

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE ELLIA

Sur les fibrés uniformes de rang $(n + 1)$ sur P^n

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 7 (1982)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1982_2_7__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

ELLIA Philippe (*)

Résumé : On sait que les fibrés vectoriels algébriques uniformes de rang au plus n sur l'espace projectif de dimension n sont homogènes et on en connaît la liste. Dans le présent travail, on établit la liste, qui ne comporte pas de surprise, des fibrés homogènes de rang $n+1$ et $n+2$ sur ce même espace projectif, et on aborde l'étude des fibrés uniformes de rang $n+1$: le résultat principal assure que ceux-ci sont homogènes si $n+1$ vaut 4, 5 ou 6 ou bien si $n+1$ est un nombre premier. Ce sont certains calculs dans des anneaux de cohomologie qui conduisent à des problèmes d'arithmétique qu'on n'a pas su résoudre sans l'hypothèse précédente sur n .

Summary : It is known that uniform algebraic vector bundles of rank at most n over a projective space of dimension n are homogeneous and listed. In the present work, we establish the list of homogeneous vector bundles of rank $n+1$ or $n+2$ over the same projective space and we start studying uniform bundles of rank $n+1$: the main result says that they are homogeneous, provided $n+1$ equals 4, 5 or 6, or is prime. Indeed, calculation in some cohomology rings leads to number theoretic questions we could not answer without such assumptions.

Table des Matières

Introduction

Chapitre 1 :	Le diagramme standard	6
Chapitre 2 :	Fibrés homogènes de rang $(n+1)$ et $(n+2)$ sur \mathbb{P}^n	10
Chapitre 3 :	La relation $(\&)$ pour les fibrés de rang $(n+1)$	19
Chapitre 4 :	Certains types de fibrés uniformes	28
Chapitre 5 :	$n = p - 1$	36
Chapitre 6 :	Fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n pour de petites valeurs de n .	51
Bibliographie		60

(*) Boursier DGRST

INTRODUCTION

Tous les fibrés en question sont vectoriels algébriques.

On note $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K)$ où K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Un fibré E sur \mathbb{P}^n est uniforme s'il existe une suite d'entiers (appelée type de scindage de E) : $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$ avec $\mu_1 > \dots > \mu_k$, telle que pour toute droite ℓ de \mathbb{P}^n : $E/\ell \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_\ell(\mu_i)$.

La classification de ces fibrés est connue dans certains cas :

THÉOREME 0 : ([vdV], [Sa], [Ele,1], [E-H-S]) :

Pour $r \leq n$, $n \geq 2$ et pour $r=3$, $n=2$, les fibrés uniformes de rang r sur \mathbb{P}^n sont (à isomorphisme près) : $\bigoplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(a)$, $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(b)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\alpha) \oplus T_{\mathbb{P}^2}(\beta)$, $S^2 T_{\mathbb{P}^2}(\gamma)$.

En particulier tous ces fibrés sont homogènes (c'est-à-dire invariants sous les automorphismes de \mathbb{P}^n). Il est d'ailleurs facile de voir que tout fibré homogène est uniforme, mais la réciproque est fautive : il existe des fibrés uniformes sur \mathbb{P}^n non homogènes en rang élevé ($\geq 2n$) (cf. [Ele,2], [E-H-S], [El1], [Dr]).

Le problème de la classification et de l'homogénéité des fibrés uniformes de rang r sur \mathbb{P}^n reste donc ouvert si :

$$n+1 \leq r < 2n, \quad n \geq 3.$$

La principale contribution de ce travail peut se résumer dans les énoncés suivants :

THÉOREME I : Les fibrés homogènes sur \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) de rang $(n+1)$ sont (à isomorphisme près) : $\bigoplus r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$, $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

THÉOREME II : Les fibrés homogènes sur \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) de rang $(n+2)$ sont soit somme directe d'un fibré homogène de rang $(n+1)$ avec un fibré en droites, soit isomorphes à $\Lambda^2 T_{\mathbb{P}^4}(a)$.

THÉOREME III : Pour $n=3,4,5$ et $n=p-1$ où p est un nombre premier, les fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n sont homogènes.

En ce qui concerne les deux premiers théorèmes leur démonstration est purement géométrique et repose sur le "diagramme standard" (I;§1). Le point de départ est le lemme (II;1.1) qui assure que les restrictions aux fibres de p (lesquelles s'identifient à des \mathbb{P}^{n-1}) des fibrés de la filtration relative de Harder-Narasimhan (I;§1)

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

sont encore homogènes. L'étude de la restriction des suites exactes de la filtration permet alors de déterminer les fibrés associés, E_i , et donc (par I;§4 et II;1.3) le fibré E en question.

Pour la démonstration du théorème III la méthode suivie est essentiellement celle de [E-H-S]. On associe, de façon naturelle, à tout fibré uniforme E de rang $(n+1)$ et de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$ une relation :

$$(\&) \quad P(T,U) + xU^{n+1} + (aT + bU + cU) \cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

où : $P(T,U) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T$, les c_i étant les classes de Chern de E .

Les $S_i(T,U,V)$ sont des polynômes homogènes de degré r_i , symétriques en U et V ; x, a, b, c sont des entiers et $R(U,V)$ est le polynôme $(U^{n+1} - V^{n+1}) / (U - V)$ (cf. I;3.2, III;1.1).

La relation $(\&)$ est donc une condition topologique nécessaire à l'existence de fibrés uniformes d'un type de scindage donné. C'est par l'étude de cette relation que l'on classe les fibrés uniformes.

On se limite aux types de scindage consécutifs (i.e. : $\mu_i - \mu_{i+1} = 1, 1 \leq i \leq k-1$).

Cette restriction est sans conséquence (si car $(K) = 0$) sur la classification en rang $(n+1)$ (III;§2).

A ce sujet notons que (I;4.1) mesure la différence, du moins en ce qui concerne les fibrés uniformes, entre la caractéristique nulle et la caractéristique positive (cf. [Ein] qui classe les fibrés uniformes de rang n sur \mathbb{P}^n en caractéristique p).

On résout $(\&)$ avec l'hypothèse supplémentaire $c = 0$ (III;§2). Pour cela on se ramène notamment à une équation de degré n pour laquelle on peut utiliser les résultats de ([E-H-S]). Il s'agit maintenant de reconnaître parmi les solutions ainsi obtenues celles qui correspondent à des fibrés et, par-là même, identifier ces fibrés.

Pour mener à bien ce passage de la topologie à la géométrie, on utilise les méthodes standard de ([VdV], [Ele,1], [E-H-S]) : images directes, restriction, théorème de Riemann-Roch.

Les propositions de (I;§4) jouent un rôle primordial : (I;4.2) traite le type de scindage $k = 1$: un fibré dont la restriction à toute droite est isomorphe à $r \cdot \mathcal{O}_\ell$ est trivial. Pour reconnaître les sommes directes de fibrés en droites $\oplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, on dispose de (I;4.3) : si tous les fibrés associés à E ont leur première classe de Chern nulle, alors E est décomposé.

La proposition (I;4.4), quant à elle, donne une condition nécessaire et suffisante sur p^*E , pour que E ait comme sous-fibré un translaté convenable de $T_{\mathbb{P}^n}$: ceci permet de traiter les types de scindage avec $r_1 = 1$ (ou $r_k = 1$).

Finalement il a fallu, pour les types de scindage avec $r_1 = 2$, utiliser dans ce contex-

te une proposition de ([Ba-VdV]) concernant les fibrés uniformes de rang deux sur $G(1,n)$, (cf. I;4.5).

A l'aide de tout cet arsenal on obtient le résultat suivant :
 en premier lieu, parmi les solutions algébriques trouvées il y en a une qui ne correspond pas à un fibré uniforme (III;2.2.2.b). Ceci est un fait nouveau qui ne se produit pas pour $r \leq n$ et $r = 3$. Par contre les autres solutions de (&) avec $c = 0$ correspondent à tous les fibrés "attendus" (III;2.4).
 Ainsi pour démontrer le théorème suffit-il de prouver que, si c est non nul, les solutions algébriques de (&) vérifient $k = 1$.

Pour résoudre la relation (&) quand c est non nul on introduit la notion de "solutions primitives" c'est-à-dire de diviseurs symétriques $S_i(T,U,V)$ tels que $S_i(0,1,v) = 0$ ait pour solution une "bonne" racine de $x_i + (b_i + cv) R(1,v)$ (cf. par exemple V;§1).

On peut montrer en effet que si (&) admet une solution primitive et si certaines conditions arithmétiques (sur c et b_i) sont vérifiées, les c_i ont alors une forme très simple (cf. V;1,2) pour laquelle on prouve $k = 1$ (cf. V;§6).

La difficulté principale est de montrer l'existence de ces solutions primitives.

Pour cela on s'intéresse au cas où n est de la forme $p - 1$ (p un nombre premier). Ceci parce que l'irréductibilité de $R(1,v)$ permet de montrer l'existence de "solutions primitives" (V;§3). Une solution primitive une fois choisie, on est conduit à étudier les conditions arithmétiques, sur c et b_i , qui sont l'obstruction à calculer les c_i . Par des arguments de la théorie des corps cyclotomiques, on montre que ces conditions sont en défaut si et seulement si : $cb_i = 0$, $c = \pm b_i$ (V;§4). Ces cas "pathologiques" (à part $c = 0$ déjà traité) sont étudiés en (V;§5). En utilisant, entre autre choses, l'irréductibilité de certains polynômes cyclotomiques (car $n = p - 1$) on montre que les solutions algébriques correspondantes vérifient : $k = 1$ ou $k = 2$, $r_1 = 1$ ($r_2 = 1$). Dans le dernier cas le passage à la géométrie se fait par (IV;§2). C'est en (V;§6) que l'on conclut la démonstration du théorème en prouvant que si toutes les conditions arithmétiques sont vérifiées alors $k = 1$. Là en particulier, la restriction aux types de scindage consécutifs se révèle décisive.

Au cours de la démonstration on est amené à étudier certains fibrés uniformes de types de scindage particuliers (par ex. : $k = 2$, $r_1 = 1$ voir plus haut, cf. aussi V;2.2, V;5.2.2). Cette étude dont les résultats sont regroupés en IV, s'est étendue à-delà des besoins strictement nécessaires à d'autres types de scindage et non seulement au rang $(n + 1)$. Par exemple on montre (IV;1.1) :

PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang r sur \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) de type de scindage ($k = r$; $r_1 = 1$; μ_1) alors : $E \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

Pour cela on utilise les méthodes géométriques standard mais en se ramenant, par restriction à des sous-ensembles judicieux, à des situations simples (IV;1.1;IV;2.2; IV;4.2).

En (VI), par des calculs explicites, on traite les petites valeurs de n ($n=3,4,5$) en montrant que $c=0$, se ramenant ainsi à la situation de (III).

•

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à A.Hirschowitz, qui a su me guider tout au long de ce travail avec autant de générosité que de gentillesse.

•

Note ajoutée aux épreuves : Dans ([Ba-Ell]) en utilisant la méthode et les résultats de (II) on donne la classification des fibrés homogènes sur \mathbb{P}^n ($n \geq 2$) de rang au plus $2n-1$.

CHAPITRE I

LE DIAGRAMME STANDARD

- § 1) La filtration HN^* pour les fibrés uniformes
- § 2) La variété F
- § 3) La relation (\mathcal{E})
- § 4) Quelques propositions

§1. La filtration HN^* pour les fibrés uniformes

I - 1.1 : La filtration de Harder-Narasimhan sur \mathbb{P}^1 .

Tout fibré E sur \mathbb{P}^1 est muni d'une filtration naturelle $HN^*(E)$.
 En effet soit $E \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mu_i)$, $\mu_1 > \dots > \mu_k$, alors le j -ème terme, $HN^j E$, de cette filtration est l'unique sous-fibré de E isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^j r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mu_i)$. Cette filtration n'est autre que celle de Harder-Narasimhan ([Ha-Na]).

I - 1.2 : La filtration de Harder-Narasimhan relative.

Soit $G(1,n)$ la grassmannienne des droites de \mathbb{P}^n et F_n la variété d'incidence :
 $F_n := \{(x, d_\ell) \in \mathbb{P}^n \times G(1,n) / x \in \ell\}$, ℓ désigne une droite de \mathbb{P}^n et d_ℓ le point correspondant de $G(1,n)$.

$p: F_n \rightarrow \mathbb{P}^n, q: F_n \rightarrow G(1,n)$ sont les projections. On obtient ainsi le diagramme "standard":
 $G(1,n) \xleftarrow{q} F_n \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n$.

Les fibres de p s'identifient à des espaces projectifs de dimension $(n-1)$ (cf. §2) et p induit un isomorphisme entre $q^{-1}(d_\ell)$ et ℓ . Par la suite, à moins d'une confusion possible, nous écrirons plus simplement G, F au lieu de $G(1,n), F_n$. Soit maintenant E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^n . Pour chaque droite ℓ de \mathbb{P}^n , $E|_\ell$ est muni d'une filtration naturelle. Ces différentes filtrations s'organisent sur F en une filtration globale de p^*E , plus précisément :

I - 1.3 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^n de type de scindage

$(k; r_1 \dots r_k ; \mu_1 \dots \mu_k)$ alors on associe à E , de façon naturelle, des fibrés E_i de rang r_i sur G tels que p^*E admette une filtration, par des sous-fibrés, de gradué associé

$$\bigoplus_{i=1}^k [q^* E_i \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)].$$

On notera $HN^j p^*E$ (ou même HN^j si aucune confusion n'est à craindre) le j -ème terme de la filtration, il est donné par :

$$HN^j p^*E := \text{Im} [q^* q_* p^* E(-\mu_j) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_j) \longrightarrow p^* E].$$

Pour plus de détails cf. ([E-H-S]).

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

§2. La variété F

I - 2.1 : Cohomologie entière de F.

On rappelle ici la description de la cohomologie de F donnée dans ([E-H-S]).

On a les fibrés tautologiques suivants :

- ω le sous-fibré tautologique de rang 2 sur G,
- N le fibré quotient tautologique de rang $(n-1)$ sur G,
- H le sous-fibré tautologique (de Hopf) de rang 1 sur \mathbb{P}^n
- Q le fibré quotient tautologique de rang n sur \mathbb{P}^n .

De façon naturelle F s'identifie à $\mathbb{P}(Q)$ et ceci détermine le fibré de Hopf relatif à Q noté H_Q .

On introduit les classes de Chern :

$U := c_1(p^*H)$, $V := c_1(H_Q)$ et on définit le polynôme :

$$R(X, Y) := X^n + \dots + X^{\ell} Y^{n-\ell} + \dots + Y^n.$$

On a alors :

I - 2.1.1 : PROPOSITION :

- (a) Le morphisme naturel, π , de $\mathbb{Z}[U, V]$ dans $H^*(F, \mathbb{Z})$ identifie $H^*(F, \mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}[U, V] / (R(U, V), U^{n+1})$.
- (b) La sous-algèbre $p^*H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ est l'image par π de l'algèbre des polynômes indépendants de V.
- (c) La sous-algèbre $q^*H^*(G, \mathbb{Z})$ est l'image par π de l'algèbre des polynômes symétriques en U et V.

Démonstration : cf. ([E-H-S]).

Rappelons un autre résultat de ([E-H-S]) :

I - 2.2 : PROPOSITION : Le groupe de Picard de F est le groupe libre (commutatif) engendré par p^*H et H_Q .

I - 2.3 : Restriction de la filtration HN^* aux fibres de p.

Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^n et $(HN^i)_{1 \leq i \leq k}$ les termes de la filtration de Harder-Narasimhan relative de p^*E . Cette filtration fournit les suites exactes :

$$0 \rightarrow HN^i \rightarrow HN^{i+1} \rightarrow q^*E_{i+1} \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_{i+1}) \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

On rappelle que les fibres de p s'identifient de façon naturelle à des espaces projectifs de dimension $(n-1)$ ($p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_x)$). On note $\mathcal{H}^i := HN^i|_{p^{-1}(x)}$ et $\mathcal{E}_i := q^*E_i|_{p^{-1}(x)}$.

Par restriction, on a les suites exactes : $0 \rightarrow \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{H}^{i+1} \rightarrow \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq k-1$.

Si $S(T,U,V) = T^r + T^{r-1} A_1(U+V) + \dots + T^{r-i} [A_i(U^i + V^i) + \dots] + \dots$ est le polynôme de Chern de $q^* E_{i+1}$ (cf. I;3.1) alors les classes de Chern de \mathbb{E}_{i+1} , considéré comme fibré sur $\mathbb{P}^{n-1} \cong p^{-1}(x)$, sont données par : $c_i = A_i$, $1 \leq i \leq n-1$. En effet $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1))$ est trivial sur les fibres de p et $H_{\mathbb{Q}}|_{p^{-1}(x)} \cong \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)$. De plus, remarquons que $\mathcal{H}^k \cong \text{rg}(E) \cdot \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$ car $H^k \cong p^* E$. ■

I - 2.4 : "Sous-diagramme" standard induit par un plan.

Soit P un plan de \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) alors P induit un "sous-diagramme" du diagramme standard : $P^* \xleftarrow{q'} F_2 \xrightarrow{p'} P, (D_P)$, où : $F_2 = q^{-1}(P^*)$, q' et p' sont les restrictions de q et p . F_2 s'identifie à $\mathbb{P}(Q_P)$ où Q_P désigne le fibré quotient tautologique de rang 2 sur P ; (D_P) est le diagramme standard pour P .

Sur F_2 nous avons les fibrés : $p'^*(H_P)$ et H_{Q_P} .

H_P est le sous-fibré tautologique de rang 1 sur P .

H_{Q_P} est le fibré de Hopf relatif à Q_P .

Soient : $\mathcal{U} = c_1(p'^* H_P)$, $\mathcal{V} = c_1(H_{Q_P})$ et i l'injection de F_2 dans F . Il est clair que : $i^*(p^* H) \cong p'^* H_P$ et $i^*(H_Q) \cong H_{Q_P}$. En particulier : $c_1(i^*(p^* H)) = i^*(c_1(p^* H))$ ce que l'on peut écrire : $\mathcal{U} = U|_{F_2}$, de même : $\mathcal{V} = V|_{F_2}$. En combinant avec (I;2.1.1) :

I - 2.4.1 : PROPOSITION : Le morphisme $H^*(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(F_2, \mathbb{Z})$ induit par la restriction s'identifie au morphisme naturel :

$$\mathbb{Z}[U, V] / (U^{n+1}, R_n(U, V)) \longrightarrow \mathbb{Z}[U, V] / (U^3, R_2(U, V)).$$

§3. La relation (&)

I - 3.1 : Polynôme de Chern.

A tout fibré topologique E , de rang r sur X on associe son polynôme de Chern : $\mathcal{C}_E(T) = : T^r - c_1(E) T^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r(E)$. On a alors les relations suivantes :

a) Si L est un fibré en droites sur X , alors :

$$\mathcal{C}_{E \otimes L}(T) = \mathcal{C}_E(T - c_1(L)).$$

b) Si E est filtré de sorte que le gradué associé soit $\bigoplus_i E_i$,

$$\text{alors : } \mathcal{C}_E = \prod_i \mathcal{C}_{E_i}.$$

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

I - 3.2 : La relation (&)

Soit maintenant E un fibré uniforme de rang r sur \mathbb{P}^n .

Soit $P(T,U) = T^r + c_1 U T^{r-1} + c_2 U^2 T^{r-2} + \dots$ le polynôme de Chern de p^*E , où les c_i sont les classes de Chern de E , alors d'après (I;1.3) et (I;2.1.1) on a une relation dans $\mathbb{Z}[T,U,V]$:

$$(\&) \quad P(T,U) + Q(T,U,V) \cdot U^{n+1} + M(T,U,V) R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

$Q(T,U,V)$ est un polynôme homogène de degré $r - n - 1$

$M(T,U,V)$ est un polynôme homogène de degré $r - n$

$S_i(T,U,V)$ est le polynôme de Chern de q^*E_i (il est donc homogène de degré r_i et symétrique en U et V).

§4. Quelques propositions

Dans les propositions suivantes, E désigne un fibré uniforme de rang r sur \mathbb{P}^n , de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$.

I - 4.1 : PROPOSITION : Supposons qu'il existe un indice j , $1 \leq j < k$, tel que

$\mu_{j+1} - \mu_j \leq -2$, alors E est extension de deux fibrés uniformes de rang $r_1 + \dots + r_j$ et $r_{j+1} + \dots + r_k$; (cf. [E-H-S]).

I - 4.2 : PROPOSITION : Si $k = 1$, alors $E \cong r_1 \cdot \emptyset_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$; (cf. [E-H-S]).

I - 4.3 : PROPOSITION : Si les premières classes de Chern des fibrés associés :

$c_1(E_1), \dots, c_1(E_k)$ sont nulles, alors E est somme directe de fibrés en droites; (cf. [E-H-S]).

I - 4.4 : PROPOSITION : E a un sous-fibré isomorphe Q si et seulement si p^*E a un sous-fibré isomorphe à H_Q . En particulier :

i) Si $r_1 = 1$ et $q^*(c_1(E_1)) = U + V$, alors E admet un sous-fibré isomorphe à $Q(\mu_1 - 1)$.

ii) Si $r_k = 1$ et $q^*(c_1(E_k)) = -U - V$, alors E admet un quotient isomorphe à $Q^*(\mu_k + 1)$ (cf. [E-H-S]).

I - 4.5 : PROPOSITION : Soit $\&$ un fibré de rang deux sur $G(1,n)$, $n \geq 3$, tel que pour tout x de \mathbb{P}^n , $q^*\&|_{\mathbb{P}^{-1}(x)}$ soit décomposable. Alors soit $\&$ est lui-même décomposable, soit $\& \cong \omega(h)$, $h \in \mathbb{Z}$ (cf. [Ba-vdV]).

CHAPITRE II

FIBRÉS HOMOGENES DE RANG (n+1) et (n+2) SUR \mathbb{P}^n

- § 1) Préliminaires
 § 2) Démonstration du théorème

•

§1. Préliminaires

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème :

THÉORÈME : Les fibrés homogènes sur \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) de rang (n+1) et (n+2) sont (à isomorphisme près) :

$$\bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i), T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b), \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d), \\ T_{\mathbb{P}^n}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\beta) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\gamma), \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\delta) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\epsilon) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\xi), \Lambda^2 T_{\mathbb{P}^n}(\eta).$$

Le point de départ de la démonstration est le lemme (II;1.1) qui assure que la restriction aux fibres de p des fibrés fournis par la filtration relative de Harder-Narasimhan est encore homogène. Dès lors la méthode consiste à étudier la restriction aux fibres de p des suites exactes :

$$(HN^i) \ 0 \rightarrow HN^i(E) \rightarrow HN^{i+1}(E) \rightarrow q^* E_{i+1} \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_{i+1}) \rightarrow 0, \quad 1 \leq i < k$$

fournies par la filtration HN^* et par-là déterminer les fibrés E_i . On conclut ensuite à l'aide des propositions de (I;§4) et de la proposition (II;1.3).

Finalement remarquons que cette méthode peut vraisemblablement s'étendre aux rangs supérieurs.

