

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

S. OCHANINE

**Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés
et nombres caractéristiques dans la K -théorie réelle**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 5 (1981)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1981_2_5__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RAPPELS ET CONVENTIONS

Toutes les variétés considérées seront lisses de classe C^∞ . Pour une telle variété X , bX désigne le bord de X . "Variété close" signifie "variété compacte sans bord". On note $T_x X$ l'espace tangent de X au point $x \in X$, et TX le fibré tangent de X .

Soit X une variété et $Y \subset X$ une sous-variété. Cela signifie en particulier que $bX \cap Y = bY$ et que Y coupe transversalement bX , c'est-à-dire que, pour tout $y \in bY$, $T_y Y$ et $T_y bX$ sont en position générale dans $T_y X$. Le fibré normal ζ de Y dans X est, par définition, égal au fibré quotient $(TX|_Y)/TY$. La condition de transversalité ci-dessus implique que l'on peut identifier $\zeta|_{bY}$ et le fibré normal de bY dans bX .

Soit maintenant $f: Z \rightarrow X$ une application lisse telle que $f^{-1}(bX) = bZ$. On dira que f est transverse à Y , si

(i) Pour tout $y \in Y \cap f(Z)$ et pour tout $z \in Z$ tel que $f(z) = y$, $df_z(T_z Z)$ et $T_y Y$ sont en position générale dans $T_y X$ (en particulier, $Y \cap f(Z) = \emptyset$ si $\dim Z + \dim Y < \dim X$);

(ii) Pour tout $z \in bZ$, $df_z(T_z Z)$ et $T_y(bX)$ sont en position générale dans $T_y X$, où $y = f(z)$.

Si $f: Z \rightarrow X$ est transverse à $Y \subset X$, $V = f^{-1}(Z)$ est une sous-variété de Z et $df: TZ \rightarrow TX$ induit un morphisme $\zeta_1 \rightarrow \zeta_2$ des fibrés normaux respectivement de V dans Z et de Y dans X , bijectif sur chaque fibre.

§ 1 - STRUCTURES SPINORIELLES

Nous rappellerons ici quelques faits relatifs aux groupes Spin_n et $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$ et aux structures correspondantes dans les fibrés vectoriels. Pour plus de détails, le lecteur peut se rapporter aux articles de Milnor [34] et de Atiyah, Bott et Shapiro [5].

1.1. Le groupe spinoriel réel Spin_n peut être défini pour $n \geq 2$ comme étant le revêtement double non-trivial du groupe de rotations SO_n . On notera p la projection $\text{Spin}_n \rightarrow \text{SO}_n$ et $p_* : B\text{Spin}_n \rightarrow B\text{SO}_n$ l'application des espaces classifiants induite par p . L'application p_* a pour fibre homotopique F l'espace $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$.

Si ξ est un SO_n -fibré vectoriel, une Spin-structure dans ξ est une réduction du groupe structural de ξ relative à p . Deux Spin-structures dans ξ sont équivalentes, si les réductions correspondantes du groupe structural sont homotopes. Lorsque la base B de ξ est un CW-complexe et $f : B \rightarrow B\text{SO}_n$ une application classifiante de ξ , les classes d'équivalence des Spin-structures dans ξ correspondent bijectivement aux classes d'homotopie verticale d'applications $g : B \rightarrow B\text{Spin}_n$ telles que $p_* \circ g = f$. Le fibré ξ admet une Spin-structure si et seulement si la classe de Stiefel-Whitney $w_2(\xi)$ est nulle. Dans ce cas, il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence des Spin-structures dans ξ et le groupe $[B, F] = H^1(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1.2. Le groupe spinoriel complexe $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$ s'identifie avec l'image réciproque du sous-groupe $\text{SO}_n \times \text{SO}_2 \subset \text{SO}_{n+2}$ par la projection $p : \text{Spin}_{n+2} \rightarrow \text{SO}_{n+2}$. On définit la notion de Spin^C-structure dans un SO_n -fibré vectoriel comme

précédemment à l'aide de la projection composée q :

$$\text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{p} \text{SO}_n \times \text{SO}_2 \xrightarrow{\text{pr}_1} \text{SO}_n .$$

