_1 \in Z_{T_1}$:

$$f_i(x,y) = x^i y^{3-i} + \alpha_i x^3, \quad i=0,1,2.$$

Montrons qu'il existe $P \in R_2$ et $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}, i=0,1,2$, tels que

$$\begin{cases} \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = x P \\ \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = y P, \quad P \neq 0 \end{cases}$$

Il suffit que les λ_i, μ_i fournissent une solution non nulle de :

$$(2) \quad y \left(\sum_{i=0}^2 \lambda_i f_i \right) = x \left(\sum_{i=0}^2 \mu_i f_i \right)$$

$$(d'où P = \frac{1}{x} \sum \lambda_i f_i = \frac{1}{y} \sum \mu_i f_i)$$

Or (2) est un système de 5 (= $\dim R_4$) équations à 6 inconnues et admet donc une solution non nulle : $P \neq 0$ résulte alors de l'indépendance linéaire de f_1, f_2, f_3 .

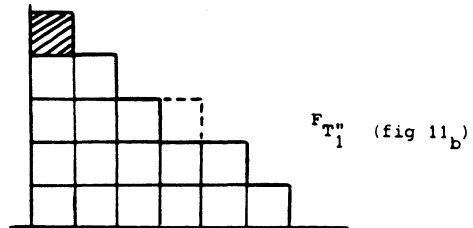
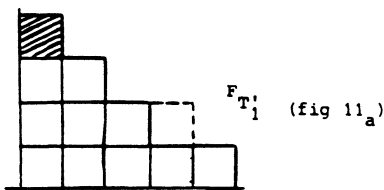
Soit $f \in R_3$ tel que $I = (f, xP, yP, f_3)$: Les espaces vectoriels $\langle f, xP, yP \rangle$ et $\langle f_0, f_1, f_2 \rangle$ sont égaux, de dimension 3, ce qui revient à dire que f et P sont premiers entre eux.

Soit $I_t = (f + tP, xP, yP, f_3)$. L'idéal initial de I_t satisfait à :

$$(\text{in } I_t)_2 = \langle P \rangle, \quad (\text{in } I_t)_3 = \langle xP, yP \rangle$$

Ainsi, pour $t \neq 0, T(I_t)$ commence par (1,2,2,2) ce qui entraîne que la colongueur de I_t est constante égale à 7 et que I_t est une déformation plate de I dans Z_{T_0} .

Les cas d_2 et d_4 se traitent de la même façon. Hilb_5^{11} et Hilb_6^{17} ont chacun une deuxième strate T_1', T_1'' d'escaliers respectifs :



GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

Les calculs sont les suivants :

Soit $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 = x^5$

(resp. $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 = x^5 y, f_5 = x^6$;

la base standard de I où $z_i \in Z_{T_1}$ (resp. $Z_{T_1''}$) avec $f_i \in R_4$ (resp R_5), $0 \leq i \leq 3$, linéairement indépendants.

On peut trouver $P \in R_3 - \{0\}$ (resp $R_4 - \{0\}$) tel que

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^3 \lambda_i f_i = xP. \\ \sum_{i=0}^3 \mu_i f_i = yP. \end{cases}$$

en résolvant un système de 6 (resp 7) équations à 8 inconnues.

D'où l'existence de $f, g \in R_4$ (resp R_5) tels que

$(\text{in } I)_4$ (resp $(\text{in } I)_5$) = $\langle f, g, xP, yP \rangle$ et la déformation dans Z_{T_0} :

$$\begin{aligned} I_t &= (f + tP, g, xP, yP, x^5) \\ &(\text{resp} = (f + tP, g, xP, yP, x^5 y, x^6)) \end{aligned}$$