II - 1.1 : LEMME : Soit E un fibré homogène sur \mathbb{P}^n . On note $\mathcal{E}_i(x)$, $\mathcal{H}^i(x)$ les restrictions à $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ des fibrés $q^* E_i$, $HN^i(E)$ associés par la filtration relative de Harder-Narasimhan. Alors, pour tout x de \mathbb{P}^n , $\mathcal{E}_i(x)$ et $\mathcal{H}^i(x)$ sont homogènes.

Démonstration : Soit σ un automorphisme de \mathbb{P}^n laissant x invariant. Cet automorphisme σ opère sur $F(\sigma_F)$, sur $G(\sigma_G)$ et sur $p^{-1}(x)(\sigma_x)$. Par homogénéité de E et par unicité de la filtration HN^* on a :

$\sigma_G^* E_i \cong E_i$ et $\sigma_F^* HN^i \cong HN^i$, d'où, par changement de base, $\sigma_x^* \mathcal{E}_i(x) \cong \mathcal{E}_i(x)$ et $\sigma_x^* \mathcal{H}^i(x) \cong \mathcal{H}^i(x)$. Pour conclure il reste à observer que tout automorphisme de $p^{-1}(x)$ provient d'un automorphisme de \mathbb{P}^n laissant x invariant. ■

Avec la même démonstration mais en considérant cette fois un automorphisme σ vérifiant $\sigma(x) = y$, on obtient :

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

II - 1.2 : LEMME : Avec les hypothèses et les notations de (II;1.1), si x et y sont deux points distincts de \mathbb{P}^n alors $\mathcal{E}_i(x) \cong \mathcal{E}_i(y)$ et $\mathcal{K}^i(x) \cong \mathcal{K}^i(y)$.

II - 1.3 : PROPOSITION : Soit \mathcal{F} un fibré sur $G(1,n)$ ($n \geq 3$) tel que, pour tout x de \mathbb{P}^n , $q^*\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1(x)}$ soit isomorphe à $T_{\mathbb{P}^1(x)}(-1)$. Alors $\mathcal{F} \cong N$ (N désigne le fibré quotient tautologique sur $G(1,n)$).

Démonstration : On considère les variétés :

$F' := \{(x,d,H) / x \in d, d \subset H\}$, $F'' := \{(x,H) / x \in H\}$; x,d,H désignent respectivement un point, une droite et un plan de \mathbb{P}^n .

Dans le diagramme : $F'' \xleftarrow{\beta} F' \xrightarrow{\alpha} F$, β et α désignent les projections naturelles.

On a une identification : $F' \cong \mathbb{P}(q^*N)$ qui permet de définir le fibré de Hopf relatif à q^*N , on le note \mathcal{H} . Soit $\mathcal{E} := q^*\mathcal{F} \otimes H_Q$ (H_Q est le fibré de Hopf relatif à : $F \cong \mathbb{P}(Q) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n$). Par le théorème de changement de base, $\mathcal{L} := \beta^* \beta_* \alpha^* \mathcal{E}$ est un sous-fibré de rang un de $\alpha^* \mathcal{E}$. D'autre part, $\text{Pic}(F')$ est isomorphe au groupe libre commutatif engendré par \mathcal{H} , $\alpha^* p^* \mathcal{O}(-1)$, $\alpha^* H_Q$: pour le voir il suffit d'adapter la démonstration de ([E-H-S], prop. 2.3) en remarquant $H^*(F', Z) \cong Z[U, V, W] / (U^{n+1}, R(U, V), \sum_{n-1} (W, U, V))$ où $R(U, V) := (U^{n+1} - V^{n+1}) / (U - V)$, $\sum_{n-1} (W, U, V) = \sum_{r+s+t=n-1} W^r U^s V^t$ (appliquer Hirsch-Leray à : $F' \cong \mathbb{P}(q^*N) \rightarrow F$). Ainsi \mathcal{L} est de la forme : $\mathcal{H}^{\otimes a} \otimes \alpha^* p^* \mathcal{O}(-k) \otimes \alpha^* H_Q^{\otimes b}$. En restreignant à une fibre de β il vient $a=b$, en restreignant à une fibre de α : $a=1$. On voit donc que \mathcal{H} est un sous-fibré de $\alpha^*(q^*\mathcal{F} \otimes p^*\mathcal{O}(k))$. Ceci fournit une injection : $0 \rightarrow q^*N \rightarrow q^*\mathcal{F} \otimes p^*\mathcal{O}(k)$, en effet, il suffit d'utiliser le résultat suivant :

II - 1.4 : LEMME : Soit $E \rightarrow X$ un fibré sur la variété X . \mathcal{H} désigne le fibré de Hopf relatif à $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$. Alors un fibré F sur X admet un sous-fibré isomorphe à E si et seulement si π^*F admet un sous-fibré isomorphe à \mathcal{H} .

Démonstration : cf. [E-H-S] prop. (3.5)

Comme $\text{rang } \mathcal{F} = \text{rang } N$, la proposition (II;1.3) est démontrée. ■

Par la suite nous utiliserons fréquemment la proposition suivante :

II - 1.5 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme \mathbb{P}^n ($n \geq 3$). Supposons qu'il existe un point x de \mathbb{P}^n tel que tous les fibrés $\mathcal{E}_i(x)$ soient entièrement décomposés alors E , lui aussi, est somme directe de fibrés en droites.

Démonstration : Désignons par $(HN^i(x))$ la restriction $p^{-1}(x)$ de la i -ème suite exacte fournie par la filtration HN^* . D'après nos hypothèses et comme $n-1 \geq 2$, toutes les suites exactes $(HN^i(x))$ sont scindées.

En particulier pour $(HN^{k-1}(x))$ on aboutit à :

$$\bigoplus_{i=1}^k \left(\bigoplus_{j=1}^{r_i} \theta_{p^{-1}(x)}(a_j^i) \right) \cong r \cdot \theta_{p^{-1}(x)}$$

d'où l'on déduit : $a_j^i = 0$ pour tout i et j . Ceci montre :

$c_1(E_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$, on conclut avec (I;4.3). ■

II - 1.6 : Pour la commodité du lecteur voici quelques calculs de cohomologie que nous utiliserons constamment par la suite :

Pour $n \geq 3$ et a appartenant à \mathbb{Z} :

$$h^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 1 \\ n(n+1)/2 & \text{si } a = 2 \\ \geq n(n+1)(n+2)/3 & \text{si } a \geq 3 \end{cases} \text{ avec égalité si et seulement si } a = 3.$$

$$h^1(\mathbb{P}^n, \Omega^1(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$h^0(\mathbb{P}^n, T(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < -1 \\ n+1 & \text{si } a = -1 \\ \geq n(n+2) & \text{si } a \geq 0, \text{ avec égalité si et seulement si } a = 0. \end{cases}$$

$$h^1(\mathbb{P}^n, T(a)) = 0, \text{ pour tout } a \text{ dans } \mathbb{Z}.$$

$$h^0(\mathbb{P}^n, \theta(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ \binom{n+a}{a} & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

$$h^1(\mathbb{P}^n, \theta(a)) = 0, \text{ pour tout } a \text{ dans } \mathbb{Z}. \text{ (Cf. par exemple [O-S-S]).}$$

§2. Démonstration du théorème

Remarquons d'abord que grâce aux résultats de (VI,§1) et de [Ball-Ell] on peut se limiter à démontrer le théorème pour les valeurs de n supérieures ou égales à quatre. Ensuite, par dualité, il suffit d'étudier les types de scindages suivants:

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

- 1) $r_i < n-1$, pour tout i , $1 \leq i \leq k$
- 2) $r_k = n-1$
- 3) $k=2$, $r_1=2$, $r_2=n$
- 4) $k=3$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=n$
- 5) $k=3$, $r_1=1$, $r_2=n-1$, $r_3=2$
- 6) $k=3$, $r_1=1$, $r_2=n$, $r_3=1$
- 7) $k=4$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=n-1$, $r_4=1$
- 8) $k=2$, $r_1=1$
- 9) $k=3$, $r_1=1$, $r_2=n-1$, $r_3=1$.

Les cas 8) et 9) sont traités en (IV;§2) et (IV;§4) respectivement.

Notations : $\mathcal{E}_i(x) := q^* E_i | p^{-1}(x)$, $\mathcal{H}^i(x) := \text{HN}^i(E) | p^{-1}(x)$.

$(\text{HN}^i(x))$ désigne la restriction à $p^{-1}(x)$ de la suite exacte (HN^i) :

$$(\text{HN}^i(x)) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H}^i(x) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(x) \rightarrow \mathcal{E}_{i+1}(x) \rightarrow 0, \quad i \leq i < k.$$

II - 2.1 : $r_i < n-1$, pour tout i , $1 \leq i \leq k$.

Ce cas est entièrement réglé par la proposition suivante :

II - 2.1.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré homogène de rang r sur \mathbb{P}^n ($n \geq 3$), de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$ avec $r_i < n-1$, pour tout i , $1 \leq i \leq k$,

alors :

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i).$$

Démonstration : D'après (II;1.1) les fibrés $\mathcal{E}_i(x)$ sont homogènes et, par hypothèse, de rang strictement inférieur à $n-1$: ils sont donc sommes directes de fibrés en droites ([Sa]). On conclut avec (II;1.5). ■

II - 2.1.2 : Remarque : Voir (IV;1.2).

II - 2.2 : $r_k = n-1$.

II - 2.2.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré homogène de rang r sur \mathbb{P}^n ($n \geq 4$) de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$. Si $r \leq 2n-2$ et si $r_k = n-1$ alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i),$$

$$\bigoplus_{i=1}^{k-2} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) \oplus (r_{k-1} - 1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_{k-1}) \oplus \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}(-1 + \mu_k), \quad \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1 + \mu_1) \oplus (n-2) \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2), \quad (\Lambda^2 \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}) (\mu_1 - 3).$$

Démonstration : Considérons $(\mathbb{H}\mathbb{N}^{k-1}(x))$:

$0 \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(x) \rightarrow r \cdot \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}_k(x) \rightarrow 0$. D'après (II,1.1) et ([E-H-S]), $\mathcal{E}_k(x)$ est isomorphe à l'un des fibrés : $T(a), \Omega^1(b), \oplus \mathcal{O}(a_i)$; de même $\mathcal{H}^{k-1}(x)$ est de la forme : $\oplus \mathcal{O}(\alpha_i)$ ou $T(\alpha), \Omega^1(\beta)$ (il faut alors $r = 2n-2$).

De plus remarquons que $\mathcal{E}_k(x)$ est engendré par ses sections globales avec $h^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{E}_k(x)) \leq r+1 \leq 2n-1$ (car $h^1(\mathcal{H}^{k-1}(x)) \leq 1$ dans tous les cas).

Examinons maintenant les différentes possibilités :

(a) Supposons : $\mathcal{E}_k(x) \cong T(a)$. Comme $\mathcal{E}_k(x)$ est engendré par ses sections globales avec $h^0(\mathcal{E}_k(x)) \leq 2n-1$, on déduit : $a = -1$. En comparant les classes de Chern dans $(\mathbb{H}\mathbb{N}^{k-1}(x))$ il vient : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \mathcal{O}(-1) \oplus (r-n)\mathcal{O}$. (On ne peut avoir $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \Omega^1(1)$: considérer la suite longue de cohomologie associée à : $0 \rightarrow \Omega^1(1) \rightarrow r \cdot \mathcal{O} \rightarrow T(-1) \rightarrow 0$).

Maintenant, d'après (II;1.3) (et aussi II;1.2) : $E_k \cong N$.

Ainsi en appliquant p_* à $\mathbb{H}\mathbb{N}^{k-1}$ il vient :

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow E \rightarrow T_{\mathbb{P}}(-1 + \mu_k) \rightarrow 0 \quad (\star)$$

$(R^1 p_* \mathbb{H}\mathbb{N}^{k-1} = 0 \text{ car } \mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \mathcal{O}(-1) \oplus (r-n)\mathcal{O})$.

En restreignant (\star) à une droite ℓ on a :

$\mathcal{G}|_{\ell} \cong \bigoplus_{i=1}^{k-2} r_i \cdot \mathcal{O}_{\ell}(\mu_i) \oplus (r_{k-1}-1) \cdot \mathcal{O}_{\ell}(\mu_{k-1})$, \mathcal{G} est uniforme, de rang strictement inférieur à n et par suite ([Sa]) entièrement décomposé. Pour que (\star) scinde il suffit que $h^1(\mathbb{P}^n, \Omega^1(1 - \mu_k) \otimes \mathcal{G}) = 0$, ce qui est vérifié car $1 - \mu_k + \mu_i$ est non nul pour $1 \leq i \leq k-1$.

(b) Supposons $\mathcal{E}_k(x) \cong \oplus \mathcal{O}(a_i)$. Toujours avec les mêmes arguments on obtient :

$$\mathcal{E}_k(x) \cong (n-1) \cdot \mathcal{O} \text{ ou } \mathcal{E}_k(x) \cong \mathcal{O}(1) \oplus (n-2) \cdot \mathcal{O}.$$

Dans le premier cas on déduit sans peine : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong (r-n-1) \cdot \mathcal{O}$ et par suite :

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i).$$

Dans le second cas on a : $r = 2n-2$ (sinon $\mathbb{H}\mathbb{N}^{k-1}$ serait scindée) et d'après les premières classes de Chern : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \Omega^1(1)$.

Remarquons que dans cette situation, on a forcément $k = 2$ (sinon $\mathbb{H}\mathbb{N}^{k-2}(x)$ serait scindée). En appliquant p_* à $(\mathbb{H}\mathbb{N}^1)^{\vee}$ on obtient (cf. (a)) :

$$E \cong \Omega^1(1 + \mu_1) \oplus (n-2) \cdot \mathcal{O}(\mu_2).$$

(c) Si $\mathcal{E}_k(x) = \Omega^1(b)$, alors $b \geq 2$ (car $\mathcal{E}_k(x)$ est engendré par ses sections globales). De $h^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{E}_k(x)) \leq 2n-1$, on déduit : $n = 4$ et $b = 2$ (cf. II;1.6). Si $\mathcal{H}^{k-1}(x)$ est somme directe de fibrés en droites alors $(\mathbb{H}\mathbb{N}^{k-1}(x))$ est scindée, ce qui est absurde.

Si $\mathcal{H}^{k-1}(x)$ est indécomposable, d'après les premières classes de Chern, on déduit : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong T_{\mathbb{P}^3}(-2)$. Comme ce fibré n'est pas extension de fibrés homogènes

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

de rang au plus deux, (II;1.1) assure $k=2$.

D'après (II;1.3), $HN^1(x)$ s'écrit $0 \rightarrow q^* N(-1) \rightarrow p^* E(-\mu_1) \rightarrow q^* N^*(1) \otimes p^* \mathcal{O}(-1) \rightarrow 0$.

Par image directe, on trouve $E(1-\mu_1) \cong p_* q^*(N^*(1))$. Ce fibré ne peut être que $\Lambda^2(T(-1))$ puisque celui-ci vérifie les hypothèses de la proposition. ■

II - 2.2.2: Remarque : La proposition précédente règle largement le cas 2) et le théorème est démontré pour le rang (n+1).

II - 2.3 : $k=2, r_1=2, r_2=n$.

II - 2.3.1: PROPOSITION : Tout fibré homogène E sur \mathbb{P}^n ($n \geq 4$) de type de scindage ($k=2; r_1=2, r_2=n; \mu_1, \mu_2$) est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\bigoplus_{i=1}^2 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i), \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2).$$

Démonstration : Soit $(HN^1(x)) : 0 \rightarrow \mathcal{E}_1(x) \rightarrow (n+2) \cdot \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}_2(x) \rightarrow 0$

$\mathcal{E}_2(x)$ est homogène de rang n sur $\mathbb{P}^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ donc (cf. II;2.2.2) de l'une des formes suivantes : $\mathcal{O}(a_i), T(a) \oplus \mathcal{O}(b), \Omega^1(c) \oplus \mathcal{O}(d)$.

Si $\mathcal{E}_2(x)$ est somme directe de fibrés en droites, il en est de même de E (II;1.5).

Avec les mêmes arguments qu'en (II,2.2.1) on voit qu'il suffit de traiter le cas suivant :

$$\mathcal{E}_1(x) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \text{ et } \mathcal{E}_2(x) \cong T(-1) \oplus \mathcal{O}.$$

Dès lors, d'après (I;4.5), E_1 est isomorphe à l'un des deux fibrés suivants: $\omega_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-1)$.

i) $E_1 \neq \omega$.

Dans le cas contraire, en dualisant (HN^1) , il viendrait :

$$0 \rightarrow q^* E_2^* \otimes p^* \mathcal{O}(-\mu_2) \rightarrow p^* E^* \rightarrow q^* \omega^* \otimes p^* \mathcal{O}(-\mu_1) \rightarrow 0.$$

On a : $p_* q^* E_2^*$ est un fibré de rang un, soit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$, et $R^1 p_* q^* E_2^* = 0$ (car $\mathcal{E}_2^*(x) \cong \Omega^1(1) \oplus \mathcal{O}$).

$p_* q^* \omega^* \cong (n+1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (considérer la suite exacte : $0 \rightarrow q^* N^* \rightarrow (n+1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow q^* \omega^* \rightarrow 0$).

En appliquant p_* à $(HN^1)^*$: $0 \rightarrow \mathcal{O}(a-\mu_2) \rightarrow E^* \rightarrow (n+1) \cdot \mathcal{O}(-\mu_1) \rightarrow 0$, et donc $E \cong \bigoplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, ce qui est absurde si $E_1 \neq 2 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$.

ii) Si $E_1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-1)$.

Sous cette hypothèse, $q^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-1) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_1)$ s'injecte dans $p^* E$. Comme $q^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-1) \cong H_{\mathbb{Q}} \otimes p^* \mathcal{O}(-1)$, de (I;4.4) il vient :

$$0 \rightarrow T(-1) \rightarrow E(1-\mu_1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Il est facile de voir que \mathcal{F} est uniforme et isomorphe à $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$.

La suite ci-dessus est donc scindée et on a bien :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus T(-2 + \mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2) . \blacksquare$$

II - 2.4 : $k=3, r_1=1, r_2=1, r_3=n$.

II - 2.4.1 : PROPOSITION : Tout fibré homogène E sur \mathbb{P}^n ($n \geq 4$) de type de scindage ($k=3, r_1=1, r_2=1, r_3=n; \mu_1, \mu_2, \mu_3$) est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\bigoplus_{i=1}^3 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i), T_{\mathbb{P}^n}(-2 + \mu_2) \oplus \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_3) .$$

Démonstration : Soient les suites $(HN^1(x))$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(a) \rightarrow \mathcal{H}^2(x) \rightarrow \mathcal{O}(b) \rightarrow 0 ; \text{ et donc } \mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \otimes \mathcal{O}(b)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^2(x) \rightarrow (n+2)\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}_3(x) \rightarrow 0 .$$

Comme dans la démonstration précédente on voit qu'il suffit d'examiner le cas où : $\mathcal{E}_3(x) \cong T(-1) \oplus \mathcal{O}$ (sinon $E \cong \bigoplus_{i=1}^3 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$).

En comparant les premières classes de Chern dans $(HN^2(x))$ il vient : $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$.

On ne peut avoir $a = -1$ car alors $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$ serait un sous-fibré de $E(-\mu_1 + 1)$ (I;4.4) ce qui est impossible vu le type de scindage de E. Donc $a = 0$ et $b = -1$. Comme $E_1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{G}}$ on a une suite exacte sur \mathbb{P}^n :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow E(-\mu_1) \rightarrow F \rightarrow 0 \quad (*)$$

où F est uniforme de type de scindage ($k=2; r_1=1, r_2=n; \mu_2-\mu_1, \mu_3-\mu_1$).

D'après (IV;§2) et ce qui précède : $F \cong T(-2 + \mu_2 - \mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_3 - \mu_1)$ et la suite (*) est scindée, d'où la proposition. \blacksquare

II - 2.5 : $k=3, r_1=1, r_2=n-1, r_3=2$.

II - 2.5.1 : PROPOSITION : Tout fibré homogène E sur \mathbb{P}^n ($n \geq 4$) de type de scindage ($k=3; r_1=1, r_2=n-1, r_3=2; \mu_1, \mu_2, \mu_3$) est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $\bigoplus_{i=1}^3 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i), T_{\mathbb{P}^n}(-2 + \mu_1) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3), \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(2 - \mu_3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$.

Démonstration : $\mathcal{E}_1(x)$ est un fibré de rang un, $\mathcal{O}(a)$; $\mathcal{E}_3(x)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(\alpha) \oplus \mathcal{O}(\beta)$ et $\mathcal{E}_2(x)$ est de l'une des formes suivantes : $\mathcal{O}(a_1), \Omega^1(b), T(\xi)$ (cf. II; 1.1). Comme d'habitude si $\mathcal{E}_2(x) \cong \mathcal{O}(a_1)$ alors $E \cong \bigoplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$ (II;1.5).

a) Supposons $\mathcal{E}_2(x) \cong \Omega^1(b)$.

Comme $h^1(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_2(x), \mathcal{E}_1(x))) = 0$ (II;1.6), on a : $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \oplus \Omega^1(b)$.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

De l'injection $\mathcal{H}^2(x) \rightarrow (n+2) \cdot \mathcal{O}$, on déduit $a \leq 0$ et $b \leq 1$. La suite longue de cohomologie associée à $(\mathbb{H}N^2(x))$ donne $h^0(\mathcal{E}_3(x)) + h^0(\mathcal{H}^2(x)) = n+2+h^1(\mathcal{H}^2(x))$; $h^0(\mathcal{H}^2(x))$ et $h^1(\mathcal{H}^2(x))$ étant inférieurs à 1, il vient : $\mathcal{E}_3(x) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ et donc, en comparant les classes de Chern, $\mathcal{H}^2(x) \cong \Omega^1(1) \oplus \mathcal{O}$. D'après (I;4.5) E_3 est isomorphe à l'un des fibrés suivants : ω^* , $\mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(1)$.

En procédant comme dans (II;2.3.1) on montre : $E_3 \neq \omega^*$ et si $E_3 \cong \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(1)$ alors (cf. I;4.4) : $E \cong \Omega^1(2-\mu_3) \oplus \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_3)$.

b) Supposons $\mathcal{E}_2(x) \cong T(\xi)$.

De $(\mathbb{H}N^1(x))$ il vient : $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \oplus T(\xi)$ ou $\mathcal{H}^2(x) \cong n \cdot \mathcal{O}(a+1)$ (avec $\xi = a$).

b. i) Si $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \oplus T(\xi)$ alors $a \leq 0$ et $\xi < -1$ (car $\mathcal{H}^2(x)$ s'injecte dans $(n+2)\mathcal{O}$). Il s'ensuit que :

$$h^0(\mathcal{E}_3(x)) = \begin{cases} n+2 & \text{si } a < 0 \\ n+1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Ceci implique $\mathcal{E}_3(x) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ et $a = 0$, ce qui est absurde (considérer les premières classes de Chern dans : $0 \rightarrow \mathcal{O} \oplus T(\xi) \rightarrow (n+2) \cdot \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow 0$).

b. ii) Soit $\mathcal{H}^2(x) \cong n \cdot \mathcal{O}(a+1)$.