Par ailleurs, la projection composée d :

$$\text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{p} \text{SO}_n \times \text{SO}_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{SO}_2$$

permet d'associer à chaque $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -fibré vectoriel ξ un SO_2 -fibré vectoriel $\det \xi$ tel que la classe d'Euler $e(\det \xi)$ réduite modulo 2 coïncide avec $w_2(\xi)$. Inversement, on vérifie que, si ξ est un SO_n -fibré vectoriel et si x est une classe de $H^2(B; \mathbb{Z})$ dont la réduction modulo 2 coïncide avec $w_2(\xi)$, il existe (au moins) une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure dans ξ telle que $e(\det \xi) = x$.

L'homomorphisme diagonal $\text{SO}_2 \rightarrow \text{SO}_2 \times \text{SO}_2 \subset \text{SO}_4$ représente l'élément nul de $\pi_1(\text{SO}_4) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donc se relève d'une manière unique en un homomorphisme $\text{SO}_2 \rightarrow \text{Spin}_2^{\mathbb{C}}$. Il s'ensuit que tout SO_2 -fibré vectoriel ξ possède une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure canonique telle que $\det \xi = \xi$.

Il existe un unique homomorphisme φ :

$$\text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \times \text{Spin}_m^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{Spin}_{n+m}^{\mathbb{C}}$$

compatible par q avec l'homomorphisme standard

$$\text{SO}_n \times \text{SO}_m \longrightarrow \text{SO}_{n+m}$$

et compatible par d avec la multiplication

$$\text{SO}_2 \times \text{SO}_2 \rightarrow \text{SO}_2 . \quad (*)$$

φ permet de munir la somme de Whitney de deux $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -fibrés vectoriels ξ_1 et ξ_2 d'une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure telle que $\det(\xi_1 \oplus \xi_2)$ s'identifie avec $\det \xi_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \xi_2$, où $\det \xi_1$ et $\det \xi_2$ sont considérés comme fibrés complexes linéaires ($\text{SO}_2 = \text{U}_1$).

(*) On construit aisément φ en utilisant la définition de $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$ à partir des algèbres de Clifford (cf. [5]).

1.3. Comme il résulte de la définition de $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$, il existe une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \text{Spin}_n \xrightarrow{i} \text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} \text{SO}_2 \longrightarrow 1 .$$

Donc chaque section non-nulle de $\det \xi$ détermine une Spin-structure dans ξ , compatible (par i) avec la $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure donnée.

1.4. On appelle Spin-(Spin^C-) variété une variété orientée M dont le fibré tangent stable (c'est-à-dire le fibré $\tau M = TM \oplus \theta^N$, où θ^N est le fibré trivial de dimension N suffisamment grande) est muni d'une Spin-(Spin^C-) structure. On note Ω_*^{Spin} et $\Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}}$ les anneaux de cobordisme correspondant à ces structures.

Remarque: Deux Spin-(Spin^C-) structures équivalentes sur la même variété close orientée définissent le même élément de $\Omega_*^{\text{Spin}} (\Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}})$.

Remarque: Soit M^n une Spin^C-variété. Comme $\det(\xi \oplus \theta^N) = \det \xi \otimes_{\mathbb{C}} \det \theta^N = \det \xi$, le fibré $\det \tau M^n$ est bien défini.

Remarque: Le groupe $\Omega_*^{\text{Spin}} (\Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}})$ peut être également défini à partir des variétés M munies d'une Spin-(Spin^C-) structure dans le fibré normal stable νM . Comme $\tau M \oplus \nu M$ est un Spin^C-fibré trivial, il est facile de voir que $\det \tau M \simeq \overline{\det \nu M}$.