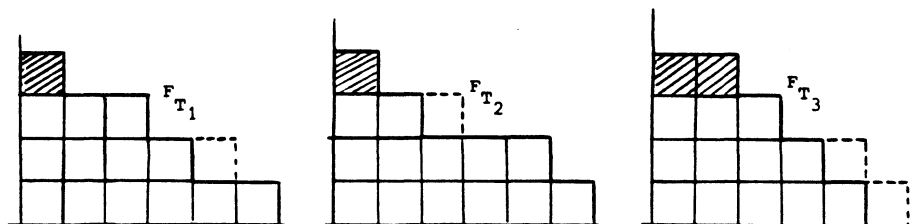
car $(\text{in } I_t)_3$ (resp $(\text{in } I_t)_4$) = $\langle P \rangle$

$(\text{in } I_t)_4$ (resp $(\text{in } I_t)_5$) = $\langle g, xP, yP \rangle$ ■

Proposition VIII-5. (Le cas d_3). Hilb_6^{14} est irréductible.

Démonstration : On trouve trois strates autres que Z_{T_0} , notées respectivement

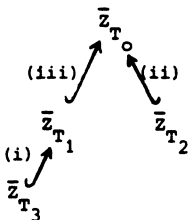
$Z_{T_1}, Z_{T_2}, Z_{T_3}$ (fig. 12)



(fig. 12)

Michel GRANGER

Démontrons les inclusions suivantes :



(i) On trouve une démonstration dans [B.G.S.], Preuve de la proposition IV.3, cas B_3 .

(ii) Une base standard générique d'un idéal I tel que $z_I \in Z_{T_2}$ est de la forme :

$$f_0 = g_0 + x^4 h_0, f_1 = x g_1 + x^4 h_1, f_2 = x^2 g_2 + x^4 h_2, f_3 = x^5 y, f_4 = x^6$$

avec $h_i \in R_1$ et g_0, g_1, g_2 polynômes homogènes distingués en y de degrés respectifs 4, 3, 2. On voit facilement que g_2 divise g_0 et g_1 (utiliser par exemple le fait que $\tau(V) = 1$, où $V = \langle g_0, x g_1, x^2 g_2 \rangle$ avec les notations de [I₂], p.57).

La déformation suivante est à colongueur constante $n(I_t) = 14$ (d'après [B₂] proposition II.3.1. b))

$$F_0 = f_0 + t f_2/x = f_0 + tx(g_2 + x^2 h_2)$$

$$F_i = f_i \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Il suffit de montrer que $I_t \not\subset \mathcal{M}^6$ pour obtenir que $z_{I_t} \in Z_{T_0}$ (seule strate d'ordre 3 de Hilb_6^{14}).

Or, par division évidente, on a :

$$x\mathcal{M}^5 \subset (f_1, f_2, f_3, f_4) \subset I_t$$

On a la suite de congruences $(\text{mod } I_t)$, où même $(\text{mod } x\mathcal{M}^5)$ suivante :

$$(1) \begin{cases} 0 \equiv y^2 F_0 \pmod{I_t} \\ \equiv y^6 + t x y^2 g_2 \pmod{x\mathcal{M}^5} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 0 \equiv x y g_1 + x^4 y h_1 \pmod{I_t} \\ \equiv x y g_1 = xy(y+ax) g_2 \pmod{x\mathcal{M}^5} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 0 \equiv x^2 y g_2 + x^4 y h_2 \pmod{I_t} \\ \equiv x^2 y g_2 \pmod{x\mathcal{M}^5} \end{cases}$$

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS

(2) et (3) impliquent $xy^2 g_2 \in I_t$, donc en reportant dans (1) on trouve $y^6 \in I_t$
 d'où $\mathcal{M}^6 = (y^6) + x\mathcal{M}^5 \subset I_t$.