Comme $h^0(\mathcal{E}_3(x))$ ne peut valoir exactement $n+2$ on déduit de $(\mathbb{H}N^2(x))$: $a = \xi = -1$. et $\mathcal{E}_3(x) \cong 2 \cdot \mathcal{O}$. Ainsi $E_1 \cong \mathcal{O}_G(-1)$, en utilisant (I;4.4) il vient : $E \cong T(-2+\mu_1) \oplus 2\mathcal{O}(\mu_3)$. ■

II - 2.6 : $k=3, r_1=1, r_2=n, r_3=1$.

II - 2.6.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré homogène sur \mathbb{P}^n ($n \geq 4$) de type de scindage ($k=3, r_1=1, r_2=n, r_3=1; \mu_1, \mu_2, \mu_3$). Alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\bigoplus_{i=1}^3 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i), T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \oplus \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1+\mu_2).$$

Démonstration : On a les suites exactes :

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \mathcal{O}(a) \rightarrow \mathcal{H}^2(x) \rightarrow \mathcal{E}_2(x) \rightarrow 0, (\mathbb{H}N^1(x)) \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}^2(x) \rightarrow (n+2) \cdot \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(b) \rightarrow 0, (\mathbb{H}N^2(x)) \end{cases}$$

Avec $\mathcal{E}_2(x)$ isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\mathcal{O}(a_1), T(\xi) \oplus \mathcal{O}(\alpha), \Omega^1(\beta) \oplus \mathcal{O}(\delta) \quad (\text{II};1.1 \text{ et II};2.2.2).$$

a) Si $\mathcal{E}_2(x) \cong \mathcal{O}(a_1)$ alors $E \cong \bigoplus_{i=1}^3 r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$ (II;1.5)

b) Supposons $\mathcal{E}_2(x) \cong T(\xi) \oplus \mathcal{O}(\alpha)$.

De $(\mathbb{H}N^1(x))$ il vient : $h^1(\mathbb{P}^{n-1} \mathcal{H}^2(x)(k)) = 0$, pour tout k dans \mathbb{Z} (cf. II;1.6).

P. ELLIA

En particulier : $h^1(\mathbb{P}^{n-1} \mathcal{H}^2(x)(-b)) = 0$ et $(HN^2(x))$ est scindée. Ceci implique $b=0$ et par suite $\mathcal{H}^2(x) \cong (n+1)\mathcal{O}$. En appliquant p_* à (HN^2) on obtient la suite exacte sur \mathbb{P}^n : $0 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3) \rightarrow 0$.

Il est facile de voir que G est uniforme, de type de scindage :

$(k=2; r_1=1, r_2=n; \mu_1, \mu_2)$. En utilisant (IV;§2) on déduit :

$$E \cong T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3).$$

c) Cas où $\mathcal{E}_2(x) \cong \Omega^1(\beta) \oplus \mathcal{O}(\delta)$.

Dans ce cas $(HN^1(x))$ est scindée et de l'injection : $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(\delta) \oplus \Omega^1(\beta) \rightarrow (n+2) \cdot \mathcal{O}$, on déduit : $\beta \leq 1$ $a \leq 0$ et $\delta \leq 0$. De la suite longue de cohomologie associée à $(HN^2(x))$ il vient : $a = \delta = 0$, $\beta = 1$, $b = 1$. E_3 étant isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(1)$, en utilisant (I;4.4) on a :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2) \oplus \Omega^1(1+\mu_2). \quad \blacksquare$$

II - 2.7 : $k=4, r_1=1, r_2=1, r_3=n-1, r_4=1$.

II - 2.7.1 : PROPOSITION : Tout fibré homogène, E , sur \mathbb{P}^n ($n \geq 4$) de type de scindage $(k=4; r_1=1, r_2=1, r_3=n-1, r_4=1; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\bigoplus_{i=1}^4 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i), \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_4), \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(2+\mu_4).$$

Démonstration : Soient les suites exactes $(HN^1(x))$:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}(a) \rightarrow \mathcal{H}^2(x) \rightarrow \mathcal{O}(b) \rightarrow 0, \text{ donc } \mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \rightarrow \mathcal{H}^3(x) \rightarrow \mathcal{E}_3(x) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathcal{H}^3(x) \rightarrow (n+2) \cdot \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(c) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Avec, bien sûr, $\mathcal{E}_3(x)$ de l'une des formes suivantes : $T(\xi), \Omega^1(\eta), \oplus \mathcal{O}(a_i)$. (cf. II; 1.1). Pour le dernier cas, comme d'habitude nous renvoyons à (II;1.5).

a) Cas où $\mathcal{E}_3(x) \cong T(\xi)$.

De $h^1(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{H}^3(x)(k)) = 0$, pour tout k (cf. $(HN^2(x))$) on déduit : $(n+2) \cdot \mathcal{O} \cong \mathcal{O}(c) \oplus \mathcal{H}^3(x)$, donc $c=0$ et par suite $\mathcal{H}^3(x) \cong (n+1) \cdot \mathcal{O}$. Ceci montre que $(HN^2(x))$ s'écrit $0 \rightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow (n+1) \cdot \mathcal{O} \rightarrow T(-1) \rightarrow 0$. Bien entendu $a \neq -1$ car sinon $T(-1)$ s'injecterait dans $E(-\mu_1+1)$ (cf. I;4.4) ce qui est impossible vu le type de scindage de E . On a donc : $E_1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ ce qui fournit la suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O} E(-\mu_1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ (X) avec \mathcal{F} uniforme de type de scindage $(k=3, r_1=1, r_2=n-1, r_3=1, \mu_2-\mu_1, \mu_3-\mu_1, \mu_4-\mu_1)$. En utilisant (IV;§4) et la suite exacte (X) il vient :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus T(-2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}(\mu_4).$$

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

b) Cas où $\mathcal{E}_3(x) \cong \Omega^1(\eta)$.

Dans ce cas $(HN^2(x))$ est scindée et exactement comme en (II;2.6.1,c)) on déduit:
 $a=b=0$, $\eta=1$ et $c=1$. Comme $E_4 \cong \mathcal{O}_G(1)$, en utilisant (I;4.4) il vient :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2) \oplus \Omega^1(2+\mu_4).$$

Cette proposition achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE III

LA RELATION (&) POUR LES FIBRÉS DE RANG (n+1)

- § 1) Notations, Généralités
 § 2) La relation (&) avec $c=0$

§1. Notations, Généralités

III- 1.1 : Notations.

D'après (I;3.2) à tout fibré uniforme E de rang (n+1) sur \mathbb{P}^n , de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$, correspond une égalité :

$$(\&) \quad P(T,U) + x U^{n+1} + (aT + bU + cV) \cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

$P(T,U) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T$ est le polynôme de Chern de p^*E .

$S_i(T,U,V)$ est le polynôme de Chern de q^*E_i : il est homogène de degré r_i symétrique en U et V.

x, a, b, c sont des entiers relatifs.

On notera $(\&_j)$ la relation obtenue à partir de (&) en remplaçant T par $T - \mu_j U$:

$$(\&_j) \quad P_j(T,U) + x_j U^{n+1} + (aT + b_j U + cV) \cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + (\mu_i - \mu_j)U, U, V)$$

$P_j(T,U)$ est le polynôme de Chern de $p^*E(-\mu_j)$ et $b_j = -a\mu_j + b$.

Par $(\&)_0$, $(\&_j)_0$, on indiquera la relation (&), $(\&_j)$, dans laquelle on a posé : $T=0$ et $U=1$.

La symétrie de $S_j(T,U,V)$ limite les valeurs de x_j :

III- 1.2 : LEMME : Dans la relation $(\&_j)$ deux cas seulement sont possibles :

- i) $x_j = 0$ ou
- ii) $x_j = c - b_j$.

Démonstration : On a donc : $S_j(T,U,V)$ divise $P_j(T,U) + x_j U^{n+1} + (aT + b_j U + cV)R(U,V)$.
 Si $S_j(T,U,V) = T^{r_j}$ alors il est clair que $x_j = 0$. En posant $T=0$, on se ramène au cas où $S(0,U,V)$ est un diviseur symétrique non trivial de $xU^{n+1} + (bU + cV)R(U,V)$. Par symétrie $S(0,U,V)$ divise $xV^{n+1} + (bV + cU)R(U,V)$ et, par différence, il divise :
 $(x+b-c)(U^{n+1} - V^{n+1})$.

Supposons $x+b-c$ non nul. $S(0,U,V)$ divise $(U-V)[xU^{n+1} + (bU + cV)R(U,V)]$ et donc aussi $x(U-V)U^{n+1}$. Or les seuls diviseurs symétriques de $x(U-V)U^{n+1}$ sont les constantes, donc $x=0$. ■

Il s'ensuit que la relation $(\&_j)_0$ ne peut prendre que deux formes :

$$\left. \begin{aligned} (cv + b_j) \cdot R(1,v) \\ cv^{n+1} + (c + b_j)(v^n + \dots + v) + c \end{aligned} \right\} = \prod_{i=1}^k S_i(\mu_i - \mu_j, 1, v) .$$

(Notation) : $\psi_j(v) := cv^{n+1} + (c + b_j)(v^n + \dots + v) + c$.

Dans le lemme suivant, on étudie les racines de $\psi(v)$:

III - 1.3 : LEMME : Pour tout couple $(c,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$ le polynôme

$\psi(v) := cv^{n+1} + (c+b)(v^n + \dots + v) + c$ a les deux propriétés suivantes :

1. il a au plus trois racines réelles,
2. il a au plus une racine multiple. Cette racine, quand elle existe, est réelle, de multiplicité inférieure ou égale à trois.

Démonstration : Si $c=0$, c'est clair. Si $c \neq 0$, on considère $\psi_\xi(v) = v^{n+1} + \xi(v^n + \dots + v) + 1$ et le lemme découle des faits suivants qui se prouvent en considérant $(v-1) \cdot \psi_\xi(v) : \psi_\xi(0) \neq 0, \forall \xi ; \psi_\xi$ a des racines complexes non nulles d'argument $(2k+1)\pi/(n+1)$ si et seulement si $\xi=0$, d'argument $2k\pi/(n+2)$ si et seulement si $\xi=1$. ■

§2. La relation $(\&)$ avec $c=0$

Désormais nous nous limiterons aux fibrés uniformes de type de scindage $(k ; r_1 \dots r_k ; \mu_1 \dots \mu_k)$ avec $\mu_i - \mu_{i+1} = 1, 1 \leq i < k$; un tel type de scindage sera dit consécutif. D'après (I;4.1) cette restriction n'a aucune conséquence sur le problème de la classification des fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n ; en effet, si F est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_2 - \mu_1) ; \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1+\mu_2 - \mu_1) ; \oplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i - \mu_1) ; \mu_1 - \mu_2 \geq 2 ;$$

les extensions : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow E(-\mu_1) \rightarrow F \rightarrow 0$ scindent pour $n \geq 3$.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

Dans ce paragraphe, nous donnons une "classification" des relations (&) pour lesquelles $c=0$ (III;2.4).

Pour établir cette classification, une des étapes essentielles consiste à se ramener à une relation (&') du type "r=n" (c'est-à-dire correspondant à un fibré uniforme de rang n sur \mathbb{P}^n) et à utiliser le résultat suivant ([E-H-S]) :

III - 2. PROPOSITION : Soit $P(T,U) = T^n + c_1 U T^{n-1} + \dots + c_n U^n$ et (&') la relation :
 $P(T,U) + a R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V)$ avec c_i, a, μ_i des entiers relatifs et S_i des polynômes homogènes symétriques en U et V. Alors seuls sont possibles les cas suivants :

1. $k=1$,
2. $a=0$,
3. $k=2$ et $S_1(T,U,V) = \sum_{n-1} (T, -\alpha U, -\alpha V)$, $S_2(T,U,V) = T + \alpha(U+V)$
ou $S_1(T,U,V) = T - \alpha(U+V)$, $S_2(T,U,V) = \sum_{n-1} (T, \alpha U, \alpha V)$;
 $\alpha = \mu_1 - \mu_2$; $\sum_{n-1} (T,U,V) = \sum_{r+s+t=n-1} T^r U^s V^t$.

Remarque : On ne suppose pas les μ_i consécutifs.

Pour le rang (n+1) il apparaît cependant un fait nouveau : une solution algébrique qui ne correspond pas à un fibré uniforme (cf.III;2.2.2.b).

III - 2.1 PRÉLIMINAIRES : Soit une relation (&) avec $c=0$:

$$P(T,U) + x U^{n+1} + (aT + bU) \cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V).$$

Pour j , $1 \leq j \leq k$, la relation (&_j) donne

$$\left. \begin{array}{l} b_j (v^{n+1} + \dots + 1) \\ b_j \cdot v (v^{n-1} + \dots + 1) \end{array} \right\} = \prod_{i=1}^k S_i(\mu_i - \mu_j, 1, v) \quad (\text{cf. III;1.2}).$$

Il existe donc un indice j_0 tel que $S_{j_0}(T,U,V)$ soit de degré r_{j_0} et tel que $S_{j_0}(\mu_{j_0} - \mu_j, 1, v)$ soit de degré strictement inférieur à r_{j_0} . Par symétrie et homogénéité, on déduit :

- i) $d^\circ S_{j_0}(0,1,v) < r_{j_0}$.
- ii) v divise $S_{j_0}(0,1,v)$.

Dans la suite, nous distinguerons les deux cas suivants :

$$S_{j_0}(0,1,v) \equiv 0 \quad ; \quad S_{j_0}(0,1,v) \not\equiv 0.$$

III - 2.2 : Cas où $S_{j_0}(o, 1, v) \equiv o$.

Nous distinguerons deux sous-cas suivant le degré de $S_{j_0}(T, U, V)$.

III - 2.2.1 : Cas où $d^o S_{j_0}(T, U, V) > 1$.

Comme $S_{j_0}(o, 1, v) \equiv o$, T divise $S_{j_0}(T, U, V)$ et donc aussi $P_{j_0}(T, U) + X_{j_0} U^{n+1} + (aT + b_{j_0} U) \cdot R(U, V)$ ainsi X_{j_0} et b_{j_0} sont nuls.

En divisant par T la relation $(\&_{j_0})$ on obtient :

$$(\&'_{j_0}) \quad \tilde{P}_{j_0}(T, U) + aR(U, V) = \tilde{S}_{j_0}(T, U, V) \cdot \prod_{i \neq j_0} S_i(T + (\mu_i - \mu_{j_0})U, U, V)$$

$$\text{où : } T \tilde{P}_{j_0}(T, U) = P_{j_0}(T, U) \quad \text{et} \quad T \cdot \tilde{S}_{j_0}(T, U, V) = S_{j_0}(T, U, V)$$

$(\&'_{j_0})$ est une relation du type "r = n", de plus les $\alpha_i = \mu_i - \mu_{j_0}$, $1 \leq i \leq k$ sont consécutifs. D'après (III;2) il vient :

III - 2.2.1. a) : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (III;2.2.1) seules peuvent se présenter les possibilités suivantes pour la relation $(\&)$:

(a) $a = b = c = o$

(b) $k = 1$

(c) $k = 2$ et les S_i sont donnés par

(c.1) $S_1(T, U, V) = T^2 - T(U + V) ; S_2(T, U, V) = \sum_{n-1} (T, U, V)$

(c.1)' $S_1(T, U, V) = \sum_{n-1} (T, -U, -V) ; S_2(T, U, V) = T^2 + T(U + V)$

(c.2) $S_1(T, U, V) = T - (U + V) ; S_2(T, U, V) = T \cdot \sum_{n-1} (T, U, V)$

(c.2)' $S_1(T, U, V) = T \cdot \sum_{n-1} (T, -U, -V) ; S_2(T, U, V) = T + (U + V)$.

III - 2.2.1. b) : PROPOSITION : Les fibrés correspondants aux différents cas de la proposition précédente sont :

(a) $\bigoplus_{i=1}^k r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$

(b) $(n+1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$

(c.1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2)$

(c.1)' $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(2 + \mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$

(c.2) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2)$

(c.2)' $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(2 + \mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$.

Démonstration : • (a) - Remarquons d'abord que : $a = o$ et $b_{j_0} = o$ implique : $b = o$; et par suite $b_i = o$, $1 \leq i \leq k$. D'après la relation $(\&_1)$, on a : $S_1(T, U, V)$ divise $P_1(T, U)$,

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

donc, $S_1(T,U,V)$ est indépendant de V et donc aussi de U par symétrie. En particulier: $q^*c_1(E_1) = 0$.

De la même façon: $q^*c_1(E_i) = 0$, $1 < i \leq k$, et il suffit d'appliquer (I;4.3).

- (b) - C'est la proposition (I;4.2).
- (c) - Nous ne traiterons que les cas (c.1) et (c.2), (c.1)' et (c.2)' étant les cas duaux.

• (c.1) - La filtration HN^* donne la suite exacte sur F :
 $0 \rightarrow q^*E_1 \rightarrow p^*E(-\mu_1) \rightarrow q^*E_2 \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow 0$. On pose $\mathcal{F}_x := q^*E_1|_{p^{-1}(x)}$. En restreignant la suite exacte ci-dessus à une fibre de p on voit que \mathcal{F}_x est un sous-fibré de rang deux de première classe de Chern -1 d'un fibré trivial. Donc pour toute droite ℓ de $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$: $\mathcal{F}_x|_{\ell} \cong \mathcal{O}_{\ell} \oplus \mathcal{O}_{\ell}(-1)$ et \mathcal{F}_x est uniforme. D'après ([VdV],[Sa]) on a :

(i) si $n \geq 4$: $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$

(ii) Si $n = 3$:

$$\mathcal{F}_x \cong \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \\ \mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}(-2) \end{cases}$$

D'autre part, $c_2(\mathcal{F}_x) = 0$ ($c_2(q^*E_1) = 0$) et donc $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$.

Dans tous les cas, le fibré q^*E_1 est totalement scindé sur les fibres de p . D'après (I;4,5): $E_1 \cong \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(-1)$ ou bien $E_1 \cong \omega(h)$.
 Cependant : $c_1(q^*E_1) = c_1(q^*\omega)$ et $c_2(q^*E_1) \neq c_2(q^*\omega) = UV$ et ceci montre: $E_1 \cong \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(-1)$.

Comme E_1 contient un sous-fibré trivial de rang un, on a une suite exacte :
 $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow E(-\mu_1) \rightarrow E' \rightarrow 0$ (*) avec E' uniforme de rang n de type de scindage ($k = 2$; $r_1 = 1$, $r_2 = n-1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -1$). D'après ([E-H-S]) :

$$E' \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus (n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \text{ ou } E' \cong \mathbb{T}_{\mathbb{P}^n}(-2),$$

dans les deux cas la suite (*) scinde et :

$$E(-\mu_1) \cong 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus (n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \text{ ou } E(-\mu_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathbb{T}_{\mathbb{P}^n}(-2)$$

mais le premier cas est à exclure car $E_1 \not\cong 2 \cdot \mathcal{O}_G$.

• (c.2) - D'après (I;4.4) on a une suite exacte :
 $0 \rightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow E(-\mu_1+1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \rightarrow 0$ (**). En regardant les premières classes de Chern, il vient $m = 0$ et la suite (**) est scindée donc $E \cong \mathbb{T}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-1)$. ■

III - 2.2.2 : Cas où $d^*S_{j_0}(T,U,V) = 1$.

En procédant comme en (III;2.2.1) on obtient une équation du type "r = n" :

$$\left(\begin{matrix} \mathcal{E}' \\ \mathcal{J}_0 \end{matrix} \right) \quad \tilde{P}_{\mathcal{J}_0}(T,U) + aR(U,V) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^k S_i(T + (\mu_i - \mu_{j_0})U, U, V).$$

Il faut remarquer que si $j_0 \neq 1$ et $j_0 \neq k$, alors les α_i ; $\alpha_i = \mu_i - \mu_{j_0}$, $1 \leq i \leq k$, $i \neq j_0$, ne sont plus consécutifs. Toujours d'après (III;2) il vient :

III - 2.2.2. a) : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (III;2.2.2) seules peuvent se présenter les possibilités suivantes pour (\mathcal{E}) :

(a) $a = b = c = 0$

(b) $k = 2$, $S_1(T, U, V) = T$; (b') $k = 2$, $S_2(T, U, V) = T$

(c.1) $k = 3$, $S_1(T, U, V) = T$, $r_2 = 1$, $r_3 = n - 1$

(c.1)' $k = 3$, $r_1 = n - 1$, $r_2 = 1$, $S_3(T, U, V) = T$

(c.2) $k = 3$, $S_1(T, U, V) = T$, $r_2 = n - 1$, $r_3 = 1$

(c.2)' $k = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = n - 1$, $S_3(T, U, V) = T$

(c.3) $k = 3$, $S_1(T, U, V) = T - 2(U + V)$, $S_2(T, U, V) = T$, $S_3(T, U, V) = \sum_{n-1} (T, 2U, 2V)$

(c.3)' $k = 3$, $S_1(T, U, V) = \sum_{n-1} (T, -2U, -2V)$, $S_2(T, U, V) = T$, $S_3(T, U, V) = T + 2(U + V)$.

On peut donner les précisions suivantes :

Dans le cas (c.1) : $S_2(T, U, V) = T - (U + V)$,

dans le cas (c.2) : $S_3(T, U, V) = T + (U + V)$.

III - 2.2.2. b) : PROPOSITION : Les solutions (c.3) et (c.3)' ne correspondent pas à des fibrés uniformes.

Démonstration : On donne deux démonstrations différentes.

Première démonstration : On considère (c.3)', (c.3) s'obtenant par dualité. Soit P un plan de \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) et le sous-diagramme induit par P :

$$\begin{array}{ccc}
 P^* & \xleftarrow{q'} & F_2 \\
 & & \downarrow p' \\
 & & P
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 F_2 := q'^{-1}(P^*), \text{ p' et q' étant les restrictions de} \\
 \text{p et q.}
 \end{array}$$

Supposons que (c.3)' corresponde à un fibré uniforme E et soit : $\mathcal{E} := E|P$, $\mathcal{E}_1 := E_1|P^*$, $\mathcal{H}^i := HN^i|F_2$. Les \mathcal{H}^i , \mathcal{E}_1 donnent la filtration HN^i de $P^* \cdot \mathcal{E}$. En particulier : $q'^*(c_2(\mathcal{E}_1)) = 0$ car $q'^*(c_2(E_1)) = 4(U^2 + V^2 + UV)$ et $H^*(F_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[U, V]/(U^3, U^2 + UV + V^2)$ (cf. I;2.4). Pour le fibré \mathcal{E}_1 défini sur P^* on a : $c_1(\mathcal{E}_1) = -2$ et $c_2(\mathcal{E}_1) = 0$. D'autre part, sur chaque droite ℓ^* de P^* , $\mathcal{E}_1|_{\ell^*}$ est un sous-fibré de rang (n-1) du fibré : $(n+1) \cdot \mathcal{O}_{\ell^*}$, d'où deux cas :

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

$$\mathcal{E}_1|_{\mathcal{L}^*} \cong \begin{cases} 2\mathcal{O}_{\mathcal{L}^*}(-1) \oplus (n-3) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{L}^*} & (\alpha) \\ \mathcal{O}_{\mathcal{L}^*}(-2) \oplus (n-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{L}^*} & (\beta) \end{cases}$$

Si on a (α) pour une droite, on l'a génériquement, en particulier :

$$h^0(\mathcal{P}^*, \mathcal{E}_1) \leq n-3 \text{ et } h^2(\mathcal{P}^*, \mathcal{E}_1) = 0, \text{ d'où : } \chi(\mathcal{P}^*, \mathcal{E}_1) \leq n-3.$$

D'autre part, d'après Riemann-Roch : $\chi(\mathcal{P}^*, \mathcal{E}_1) = n-2$, ce qui est absurde.