§ 2 - SOUS-VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

A chaque Spin^C -variété M , on peut associer des sous-variétés caractéristiques V de codimension 2, munies d'une Spin-structure canonique. La situation est analogue en tout point à celle qui a été étudiée par Conner et Floyd [21] dans le cadre des U -et SU -variétés.

2.1. Le lemme suivant est une conséquence de la transversalité de R. Thom :

LEMME 1. Soient W une variété compacte et $\Xi = (E, p, W)$ un fibré vectoriel lisse sur W . En particulier, E est une variété lisse dont le bord bE coïncide avec $p^{-1}(bW)$. On n'exclut pas le cas où $bW = \emptyset$. Soit $s : bW \rightarrow bE$ une section lisse de $\Xi|_{bW}$ transverse à la section nulle $bW \subset bE$.

Alors, il existe une section lisse $S : W \rightarrow E$ de Ξ qui prolonge s et qui est transverse à la section nulle $W \subset E$.

Démonstration. Voir Appendice I.

Soit M une variété close et $\xi = (E, p, M)$ un fibré vectoriel lisse sur M . Le lemme affirme l'existence d'une section $S : M \rightarrow E$ de ξ transverse à la section nulle $M \subset E$. Alors $S^{-1}(M) = V$ est une sous-variété close de M . Le fibré normal de M dans E s'identifie canoniquement avec ξ . La transversalité fournit alors un isomorphisme $J : \zeta \rightarrow j^* \xi$, où ζ est le fibré normal de V dans M , alors que $j : V \rightarrow M$ est l'injection canonique.

DÉFINITION. On appellera sous-variété caractéristique de (M, ξ) toute paire (V, J) obtenue comme ci-dessus à partir d'une section S . Lorsque cela ne peut

entraîner de confusion, nous dirons, par abus de langage, que V est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) , sans mentionner J .

2.2. Supposons maintenant que M est une Spin^C -variété close et que ξ est un Spin^C -fibré. Pour toute sous-variété caractéristique (V, J) de (M, ξ) , on a une décomposition $j^* \tau M = \tau V \oplus \zeta$, ce qui donne, à l'aide de J , une décomposition $j^* \tau M = \tau V \oplus j^* \xi$. On peut donc munir τV d'une Spin^C -structure et transformer V en Spin^C -variété.

2.3. Dans les hypothèses précédentes, supposons donné un isomorphisme $K : \det \tau M \rightarrow \det \xi$. On a alors $\det \tau V \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \xi = j^* \det \tau M = j^* \det \xi$, ce qui donne une trivialisatation de $\det \tau V$, donc, en vertu de 1.3, une Spin -structure sur V .

On vérifie immédiatement que cette Spin -structure est définie d'une manière unique à équivalence près par la Spin^C -structure de M et par K .

2.4. Considérons plus particulièrement le cas où $\xi = \omega_1 \oplus \omega_2$.

LEMME 2. Soient M une variété close, $\omega_i = (E_i, p_i, M)$ ($i = 1, 2$) deux fibrés vectoriels lisses, $\xi = \omega_1 \oplus \omega_2 = (E, p, M)$ la somme de Whitney de ω_1 et ω_2 . Supposons donnée une section lisse $s_1 : M \rightarrow E_1$ de ω_1 transverse à la section nulle $M \subset E_1$. Alors, il existe une section lisse $s_2 : M \rightarrow E_2$ transverse à la section nulle $M \subset E_2$ telle que :

(i) la section $s : M \rightarrow E$ de ξ définie par $s(x) = (s_1(x), s_2(x)) \in E \subset E_1 \times E_2$, $x \in M$, soit également transverse à la section nulle $M \subset E$ du fibré ξ et

(ii) les sous-variétés caractéristiques correspondant aux sections s_1 et s_2 se coupent transversalement.

Démonstration. Voir Appendice I .