(iii) Comme $r(T_1) = 3$ il existe un ouvert dense U_{T_1} de Z_{T_1} tel que pour $z_I \in U_{T_1}$,
 $I = (f_0, f_1, f_2)$ avec : $f_0 = g_0 + h_0$, $f_1 = g_1 + h_1$, $g_0, g_1 \in R_4$ et $f_2, h_0, h_1 \in R_5$,
 assez généraux pour que :

$$\dim \langle x g_0, y g_0, x g_1, y g_1 \rangle = 5, \mathcal{M}^6 \subset (f_0, f_1, f_2).$$

Supposons de plus que z_I soit dans l'ouvert dense V_{T_1} de U_{T_1} formé par les
 z_I tels que (f_0, f_1) soit une touffe de type $(1,1,1,1)$.

$$\begin{aligned} \text{On note : } f_\lambda &= -g_1(1, \lambda) f_0 + g_0(1, \lambda) f_1 \\ &= (y - \lambda x) g_\lambda + h_\lambda, \text{ où } g_\lambda \in R_3, h_\lambda \in R_5. \end{aligned}$$

Il est clair que les coefficients de g_λ et h_λ dépendent algébriquement de λ
 et de ceux de f_0 et f_1 .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g_0(1, \lambda) \neq 0$ (si $g_0(1, \lambda) = 0$ on a $g_1(1, \lambda) \neq 0$ et on aboutit
 à la même conclusion (1) ci-dessous) On a alors :

$$I = (f_0, f_\lambda, f_2)$$

Soient $\lambda(t)$ et $\tilde{g}_0(x, y, t)$ déformations de λ et g_0 telles que :

$$(y - \lambda(t)x)\tilde{g}_0 = (y - \lambda x)g_0 + t^N h_\lambda \quad (N \text{ assez grand pour que } \lambda \text{ et } \tilde{g}_0 \text{ soient analytiques en } t).$$

Considérons la déformation I_t de I suivante, à priori non forcément plate :

$$\begin{cases} F_0 = t^N g_\lambda + \tilde{g}_0 + h_0 \\ F_\lambda = (y - \lambda(t)x)g_\lambda + h_\lambda \\ F_2 = f_2 + t^N(ax+by)g_\lambda + (ax+by)(\tilde{g}_0 - g_0) \end{cases}$$

$$\text{on a : } (in I_t)_3 = \langle g_\lambda \rangle$$

$$(in I_t)_4 = \langle x g_\lambda, y g_\lambda \rangle$$

$$(in I_t)_5 = \langle x^2 g_\lambda, xy g_\lambda, y^2 g_\lambda, u_\lambda, v_\lambda \rangle$$

$$\text{avec : } u_\lambda = (y - \lambda(t)x)\tilde{g}_0 - t^N h_\lambda = (y - \lambda x)g_0$$

$$v_\lambda = f_2 - (ax + by)g_0$$

Michel GRANGER

La fonction d'Hilbert-Samuel de I_t commence par (1,2,3,3,3) donc, comme $n(I_t) \leq 14$, la platitude de I_t , avec $z_{I_t} \in Z_{T_0}$ pour $t \neq 0$ équivaut à : $\dim(\text{in } I_t)_5 = 4$.

Il suffit donc d'assurer que :

$$\exists a, b \in \mathbb{C}, f_2 - (ax+by)g_0 \in \langle x^2g_\lambda, xyg_\lambda, y^2g_\lambda, (y-\lambda x)g_0 \rangle$$

$$\text{soit } f_2 \in R_2 \langle g_\lambda \rangle + R_1 \langle g_0 \rangle = R_1 \langle g_0, g_1 \rangle + \langle x^2g_\lambda \rangle$$

Puisque $f_2 \notin R_1 \langle g_0, g_1 \rangle$, ceci revient à :

$$(1) \quad \text{i) } x^2g_\lambda \in R_1 \langle g_0, g_1 \rangle + \langle f_2 \rangle, \quad \text{ii) } x^2g_\lambda \notin R_1 \langle g_0, g_1 \rangle$$

Pour que I puisse être déformé dans Z_{T_0} il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que (1) soit satisfait; il suffit donc d'assurer la condition suivante :

$$\Delta(\lambda) = \det(x^2g_\lambda, xg_0, xg_1, yg_0, yg_1, f_2) \text{ non constant}$$

$$(2) \quad \text{L'un des mineurs } \Delta_1(\lambda) \text{ de } (x^2g_\lambda, xg_0, xg_1, yg_0, yg_1), \text{ est non nul, premier avec } \Delta(\lambda).$$

Comme (2) est une condition algébrique ouverte satisfaite sur un ouvert W_{T_1} , il suffit de montrer que $W_{T_1} \neq \emptyset$ pour que $W_{T_1} \cap V_{T_1}$ soit un ouvert dense de Z_{T_1} .