On a donc (β) pour toutes les droites de \mathcal{P}^* .

Revenons maintenant à E défini sur \mathbb{P}^n . Comme précédemment, pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, on a deux possibilités :

$$q^* E_1|_{\ell} \cong \begin{cases} 2\mathcal{O}_{\ell}(-1) \oplus (n-3) \cdot \mathcal{O}_{\ell} \\ \mathcal{O}_{\ell}(-2) \oplus (n-2) \cdot \mathcal{O}_{\ell} \end{cases}$$

ℓ s'identifie aux droites de \mathbb{P}^n passant par x et contenues dans un certain \mathbb{P}^2 ,

c'est-à-dire ℓ s'identifie à la fibre $p'^{-1}(x)$ dans le "sous-diagramme" induit par

ce \mathbb{P}^2 . Comme : $q^* E_1|_{\ell} \cong q^* \mathcal{E}_1|_{p'^{-1}(x)} \cong \mathcal{E}_1|_{\mathcal{L}^*}$, d'après ce qui précède, on voit que :

$$q^* E_1|_{\ell} \cong \mathcal{O}_{\ell}(-2) \oplus (n-2) \cdot \mathcal{O}_{\ell} \text{ pour toute droite de } \mathbb{P}^{-1}(x).$$

D'après (I;4.1) et (I;4.2) : $q^* E_1|_{p'^{-1}(x)} \cong \mathcal{O}_{p'^{-1}(x)}(-2) \oplus (n-2)\mathcal{O}_{p'^{-1}(x)}$. Ceci est en contradiction avec : $c_2(q^* E_1|_{p'^{-1}(x)}) = 4$ (car $q^*(c_2(E_1)) = 4(U^2 + V^2 + UV)$).

Deuxième démonstration : Cette fois on considère (c.3). La filtration HN' donne la suite exacte :

$$0 \rightarrow q^* \mathcal{O}_G(-2) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_1) \rightarrow HN^2 \rightarrow p^* \mathcal{O}(\mu_2) \rightarrow 0 \quad (*)$$

On a : $H^1(F, q^* \mathcal{O}_G(-2) \otimes p^* \mathcal{O}(1)) = 0$. D'une façon plus générale $H^1(F, q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1)) = 0$ si $t > 0$. En effet, la suite spectrale de Leray dégénère et on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, p_* (q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1))) \rightarrow H^1(F, q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, R^1 p_* (q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1)))$$

et il suffit de remarquer que : $p_* q^* \mathcal{O}_G(-t) = 0$ et $R^1 p_* (q^* \mathcal{O}_G(-t)) = 0$ si $t > 0$ ($n \geq 3$).

La suite $(*)$ est scindée et $p^* \mathcal{O}(\mu_2)$ est un sous-fibré de $p^* E$:

$$0 \rightarrow p^* \mathcal{O}(\mu_2) \rightarrow p^* E \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0 ;$$

sous p_* il vient (après torsion) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow E(-\mu_2) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

\mathcal{F} est uniforme de type $(1; -1; \dots; -1)$ puisque $E(-\mu_2)$ est uniforme de type $(1; 0; -1; \dots; -1)$.

Maintenant, d'après (I;4.1) et (I;4.2) : $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus (n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ et donc :

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i), \text{ ce qui est absurde car il faudrait : } S_1(T, U, V) = T \text{ et } S_3(T, U, V) = T^{n-1}. \blacksquare$$

III - 2.2.2. c) : PROPOSITION : Les fibrés correspondant aux autres cas de (III;2.2.2.a) sont :

$$(a) \quad \bigoplus_{i=1}^k r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$$

$$(b) \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus r_2 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) ; \quad (b') \quad r_1 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$$

$$(c.1) \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-3 + \mu_1)$$

$$(c.1)' \quad \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1 + \mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$$

$$(c.2) \quad \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$$

$$(c.2)' \quad T_{\mathbb{P}^n}(-2 + \mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$$

Démonstration :

(a) Cf. (III;2.2.1.b).

(b) Comme $S_1(T,U,V) = T$, $E_1 \cong \mathcal{O}_G$ et on a une suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow E(-\mu_1) \rightarrow F \rightarrow 0$ où F est un fibré uniforme avec $k=1$, on conclut avec (I;4.2).

(c.1) Comme précédemment, on a une suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow E(-\mu_1) \rightarrow F \rightarrow 0$ (*) avec F uniforme de type $(-1, -2 \dots -2)$ et de rang n ; d'après $([E-H-S])$, F est isomorphe à $T_{\mathbb{P}^n}(-3)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \oplus (n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)$.

Dans les deux cas la suite (*) scinde et : $E(-\mu_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-3)$ l'autres cas devant être exclu car $S_2(T,U,V) = T - (U+V)$.

(c.2) Se traite de la même manière que (c.1).

(c.1)' et (c.2)' s'obtiennent par dualité. ■

III - 2.3 : Cas où $S_{j_0}(0,1,v) \neq 0$.

La relation $(\&_{j_0})_0$ s'écrit :

$$b_{j_0} \cdot v \cdot (v^{n-1} + \dots + 1) = \prod_{i=1}^k S_{i_1 - i_{j_0}}(\mu_i - \mu_{j_0}, 1, v)$$

avec : $S_{j_0}(0,1,v) \neq 0$, $d^\circ S_{j_0}(0,1,v) < r_{j_0}$ et : $v | S_{j_0}(0,1,v)$ (III;2.1).

III - 2.3.1 : Cas où $b_{j_0} = 0$

Si b_{j_0} est nul, alors il existe i_0 ($1 \leq i_0 \leq k$, $i_0 \neq j_0$) tel que $S_{i_0 - i_{j_0}}(\mu_{i_0} - \mu_{j_0}, 1, v)$ soit identiquement nul. En particulier : $d^\circ S_{i_0}(0,1,v) < r_{i_0}$, car par symétrie et homogénéité $S_{i_0}(\alpha, 1, v)$ est un polynôme en α de degré r_{i_0} et de terme constant : $B(v^{r_{i_0}+1} + v \cdot P(v))$ avec $d^\circ P(v) \leq r_{i_0} - 2$. Pour la relation $(\&_{i_0})_0$ il vient :

$$\left. \begin{array}{l} -b_{i_0} \\ 0 \end{array} \right\} + b_{i_0} (v^{n+\dots+1}) = \prod_{i=1}^k S_{i_1 - i_{i_0}}(\mu_i - \mu_{i_0}, 1, v)$$

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

mais comme : $d^\circ S_{j_0}(\mu_{j_0} - \mu_{i_0}, 1, v) \leq r_{j_0} - 1$, on a :

$d^\circ(\prod_{i=1}^k S_i(\mu_i - \mu_{i_0}, 1, v)) \leq n-1$, et donc $b_{i_0} = 0$; b_{i_0} et b_{j_0} étant nuls il suit : $a = b = c = 0$ et d'après (III; 2.2.1. b) :

$S_{j_0}(T, U, V) = T^{r_{j_0}}$, ce qui contredit l'hypothèse : $S_{j_0}(0, 1, v) \neq 0$.

Ce cas ne se présente donc pas sous ces hypothèses et b_{j_0} est non nul. En particulier, ceci montre que $v = 0$ est racine simple de $S_{j_0}(0, 1, v)$.

III- 2.3.2 : PROPOSITION : Dans les hypothèses de (III; 2.3) la relation ($\&_{j_0}$)

s'écrit :

$$T^{n+1} - b_{j_0} U^{n+1} + (aT + b_{j_0} U) R(U, V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + (\mu_i - \mu_{j_0}) U, U, V).$$

Démonstration : On note y la solution holomorphe de :

$S_{j_0}(\lambda(1+y(\lambda)), 1, y(\lambda)) = 0$ vérifiant $y(0) = 0$. L'existence et l'unicité sont assurées par le théorème des fonctions implicites car $v = 0$ est racine simple de $S_{j_0}(0, 1, v) = 0$.

Par symétrie, $y(\lambda)$ vérifie le système :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} p'(\lambda(1+y(\lambda)), 1) + [a\lambda(1+y(\lambda)) + b] R(1, y(\lambda)) = 0 \\ p'(\lambda(1+y(\lambda)), y(\lambda)) + [a\lambda(1+y(\lambda)) + b y(\lambda)] R(1, y(\lambda)) = 0 \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, on omet l'indice j_0 . On pose :

$$p'(T, U) = \tilde{p}(T, U) - b U^{n+1}; \quad \tilde{p}(T, U) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T.$$

Par différence dans (\mathcal{S}) il vient : $\tilde{p}'(\lambda(1+y(\lambda)), 1) = \tilde{p}'(\lambda(1+y(\lambda)), y(\lambda))$.

En dérivant cette égalité en $\lambda = 0$ et en tenant compte que $y(0) = 0$, il vient facilement par récurrence que $c_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. ■

Dans la proposition suivante, on rassemble les résultats obtenus c'est-à-dire une "classification" quand $c = 0$:

III- 2.4 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n de type de scindage $(\mu_1 \dots \mu_k)$ avec les μ_i consécutifs. On suppose que dans la relation ($\&$) correspondante on ait $c = 0$. Alors : ou E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\begin{aligned} \Theta_{r_i} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) & , & T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) & , & T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) & , \\ T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3) & , & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(\mu_2 - 2) & , & \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\mu_1 + 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) & , \\ \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\mu_1 + 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) & , & \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\mu_1 + 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3) & , & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\mu_2 + 1) & . \end{aligned}$$

où il existe j_0 , $1 \leq j_0 \leq k$, tel que la relation ($\&_{j_0}$) correspondante s'écrive :

$$T^{n+1} - b_{j_0} U^{n+1} + (aT + b_{j_0} U) R(U, V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + (\mu_i - \mu_{j_0}) U, U, V)$$

III- 2.4.1 : Remarque : Tous les fibrés "attendus" apparaissent dans la proposition précédente. Ceci laisse supposer que l'on doit toujours avoir $c=0$ dans (§). C'est d'ailleurs ce que nous montrons dans certains cas particuliers ($n=3,4,5$). De même quand la relation (§₀) prend la forme particulière de la proposition précédente, on doit avoir $k=1$.

CHAPITRE IV

CERTAINS TYPES DE FIBRÉS UNIFORMES

- § 1) $k=r$ ($n \geq 3$)
- § 2) $k=2, r_1=1$ ($n \geq 2$)
- § 3) $r=n+1, k=n$ ($n \geq 4$)
- § 4) $r=n+1, k=3, r_1=r_3=1$ ($n \geq 3$)
- § 5) $r=n+1, n$ pair, $n \geq 4, k=2, r_1=2$

Dans ce chapitre, on étudie certains fibrés uniformes de type de scindage particulier. Rappelons qu'à tout fibré uniforme E de rang r sur \mathbb{P}^n est associée une suite d'entiers : $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$ appelée type de scindage de E et qui vérifie : $E|_{\ell} \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \mathcal{O}_{\ell}(\mu_i)$ pour toute droite ℓ de \mathbb{P}^n avec $\mu_1 > \dots > \mu_k; \sum_{i=1}^k r_i = r$.

§1. $k=r$ ($n \geq 3$)

IV- 1.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$ avec $k = \text{rang}(E)$ alors : $E \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

Démonstration : La filtration HN^* fournit les suites exactes

$$0 \rightarrow HN^i \rightarrow HN^{i+1} \rightarrow q^* E_{i+1} \oplus p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_{i+1}) \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Quand on restreint ces suites à $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, on obtient des extensions de fibrés entièrement décomposés (car $r_i=1, \forall i$). Ces extensions scindent (car $n-1 \geq 2$) et on aboutit à : $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(a_i) \cong r \cdot \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$ avec $a_i = c_1(q^* E_i|_{p^{-1}(x)})$. Il vient donc $a_i=0, \forall i$, et par conséquent $c_1(E_i)=0, \forall i$. On conclut avec (I;4.3). ■

IV- 1.2 : Remarque : Sur \mathbb{P}^2 le résultat précédent est faux : on a des contre-exemples par : $T_{\mathbb{P}^2}, S^2 T_{\mathbb{P}^2}$. On peut se demander néanmoins si les fibrés uniformes sur \mathbb{P}^2 avec $k=r$ sont bien "ceux qu'on croit".

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

Dans le même ordre d'idées, on peut conjecturer le résultat suivant :

Conjecture : « Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^n avec $r_i < n-1, \forall i, 1 \leq i \leq k$, alors E est homogène et par suite (cf.II;2.1.1) isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$. Par (III;1.1) c'est vrai pour $n=3$.

§2. $k=2, r_1=1 (n \geq 2)$

La proposition suivante a été démontrée par Elencajg ([Ele,3]) :

IV- 2.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^2 de type de scindage $k=2$ et $r_1=1$ (ou $r_2=1$) alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :
 $\bigoplus_{i=1}^2 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_i), T_{\mathbb{P}^2}(\mu_1-2) \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_2), \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2+\mu_2) \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_1)$.

Pour la commodité du lecteur, nous donnons maintenant une démonstration de cette proposition.

Démonstration : Par (I;4.1),(I;4.2) et par dualité, on peut se limiter aux fibrés uniformes de type de scindage ($k=2; r_1, r_2=1; \mu_1=0, \mu_2=-1$). Pour un tel fibré, E , la relation ($\&$) s'écrit :

$$S_1(T,U,V) S_2(T-U,U,V) = T^r + c_1 U T^{r-1} + c_2 U^2 T^{r-2} + M(T,U,V) U^3 + Q(T,U,V) R(U,V)$$

où $M(T,U,V), Q(T,U,V)$ sont des polynômes homogènes de degré $(r-3)$ et $(r-2)$ respectivement. $R(U,V) = U^2 + UV + V^2$. Posons :

$$S_1(T,U,V) = T^{r-1} + T^{r-2} B(U+V) + T^{r-3} F(U^2+V^2) + T^{r-3} DUV + T^{r-4} H(U^3+V^3) + T^{r-4} G(U^2V+UV^2) + \dots$$

$$S_2(T,U,V) = T + A(U+V).$$

On note ($\&_*$) la relation ($\&$) modulo (U^2+V^2+UV) . On a :

$$S_1(T,U,V) \equiv T^{r-1} + T^{r-2} B(U+V) + T^{r-3} (D-F)UV + T^{r-4} G(U^2V+UV^2) + \dots$$

$$S_2(T-U,U,V) \equiv T + U(A-1) + AV$$

où \equiv indique une égalité module (U^2+V^2+UV) .

Les coefficients de $T^{r-1}V, T^{r-2}UV, T^{r-3}U^2V$ dans ($\&_*$) donnent respectivement les relations :

$$(1) A+B=0, \quad (2) BA-B+D-F=0, \quad (3) D-F=0;$$

on en déduit $A(1-A)=0$, c'est-à-dire $A=0$ ou $A=1$.

Si A est nul alors B aussi est nul $-(1)-$ et d'après (I;4.3) : $E \cong (r-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$.

Si $A=1$ d'après (I;4.4) on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow E \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(1) \rightarrow 0 \quad (**);$$

\mathcal{F} est uniforme avec $k=1$ et $c_1(\mathcal{F})=0$. En effet, si $\mathcal{F}|_{\ell} \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{\ell}(a_i)$ on a :
 $a_i \leq 0, \quad \forall i$ car $H^0(\ell, \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\ell}(a), \mathcal{O}_{\ell}(b))) = 0$ si $a > b$ et de plus $\sum_{i=1}^{r-2} a_i = 0$

car $c_1(E) = c_1(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(1)) = -1$. On a donc $\mathcal{F} \cong (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ (cf. I;4.2) et la suite (***) est scindée. ■

On peut maintenant généraliser cette proposition :

IV- 2.2 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^n ($n \geq 2$) de type de scindage : $k=2$ et $r_1=1$ (ou $r_2=1$) alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $\bigoplus_{i=1}^2 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2) \oplus (r-n) \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$, $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(2+\mu_2) \oplus (r-n) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$.

Démonstration : Soit P un plan de \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) et soit : $\mathbb{P}^* \xleftarrow{q'} F_2 \xrightarrow{p'} P$ le sous-diagramme induit par ce plan (cf. I;2.4). Soit $\mathcal{E} := E|_P$. D'après la proposition précédente : $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{i=1}^2 r_i \cdot \mathcal{O}_P(\mu_i)$ ou $\mathcal{E} \cong T_P(-2+\mu_1) \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_P(\mu_1-1)$, on suppose $r_1=1$ ce qui est toujours licite quitte à dualiser.

Comme $H^1(\mathcal{E}) \cong H^1(E)|_{F_2}$, on voit que :

$$H^1(E) \cong \mathcal{O}_P \otimes \mathcal{P}^* \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \quad \text{ou} \quad H^1(E) \cong H_Q \otimes \mathcal{P}^* \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-1).$$

Dans le premier cas, on a une suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ où \mathcal{F} est uniforme avec $k=1$ et donc : $\mathcal{F} \cong (r-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$ (I;4.2), il s'en suit qu'il s'ensuit que :

$$E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus (r-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2).$$

Dans le second cas, d'après (I;4.4) on a la suite exacte : $0 \rightarrow Q \rightarrow E(-\mu_1+1) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ où \mathcal{G} est uniforme avec $k=1$ donc isomorphe à $(r-n) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ finalement :

$$E(-\mu_1+1) \cong Q \oplus (r-n) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}. \quad \blacksquare$$

§3. $r = n+1$, $k = n$ ($n \geq 4$)

IV- 3.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n ($n \geq 4$) de type de scindage ($k=n$; $r_1 \dots r_n$; $\mu_1 \dots \mu_n$) alors : $E \cong \bigoplus_{i=1}^n r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

Démonstration : Pour un tel fibré, la relation $(\mathcal{E}_j)_0$, $1 \leq j \leq n$, s'écrit :

$$\prod_{i=1}^n S_i(\mu_i - \mu_j, 1, v) = \begin{cases} (c v + b_j) \cdot R(1, v) \\ c v^{n+1} + (c + b_j)(v^n + \dots + v) + c. \end{cases}$$

Le membre de gauche a au moins $(n-1)$ racines réelles et celui de droite au plus trois si $(c, b_j) \neq (0, 0)$ (cf. III;1.3) donc pour $n \geq 5$ ceci implique :

$$(c, b_j) = (0, 0), \quad 1 \leq j \leq n.$$

De $b_i = b_j$ pour $i \neq j$ on déduit $a = 0$ (car $b_i = -a \mu_i + b$) et ensuite $b_i = 0$ et $a = 0$

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

il vient $b=0$; a, b et c étant nuls, on conclut comme dans (III;2.2.1.b)).

Pour $n=4$, on peut procéder de la façon suivante :

supposons $r_4=2$, la relation $(\mathcal{E}_4)_0$ est de la forme :

$$S_1(3,1,v) S_2(2,1,v) S_3(1,1,v) S_4(0,1,v) = c v^2 + (c + b_4) (v^4 + v^3 + v^2 + v) + c$$

(s'il en était autrement, on aurait immédiatement $a=b=c=0$ en comptant le nombre de racines réelles).

Comme -1 est racine dans le membre de droite, on a : $S_4(0,1,-1)=0$ (en effet si $S(T,U,V)=T+A(U+V)$ et si $\alpha \neq 0$, alors $S(\alpha,1,-1) \neq 0$). Comme $S_4(0,1,v)$ est de la forme $E v^2 + D v + E$ il vient : $S_4(0,1,v) = E(v+1)^2$ et -1 est racine double dans le membre de droite ; ceci implique : $b_4 = \frac{3}{2} c$ et le membre s'écrit : $c(v+1)^3 (v^2 - \frac{v}{2} + 1)$ or ceci est absurde si $c \neq 0$ car, encore une fois $S_i(4-i,1,-1) \neq 0, 1 \leq i \leq 3$.

Comme c et b_4 sont nuls, en comptant le nombre de racines réelles dans $(\mathcal{E}_i)_0, 1 \leq i \leq 3$, on voit que $a=b=c=0$. ■

IV- 3.2 : Remarque : En fait, on démontre davantage : si E est un fibré uniforme de rang $(n+1)$ sur $\mathbb{P}^n, n \geq 4$, de type de scindage $(k ; r_1 \dots r_k ; \mu_1 \dots \mu_k)$ et s'il existe quatre indices tels que $r_i=1, i=1, \dots, 4$; alors: $E \cong \bigoplus_{i=1}^4 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

§4. $r = n+1, k = 3, r_1 = r_3 = 1 (n \geq 3)$

IV- 4.1 : LEMME : Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^2 de type de scindage $(k=3 ; r_1=1, r_2=r-2, r_3=1 ; \mu_1=1, \mu_2=0, \mu_3=-1)$ avec $c_2(E)=0$, alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$T_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus (r-3) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \quad ; \quad \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(1) \oplus (r-3) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).$$

Démonstration : On distingue deux cas suivant les valeurs de $h^0(\mathbb{P}^2, E(-1))$:

i) $h^0(\mathbb{P}^2, E(-1)) \neq 0$: soit $s \in H^0(E(-1)), s \neq 0$, alors s détermine un morphisme injectif de fibrés : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E(-1)$. En effet, pour chaque droite ℓ , on a un morphisme : $\mathcal{O}_{\ell} \xrightarrow{s|_{\ell}} \mathcal{O}_{\ell} \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\ell}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(-2)$, si s s'annule en $x, x \in \ell$, alors $s|_{\ell} \equiv 0$ et donc $s|_{\ell'} \equiv 0$ pour toute droite ℓ' , c'est-à-dire $s \equiv 0$ ce qui est absurde. On a donc une suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ où \mathcal{F} est un fibré uniforme de type $(-1 ; \dots ; -1 ; -2)$, d'après (IV;2,1), \mathcal{F} est isomorphe à $(r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ ou à $(r-3) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}$ et $E(-1)$ est donc isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus (r-3) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}$.

La première possibilité est en contradiction avec l'hypothèse $c_2(E)=0$.

ii) $h^0(\mathbb{P}^2, E(-1))=0$. On va montrer que dans ce cas $h^0(E^\vee(-1))=h^2(E(-2))$ est non nul. Par Riemann-Roch : $\chi(\mathbb{P}^2, E(-1))=0$. D'autre part : $h^2(\mathbb{P}^2, E(-1))=0$ (à cause du type de scindage). Il vient donc : $h^1(\mathbb{P}^2, E(-1))=0$. Dès lors de la suite exacte :

$$0 \rightarrow E(-2) \rightarrow E(-1) \rightarrow E(-1) \otimes \mathcal{L} \rightarrow 0$$

on déduit : $h^2(\mathbb{P}^2, E(-2))=1$.