Dans les hypothèses du lemme 2, les sections s_1, s_2 et s définissent trois sous-variétés V_1, V_2 et V de M . La variété V_α ($\alpha = 1, 2$) est une sous-variété caractéristique de (M, ω_α) , alors que V est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) . On notera $j_\alpha: V_\alpha \rightarrow M$, $j: V \rightarrow M$ les injections canoniques, ζ_α, ζ les fibrés normaux et $J_\alpha: \zeta_\alpha \rightarrow j_\alpha^* \omega_\alpha$, $J: \zeta \rightarrow j^* \xi$ les isomorphismes correspondant aux sections s_α et s .

On voit d'autre part que V coïncide avec l'image réciproque par $s_2|_{V_1}$ de la section nulle de $j_1^* \omega_2$. Donc, V peut être considérée comme sous-variété caractéristique de (V_1, ξ_1) où $\xi_1 = j_1^* \omega_2$. De même, V est une sous-variété caractéristique de (V_2, ξ_2) où $\xi_2 = j_2^* \omega_1$. On note $i_\alpha: V \rightarrow V_\alpha$ les injections canoniques, β_α les fibrés normaux correspondants, $I_\alpha: \beta_\alpha \rightarrow i_\alpha^* \xi_\alpha$ les isomorphismes correspondants. Remarquons que, comme V_1 et V_2 se coupent transversalement, on a des isomorphismes canoniques $\zeta = \beta_1 \oplus \beta_2$, $\xi_2 = i_1^* \zeta_1$, $\beta_1 = i_2^* \zeta_2$. Avec ces identifications, $I_1: \beta_1 \rightarrow i_1^* \xi_1 = i_1^* j_1^* \omega_2 = i_2^* j_2^* \omega_2$ coïncide avec la restriction $J_2|_{V_1}: i_2^* \zeta_2 \rightarrow i_2^* (j_2^* \omega_2)$. De même, $I_2: \beta_2 \rightarrow i_2^* \xi_2 = i_2^* j_2^* \omega_1 = i_1^* j_1^* \omega_1$ coïncide avec $J_1|_{V_2}$. Enfin, $J: \zeta \rightarrow j^* \xi$ coïncide avec $I_1 \oplus I_2 = J_2|_{V_1} \oplus J_1|_{V_2}$.

Supposons maintenant que ω_1 et ω_2 sont des Spin^C -fibrés et que M est une Spin^C -variété. Soit $K: \det \tau M \rightarrow \det \xi = \det \omega_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \omega_2$ un isomorphisme. Pour $\alpha = 1, 2$, on a l'équation $\tau V_\alpha \oplus \zeta_\alpha = j_\alpha^* \tau M$ qui donne, à l'aide de J_α , $\tau V_\alpha \oplus j_\alpha^* \omega_\alpha = j_\alpha^* \tau M$, donc $\det \tau V_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} j_\alpha^* \det \omega_\alpha = j_\alpha^* \det \tau M$ et finalement, à l'aide de K , $\det \tau V_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} j_\alpha^* \det \omega_\alpha = j_\alpha^* \det \xi = j_\alpha^* \det \omega_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} j_\alpha^* \det \bar{\omega}_\alpha$, où $\bar{\alpha} = 1$ pour $\alpha = 2$ et $\bar{\alpha} = 2$ pour $\alpha = 1$. Ainsi K détermine un isomorphisme $K_\alpha: \det \tau V_\alpha \rightarrow j_\alpha^* \det \bar{\omega}_\alpha = \det \xi_\alpha$.

Maintenant on voit que l'on a défini sur V trois Spin -structures par le procédé 2.3 : une à l'aide de K , V étant considérée comme sous-variété

caractéristique de (M, ξ) , et deux autres à l'aide de K_1 et K_2 , V étant considéré comme sous-variété caractéristique de (V_1, ξ_1) et (V_2, ξ_2) .

PROPOSITION. Les trois Spin-structures coïncident.