Le raisonnement précédent montre alors que $W_{T_1} \subset \bar{Z}_{T_0}$ d'où $\bar{Z}_{T_1} = \overline{W_{T_1} \cap V_{T_1}} \subset \bar{Z}_{T_0}$.

Le fait que $W_{T_1} \neq \emptyset$ résulte simplement de l'exemple suivant :

$$f_0 = y^4, f_1 = xy^3 + x^4, f_2 = x^3y^2 + x^5 \text{ qui donne } \Delta(\lambda) = 1 + \lambda, \Delta_1(\lambda) = \lambda \quad \blacksquare$$

Proposition VIII-6. - (Les premiers cas de la liste b) $\text{Hilb}_4^6, \text{Hilb}_5^7, \text{Hilb}_5^8$ et Hilb_6^9 sont irréductibles.

Démonstration :

(i) Les cas de Hilb_4^6 et Hilb_5^7 sont immédiats.

Pour Hilb_4^6 : Il suffit de voir que $\mathcal{M}^3 \in \bar{Z}_{T_0}$.

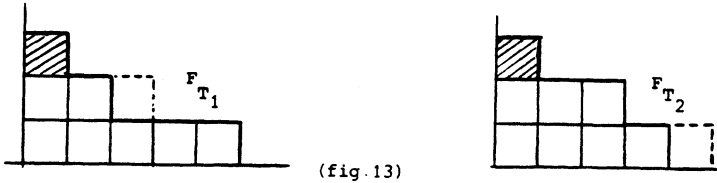
Pour Hilb_5^7 : On a $\text{Hilb}_5^7 = \text{Hilb}_4^7 \cup Z_{T_0}$, donc d'après l'étude du cas d_1 , il suffit de voir que la strate minimale de Hilb_4^7 ($T_0 = (1,2,2,2)$) est contenue dans \bar{Z}_{T_0} (cf. preuve de la proposition VII-2).

(ii) Irréductibilité de Hilb_5^8

On a deux strates Z_{T_1}, Z_{T_2} outre Z_{T_0} (fig.13)

→ voir page suivante

GÉOMÉTRIE DES SCHEMAS DE HILBERT PONCTUELS



(fig. 13)

Preuve de $Z_{T_1} \subset \bar{Z}_{T_0}$

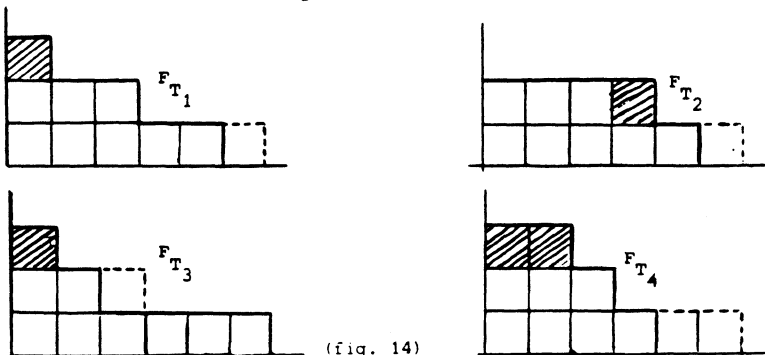
Si $Z_I \in Z_{T_1}$ il existe une base standard générique $(f_0, f_1 = xg_1, f_2 = x^2g_2, x^5)$ de I et une déformation à colongueur constante $n(I_t) = 8 : I_t = (f_0 + txg_2, f_1, f_2, x^5)$ (cf. [B₂] Pr. II.3.1b), f_0, g_1, g_2 étant des polynômes distingués en y de degrés (et d'ordres) respectifs $(3, 2, 1)$. On a $\dim(\text{in } I_t)_3 = 2$, car ing_2 divise ing_1 et $\text{in } f_0$. Donc $T(I_t)$ commence par $(1, 2, 2, 2)$ ce qui avec $n(I_t) = 8$ assure : $T(I_t) = (1, 2, 2, 2, 1) = T_0$.