Donc $h^0(\mathbb{P}^2, E^\vee(-1))=1$ et le même raisonnement qu'en (i) appliqué à $E^\vee(-1)$ montre que, dans ce cas, E est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus (r-3) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus T_{\mathbb{P}^2}(-1)$. ■

Par le même procédé qu'en (IV;2.2) on généralise ce résultat à \mathbb{P}^n , $n \geq 2$:

IV- 4.2 : COROLLAIRE : Soit E un fibré uniforme sur \mathbb{P}^n ($n \geq 2$) de type de scindage $(k=3; r_1=1, r_2=r-2, r_3=1; \mu_1=1, \mu_2=0, \mu_3=-1)$ avec $c_2(E)=0$; alors E est isomorphe à $T_{\mathbb{P}^n}(-1) \oplus (r-n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ ou à $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1) \oplus (r-n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

Démonstration : Soit P un plan de \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) et le sous-diagramme qu'il induit : $P^* \xleftarrow{q'} F_2 \xrightarrow{p'} P$ (cf. I;2.4). Posons $\& := E|_P$. Comme $HN^1(\&) \cong HN^1(E)|_{F_2}$, d'après le lemme précédent, on voit que : $HN^1(E) \cong H_Q$ ou $HN^1(E) \cong p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Dans le premier cas, d'après (I;4.4), on a une suite exacte : $0 \rightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$

avec F uniforme de type $(0; \dots; 0; -1)$. D'après (IV;2.2) on a :

$$F \cong (r-n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \quad \text{ou} \quad F \cong \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \oplus (r-2n) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

L'hypothèse $c_2(E)=0$ élimine la deuxième possibilité et on a bien :

$$E \cong T_{\mathbb{P}^n}(-1) \oplus (r-n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1).$$

Dans le second cas, on a une suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ avec \mathcal{G} uniforme de type $(0, \dots, 0, -1)$: on conclut comme plus haut. ■

IV- 4.3 : Remarque : Soit E un fibré uniforme de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n ($n \geq 2$) de type de scindage : $(k=3; r_1=1, r_2=r-2, r_3=1; \mu_1=1, \mu_2=0, \mu_3=-1)$; on a

$$E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$$

si et seulement si : $c_2(E)=-1$ (cf. par exemple [Ele. For], corollary 2.12).

IV- 4.4 : $r=n+1$

IV- 4.4.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) de type de scindage : $(k=3; r_1=1, r_2=n-1, r_3=1; \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3) \quad , \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\mu_1) \quad , \quad \bigoplus_{i=1}^3 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i).$$

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

La démonstration de cette proposition fait l'objet des numéros (IV;4.4.2, ..., IV;4.4.7).

Remarquons d'abord que l'on peut se limiter au cas où les μ_i sont consécutifs sinon d'après (I;4.1) le fibré est entièrement décomposé. Après torsion, on peut même supposer $\mu_1 = 1$. Soit donc E un tel fibré et (&) l'égalité correspondante :

$$(\&) : S_1(T+U, U, V) \cdot S_2(T, U, V) \cdot S_3(T-U, U, V) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T + x U^{n+1} + (aT + bU + cV) R(U, V).$$

On pose : $S_1(T, U, V) = T + A(U+V)$, $S_3(T, U, V) = T + B(U+V)$, $S_2(T, U, V) = \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-1-i} \cdot s_i(U, V)$, où $s_i(U, V)$ est un polynôme homogène de degré i symétrique en U et V :

$$\begin{aligned} s_0(U, V) &= 1, \\ s_i(U, V) &= x_i(U^i + V^i) + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{i-k}^{(i)} v^{i-k} U^k, \quad 1 \leq i \leq n-2, \\ s_{n-1}(U, V) &= x_{n-1}(U^{n-1} + V^{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-1-k} v^{n-1-k} U^k. \end{aligned}$$

IV- 4.4.2 : Cas où $c = 0$ dans (&)

D'après (III;3.4), il suffit d'examiner la situation suivante :

il existe $\mu \in \{-1, 0, 1\}$ tel que la relation (& $_{\mu}$) correspondante soit de la forme :

$$T^{n+1} + aTR(U, V) - b_{\mu} U^{n+1} + b_{\mu} U R(U, V) = \prod_{i=1}^3 S_i(T + (\mu_i - \mu)U, U, V).$$

Dans ce cas, on a forcément $\mu = 0$ (car $c_1 = 0$) et comme $c_2 = 0$ on peut appliquer (IV;4.2).

IV- 4.4.3 : On a les relations : $B + A + x_1 = 0$, $x_2 + A x_1 + B(x_1 + A) = 0$, $c = A \cdot B \cdot x_{n-1}$.

Pour le voir, on peut par exemple poser $U = 0$, $V = 1$ dans (&) et comparer les coefficients de T^n , T^{n-1} et 1.

IV- 4.4.4 : De même en comparant les coefficients de $T^{n-1} U^2$ dans (&) et en utilisant (IV;4.4.3) il vient : $c_2 = B - A - 1$.

IV- 4.4.5 : l'égalité (&)₀ est de la forme :

$$\begin{aligned} AB x_{n-1} v^{n+1} + [2 AB x_{n-1} + (B-A) x_{n-1} + AB a_{n-2}] v^n + \dots \\ + [2 AB x_{n-1} + (B-A) x_{n-1} + (B + AB - 1 - A) a_1] v + (AB + B - 1 - A) x_{n-1} \\ = \begin{cases} c v^{n+1} + (c+b)(v^n + \dots + v) + c & (1) \\ c v^{n+1} + (c+b)(v^n + \dots + v) + b & (2) \text{ (cf. III;1.2).} \end{cases} \end{aligned}$$

On distingue deux cas suivant la forme prise par la relation (&)₀.

IV- 4.4.6 : Dans le cas (1) il faut : $(B-A-1) \cdot x_{n-1} = 0$ c'est-à-dire (IV;4.4.4) : $c_2 \cdot x_{n-1} = 0$.

Si $c_2 = 0$ on applique (IV;4.2) si $x_{n-1} = 0$ alors $c = 0$ (IV;4.4.3) et on conclut avec (IV;4.4.2).

IV- 4.4.7 : Dans le cas (2) on a les égalités suivantes :

- (i) $c + b = 2ABx_{n-1} + (B-1-A)x_{n-1}$
- (ii) $c + b = 2ABx_{n-1} + (B-A)x_{n-1} + ABa_{n-2}$
- (iii) $c + b = 2ABx_{n-1} + (B-A)x_{n-1} + (B+AB-1-A)a_1$

(i) s'obtient en additionnant le coefficient de v^{n+1} à celui de 1 dans chaque membre de (6). (ii) et (iii) s'obtiennent à partir des coefficients de v^n et v .

$s_{n-1}(U,V)$ étant symétrique on a : $a_{n-2} = a_1$, de (ii) et (iii) il vient : $(B-A-1)a_1 = 0$ c'est-à-dire : $a_1 = 0$ ou $c_2 = 0$. Si $a_1 = 0$ alors $x_{n-1} = 0$ (i), (ii) et donc $c = 0$, on termine comme en (IV;4.4.2). Si $c_2 = 0$, on applique (IV;4.2). Ceci achève la démonstration de la proposition (IV;4.4.1).

§5. $r = n+1$, $k = 2$, $r_1 = 2$, n pair ($n \geq 4$)

Le but de ce paragraphe est de montrer :

IV- 5.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n avec n pair, $n \geq 4$, de type de scindage : $(k = 2 ; r_1 = 2, r_2 = n-1 ; \mu_1, \mu_2)$ alors E est isomorphe à $T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$ où à $\bigoplus_{i=1}^2 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

IV- 5.2 : Remarque : Par dualité, on a le type de scindage :

$(k = 2, r_1 = n-1, r_2 = 2)$. D'après (I;4.1) on peut supposer les μ_i consécutifs et même $\mu_1 = 1$ après torsion.

IV- 5.3 : On pose : $S_1(T,U,V) = T^2 + TA(U+V) + F(U^2+V^2) + DUV$

$S_2(T,U,V) = \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-1-i} s_i(U,V)$, $s_i(U,V)$ est un polynôme homogène de degré i symétrique en U et V avec :

$$s_0(U,V) = 1$$

$$s_i(U,V) = x_i(U^i + V^i) + \sum_{t=1}^{i-1} \alpha_{i-t}^{(i)} v^{i-t} U^t, \quad 1 \leq i \leq n-2$$

$$s_{n-1}(U,V) = x_{n-1}(U^{n-1} + V^{n-1}) + \sum_{t=1}^{n-2} a_{n-1-t} v^{n-1-t} U^t.$$

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

La relation (\mathcal{E}_2) s'écrit :

$$S_1(T+U, U, V) \cdot S_2(T, U, V) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T + x_2 U^{n+1} + (aT + b_2 U + cV) R(U, V).$$

IV- 5.4 : Pour démontrer la proposition (IV;5.1) il suffit d'après (III;3.4) de montrer que l'on a $c=0$ dans (\mathcal{E}_2) . En effet, il ne peut exister $\mu \in \{1,0\}$ tel que (\mathcal{E}_μ) s'écrive :

$$T^{n+1} + aTR(U, V) - b_\mu U^{n+1} + b_\mu U R(U, V) = \prod_{i=1}^2 S_i(T + (\mu_i - \mu)U, U, V)$$

car il faudrait : $c_1(E(-\mu)) = 2(1-\mu) + (n-1)(-\mu) = 0$, ce qui est impossible.

IV- 5.5 : L'égalité $(\mathcal{E}_2)_0$ est de la forme :

$$v^{n+1} F x_{n-1} + v^n [x_{n-1}(A+D) + a_{n-2} F] + \dots + v [a_1(1+A+F) + x_{n-1}(A+D)] + x_{n-1}(1+A+F) \\ = \begin{cases} c v^{n+1} + (c + b_2)(v^n + \dots + v) + c & (1) \\ c v^{n+1} + (c + b_2)(v^n + \dots + v) + b_2 & (2) \end{cases} \quad (\text{cf. III;1.2}).$$

Dans un cas comme dans l'autre, on déduit la relation $(1+A)a_{n-2} = 0$ en comparant les coefficients de v^n et v et en utilisant $a_1 = a_{n-2}$ (symétrie de $S_2(0, U, V)$).

IV- 5.6 : Cas où $A = -1$

En restreignant la filtration HN^* à une fibre de p (cf. I;2.3) on obtient la suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow (n+1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$, où $\mathcal{E}_1 := q^* E_1|_{p^{-1}(x)} \cdot \mathcal{E}_1$ est un sous-fibré de rang deux de première classe de Chern -1 du fibré trivial $(n+1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$. Il est donc uniforme de type $(0, -1)$. Pour $n \geq 4$: $\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ ([vdV]). En particulier $c_2(\mathcal{E}_1)$ est nul, c'est-à-dire $F=0$ et ceci implique $c=0$ dans (\mathcal{E}) .

N.B. On peut montrer que dans ce cas : $E \cong T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$.

IV- 5.7 : Cas où $a_{n-2} = 0$

On examine les deux possibilités de (IV;5.5) suivant la forme prise par $(\mathcal{E}_2)_0$.

IV- 5.7.1 : Dans le cas (1) il faut : $x_{n-1}(1+A) = 0$ (coefficients de v^{n+1} et de 1 dans $(\mathcal{E}_2)_0$).

Si $A = -1$ (cf. IV;5.6).

Si $x_{n-1} = 0$ alors $c = 0$.

IV- 5.7.2 : Dans le cas (2) on a les relations :

(i) $c + b_2 = (2F + 1 + A)x_{n-1}$

(ii) $c + b_2 = x_{n-1}(A + D)$

(i) s'obtient à partir des coefficients de v^{n+1} et de 1

(ii) s'obtient à partir des coefficients de v^n .

Si $x_{n-1} = 0$ alors $c = 0$.

Si $D = 2F + 1$ alors $S_1(1, 1, v) = (v + 1)(Fv + 1 + A + F)$ et $(cv + b_2) \cdot R(1, v)$ a deux racines réelles, ce qui est absurde (car n est pair), à moins que $c = 0 = b_2$.

Ceci achève la démonstration de la proposition (IV; 5.1).

CHAPITRE V

$n = p - 1$

- § 0) Introduction
- § 1) Les solutions primitives associées
- § 2) Cas où il existe un indice j tel que $x_j = 0$
- § 3) Cas où $c \neq 0$ et $x_j \neq 0, 1 \leq j \leq k$. Existence de solutions primitives associées
- § 4) Les conditions arithmétiques
- § 5) Les cas pathologiques $b_1 = 0, c + b_1 = 0$
- § 6) Fin de la démonstration du théorème III'

§0. Introduction

Le but de ce chapitre est de démontrer le :

THÉORÈME III' : Sur \mathbb{P}^n avec $n = p - 1$ où p est un nombre premier supérieur ou égal à 7, les fibrés uniformes de rang $(n + 1)$ sont (à isomorphismes près) :

$$\bigoplus_{i=1}^k r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) , T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b) , \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d).$$

Plan de démonstration :

Dans le §1) on définit les solutions primitives associées (ξ_i, S_i, ξ) et on montre que si certaines conditions arithmétiques $A(c_i, b_i, \xi, S_i, n)$ sont vérifiées alors la relation (ξ_i) prend une forme particulière simple.

A partir du §2) et jusqu'à la fin de ce chapitre on suppose n de la forme $p - 1$ où p est un nombre premier. L'hypothèse $n = p - 1$ nous permet d'écartier les cas où il existe un indice $j, 1 \leq j \leq k$, tel que $x_j = 0$ dans la relation (ξ_j) correspondante (§2).

SUR LES FIBRÉS UNIFORME DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

Dans le §3) on suppose donc $x_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$ et aussi $c \neq 0$; sous ces hypothèses on montre l'existence de solutions associées primitives. Une fois une solution primitive associée, $(\mathcal{E}_1, S_1, \xi)$ choisie, il nous faut étudier les conditions arithmétiques $A(c_1, b_1, \xi, S_1, n)$.

Au §4) nous montrons que ces conditions sont vérifiées si $cb_1 \neq 0$, $c \neq \pm b_1$.

Les cas pathologiques ($b_1 = 0$, $c = \pm b_1$) sont traités au §5).

Maintenant le problème se réduit aux situations de (III;2.4) et (V;1.2); pour conclure il reste à étudier le cas où il existe un indice j_0 tel que la relation (\mathcal{E}_{j_0}) soit de la forme :

$$T^{n+1} + aT \cdot R(U, V) + c(U^{n+1} + V^{n+1}) + (c + b_{j_0})(U^n V + \dots + U V^n) = \prod_{j=1}^k S_j(T + (\mu_j - \mu_{j_0})U, U, V)$$

ceci est le contenu du §6).

§1. Les solutions primitives associées

Etant donné la relation $(\mathcal{E}) = (\mathcal{E}; P, x, a, b, c, k, \mathcal{S}, \mu)$ où :

- $P(T, U) = \sum_{i=0}^k c_i T^{n+1-i} U^i$ est un polynôme homogène en T et U à coefficients entiers, monique en $T(c_0 = 1)$.
- x, a, b, c, k sont des entiers, k étant supérieur ou égal à 1.
- $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ est une suite de k polynômes homogènes en T, U, V de degré au moins égal à un, symétriques en U et V.
- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ est une suite de k entiers strictement décroissante.

Toutes ces données vérifiant :

$$P(T, U) + xU^{n+1} + (aT + bU + cV)R(U, V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V).$$

Nous dirons que $(\mathcal{E}_1) = (\mathcal{E}_1; P_1, x_1, a, b_1, c, k, \mathcal{S}, \mu, \xi)$ (cf. III;1.1 pour la définition de \mathcal{E}_1) est une solution associée primitive de (\mathcal{E}) si :

- 1°) $x_1 = c - b_1$ est non nul,
- 2°) ξ est une racine de $S_1(0, 1, v)$ qui est distincte de 1 et -1 et qui est racine simple de $\psi_1(v) = cv^{n+1} + (c + b_1)(v^n + \dots + v) + c$.

Si aucune confusion n'est à craindre nous écrirons plus simplement $(\mathcal{E}_1; S_1, \xi)$.

V- 1.1 : LEMME : Soit $(\mathcal{E}_1; S_1, \xi)$ une solution primitive associée de (\mathcal{E}) et soit

$$P_1(T, U) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T.$$

Si $\xi^{n+1-t} - 1 \neq 0$ pour $1 \leq t \leq \ell$ alors $c_{n+1-t} = 0$, $1 \leq t \leq \ell$.

Démonstration : On considère $v(\lambda)$ la solution holomorphe de $S_1(\lambda(1+v(\lambda)), 1, v(\lambda))=0$ qui vérifie $v(0)=\xi$. L'existence et l'unicité sont assurées par le théorème des fonctions implicites car ξ est racine simple de $\psi_1(v)$. Par symétrie $v(\lambda)$ vérifie le système :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} P_1(\lambda(1+v(\lambda)), 1) + (c - b_1) + [a\lambda(1+v(\lambda)) + b_1 + cv(\lambda)] R(1, v(\lambda)) = 0 \\ P_1(\lambda(1+v(\lambda)), v(\lambda)) + (c - b_1)v(\lambda)^{n+1} + [a\lambda(1+v(\lambda)) + b_1 v(\lambda) + c] R(1, v(\lambda)) = 0 \end{cases}$$

On remarque l'égalité :

$$(c - b_1) v(\lambda)^{n+1} + [a\lambda(1+v(\lambda)) + b_1 v(\lambda) + c] R(1, v(\lambda)) = (c - b_1) + [a\lambda(1+v(\lambda)) + b_1 + cv(\lambda)] R(1, v(\lambda)).$$

Ainsi par différence dans (\mathcal{S}) il vient :

$$P_1(\lambda(1+v(\lambda)), 1) = P_1(\lambda(1+v(\lambda)), v(\lambda)) \quad (*).$$

En dérivant une fois $(*)$ en $\lambda=0$ il vient :

$$c_n(1+\xi)(1-\xi^n) = 0 \quad \text{donc si } \xi^n \neq 1 \text{ on a bien } c_n = 0.$$

Procédons par récurrence et supposons $c_{n+1-t} = 0, 1 \leq t \leq \ell - 1$.

En dérivant ℓ fois $(*)$, en $\lambda=0$, on obtient :

$$c_{n+1-\ell}(1+\xi)(1-\xi^{n+1-\ell}) = 0, \text{ d'où le lemme. } \blacksquare$$

V- 1.2 : Soit $(\mathcal{E}_1; P_1, x_1, a, b_1, c, k, \mathcal{S}, \mu, \xi)$ une solution primitive associée de (\mathcal{E}) on note $A(c, b_1, \xi, S_1, n)$ les conditions arithmétiques : $\xi^{n+1-t} - 1 \neq 0, 1 \leq t \leq n$.

Si $A(c, b_1, \xi, S_1, n)$ sont vérifiées alors (\mathcal{E}_1) s'écrit :

$$T^{n+1} + aTR(U, V) + c(U^{n+1} + V^{n+1}) + (c + b_1)(U^n V + \dots + UV^n) = \prod_{j=1}^k S_j(T + (\mu_j - \mu_1)U, U, V)$$

§2. Cas où il existe un indice j tel que $x_j = 0$

Notation : Dans tout ce paragraphe et jusqu'à la fin de ce chapitre p désigne un nombre premier. On suppose dorénavant n de la forme $p-1$.

V- 2.1 : PROPOSITION : Si $n=p-1$ et s'il existe un indice $j, 1 \leq j \leq k$, tel que $x_j = 0$ dans la relation (\mathcal{E}_j) correspondante alors ou
 i) c et b_j sont nuls, ou ii) $k=1$, ou iii) $k=2, r_1=1, r_2=n$ ($r_1=n, r_2=1$).

Démonstration : D'après l'hypothèse la relation (\mathcal{E}_j) s'écrit :

$(cv + b_j) R(1, v) = \prod_{i=1}^k S_i(\mu_i - \mu_j, 1, v)$, or $R(1, v)$ est irréductible (car $n=p-1$) d'où la proposition. \blacksquare

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

V- 2.2 : Remarque : Le cas i) rentre dans la "catégorie $c=0$ " (cf.chap.III).
Les cas ii) et iii) sont traités par (I;4.2) et (IV;2.2) respectivement.

§3. Cas où $c \neq 0$ et $x_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$, existence de solutions primitives associées

Avant toute chose, notons le résultat suivant qui nous sera bien utile :

V- 3.1 : LEMME : Soit E un fibré uniforme de rang $(n+1)$ sur \mathbb{P}^n de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$. Si n est pair et s'il existe deux indices i et j, $1 \leq i < j \leq k$, tels que r_i et r_j soient impairs alors, dans la relation (&) correspondante, c est nul.

Démonstration : Considérons le polynôme $F(Y) = Y^{n+1} + c_1 Y^n + \dots + c_n Y + x$. Il est de degré impair à coefficients réels, il a donc une racine réelle : λ . Dans (&) posons : $T = \lambda$ et $U = 1$ il vient :

$$(a\lambda + b + c\nu) R(1, \nu) = \prod_{i=1}^k S_i(\lambda + \mu_i, 1, \nu).$$

Si c est non nul, le membre de gauche a une racine réelle, celui de droite au moins deux ce qui est absurde. ■

Faisons maintenant quelques remarques élémentaires :

V- 3.2 : Remarque : Dans les hypothèses de ce §3 s'il existe j, $1 \leq j \leq k$, tel que $r_j \geq 4$ alors il existe ξ racine de $S_j(0, 1, \nu)$ telle que (ξ_j, S_j, ξ) soit une solution primitive associée. En effet, d'après (III;1.3), $S_j(0, 1, \nu)$ a une racine complexe ξ qui est donc une racine simple de $\psi_j(\nu)$.

V- 3.3 : Remarque : Soit $S(v) = E v^2 + D v + E$, alors $S(v)$ a une racine double si et seulement si $S(1) = 0$ ou $S(-1) = 0$. Donc si $r_i = 2$ et si S_i n'est pas solution primitive associée alors c vaut $\frac{n}{n+2} b_i$ ou $-\frac{n}{n+2} b_i$. En effet si 1 est racine de $S_i(0, 1, \nu)$ alors 1 est racine double de $S_i(0, 1, \nu)$ et donc de $\psi_i(\nu)$, ceci implique $-\frac{n+2}{n} c = b_i$. Par le même raisonnement on voit que si -1 est racine de $S_i(0, 1, \nu)$ alors -1 est racine double de $\psi_i(\nu) = (v+1)(c v^n + b v^{n-1} + \dots + b v + c)$ (car n est pair) et $\psi_i'(-1) = 0$ si et seulement si $\frac{n+2}{n} c = b_i$. Supposons maintenant que les deux racines (α_1, α_2) de $S_i(0, 1, \nu)$ soient des racines multiples de ψ_i alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ car ψ_i n'a qu'une racine multiple (cf.III;1.3) et donc $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ (car α est racine

multiple de $S_i(0,1,v)$.

V- 3.4 : Remarque : De l'égalité : $Hv^3 + Gv^2 + Gv + H = (v+1)[Hv^2 + (G-H)v + H]$ on déduit comme ci-dessus : si $r_i = 3$ et si S_i n'est pas solution primitive associée alors $\frac{n+2}{n}c = b_i$ ou $-\frac{n+2}{n}c = b_i$.