Démonstration. En utilisant les identifications ci-dessus et à l'aide de J , on a :

$$\tau V \oplus j^* \omega_1 \oplus j^* \omega_2 = j^* \tau M, \text{ d'où :}$$

$$(*) \quad \det \tau V \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_1 \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_2 = j^* \det \tau M.$$

Si l'on utilise l'isomorphisme $K : \det \tau M \rightarrow \det \xi = \det \omega_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \omega_2$,

(*) donne la première des trois Spin-structures ci-dessus.

D'autre part, on a : $j^* \det \tau M = i_1^* j_1^* \det \tau M = i_1^* (\det \tau V_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \zeta_1) = i_1^* \det \tau V_1 \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_1$ (à l'aide de J_1). L'identification (*) se transforme donc en $\det \tau V \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_2 = i_1^* \det \tau V_1$ et donne, à l'aide de K_1 :

$\det \tau V_1 \rightarrow \det \xi_1 = j_1^* \det \omega_2$ la Spin-structure de V en tant que sous-variété caractéristique de (V_1, ξ_1) . Le fait qu'il s'agit de la même structure dans les deux cas découle de la définition de K_1 .

Même raisonnement pour V_2 et K_2 .

2.5. Soient maintenant M^n une Spin^C-variété close, $\xi = \det \tau M$, (V^{n-2}, J) une sous-variété caractéristique de (M, ξ) et $K : \det \tau M \rightarrow \det \xi = \det \tau M$ l'application identique. Alors, V est munie d'une Spin-structure bien définie à équivalence près.

PROPOSITION. La classe de V dans $\Omega_{n-2}^{\text{Spin}}$ ne dépend que de la classe de M dans $\Omega_n^{\text{Spin}^C}$.

Démonstration. Nous allons appliquer deux fois le lemme 1.

Soient d'abord (V_0, J_0) et (V_1, J_1) deux sous-variétés caractéristiques de (M, ξ) définies par deux sections s_0 et s_1 . On pose $W = M \times I$, $bW = (M \times 0) \cup (M \times 1)$. La variété $V = (V_0 \times 0) \cup (V_1 \times 1)$ est une sous-variété caractéristique de $(bW, \Xi | bW)$ où $\Xi = \text{pr}_1^* \xi = \det \tau W$. D'après le lemme 1 (cf. 2.1.), il existe une section S de Ξ qui prolonge $s = s_0 \cup s_1$ et qui est transverse à la section nulle de Ξ . Alors la variété $S^{-1}(W) \subset W$ coupe bW transversalement et $S^{-1}(W) \cap bW = V$. Il existe une identification canonique entre le fibré normal ζ de V dans M et la restriction sur V du fibré normal γ de $S^{-1}(W)$ dans W . Avec cette identification, l'isomorphisme $\gamma \rightarrow i^* \Xi$ (où $i : S^{-1}(W) \rightarrow W$ est l'injection) correspondant à S , prolonge J . Ceci permet de munir $S^{-1}(W)$ d'une Spin-structure qui prolonge celle de V , et donc d'obtenir un cobordisme entre V_0 et V_1 .

Ainsi, la classe de cobordisme d'une sous-variété caractéristique de M ne dépend que de M .

D'un autre côté, supposons que $M = bW$, où W est une Spin^C -variété, $\Xi = \det \tau W$, $\xi = \det \tau M$ et (V, J) est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) . Comme ci-dessus, on peut construire une sous-variété $S^{-1}(W) \subset W$ munie d'une Spin-structure telle que $b(S^{-1}(W)) = V$, ce qui démontre la proposition.

Il découle de ce qui précède que l'on peut définir un homomorphisme homogène de degré -2 , $\partial : \Omega_*^{\text{Spin}^C} \rightarrow \Omega_*^{\text{Spin}}$. Cet homomorphisme jouera un rôle important par la suite.

2.6. Dans le cas qui nous intéresse, le fibré $\xi = \det \tau M$ est un SO_2 -fibré. La connaissance d'une sous-variété caractéristique de (M, ξ) détermine le fibré ξ à isomorphisme près. Nous aurons besoin par la suite d'une affirmation plus précise.