Preuve de $Z_{T_2} \subset \bar{Z}_{T_0}$

Un ouvert de Z_{T_2} est constitué d'idéaux du type : $I = (f_0, f_1) + \mathcal{M}^4, (f_0, f_1)$ de colongueur 9 (donc touffe de type $(1, 1, 1)$), avec f_0, f_1 homogènes. Avec un nouveau choix de coordonnées et de système de générateurs on se ramène à : $f_1 = x^2l$ où $l \in R_1$. D'où la déformation : $I_t = (f_0 + txl, f_1, x^4 \text{ ou } x^2y^2)$ qui satisfait $Z_{I_t} \in Z_{T_0}$, car on constate aisément que $(\text{in } I_t)_4 \subset R_3$, donc $\dim(\text{in } I_t)_4 \leq 4$.

(iii) Irréductibilité de Hilb_6^9

Les strates autres que Z_{T_0} sont Z_{T_i} $i=1, \dots, 4$ (figure 14)



(fig. 14)

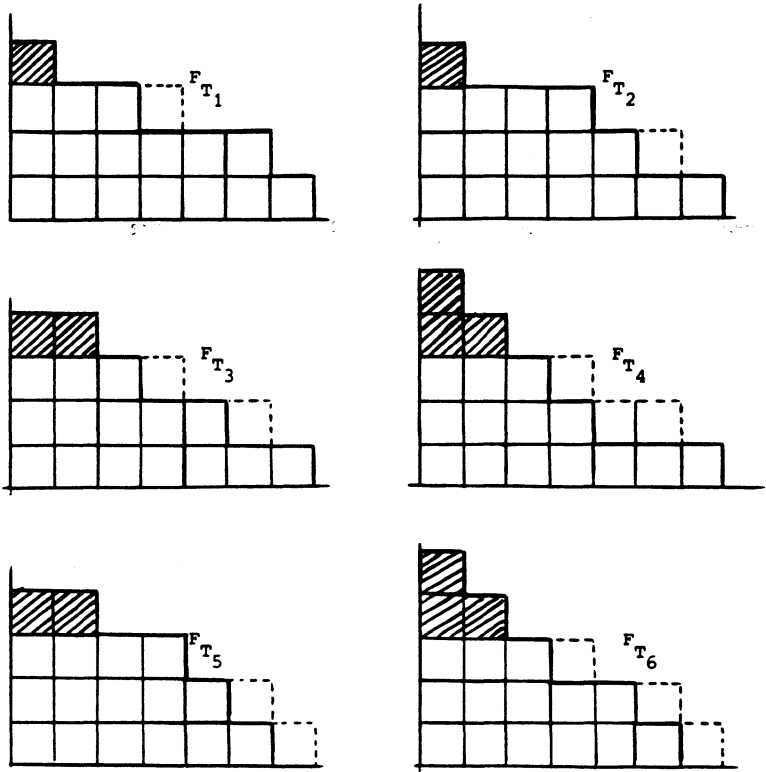
- . $Z_{T_1} \subset \bar{Z}_{T_0}$ d'après la proposition VII-6 et la remarque consécutive.
- . $Z_{T_4} \subset \bar{Z}_{T_1}$ et $Z_{T_2} \subset \bar{Z}_{T_0}$ (Voir [B.G.S.] preuve de la proposition IV.3 cas B₃)
- . Il suffit donc de démontrer l'inclusion :