Pour montrer l'existence de solutions primitives associées nous avons besoin du

V- 3.5 : LEMME : Soit $Q_t(v) = P(t,1) + (b+cv)R(1,v)$ avec $P(t,1) = t^{n+1} + c_1t^n + \dots + c_n t + x$. Si $b \neq -c$ alors v^2 ne divise jamais $Q_t(v)$ et $Q_t(v)$ n'a jamais de racines complexes non nulles d'argument $(2k+1)\pi/(n+1)$.

Démonstration : Pour la deuxième assertion il suffit de considérer $(v-1)Q_t(v)$. ■

V- 3.6 : PROPOSITION : Dans les hypothèses de ce §3 et si $n \geq 6$, il existe toujours une solution primitive associée.

Démonstration : D'après (V;3.1 et V;3.2) il nous reste à traiter le cas suivant : il existe un seul indice j , $1 \leq j \leq k$, tel que $r_j = 1$ (ou 3) et si $i \neq j$ alors $r_i = 2$. Comme $n \geq 6$, il existe au moins trois indices avec $r_i = 2$ ou 3. Soient r_i , $1 \leq i \leq 3$, ces indices.

Si les S_{i_ℓ} ($1 \leq \ell \leq 3$) ne sont pas solutions primitives associées alors (cf. V;3.3 et V;3.4) b_{i_ℓ} vaut $\frac{n+2}{n}c$ ou $-\frac{n+2}{n}c$, $1 \leq \ell \leq 3$, il existe donc t et s , $1 \leq t < s \leq 3$, tels que $b_{i_t} = b_{i_s}$. Ceci implique $a = 0$ (car $b_{i_t} = -a\mu_{i_t} + b$), $b_{i_t} = b$, $1 \leq i \leq k$, et $c = \pm \frac{n}{n+2}b$.

En particulier $c \neq -b$ et pour i , $1 \leq i \leq k$, la relation $(\&_i)$ s'écrit :

$$cv^{n+1} + (c+b)(v^n + \dots + v) + c = \prod_{m=1}^k S_m(\mu_m - \mu_i, 1, v).$$

Montrons maintenant le résultat suivant :

(★) $\left\{ \begin{array}{l} \psi(v) = cv^{n+1} + (c+b)(v^n + \dots + v) + c \text{ a une racine complexe non nulle } \theta \text{ vérifiant :} \\ \pi/(n+1) < \arg \theta < 5\pi/(n+1) \end{array} \right.$

En effet soit $\psi_t(v) = v^{n+1} + t(v^n + \dots + v) + 1$; pour $t \geq 1$, ψ_t a deux racines $r_1(t)$ et $r_2(t)$ d'argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/(n+1)$: c'est une conséquence des faits suivants (cf. III;1.3) :

- i) ψ_s a une racine d'argument $(2k+1)\pi/(n+1)$ si et seulement si $s = 0$.
- ii) ψ_1 a $e^{2i\pi/(n+2)}$ et $e^{4i\pi/(n+2)}$ comme racines.
- iii) Pour tout s : $\psi_s(0) \neq 0$. De plus on a les inégalités :

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

$$(2k+1)\pi/(n+1) < (2k+2)\pi/(n+2) < (2k+3)\pi/(n+1) \quad \text{si } 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$$

et : $2 \leq \frac{n}{2} - 1$ si $n \geq 6$. Pour les mêmes raisons si $0 < t < 1$, $r_1(t)$ et $r_2(t)$ ont encore un argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/(n+1)$:

Pour $t=0$, une des deux racines, disons par exemple $r_1(0)$, prend la valeur $e^{3i\pi/(n+1)}$.

et donc pour $t < 0$: $\pi/(n+1) < \arg(r_1(t)) < 5\pi/(n+1)$ (cf. i)).

Pour $t = (c+b)/c$, $\psi_t = \frac{1}{c}\psi$ et (*) est démontré.

En revenant à la relation $(\xi_1)_0$, d'après (*) il existe i_0 , $1 \leq i_0 \leq k$, tel que $S_{i_0}(\mu_{i_0} - \mu_1, 1, \theta) = 0$.

Nous allons montrer que $S_{i_0}(0, 1, v)$ a une racine complexe ξ d'argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/(n+1)$. Ce sera alors une racine simple de $x_{j_0} + (c v + b_{j_0}) R(1, v) = \psi(v)$ (cf. III; 1.3) et $(\xi_{i_0}; S_{i_0}, \xi)$ sera donc solution primitive associée. Soit Y l'ensemble des réels y tels que $S_{i_0}(y - \mu_1, 1, v)$ ait une racine non nulle $r(y)$ d'argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/(n+1)$. Y est nonvide (il contient μ_{i_0}) et est ouvert. Montrons que Y est fermé. Soit y_0 adhérent à Y et v_0 une racine de $S_{i_0}(y_0 - \mu_1, 1, v)$ adhérent à tous les ensembles $r(Y \cap]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[)$. Pour y dans Y , $S_{i_0}(y - \mu_1, 1, v)$ est divisible par $(v - r(y))(v - r(\bar{y}))$. Comme $P(t_0, 1) + (b + cv) R(1, v)$ n'est pas divisible par v^2 (car $b \neq -c$ cf. V; 3.5) la racine v_0 est non nulle. Pour conclure il suffit de montrer que pour $\ell = 0, 2$, σ réel et $b \neq -c$: $\sigma + (b + cv) R(1, v)$ n'a pas de racine non nulle d'argument $(2\ell + 1)\pi/(n+1)$: c'est justement le lemme (V; 3.5). ■

§4. Les conditions arithmétiques

Soit $(\xi_i; a, b_i, c, k, \mathcal{S}, \mu, \xi)$ une solution primitive associée de $(\xi_i; a, b, c, k, \mathcal{S}, \mu)$. Si les conditions arithmétiques

$$A(c, b_i, \xi, S_i, n) : \{ \xi^{n+1-t} - 1 \neq 0, \quad 1 \leq t \leq n \quad \text{sont vérifiées,}$$

$$\text{alors d'après (V; 1.2) :} \quad P_i(T, U) = T^{n+1}.$$

On étudie dans ce qui suit à quelles conditions, portant sur c et b_i les relations $A(c, b_i, \xi, S_i, n)$ sont vérifiées.

V- 4.1 : LEMME : Si pour tout r , $2 < r \leq n$, on note q_r le reste de la division de n par r et si $\Phi_r(X)$ ne divise pas $cX^{q_r+2} + b_i X^{q_r+1} - b_i X - c$ (où Φ_r désigne le r -ième polynôme cyclotomique) alors les conditions $A(c, b_i, \xi, S_i, n)$ sont vérifiées.

Démonstration : Supposons que l'on ait $\xi^{n+1-t} = 1$ pour un certain t , $1 \leq t \leq n$, alors ξ

est une racine primitive r -ième de l'unité pour un certain r tel que r divise $n+1-t$.
 Remarquons que $r > 2$ car $\xi \neq \pm 1$ par hypothèse. Soit : $n = xr + q_r$, $0 \leq q_r < r \leq n$. On a :
 $\xi^n + \dots + \xi = \xi^{qr} + \dots + \xi$ et de : $c\xi^{n+1} + (c + b_1)(\xi^n + \dots + \xi) + c = 0$ il vient :
 $c\xi^{qr+1} + (c + b_1)(\xi^{qr} + \dots + \xi) + c = 0$.

En multipliant par ξ^{-1} : $c\xi^{qr+2} + b_1\xi^{qr+1} - b_1\xi - c = 0$.

Comme Φ_r est le polynôme minimal de ξ sur \mathbb{Q} , on a le lemme. ■

V- 4.2 : Remarque : Si $c \neq b_1$ et $cb_1 \neq 0$ alors Φ_r ne divise pas $cX^t + b_1X^{t-1} - b_1X - c$ pour $t = 2, r, r+1$. Donc si pour tout r , $2 < r \leq n$, Φ_r ne divise pas $cX^q + b_1X^{q-1} - b_1X - c$, $2 < q < r$, alors $A(c, b_1, \xi, S_1, n)$ est vérifiée.

V- 4.3 : Pour démontrer le lemme suivant nous avons besoin de quelques résultats de la théorie des corps cyclotomiques que nous rappelons ci-dessous (cf. [Lang] pour plus de détails). Soit $\theta := \exp(2i\pi/r)$ une racine primitive r -ième de l'unité. Le groupe de Galois, $\mathcal{G}(\theta)$, de l'extension $\mathbb{Q}(\theta)$ de \mathbb{Q} s'identifie à $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^*$: à x avec $x < r$, $(x, r) = 1$ on fait correspondre σ dans $\mathcal{G}(\theta)$ entièrement déterminé par $\sigma(\theta) = \exp(2i\pi x/r)$. Ainsi $\mathcal{G}(\theta)$ permute les racines de Φ_r . On définit la norme, N , de $\mathbb{Q}(\theta)$ par rapport à \mathbb{Q} : $\forall x \in \mathbb{Q}(\theta) : N(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(r)} \sigma_i(x)$ où les σ_i sont les éléments de $\mathcal{G}(\theta)$. La norme est multiplicative : $\forall x \in \mathbb{Q}(\theta), \forall y \in \mathbb{Q}(\theta), N(xy) = N(x) \cdot N(y)$. Si $a \in \mathbb{Q} : N(a) = a^{\varphi(r)}$ (car $\mathcal{G}(\theta)$ laisse \mathbb{Q} fixe). Si r_1 divise r et si ψ est une racine primitive r_1 -ième de l'unité on a les inclusions :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\psi) \subset \mathbb{Q}(\theta) \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{Q}(\psi) \text{ on a : } N(x) = N'(x)^{[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}(\psi)]}$$

où N' désigne la norme de $\mathbb{Q}(\psi)$ par rapport à \mathbb{Q} .

Comme : $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}(\psi)][\mathbb{Q}(\psi) : \mathbb{Q}]$ il vient : $N(x) = N'(x)^{\varphi(r)/\varphi(r_1)}$.

V- 4.4 : LEMME : Si $r > 12$ et si $cb \neq 0$ et $c \neq \pm b$ alors Φ_r ne divise pas $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$, $2 < q < r$.

Démonstration : On peut supposer c et b premiers entre eux. Nous allons montrer que si Φ_r divise $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$, avec $r > 12$, alors $c = \pm 1$ et $b = \pm 1$.
 On pose $\theta = e^{2i\pi/r}$. Si Φ_r divise $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$ alors $c(\theta^q - 1) = -b\theta(\theta^{q-2} - 1)$ (*)
 Soient $d = (r, q-2)$, $r_1 d = r$, $\psi := \theta^{q-2}$. Il est clair que ψ est une racine primitive r_1 -ième de l'unité. On note N la norme de $\mathbb{Q}(\theta)$ par rapport à \mathbb{Q} et N' celle de $\mathbb{Q}(\psi)$ par rapport à \mathbb{Q} . En prenant les normes dans (*) il vient :
 $c^{\varphi(r)}$ divise $(-b)^{\varphi(r)} N(\theta) \cdot N(\psi-1)$, or $(b, c) = 1$ et $N(\theta)$ vaut ± 1 donc $c^{\varphi(r)}$ divise $N(\psi-1)$.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n

Comme $\psi-1$ appartient à $\mathcal{Q}(\psi)$, on a : $N(\psi-1) = N'(\psi-1)^{\varphi(r_1)/\varphi(r_1)}$. De $x^{r_1-1} + \dots + 1 = \prod_{\substack{s|r_1 \\ s>1}} \Phi_s(X)$ il

vient en posant $X=1$:
$$r_1 = \left(\prod_{\substack{s|r_1 \\ 1 < s < r_1}} \Phi_s(1) \right)^{\varphi(r_1)} \left(\prod_{i=1}^{\varphi(r_1)} (1 - \omega_i) \right)$$

où les ω_i , $1 \leq i \leq \varphi(r_1)$, sont les racines primitives r_1 -ièmes de l'unité.

D'autre part : $N'(\psi-1) = \prod_{\sigma \in \mathcal{G}(\psi)} (\sigma(\psi)-1) = \prod_{i=1}^{\varphi(r_1)} (\omega_i - 1)$ car quand σ parcourt $\mathcal{G}(\psi)$,

$\sigma(\psi)$ parcourt les racines primitives r_1 -ièmes de l'unité. Ceci montre que $N'(\psi-1)$ divise r_1 . De ce qui précède on déduit : $c^{\varphi(r_1)}$ divise r_1 (**).

Si c est différent de 1 et -1 il existe un nombre premier p qui divise c et r_1 . Soient f et γ les plus grandes puissances de p qui divisent c et r_1 . On pose $r_1 = p^\gamma m$. De (**), il vient : $f \cdot p^{\gamma-1} (p-1) \varphi(m) \leq \gamma$. Ceci implique $f=1$, $p=2$, $m=1$ et $\gamma=1$ ou 2 . En effet :

si $f \geq 2$ alors $f p^{\gamma-1} \geq 2^\gamma > \gamma$; si $p > 2$: $p^{\gamma-1} (p-1) \geq 2^\gamma > \gamma$; si $m \geq 2$, $\varphi(m) \geq 2$ et $p^{\gamma-1} \varphi(m) \geq 2^\gamma > \gamma$.

Finalement pour $f=1$, $p=2$, $m=1$ on a : $2^{\gamma-1} \leq \gamma$ c'est-à-dire $\gamma=1$ ou 2 .

Soit maintenant $q-2 = \ell d$, de $q-2 < r$ et $r = r_1 \cdot d$ il vient $\ell < r_1$.

De ce qui précède : $r_1 = 2$ ou 4 et donc : $q-2 = \epsilon \frac{r}{4}$ avec $0 \leq \epsilon \leq 3$.

Ainsi θ^{q-2} ne peut prendre que les valeurs ± 1 et $\pm i$.

De (*) on déduit que θ satisfait à une équation de degré au plus quatre à coefficients dans \mathbb{Z} , ceci n'est possible que si $\varphi(r) \leq 4$, c'est-à-dire $r \leq 12$. Ceci montre que sous nos hypothèses c vaut 1 ou -1 . De la même manière en posant :

$d' = (r, q)$, $r_2 d' = r$, $\xi = \theta^{q'}$ avec ξ racine primitive r_2 -ième de l'unité on montre que b vaut 1 ou -1 . ■

V- 4.5 : LEMME ; Soit $P_q(X) = cX^q + bX^{q-1} - bX - c$, $2 < q < r$, $r > 2$, et $\chi = e^{2i\pi k/r}$. On suppose $cb \neq 0$, $c \neq \pm b$ et $(k, r) = 1$.

Alors $P_q(\chi) = 0$ implique : $\frac{\text{tg}(q-1)\theta}{\text{tg } \theta} = \frac{b-c}{b+c}$ où $\theta = k\pi/r$.

Démonstration : De $\chi^{-q/2} P_q(\chi) = 0$ il vient : $-c\chi^{q/2} - b\chi^{q/2-1} = -c\chi^{-q/2} - b\chi^{-q/2-1}$, donc $-c\chi^{q/2} - b\chi^{q/2-1}$ est réel ($|\chi|=1$); ceci implique : $c \sin q\theta + b \sin(q-2)\theta = 0$.

Remarquons que d'après nos hypothèses $\sin(q-2)\theta \neq 0$ (dans le cas contraire on aurait aussi $\sin q\theta = 0$ d'où $(q-2)k = r\ell$, $qk = rm$ et $r(m-\ell) = 2k$ c'est-à-dire r divise 2 ce qui est absurde). On a donc : $\frac{\sin q\theta}{\sin(q-2)\theta} = -\frac{b}{c}$. On pose $t = q-1$. En développant, il vient :

$$-b/c = (1 + (\text{tg } t\theta / \text{tg } \theta)) \cdot (-1 + (\text{tg } t\theta / \text{tg } \theta))^{-1}$$

Remarquons que $\cos \theta \cos t\theta \neq 0$ car $b \neq \pm c$. En appliquant la transformation

$f(t) = \frac{-1-t}{1-t}$ on a le résultat annoncé. ■

V- 4.6 : LEMME : Si r est impair, supérieur ou égal à 5, et si $cb \neq 0$, $c \neq b$ alors Φ_r ne divise pas $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$ $2 < q < r$.

Démonstration : Si Φ_r divise $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$, en appliquant (V;4.5) avec $k=1$ et $k=2$ il vient :

$$\operatorname{tg}(q-1)\frac{\pi}{r} = \operatorname{tg}(q-1)\frac{2\pi}{r} / \operatorname{tg}\frac{2\pi}{r} (= (b-c)/(b+c))$$

d'où :
$$\operatorname{tg} 2(q-1)\frac{\pi}{r} / \operatorname{tg}(q-1)\frac{\pi}{r} = \operatorname{tg} 2\frac{\pi}{r} / \operatorname{tg}\frac{\pi}{r} .$$

En particulier $f(x) = \operatorname{tg} 2x / \operatorname{tg} x$ prend deux fois la même valeur pour $x' = \pi/r$ et $x'' = (q-1)\pi/r$ avec $0 < x' < \pi/4$ et $0 < x'' < \pi$. Ceci montre que $x' = x''$ ou $x' + x'' = \pi$, c'est-à-dire $q=2$ ou $q=r$ d'où le lemme. ■

V- 4.7 : PROPOSITION : Soit $n = p-1$ où p est un nombre premier supérieur ou égal à 7 Soit $(\xi_1, a, b_1, c, k, S, \mu, \xi)$ une solution primitive associée de $(\xi; a, b, c, k, S, \mu)$. Si $cb_1 \neq 0$ et $c \neq \pm b_1$ alors les conditions arithmétiques $A(c, b_1, \xi, S_1, n)$ sont vérifiées et (cf.V;1.2).

La relation (ξ_1) est de la forme :

$$T^{n+1} + (c - b_1)U^{n+1} + (aT + b_1U + cV)R(U, V) = \prod_{j=1}^k S_j(T + (\mu_j - \mu_1)U, U, V)$$

Démonstration : D'après (V;4.4) et (V;4.6) il reste à montrer que pour r appartenant à $\{3, 4, 6, 8, 10, 12\}$, Φ_r ne divise pas $cX^{qr+2} + bX^{qr+1} - bX - c$ où q_r est le reste de la division de $n = p-1$ par r avec $p \geq 7$. Ceci se vérifie facilement en utilisant la démonstration de (V;4.4) et en remarquant que q_r ne peut prendre que certaines valeurs: par exemple q_6 ne peut prendre que les valeurs 0 et 4; pour les autres on aurait $p-1 = 6x + q_6$ et si $q_6 = 1, 2, 3, 5$ alors 2 divise p ou 3 divise p . ■

V- 4.8 : Remarque : Le cas où c est nul dans la relation (ξ) est traité en (III;3.4). Si $c - b_1 = 0$ alors $x_1 = 0$ (cf.III;1.2) et dans l'hypothèse où $n = p-1$, ce cas est traité en (V;§2). Ainsi les seuls cas "pathologiques" sont $b_1 = 0$, $c + b_1 = 0$: il font l'objet du paragraphe suivant. Le cas de (V;4.7) est réglé au paragraphe 6.

§5. Les cas pathologiques $b_1 = 0$, $c + b_1 = 0$

V- 5.1 : Cas où b_1 est nul

Les hypothèses sont celles du §3 : $n = p-1$, c est non nul et pour tout j ,

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

$1 \leq j \leq k$, x_j est non nul. On suppose que $(\mathcal{E}_i; a, b_i=0, c, k, S, \mu, \xi)$ est une solution primitive associée de (\mathcal{E}) .

V- 5.1.1 : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (V;5.1) s'il existe ℓ , $1 \leq \ell \leq k$, tel que $b_\ell=0$ alors on a $k=1$ dans la relation (\mathcal{E}) correspondante.

Démonstration : De $b_i=b_\ell$ il vient $a=0$ ($b_i=-a\mu_i+b$) et $b=0$ (car $b_i=0$) ainsi pour tout j , $1 \leq j \leq k$, $x_j=c$ et $(\mathcal{E}_j)_0$ est de la forme : $c(v^{n+1}+\dots+1)=\prod_{m=1}^k S_m(\mu_m-\mu_j, 1, v)$. Soient $P(t,1)=t^{n+1}+c_1t^n+\dots+c_n t+x$ et $Q_t(v)=P(t,1)+cvR(1,v)$.

On a: v^2 ne divise jamais $Q_t(v)$ et en considérant $(v-1) \cdot Q_t(v)$ on voit que $Q_t(v)$ n'a jamais de racines complexes non nulles d'argument $(2k+1)\pi/(n+2)$.

$(\mathcal{E}_1)_0$ s'écrit : $c(v^{n+1}+\dots+1)=\prod_{m=1}^k S_m(\mu_m-\mu_1, 1, v)$, il existe donc j , $1 \leq j \leq k$, tel que $S_j(\mu_j-\mu_1, 1, e^{2i\pi/(n+2)})=0$.

En considérant l'ensemble des réels y tels que $S_j(y-\mu_1, 1, v)$ ait une racine non nulle d'argument strictement compris entre $\pi/(n+2)$ et $3\pi/(n+2)$ on montre, comme en (V;3.6) que $S_j(0,1, e^{2i\pi/(n+2)})=0$. Ainsi $(\mathcal{E}_j; S_j, \zeta=e^{2i\pi/(n+2)})$ est une solution primitive associée de (\mathcal{E}) vérifiant $A(c, b_j, \zeta, S_j, n)$ (car $\zeta^{n+1-s}-1 \neq 0$, $1 \leq s \leq n$) dès lors la relation (\mathcal{E}_j) est de la forme (cf.V;1.2) :

$$T^{n+1}+cR_{n+1}(U,V)=\prod_{m=1}^k S_m(T+(\mu_m-\mu_j)U, U, V).$$

Pour conclure il suffit de montrer que le polynôme : $T^{n+1}+cR_{n+1}(U,V)$ est irréductible. Or ceci est une conséquence du critère d'Eisenstein car le polynôme irréductible : $\Phi(U,V)=V-U \exp(2i\pi/(n+2))$ divise $cR_{n+1}(U,V)$ mais Φ^2 ne divise pas R_{n+1} . ■

V- 5.1.2 : PROPOSITION : Sous les hypothèse de (V;5.1) et si pour tout j différent de i , $1 \leq j \leq k$, b_j est non nul alors :

ou il existe une autre solution primitive associée $(\mathcal{E}_\ell; a, b_\ell, c, S_\ell, \xi')$ avec

$b_\ell \neq 0$ ou la relation (\mathcal{E}_i) s'écrit :

ou la relation (\mathcal{E}_i) s'écrit :

$$T^{n+1}+aTR(U,V)+cR_{n+1}(U,V)=\prod_{m=1}^k S_m(T+(\mu_m-\mu_i)U, U, V)$$

Démonstration : S'il existe $r_j \geq 4$ avec $j \neq i$ c'est clair (cf.V;3.2).