$Z_{T_3} \subset \bar{Z}_{T_0}$. On procède de la même façon que pour l'inclusion $Z_{T_1} \subset \bar{Z}_{T_0}$ de l'exemple précédent, ce qui donne $Z_{T_3} \subset \bar{Z}_{T_0} \cup \bar{Z}_{T_2}$. ■

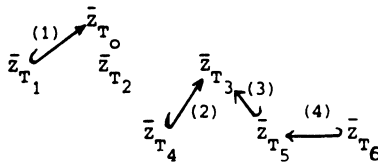
Les autres cas exceptionnels :

- 1) Nous ne disposons pas de méthode générale pour étudier la liste infinie b).
- 2) Il reste d'autre part le cas "isolé" Hilb_7^{17} . Les strates (autres que Z_{T_0}) $Z_{T_i}, i=1, \dots, 6$ sont de dimensions respectives $d_1=d_2=d_3=12, d_4=4, d_5=10, d_6=8$ ($\dim Z_{T_0} = 13$). Les deux dernières correspondent à Hilb_6^{17} dont l'irréductibilité a été prouvée.

(fig.15) Les strates de Hilb_7^{17}



Dans l'état actuel de nos connaissances la situation est la suivante :



(4) représente l'irréductibilité de Hilb_6^{17}

(2) et (3) sont assez faciles à démontrer. L'inclusion (1) est plus délicate.

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

Voici, à titre de curiosité, une esquisse de démonstration :

Un élément générique de Z_{T_1} est du type :

$I = (f_0, f_1) + \mathcal{M}^7$, où (f_0, f_1) est une touffe de type (1,1,2,2) dont on peut choisir

les générateurs de la forme suivante :

$$f_0 = l_0 l'_0 g + h_0$$

$$f_1 = l^2 g + h_1$$

avec $h_0, h_1 \in \mathcal{M}^5$, $g = \delta \delta$ et $l_0, l'_0, l, l', \delta \in R_1$

deux à deux non proportionnels.

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$l_0 l'_0 \text{ divise } h_1 + l g (\lambda l_0^2 + \mu l_0'^2)$$

(Les espaces affines $V = R_3 \langle l_0 l'_0 \rangle$, et $W = h_1 + \langle l g l_0^2, l g l_0'^2 \rangle$ sont de dimensions respectives 4 et 2 et en position générale dans R_5 de dimension 6).

Ce qui donne $Q \in R_3$ tel que :

$$h_1 + l g (\lambda l_0^2 + \mu l_0'^2) = Q l_0 l'_0$$

Soient $\tilde{l}(x, y, t), \tilde{g}(x, y, t) = \tilde{\delta} \tilde{\delta}$ déformations de l et g telles que

$$\tilde{l} \tilde{g} - l g = t^N Q \quad (N \text{ assez grand})$$

Alors la déformation suivante :

$$\begin{cases} F_0 = t^N l g + l_0 l'_0 g + h_0 \\ F_1 = \tilde{l} \tilde{g} + h_1 \\ F_2 = x^7 \quad (\text{où } x \text{ est générique}) \end{cases}$$

est plate avec $z_{I_t} \in Z_{T_0}$ pour $t \neq 0$.

En effet $(\text{in } I_t)_5 = l g \langle l_0^2, l_0 l'_0, l_0'^2 \rangle + \langle h \rangle$

avec $h = \tilde{l} l_0 l'_0 \tilde{g} - t^N h_1$ et on trouve que

$$h = l g (l_0 l'_0 + t^N (\lambda l_0^2 + \mu l_0'^2))$$

d'où $\dim (\text{in } I_t)_5 = 3$,

et on a $\dim (\text{in } I_t)_6 = \dim (\text{in } (F_0, F_1)_t)_6 \leq 5$ (type de la Fonction d'Hilbert Samuel

d'une intersection complète), ce qui implique $T(I_t) = T_0$. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [Ab] S.ABHYANKAR : Local Analytic Geometry. Academic Press, New York & London, 1964
- [A.I.K.] A.B.ALTMAN, A.IARROBINO, S.L.KLEIMAN : Irreducibility of the compactified jacobian. Proceedings of the Nordic Summer School, NAVF. Symposium in Mathematics, Oslo 1976
- [B₁] J.BRIANÇON : Weierstrass préparée à la Hironaka. Astérisque, n°7 et 8, pp 67-73, 1973
- [B₂] J.BRIANÇON : Description de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$. Inventiones Math., n°41, pp 45-89, 1977
- [B.G.] J.BRIANÇON, A.GALLIGO : Déformations distinguées d'un point de \mathbb{C}^2 ou de \mathbb{R}^2 . Astérisque, n°7 et 8, pp 129-138, 1973
- [B.G.S.] J.BRIANÇON, M.GRANGER, J.P.SPEDER : Sur le schéma de Hilbert d'une courbe plane. Annales de l'Ecole Normale supérieure, t.14, 1981
- [B.I] J.BRIANÇON, A.IARROBINO : Dimension of the punctual Hilbert Scheme. J.of Algebra, vol.n°55, n°2, Dec.1978
- [D] A.DOUDY : Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann.Inst.Fourier (Grenoble), n°16-1, pp 1-95, 1966
- [F] J.FOGARTY : Algebraic families on an algebraic surface. Amer.J. of Math., n°10, pp 511-521, 1968
- [Gf₁] T.GAFFNEY : Multiple points and associated ramification loci. AMS Proc. of symposia in Pure Mathematics, vol.40, 1982
- [Gf₂] T.GAFFNEY : Multiple points, chaining and Hilbert schemes. (A paraître)
- [Gal₁] A.GALLIGO : A propos du théorème de préparation de Weierstrass. In Fonctions de plusieurs variables complexes, lecture notes in Math. n°409, 1970-73
- [Gal₂] A.GALLIGO : Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale. Ann. Inst. Fourier, t.XXIX, fasc.2, 1979
- [Gr₁] A.GROTHENDIECK : Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : Les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki, n°221, IHP, Paris 1961
- [Gr₂] A.GROTHENDIECK : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. SGA 2, North Holland, 1968
- [H] R. HARTSHORNE : Connectedness of the Hilbert scheme. Publ. de l'I.H.E.S., n°29, pp 261-304, 1966
- [H.L.T.] H.HIRONAKA, M.LEJEUNE, B.TEISSIER : Platicateur local en géométrie analytique et applatissement local. Singularités à Cargèse, Astérisque, n°7&8, pp 441-463, 1973
- [I₁] A.IARROBINO : Punctual Hilbert schemes. Bull.Am.Math.Soc.78, pp 819-823, 1972
- [I₂] A.IARROBINO : Punctual Hilbert schemes. Mémoires of the Am.Math.Society, vol.10, n°188, 1977
- [I₃] A.IARROBINO : Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. Inventiones Math. n°15, pp 72-77, 1972
- [I₄] A.IARROBINO : Deforming Artin algebras. AMS Proc. of Symposia in Pure Maths, vol.40, 1982
- [I.E.] A.IARROBINO, J.EMSALEM : Some zero dimensional generic singularities- Finite algebras having small tangent spaces. Compositio Math., vol 36, fasc.2, pp 145-188, 1978
- [L] R.LAZARSELD : Branched coverings of projective spaces. Thesis Brown University)
- [Lk] D.LAKSOV : Deformation of determinantal schemes. Compositio Math. 30, 1975
- [S] M.SCHAPS : Deformation of Cohen Macaulay Schemes of codimension 2 & Nonsingular deformation of space curves, (preprint)
- [Te] B.TEISSIER : Déformations à type topologique constant I, Astérisque n°16, 1974
- [T] J.C.TOUGERON : Idéaux de fonctions différentiables, Springer Verlag, 1972.