On suppose donc $r_j \leq 3$ pour $j \neq i$. $(\mathcal{E}_i)_0$ s'écrit :

$$c(v^{n+1}+\dots+1)=\prod_{m=1}^k S_m(\mu_m-\mu_i, 1, v).$$

Soit ζ une racine primitive $(n+2)$ -ième de l'unité, alors $S_i(0,1,\zeta)=0$. En effet pour $n \geq 7$, $\varphi(n+2)$ vaut au moins quatre, le polynôme minimal de ζ sur \mathbb{Q} est donc de

degré au moins quatre et on ne peut avoir : $S_m(\mu_m - \mu_i, 1, \xi) = 0$ si $m \neq i$.
 Ainsi $(\xi_i, a, b_i = 0, c, S_i, \xi)$ est une solution primitive associée qui vérifie
 $A(a, b, c, S, k, \mu)$ et d'après (V;1.2) on a le résultat. ■

V- 5.1.3 : Remarque : En (V;6) on montre que si (ξ_i) est donnée par :

$$T^{n+1} + a \text{TR}(U, V) + c R_{n+1}(U, V) = \prod_{m=1}^k S_m(T + (\mu_m - \mu_i)U, U, V)$$
 avec $c \neq 0$,
 alors $k = 1$.

V- 5.2 : Cas où $c + b_i$ est nul

Les hypothèses sont identiques à celles de (V;5.1) si ce n'est que pour la solution primitive associée $(\xi_i; S_i, \xi)$ on a : $c + b_i = 0$.

V- 5.2.1 : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (V;5.2) on a $k \leq 2$ dans la relation (ξ) correspondante. De plus si $k = 2$ alors $r_1 = 1$ (ou $r_2 = 2$).

Démonstration : La relation $(\xi_i)_0$ s'écrit : $c(v^{n+1} + 1) = \prod_{j=1}^k S_j(\mu_j - \mu_i, 1, v)$.

Or $n = p-1$ donc $v^{n+1} + 1 = v^p + 1$ ce qui est encore égal à $(v+1) \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i v^i \right)$ c'est-à-dire $(v+1) \Phi_p(-v)$ ou, si l'on préfère : $(v+1) \Phi_{2p}(v)$. Par irréductibilité on a le résultat. ■

V- 5.2.2 : Remarque : Si $k = 2$ et $r_1 = 1$ (ou $r_2 = 1$) on sait que les fibrés correspondants sont (à isomorphisme près) :

$$\bigoplus_{i=1}^2 r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) \quad , \quad T_{\mathbb{P}^n}(-2 + \mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \quad , \quad \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(2 + \mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \quad (\text{cf. IV;§2}).$$

§6. Fin de la démonstration du théorème III'

Pour achever la démonstration du théorème III' il suffit de prouver :

V- 6. : PROPOSITION : Soient $n = p-1$ et la relation :

$$(*) : T^{n+1} + a \text{TR}(U, V) + c(v^{n+1} + U^{n+1}) + (c + b_{i_0})(U^n V + \dots + U V^n) = \prod_{i=1}^k S_i(T + (\mu_i - \mu_{i_0})U, U, V).$$

Si $c = 0$, on fait l'hypothèse supplémentaire : $b_{i_0} \neq 0$ et v divise $S_{i_0}(0, 1, v)$.

Alors, sous ces conditions : $k = 1$.

L'hypothèse supplémentaire pour le cas $c = 0$ est motivée par (III;2.3) et (III;3.4).

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

La démonstration de cette proposition fait l'objet de tout ce paragraphe.

V- 6.1 : $k \leq 4$

Pour simplifier les notations posons $b := b_{i_0}$ et $\alpha_i := \mu_i - \mu_{i_0}$, $1 \leq i \leq k$, on a $\alpha_{i_0} = 0$ et les α_i sont consécutifs (car les μ_i le sont).

Soit (\mathcal{E}) :

$$T^{n+1} + a \operatorname{TR}(U, V) + c(V^{n+1} + U^{n+1}) + (c+b)(U^n V + \dots + U V^n) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \alpha_i U, U, V)$$

En remplaçant T par $T - \alpha_\ell U$ on obtient la relation (\mathcal{E}_ℓ) :

$$\begin{aligned} T^{n+1} + \dots + (-1)^n (n+1) \alpha_\ell^n T U^n + U^{n+1} [(-1)^{n+1} \alpha_\ell^{n+1} + c - b] + [aT + (-\alpha_\ell + b)U + cV] = \\ = \prod_{i=1}^k S_i(T + (\alpha_i - \alpha_\ell)U, U, V). \end{aligned}$$

Comme d'habitude on pose : $b_\ell := -a\alpha_\ell + b$ et $x_\ell := -\alpha_\ell^{n+1} + c - b$ ($n = p-1$ est pair).

D'après (III;1.2) on a deux possibilités :

1. $x_\ell = 0$, 2. $x_\ell = c - b_\ell$, c'est-à-dire 1. $\alpha_\ell^{n+1} = c - b$, 2. $\alpha_\ell^n = -a$.

Si k est supérieur ou égal à cinq il est clair que la condition 1. ou 2. ne peut être satisfaite pour tous les α_ℓ (prendre $\alpha_\ell = \pm 1, \pm 2$).

Nous sommes donc ramenés à étudier :

$$(\mathcal{E}) \quad T^{n+1} + a \operatorname{TR}(U, V) + c(U^{n+1} + V^{n+1}) + (c+b)(U^n V + \dots + U V^n) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \alpha_i U, U, V)$$

avec : $\alpha_{i_0} = 0$, $\alpha_i - \alpha_{i+1} = 1$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq 4$, et la condition : si $c \neq 0$ alors $b \neq 0$ et v divise $S_{i_0}(0; 1, v)$.

Remarquons que le coefficient de $T^n U$, c_1 , étant nul dans (\mathcal{E}) on a la relation :

$$\sum_{i=1}^k r_i \alpha_i = 0, \text{ en particulier } k \neq 2. \text{ Par la suite on suppose } 3 \leq k \leq 4 \text{ et on distingue deux cas selon que : } 1) \ x_{i_0-1} = 0 \ (1 = b - c) \ \text{ ou } \ 2) \ x_{i_0-1} = c - b_{i_0-1} \ (1 = -a).$$

V- 6.2 Cas où $x_{i_0-1} = 0$ ($1 = b - c$)

Pour la relation (\mathcal{E}_{i_0+1}) on a :

i) $x_{i_0+1} = 0$ ou ii) $x_{i_0+1} = c - b_{i_0+1}$.

D'après l'hypothèse on voit que : $1 = b - c$ et $a = -1$.

$(\mathcal{E}_{i_0-1})_0$ s'écrit : $c(v+1) \cdot R(1, v) = \prod_{i=1}^k S_i(\alpha_i - \alpha_{i_0-1}, 1, v)$ (car $b_{i_0-1} = b - 1 = c$). Par irréductibilité de $R(1, v)$ il vient $c = 0$ et donc : $b = 1$ et $a = -1$. (\mathcal{E}) s'écrit :

$$T^{n+1} - \operatorname{TR}(U, V) + U R(U, V) - U^{n+1} = \prod_{i=1}^k S_i(T + \alpha_i U, U, V).$$

Le membre de gauche s'écrit aussi :

$$(T-U) [R(T, U) - R(U, V)] = (T-U) (T-V) \sum_{n-1} (T, U, V)$$

où $\sum_{n-1} (T, U, V)$ désigne le polynôme (irréductible: cf. [E-H-S]) $\sum_{s+t+u=n-1} T^s U^t V^u$.

Ceci montre que $S_{i_0}(T,U,V) = \sum_{n-1}(T,U,V)$ ce qui contredit l'hypothèse :
 v divise $S_{i_0}(0,1,v)$.

V- 6.3 : Cas où $x_{i_0-1} = c - b_{i_0-1}$ ($a = -1$) et $r_{i_0-1} \geq 4$.

La relation $(\&_{i_0-1})_0$ s'écrit :

$$c v^{n+1} + (c + b_{i_0-1})(v^n + \dots + v) + c = \prod_{i=1}^k S_{i_0-1}(\alpha_i - \alpha_{i_0-1}, 1, v)$$

avec $b_{i_0-1} = b - 1$.

V- 6.3.1 : c est nul

Si c est non nul, comme $r_{i_0-1} \geq 4$, il existe ξ racine de $S_{i_0-1}(0,1,v)$ telle que $(\&_{i_0-1}; S_{i_0-1}, \xi)$ soit une solution primitive associée de $(\&)$ (cf. V;3.2).

Soit $P_{i_0-1}(T,U) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T$. D'après (V;1.1) si $\xi^n - 1 \neq 0$ on a $c_n = 0$.

Mais $P_{i_0-1}(T,U) = (T+U)^{n+1} - U^{n+1}$ et c_n est manifestement non nul, donc $\xi^n = 1$.

De $c \xi^{n+1} + (c + b_{i_0-1})(\xi^n + \dots + \xi) + c = 0$ il vient $c(\xi + 1) = 0$ d'où $c = 0$ ($\xi \neq -1$ par définition des solutions primitives associées).

V- 6.3.2 : c étant nul $(\&_{i_0-1})_0$ devient :

$$b_{i_0-1} v(v^{n-1} + \dots + 1) = \prod_{i=1}^k S_{i_0-1}(\alpha_i - \alpha_{i_0-1}, 1, v).$$

Remarquons que $b_{i_0-1} = 0$ est équivalent à $b = 1$, comme par hypothèse $a = -1$, ce cas se traite comme (V;6.2). Par la suite on suppose donc $b_{i_0-1} \neq 0$. Soit ζ une racine n -ième de l'unité telle que $(\&_{i_0-1}; S_{i_0-1}, \zeta)$ soit solution primitive associée de $(\&)$.

On considère $v(\lambda)$ la solution holomorphe de $S_{i_0-1}(\lambda(1+v(\lambda)), 1, v(\lambda)) = 0$ avec $v(0) = \zeta$. L'existence est assurée par le théorème des fonctions implicites car ζ est racine simple de $S_{i_0-1}(0,1,v)$.

Par symétrie $v(\lambda)$ vérifie le système :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} P_{i_0-1}(\lambda(1+v(\lambda)), 1) - \lambda(1+v(\lambda)) R(1, v(\lambda)) + b_{i_0-1} R(1, v(\lambda)) - b_{i_0-1} = 0 \\ P_{i_0-1}(\lambda(1+v(\lambda)), v(\lambda)) - \lambda(1+v(\lambda)) R(1, v(\lambda)) + b_{i_0-1} v(\lambda) \cdot R(1, v(\lambda)) - b_{i_0-1} v(\lambda)^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Avec : $P_{i_0-1}(T,U) = (T+U)^{n+1} - U^{n+1}$.

En utilisant les relations : $R(1, \zeta) = 1$, $R'(1, \zeta) = n/(\zeta - 1)$ (qui s'obtient à partir de $x^{n+1} - 1 = (x-1)R(1,x)$ et en dérivant la première équation de (\mathcal{S}) en $\lambda = 0$ on a :

$$v'(0) = (1 - \zeta^2) / b_{i_0-1}.$$

et $\epsilon = -1$ si $j = i_0 - 2$. On en déduit les types de scindages possibles :

($k=3$; $r_{i_0+1}=3, r_{i_0}, r_{i_0-1}=3$), $k=4$; $r_{i_0+2}=1, r_{i_0+1}=1, r_{i_0-1}=3$), $k=4$ et $r_{i_0+1} \geq 5$.

Par dualité le dernier cas se ramène à (V;6.2 ou V;6.3).

Pour les deux autres, on remarque que r_{i_0+1} et r_{i_0-1} étant tous les deux impairs, d'après (V;3.1), c est nul. La relation $(\&)_{i_0}$ devient :

$$b \cdot v(v^{n-1} + \dots + 1) = \prod_{i=1}^k S_i(\alpha_i, 1, v)$$

De plus $S_{i_0 \pm 1}(\alpha_{i_0 \pm 1}, 1, v)$ ont chacun une racine réelle qui est non nulle (car v divise $S_{i_0}(0, 1, v)$ par hypothèse). Ceci est absurde.

V- 6.4.2 : $r_{i_0-1} = 2$

En raisonnant par dualité à partir de $\sum r_i \alpha_i = 0$, on voit qu'il suffit de traiter : ($k=3, r_{i_0+1}=2, r_{i_0}, r_{i_0-1}=2$).

Pour la relation $(\&)_{i_0+1}$ on a deux possibilités :

$$1. \quad x_{i_0+1} = 0 \quad (1 = c - b) \quad , \quad 2. \quad x_{i_0+1} = c - b_{i_0+1} \quad (a = -1).$$

• 1. Sous cette hypothèse $(\&)_{i_0+1}$ s'écrit :

$$c(v+1) \cdot R(1, v) = H S_1(\alpha_1 - \alpha_{i_0+1}, 1, v) \quad (b_{i_0+1} = 1 + b = c)$$

Par irréductibilité de $R(1, v)$ il vient $c = 0$ et donc $b = -1$: comme en (V;6.3.2), on voit que $S_{i_0}(T, U, V) = \sum_{n-1} (T, -U, -V)$ ce qui est une contradiction.

• 2. Si S_{i_0+1} et S_{i_0-1} ne sont pas solutions primitives associées de $(\&)$ alors $\pm \frac{n+2}{n} c = b_{i_0-1}$ et $\pm \frac{n+2}{n} c = b_{i_0+1}$ (cf. V;3.3). Comme $b_{i_0-1} = b-1$ et $b_{i_0+1} = b+1$ avec $b \neq 0$, on voit que ceci est impossible. Il existe donc ξ racine de $S_{i_0 \pm 1}(0, 1, v)$ telle que $(\&)_{i_0 \pm 1} ; S_{i_0 \pm 1}, \xi$ soit une solution primitive associée de $(\&)$. Comme en (V;6.3.1) on montre que c est nul. On peut supposer b_{i_0-1} et b_{i_0+1} non nuls (les cas $a = -1$ et $b = 1$ ou $b = -1$ sont traités en (V;6.2 et V;6.3.2)).

Si $S_{i_0 \pm 1}$ désigne la solution primitive associée alors :

$S_{i_0 \pm 1}(0, 1, v)$ divise $v^{n-1} + \dots + 1$ (car -1 n'est pas racine de $S_{i_0 \pm 1}(0, 1, v)$ par définition des solutions primitives associées).

$S_{i_0 \pm 1}(\pm 1, 1, v)$ divise $v^{n-1} + \dots + 1$ (car v divise $S_{i_0}(0, 1, v)$) et $S_{i_0 \pm 1}(\pm 2, 1, v)$ divise $v(v^{n-1} + \dots + 1)$. Or ces trois conditions ne peuvent être réalisées simultanément, cela se voit à partir de la forme explicite de $S_{i_0 \pm 1}(T, U, V)$ et en utilisant la remarque suivante : si $P(v)$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré deux, qui divise $v^{n-1} + \dots + 1$ alors, à une constante près, $P(v)$ vaut $v^2 \pm v + 1$ ou $v^2 + 1$.

CHAPITRE VI

FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR \mathbb{P}^n POUR DE PETITES VALEURS DE n

§ 0)	Introduction
§ 1)	n = 3
§ 2)	n = 4
§ 3)	n = 5

§0. Introduction

Dans ce chapitre nous démontrons :

THÉOREME III' : Pour n tel que $3 \leq n \leq 5$, les fibrés uniformes de rang (n+1) sur \mathbb{P}^n sont (à isomorphisme près) :

$$T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b) , \quad \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) , \quad \bigoplus_{i=1}^k r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) .$$

Le plan de la démonstration est le suivant : pour chaque valeur de n nous nous limitons aux fibrés uniformes de type de scindage consécutif.

(i.e. : $\mu_i - \mu_{i+1} = 1$, $1 \leq i \leq k$) (cf. III; §2). D'après (I; 4.2) et les résultats de (III) on peut écarter certains types de scindage ($k=1$; $k=n+1$; $k=n$; $k=2$ $r_1=1$ ($r_2=2$); $k=3$ $r_1=r_3=1$; $k=2$ $r_1=2$ et n pair). Les types de scindage restant seront dits irréductibles. Maintenant, à chaque cas irréductible on associe sa relation (&) :

$$T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T + x U^{n+1} + (a T + b U + c V) R(U, V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V) .$$

Si c est nul nous pouvons utiliser la "classification" de (III; 2.4). Ainsi la seconde étape consiste à montrer que pour chaque type de scindage irréductible, dans la relation (&) correspondante, "c est nul". Une fois ce résultat obtenu, nous sommes ramenés à la situation de (III; 2.4) et pour conclure il suffit de prouver les

LEMME (n) : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur \mathbb{P}^n de type de scindage irréductible (k ; $r_1 \dots r_k$; $\mu_1 \dots \mu_k$).

Alors il n'existe pas j_0 , $1 \leq j_0 \leq k$, tel que la relation (& $_{j_0}$) s'écrive : $T^{n+1} + a T R(U, V) + b_{j_0} U R(U, V) - b_{j_0} U^{n+1} = \prod_{i=1}^k S_i(T + (\mu_i - \mu_{j_0}) U, U, V)$ avec b_{j_0} non nul et v divisant $S_{j_0}(0, 1, v)$.

VI- 0. Remarque : Il suffit de prouver les lemmes lorsque $r_{j_0} \geq 2$ (car UV divise $S_{j_0}(0, U, V)$) et $\sum_{i=1}^k r_i (\mu_i - \mu_{j_0}) = 0$ (car le coefficient de $U T^n$ est nul dans (& $_{j_0}$)), en particulier $k \neq 2$.

§1. Fibrés uniformes de rang 4 sur \mathbb{P}^3

VI - 1.1 : Réduction du problème.

D'après (IV) et par dualité il suffit d'étudier les deux cas irréductibles $k=2$ $r_1=2$ $r_2=2$ et $k=3$ $r_1=1$ $r_2=1$ $r_3=2$.

VI - 1.2 : $k=2$, $r_1=2$, $r_2=2$

Pour étudier la relation (ξ) on pose :

$$S_1(T,U,V) = T^2 + TA(U+V) + H(U^2 + V^2) + DUV, \quad S_2(T,U,V) = T^2 + TB(U+V) + F(U^2 + V^2) + GUV.$$

VI - 1.2.1 : $A=0$ ou $A=-1$

On calcule modulo $(U^2 + V^2)$ dans (ξ_1). On a :

$$S_1(T,U,V) \equiv T^2 + TA(U+V) + DUV$$

$$S_2(T-U,U,V) \equiv T^2 + TU(B-2) + TV(B) + U^2(1-B) + UV(G-B),$$

où \equiv désigne une égalité modulo $(U^2 + V^2)$.

De $S_1(T,U,V) \cdot S_2(T-U,U,V) \equiv T^4 + c_1 U T^3 + c_2 U^2 T^2 + c_3 U^3 T + x_1 U^4$ on déduit, en calculant les coefficients de T^3V , T^2UV , TU^2V et UV^3 :

$$1) A+B=0 \quad 2) G+D+2AB-2A-B=0 \quad 3) AG-2AB+A+D(B-2)=0 \quad 4) D(1-B)=0.$$

ce que l'on peut réécrire :

$$2') G+D=2A^2+A \quad 3') G(A+1)=D(A+1) \quad 4') D(1+A)=0$$

d'où le résultat.

VI - 1.2.2 : c est nul

VI - 1.2.2.a : Cas où A est nul

En restreignant la filtration HN^* à une fibre de p on voit que $q^*E_1|_{\mathbb{P}^{-1}(x)}$ est un sous-fibré de rang deux, de première classe de Chern nulle, du fibré trivial

$4 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{-1}(x)}$. Ceci montre que $q^*E_1|_{\mathbb{P}^{-1}(x)} \cong 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{-1}(x)}$, en particulier $c_2(q^*E_1|_{\mathbb{P}^{-1}(x)})=0$, c'est-à-dire $H=0$ (cf. I;2.3). Il est clair que ceci implique $c=0$.

VI - 1.2.2.b : Cas où A vaut -1

En restreignant encore HN^* à $\mathbb{P}^{-1}(x)$ on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow q^*E_1|_{\mathbb{P}^{-1}(x)} \rightarrow 4 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{-1}(x)} \rightarrow q^*E_2|_{\mathbb{P}^{-1}(x)} \rightarrow 0$$

En raisonnant comme en (VI;1.2.2a) on voit que $q^*E_1|_{\mathbb{P}^{-1}(x)}$ est uniforme et par suite isomorphe soit à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{-1}(x)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{-1}(x)}(-1)$ soit à $\Omega_{\mathbb{P}^{-1}(x)}^1(1)$ ([vdV]); la deuxième classe de Chérn de ce fibré, c'est-à-dire H , vaut 0 ou +1. D'autre part, en calculant modulo U , il vient $F+H=1$. Dans tous les cas $FH=0$ ce qui montre que c est nul.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

IV- 1.3 : $k=3$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=2$

La relation $(\&_1)_0$ est de la forme :

$$\prod_{i=1}^3 S_i(\mu_i - \mu_1, 1, v) = x + (c v + b_1) (v^2 + 1) (v + 1)$$

avec : $S_i(T, U, V) = T + A_i(U+V)$; $i=1, 2$.

$$S_3(T, U, V) = T^2 + T B(U+V) + F(U^2 + V^2) + D U V.$$

VI- 1.3.1 : c est nul

Supposons $c \neq 0$ alors $(v+1)$ divise le membre de gauche de $(\&_1)_0$ (car $r_1=1$) et donc $x_1=0$. Ceci implique : (v^2+1) divise $S_3(-2, 1, v)$ (les μ_i sont consécutifs). De la même manière, en considérant $(\&_2)_0$ il vient : (v^2+1) divise $S_3(-1, 1, v)$. Ces deux conditions sont irréalisables simultanément donc c est nul.

VI- 1.4 : Démonstration du lemme (n) pour $n=3$

D'après la remarque (VI;0) on a $k \neq 2$ et pour le type de scindage de (VI;1.3) il est clair que $\sum_{i=1}^3 r_i (\mu_i - \mu_3) \neq 0$. Ceci démontre le théorème III' pour $n=3$. ■

§2. Fibrés uniformes de rang 5 sur \mathbb{P}^4

VI- 2.1 : Réduction du problème.

Par (IV) et par dualité on se ramène aux cas irréductibles suivants :

$$k=3 \quad , \quad r_1=1 \quad , \quad r_2=1 \quad , \quad r_3=3$$

$$k=3 \quad , \quad r_1=1 \quad , \quad r_2=2 \quad , \quad r_3=2$$

$$k=3 \quad , \quad r_1=2 \quad , \quad r_2=1 \quad , \quad r_3=2 .$$

VI- 2.2 : $k=3$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=3$

Pour montrer que c est nul dans la relation $(\&)$ correspondante il suffit d'appliquer (V;3.1).

VI- 2.3 : $k=3$, $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=2$

$$\text{On pose : } S_1(T, U, V) = T + A(U+V) \quad , \quad S_2(T, U, V) = T^2 + T B(U+V) + F(U^2 + V^2) + D U V$$

$$S_3(T, U, V) = T^2 + T M(U+V) + H(U^2 + V^2) + G U V.$$

VI- 2.3.1 : En calculant modulo U , il vient notamment :

$$1) \quad A + B + M = 0 \quad \quad 2) \quad H + F + M(A+B) + AB = 0 .$$

VI - 2.3.2 : c est nul

Soient les égalités $(\mathcal{E}_j)_0$ ($j=2,3$) : $\prod_{i=1}^3 S_i(\mu_i - \mu_j, 1, v) = x_j + (c v + b_j) R(1, v)$.

Si x_j est nul, $R(1, v)$ étant irréductible on a forcément $c=0$.

Si x_j est non nul le membre de droite de $(\mathcal{E}_j)_0$ s'écrit : $c v^5 + (c + b_j)(v^4 + \dots + v) + c$ (cf. III;1.2).

En comparant les coefficients de v^5 et de 1 dans $(\mathcal{E}_j)_0$, $j=2,3$; on obtient respectivement :

$$3) F(A - M + 1 + H - AM) = 0$$

$$4) H(A + 2 + 2B + 2F + AB) = 0$$

Si $FH=0$ il est clair que $c=0$. Supposons $FH \neq 0$. De 1) et 3) on tire :

$H = -A^2 - 2A - B - AB - 1$ et 4) donne F en fonction de A et B.

En reportant dans 2) : $B^2 + 2A^2 + 2B + \frac{5}{2}A + \frac{5}{2}AB + 2 = 0$, cette conique n'ayant pas de points réels on a une contradiction.

VI - 2.4 : $k=3$, $r_1=2$, $r_2=1$, $r_3=2$

Soient : $S_1(T, U, V) = T^2 + TA(U+V) + F(U^2 + V^2) + DU V$, $S_2(T, U, V) = T + B(U+V)$,

$S_3(T, U, V) = T^2 + TM(U+V) + H(U^2 + V^2) + GUV$.

Ce cas se traite par les mêmes arguments que le précédent.

VI - 2.4.1 : La restriction de la filtration HN^* à une fibre de p donne :

- 1) $A + B + M = 0$ avec $A \leq 0$ (car \mathcal{E}_1 est un sous-fibré de $5 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(x)}$).
- 2) $AB + F + M(A+B) + H = 0$.
- 3) $FB + M(AB + F) + H(A+B) = 0$.

VI - 2.4.2 : c est nul

On raisonne comme en (VI;2.3.2). Les relations $(\mathcal{E}_1)_0$, $(\mathcal{E}_3)_0$ fournissent les égalités :

$$4) F(-4 + 2M - H + 4B - 2MB) = 0$$

$$5) H(4B + 2AB + 4 + 2A + F) = 0$$

Si $FH \neq 0$ de 4) et 1) il vient : $H = 2B^2 - 2A + 2B + 2AB - 4$

et 5) donne F en fonction de A et B. En reportant dans 2) et 3) :

$$2') A^2 - B^2 + AB + 4A + 2B + 8 = 0$$

$$3') B[2B^2 + 2B + 3AB + 4A + 3A^2 - 4] = 0$$

Si $B=0$, 2') donne : $A^2 + 4A + 8 = 0$ ce qui est absurde.

Pour B non nul les solutions de 2') et 3') avec $A \leq 0$ sont : $(A, B) = (0, -2), (-2, 2)$.

Dans le premier cas $H=0$, dans le second $F=0$ (5)), ce qui est contradictoire.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

VI- 2.5 : Le lemme (n) pour $n=4$

Encore une fois c'est une conséquence immédiate de la remarque (VI;0).

D'où le théorème III' pour $n=4$.

§3. Fibrés uniformes de rang 6 sur \mathbb{P}^5

VI- 3.1 : Réduction du problème.

Toujours par (IV) et par dualité on se limite aux cas irréductibles suivants:

$k=2$, $r_1=2$, $r_2=4$; $k=2$, $r_1=3$, $r_2=3$

$k=3$ et il existe i_0 , $1 \leq i_0 \leq 3$, tel que $r_{i_0}=3$

$k=3$ et il existe i_0 , $1 \leq i_0 \leq 3$, tel que $r_{i_0}=4$

$k=3$ et pour tout i , $1 \leq i \leq 3$: $r_i=2$

$k=4$ et il existe i_0 , $1 \leq i_0 \leq 4$, tel que $r_{i_0}=3$

$k=4$ et il existe i_1, i_2 , $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$, tel que $r_{i_1}=r_{i_2}=2$.

VI- 3.2 : $k=2$, $r_1=2$, $r_2=4$

On pose : $S_1(T,U,V) = T^2 + TA(U+V) + F(U^2+V^2) + DUV$

$$S_2(T,U,V) = T^4 + T^3B(U+V) + T^2P(U^2+V^2) + T^2GUV + TH(U^3+V^3) \\ + TR(U^2V+UV^2) + M(V^4+U^4) + N(V^3U+UV^3) + LV^2U^2.$$

VI- 3.2.1 : On a : $F \geq 0$ et $A \leq 0$. De plus si A égale 0 ou -1 alors c est nul.

En restreignant la filtration HN^* à une fibre de p il vient : $0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow 6 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}$, ce qui montre $A \leq 0$.

Par dualité : $F \geq 0$. Car \mathcal{E}_1^* est engendré par ses sections globales et $c_2(\mathcal{E}_1) = c_2(\mathcal{E}_1^*)$.

Si A vaut 0 ou -1 alors \mathcal{E}_1 est uniforme et isomorphe à $2 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}$ ou $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)$ ($[v \cdot v]$): sa deuxième classe de Chern, F , est nulle. Ceci implique $c=0$.

VI- 3.2.2 : Si $c \neq 0$ alors $D = 2F + 1$

Supposons $x_2 \neq 0$ alors $(\mathcal{E}_2)_0$ est de la forme :

$$S_1(1,1,v) \cdot S_2(0,1,v) = c v^6 + (c + b_2)(v^5 + \dots + v) + c.$$

En comparant les coefficients de v^6 et de 1, il vient : $(1+A)M=0$, ce qui est exclu par l'hypothèse et (VI;3.2.1). Ceci montre que $x_2=0$ et $(\mathcal{E}_2)_0$ est donnée par :

$S_1(1,1,v) \cdot S_2(0,1,v) = (b_2 + cv) + (v+1)(v^2 - v + 1)(v^2 + v + 1)$. Comme $A \neq -1$ (VI;3.2.1), $v^2 \pm v + 1$ ne divisent pas $S_1(1,1,v)$. Il faut donc que $v+1$ divise $S_1(1,1,v)$: ceci implique $D = 2F + 1$.

VI - 3.2.3 : c est nul

Si $c \neq 0$ alors on a $D = 2F + 1$. Si $x_1 = 0$, de $(\&_1)_0$ il vient :

$$Fv^2 + (2F + 1)v + F \text{ divise } (cv + b_1)(v + 1)(v^2 - v + 1)(v^2 + v + 1).$$

Or ceci est impossible ($F \geq 0$!). Si $x_1 \neq 0$ alors $(\&_1)_0$ s'écrit :

$$(Fv^2 + (2F + 1)v + F) \cdot S_2(-1, 1, v) = cv^6 + (c + b_1)(v^5 + \dots + v) + c.$$

Il est clair que $Fv^2 + (2F + 1)v + F$ a deux racines distinctes, α, β , réelles, différentes de ± 1 . Ainsi $(\&_1; S_1, \alpha)$ est solution primitive associée de $(\&)$ (cf. V; §1).

Comme $\alpha^{6-t} - 1 \neq 0$, $1 \leq t \leq 5$, $(\&_1)$ s'écrit (cf. V; 1.2) :

$$T^6 + aTR(U, V) + c(U^6 + v^6) + (c + b_1)(U^5V + \dots + UV^5) = S_1(T, U, V) \cdot S_2(T - U, U, V).$$

Or ceci est absurde car $\sum_{i=1}^2 r_i (\mu_i - 1)$ est non nul, (cf. par exemple : VI; 0).

VI - 3.3 : $k = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 3$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } S_1(T, U, V) &= T^3 + T^2A(U+V) + TE(U^2+V^2) + TDUV + H(U^3+V^3) + R(U^2V+UV^2) \\ S_2(T, U, V) &= T^3 + T^2B(U+V) + TF(U^2+V^2) + TGUUV + M(U^3+V^3) + N(U^2V+UV^2). \end{aligned}$$

VI - 3.3.1 : $A \leq 0$ et si $A = 0$ ou $A = -1$ alors c est nul.

Même raisonnement qu'au (VI; 3.2.1).

VI - 3.3.2 : Les relations suivantes s'obtiennent en calculant modulo U

$$1) \quad A + B = 0 \quad 2) \quad F + E = A^2 \quad 3) \quad M + AF - EA + H = 0 \quad 4) \quad AM + EF - AH = 0.$$

VI - 3.3.3 : Les relations $(\&_1)_0$, $i = 1, 2$ sont de la forme :

$$S_1(i-1, 1, v) \cdot S_2(i-2, 1, v) = x_i + (cv + b_i)(v^2 + v + 1)(v^2 - v + 1)(v + 1).$$

Comme $(v+1)$ divise $S_1(0, 1, v)$ (degré trois) on a forcément $x_i = 0$.

VI - 3.3.4 : c est nul

Supposons que $(v^2 + v + 1)$ divise $S_1(0, 1, v)$. Ceci implique déjà $R = 2H$.

Si $(v^2 + v + 1)$ divise $S_1(1, 1, v)$ alors $A = -1$ et on conclut avec (VI; 3.3.1), on peut donc supposer :

$$S_1(1, 1, v) = \text{cste}(cv + b_2)(v^2 - v + 1), \quad S_2(0, 1, v) = \text{cste}(v + 1)(v^2 + v + 1)$$

$$S_1(0, 1, v) = \text{cste}(v + 1)(v^2 + v + 1), \quad S_2(-1, 1, v) = \text{cste}(cv + b_1)(v^2 - v + 1).$$

Ceci nous donne les relations : $N = 2M$, $1 + A = 2H$, $M = -H$.

En utilisant (VI; 3.3.2) : $E = F$, $2E = A^2$, $8M = -A^3$.

De $-2M = 1 + A$ et $8M = -A^3$ il vient : $A^3 - 4A - 4 = 0$, ce qui est impossible.

De la même façon si on suppose que $v^2 - v + 1$ divise $S_1(0, 1, v)$ on aboutit à :

$A^3 + 4A + 4 = 0$, ce qui est absurde.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

VI - 3.4 : $k=3$ et il existe i_0 , $1 \leq i_0 \leq 3$, tel que $r_{i_0} = 3$

On ne traitera que le cas : $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$; les autres s'obtiennent d'une façon analogue. Posons : $S_2(T,U,V) = T^2 + TB(V+U) + E(U^2+V^2) + DUV$.

VI - 3.4.1 : c est nul

Soit $(\mathcal{E}_1)_0$: $x_1 + (c v + b_1)(v^2 - v + 1)(v^2 + v + 1)(v + 1) = A_1(v+1) \cdot S_2(-1, 1, v) \cdot S_3(-2, 1, v)$.

On a $x_1 = 0$ ($r_1 = 1$). Si c est non nul, pour des raisons de degré et d'irréductibilité, l'un des deux polynômes, $v^2 \pm v + 1$, divise $S_2(-1, 1, v)$. Ceci implique $B = 1$.

Comme $v+1$ divise $S_3(0, 1, v)$ ($r_3 = 3$), on peut tenir le même raisonnement à partir de $(\mathcal{E}_3)_0$. Il vient : $v^2 + v + 1$ ou $v^2 - v + 1$ divise $S_2(1, 1, v)$, ce qui est impossible (il faudrait $B = -1$).

VI - 3.5 : $k=3$ et il existe i_0 , $1 \leq i_0 \leq 3$, tel que $r_{i_0} = 4$

D'après (IV; §4) on peut supposer $i_0 = 1$.

Soient :

$$S_1(T, U, V) = T^4 + T^3 B(U+V) + T^2 E(U^2 + V^2) + T^2 DUV + TH(U^3 + V^3) + TG(V^2 U + U^2 V) + R(V^4 + U^4) + M(V^3 U + U V^3) + NU^2 V^2.$$

$$S_i(T, U, V) = T + A_i(U+V), \quad i = 2, 3.$$

VI - 3.5.1 : Les relations suivantes s'obtiennent en calculant modulo U :

$$1) \quad B + \sigma = 0 \quad 2) \quad E + B\sigma + \pi = 0 \quad 3) \quad H + E\sigma + B\pi = 0 \quad 4) \quad R + H\sigma + E\pi = 0.$$

On a posé : $\sigma := A_2 + A_3$, $\pi := A_2 \cdot A_3$.

VI - 3.5.2 : c est nul

Dans les relations $(\mathcal{E}_i)_0$ on a $x_i = 0$, $i = 2, 3$ ($r_i = 1$).

Il s'ensuit, si $c \neq 0$, pour des raisons de degré et d'irréductibilité, que :

$$S_i(\mu_1 - \mu_i, 1, v) = R(v^4 + v^2 + 1); \quad i = 2, 3 \quad (*)$$

De (*) il vient : $(B, H, E) = (-3, 0, 2)$, ce qui est contradictoire avec (VI; 3.5.1).

VI - 3.6 : $k=3$ et pour tout i , $1 \leq i \leq 3$, $r_i = 2$

$$\text{Soient : } S_1(T, U, V) = T^2 + TA(U+V) + E(U^2 + V^2) + DUV$$

$$S_2(T, U, V) = T^2 + TB(U+V) + F(U^2 + V^2) + GUV$$

$$S_3(T, U, V) = T^2 + TM(U+V) + H(U^2 + V^2) + NUUV.$$

VI - 3.6.1 : En calculant modulo U on obtient le système :

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} A + B + M = 0 \\ H + M(A+B) + F + AB + E = 0 \\ H(A+B) + M(F + AB + E) + AF + EB = 0 \\ H(F + AB + E) + M(AF + EB) + EF = 0 . \end{cases}$$

VI - 3.6.2 : On a : $A \leq 0$, $E \geq 0$, $M \geq 0$, $H \geq 0$ et si $A \geq -1$ ou $M \leq 1$ alors $c = 0$.
(Cf.VI;3.2.1).

VI - 3.6.3 : Cas où $x_2 = 0$

Sous cette hypothèse $(\mathcal{E}_2)_0$ s'écrit :

$$\prod_{i=1}^3 S_i(2-i, 1, v) = (c v + b_2) (v^2 - v + 1) (v^2 + v + 1) (v + 1) .$$

Si c est non nul, l'un des deux polynômes, $v^2 - v + 1$, $v^2 + v + 1$, divise $S_1(1, 1, v)$ ou $S_3(-1, 1, v)$. Ceci entraîne $A = -1$ ou $M = 1$ et d'après (VI;3.6.2) on a une contradiction. Par la suite on suppose $x_2 = c - b_2$ non nul.

VI - 3.6.4 : Cas où S_2 est solution primitive associée ($x_2 \neq 0$)

Supposons $c \neq 0$ et qu'il existe α vérifiant $S_2(0, 1, \alpha) = 0$ tel que $(\mathcal{E}_2; S_2, \alpha)$ soit solution primitive associée de (\mathcal{E}) . Si la condition $A(c, b_2, \alpha, S_2, n=5) : \alpha^{6-t} - 1 \neq 0$, $1 \leq t \leq 5$, (cf.V;1.2), n'est pas vérifiée alors α est une racine primitive q-ième de l'unité.

Comme $S_2(0, 1, \alpha) = 0$ on a : $\varphi(q) \leq 2$, c'est-à-dire $\varphi(q) = 2$ (car $\alpha \neq \pm 1$) et donc $q = 3, 4, 6$. Il est clair que si $\Phi_3(v) = v^2 + v + 1$ ou $\Phi_6(v) = v^2 - v + 1$ divise

$\psi_{b_2}(v) = c v^6 + (c + b_2)(v^5 + \dots + v) + c$ alors : $c - b_2 = 0$ et donc $x_2 = 0$.

De plus si Φ_4 divise ψ_{b_2} on a : $c + b_2 = 0$ et $(\mathcal{E}_2)_0$ devient :

$\prod_{i=1}^3 S_i(2-i, 1, v) = c(v^6 + 1) = c(v^2 + 1)(v^4 - v^2 + 1)$. Mais $\Phi_4(v) = v^2 + 1$ et $v^4 - v^2 + 1$ sont irréductibles. Tout ceci montre que si $c \neq 0$, la condition : $\alpha^{6-t} - 1 \neq 0$, $1 \leq t \leq 5$, est vérifiée, ainsi, d'après (V;1.2), (\mathcal{E}_2) s'écrit :

$$T^6 + a TR(U, V) + c(V^6 + U^6) + (c + b_2)(U^5 V + \dots + U V^5) = \prod_{i=1}^3 S_i(T + (2-i)U, U, V) .$$

En particulier : $S_1(T+U, U, V) \cdot S_3(T-U, U, V)$ est symétrique en U et V.

On vérifie que ceci implique : $A = M - 2$, d'où (cf.VI;3.6.2) $(A, M) = (0, 2)$, $(-1, 1)$, $(-2, 0)$ et dans tous les cas c est nul (cf.VI;3.6.2).

VI - 3.6.5 : Cas où S_2 n'est pas solution primitive ($x_2 \neq 0$)

Sous cette hypothèse et si $c \neq 0$, $S_2(0, 1, v)$ a une racine double (cf.III;1.3).

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR \mathbb{P}^n

Cette racine ne peut être que 1 ou -1 (cf. V;3.3).

D'autre part si $\psi_{b_2}(-1) = 0$ alors $c - b_2 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x_2 \neq 0$.
 Finalement si S_2 n'est pas solution primitive associée : $S_2(0,1,1) = 0$ et donc $G = -2F$;
 $b_2 = -\frac{7}{5}c$ et $\psi_{b_2}(v) = c(v-1)^2(v^4 + \frac{8}{5}v^3 + \frac{9}{5}v^2 + \frac{8}{5}v + 1)$. Mais ceci est absurde car le poly-
 nôme $\varphi(v) = v^4 + \frac{8}{5}v^3 + \frac{9}{5}v^2 + \frac{8}{5}v + 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} . En effet on a la décomposition :

$$5v^4 + 8v^3 + 9v^2 + 8v + 5 = [5v^2 + v(4 - \sqrt{21}) + 5] \left[v^2 + v \left(\frac{4 + \sqrt{21}}{5} \right) + 1 \right]$$

(poser $x = v + \frac{1}{v}$).

Ceci achève de prouver que c est nul dans la relation (&) correspondant au type de scindage $k=3$ et $r_i=2, 1 \leq i \leq 3$.

VI - 3.7 : $k=4$ et il existe $i_0, 1 \leq i_0 \leq 4$, tel que $r_{i_0} = 3$
 Pour les trois autres indices $i_\ell, 1 \leq \ell \leq 3$, on a $r_{i_\ell} = 1$.

VI - 3.7.1 : c est nul

Soit la relation : $(\&_{i_1})_0 : x_{i_1} + (c v + b_{i_1})(v+1)(v^2-v+1)(v^2+v+1) = \prod_{\ell=0}^3 S_{i_\ell}(\mu_{i_\ell} - \mu_{i_1}, 1, v)$.

Comme $r_{i_1} = 1$ on a $x_{i_1} = 0$. Si c est non nul, le membre de gauche a au plus deux racines réelles, ce qui est absurde.

VI - 3.8 : $k=4$ et il existe $i_1, i_2, 1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$, tels que $r_{i_1} = r_{i_2} = 2$
 On pose : $S_{i_1}(T, U, V) = T^2 + TB(U+V) + E(U^2 + V^2) + DUV$.

Remarquons que : $r_{i_3} = r_{i_4} = 1$.

VI - 3.8.1 : c est nul

Soit $(\&_{i_3})_0 : x_{i_3} + (c v + b_{i_3})(v+1)(v^2-v+1)(v^2+v+1) = \prod_{j=1}^4 S_{i_j}(\mu_{i_j} - \mu_{i_3}, 1, v)$.

Comme $r_{i_3} = 1$ on a $x_{i_3} = 0$. Si $c \neq 0$, pour des raisons de degré et d'irréductibilité, l'un des deux polynômes v^2+v+1, v^2-v+1 , divise $S_{i_1}(\mu_{i_1} - \mu_{i_3}, 1, v)$.

Ceci implique : $\mu_{i_1} - \mu_{i_3} = -B$. De la même manière, à partir de la relation $(\&_{i_4})_0$ on obtient : $\mu_{i_1} - \mu_{i_4} = -B$, ce qui est absurde.

VI - 3.9 : Le lemme (n) pour $n=5$

A partir de : $T^6 + aTR(U, V) + b_{j_0}(U^5V + \dots + UV^5) = \prod_{i=1}^k S_i(T + (\mu_i - \mu_{j_0})U, U, V)$

en posant $T=0$ et $U=1$ on obtient :

$$b_{j_0} v \cdot (v^4 + \dots + 1) = \prod_{i=1}^k S_i(\mu_i - \mu_{j_0}, 1, v),$$

comme $v^4 + \dots + 1$ est irréductible il vient $k \leq 2$, ce qui est absurde (cf. VI;0).
 Ceci achève la démonstration du théorème III".

Bibliographie

- [Ba-El] BALLICO, E., ELLIA, Ph., *Fibrés homogènes sur \mathbb{P}^n* , (à paraître)
- [Ba-VdV] BARTH, W., VAN de VEN, A., *On the geometry in codimension 2 of Grassman manifolds*, in Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds, Lecture Notes in Mathematics, 412, Springer Verlag, (1974)
- [Dr] DREZET, J.M., *Exemples de fibrés uniformes non-homogènes sur \mathbb{P}^n* , C.R.A.S., t.291, série A, 125-128, (1980)
- [Ein] EIN, L., *Stable Vector bundles on Projective spaces in char $\rho > 0$* , Math. Ann., 254, 53-72, (1980)
- [Ele,1] ELENCAWJG, G., *Les fibrés uniformes de rang 3 sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sont homogènes*, Math. Ann., 231, 217-227, (1978)
- [Ele,2] ELENCAWJG, G., *Des fibrés uniformes non-homogènes*, Math. Ann., 239, 185-192, (1979)
- [Ele,3] ELENCAWJG, G., *Fibrés uniformes de rang élevé sur \mathbb{P}^2* , Fourrier, Grenoble, 31, 4, 89-114, (1981)
- [Ele-For] ELENCAWJG, G., FOSTER, O., *Bounding cohomology groups of vector bundles on \mathbb{P}^n* , Math. Ann., 246, 251-270, (1980)
- [E-H-S] ELENCAWJG, G., HIRSCHOWITZ, A., SCHNEIDER, M., *Les fibrés uniformes de rang au plus n sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont ceux qu'on croit*, Proceedings of the Nice Conference (1979) on Vector Bundles and Differential equations, Progress in Math., 7, Birkhäuser, Boston, 37-63, (1980)
- [Ell] ELLIA, Ph., *Des fibrés uniformes non-homogènes de rang $2n+1$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$* , Journal für die reine und ang. Math., 321, 113-119, (1981)
- [Ha-Na] HARDER, G., NARASIMHAN, M.S., *On the Cohomology groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves*, Math. Ann., 212, 213-248, (1974)
- [Ha] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics, vol.52, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, (1977)
- [Lang] LANG, S., *Algebra*, Addison Wesley, (1977)
- [O-S-S] OKONEK, C., SCHNEIDER, M., SPINDLER, H., *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Math., 3, Birkhäuser, Boston, (1980)
- [Sa] SATO, E., *Uniform vector bundles on a projective space*, J. Math. Soc., Japan, 28, 123-132, (1976)
- [VdV] VAN de VEN, A., *On uniform vector bundles*, Math., Ann., 195, 245-248, (1978)

P. ELLIA
 Université de Nice
 Institut de Mathématiques
 Parc Valrose
 06034 NICE CEDEX