Soient M^n une variété close, $\xi = (E, p, M)$ un SO_2 -fibré vectoriel lisse sur M , V une sous-variété caractéristique de (M, ξ) correspondant à une section $s: M \rightarrow E$ de ξ , $\zeta = (G, \pi, V)$ le fibré normal de V dans M , enfin $J: \zeta \rightarrow j^* \xi$ l'isomorphisme canonique défini par s . On note $D\zeta$ et $S\zeta$ respectivement l'espace du fibré en disques D^2 et l'espace du fibré en cercles S^1 , associés à ζ . L'espace $E(\pi^* \zeta)$ du fibré $\pi^* \zeta$ au-dessus de $D\zeta$ est égal par définition à $\{(v, t) \in D\zeta \times G \mid \pi(v) = \pi(t)\}$. Il existe une section $\omega: D\zeta \rightarrow E(\pi^* \zeta)$ du fibré $\pi^* \zeta$ définie par $\omega(v) = (v, v)$ qui est non-nulle au-dessus de $S\zeta$.

LEMME 3. Il existe un voisinage tubulaire U de V dans M , un difféomorphisme $h: D\zeta \rightarrow U$ identique sur V et un morphisme strict (bijectif sur chaque fibre) $(H, h): \pi^* \zeta \rightarrow \xi|U$ qui prolonge J et tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E(\pi^* \zeta | S\zeta) & \xrightarrow{H|S\zeta} & E(\xi | bU) \\
 \omega|S\zeta \uparrow & & \uparrow s|bU \\
 S\zeta & \xrightarrow{h|S\zeta} & bU
 \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. Voir Appendice I.

Le lemme entraîne bien que (V, J) détermine le fibré ξ à isomorphisme près, car celui-ci est obtenu en recollant le fibré $\xi|U$ avec le fibré trivial au-dessus de $W = M - \text{int } U$, à l'aide de la section $s|bU$.

2.7. Revenons au cas où M^n est une $Spin^C$ -variété close et $\xi = \det \tau M^n$.

Le fibré $\det \tau W = \det \tau M|W$ est trivialisé par la section non-nulle $s|W$, ce qui donne une Spin-structure sur W .

Le difféomorphisme $h : D\zeta \rightarrow U$ définit sur $D\zeta$ une Spin^C -structure. On a $\tau(D\zeta) = \pi^*(\tau V) \oplus \pi^*\zeta$, donc $\det \tau(D\zeta) = \pi^*(\det \tau V) \otimes_{\mathbb{C}} \pi^*\zeta$. Ce fibré s'identifie avec $\pi^*\zeta$ si l'on utilise la trivialisatation de $\det \tau V$ définie dans 2.3 et 2.5. Par ailleurs, $\det \tau(S\zeta) = \det \tau(D\zeta)|_{S\zeta} = \pi^*\zeta|_{S\zeta}$ est trivialisé par $\omega|_{S\zeta}$ et on a donc une Spin-structure sur le bord $b(D\zeta) = S\zeta$. Le diagramme du lemme 3 montre que l'on a une identification $bW^n = -S\zeta$ en tant que Spin-variétés.

En conclusion, la donnée d'une sous-variété caractéristique (V, J) d'une Spin^C -variété close M permet de présenter celle-ci comme $W^n \cup_{h|_{S\zeta}} D\zeta$, où W^n est une Spin-variété de bord $bW = -S\zeta$, $S\zeta$ étant munie d'une Spin-structure correspondant à la Spin-structure de V et à la section ω . Nous appellerons présentation canonique de M cette présentation.

Remarquons pour terminer que, comme H prolonge J (cf. lemme 3), la Spin-structure de V construite à partir de la Spin^C -structure de M coïncide avec la Spin-structure de V que l'on pourrait construire à partir de $W \cup D\zeta$ en utilisant l'isomorphisme $\zeta \rightarrow i^*(\pi^*\zeta)$, où $i : V \rightarrow D\zeta$ est l'injection canonique.

§ 3 - VARIÉTÉS A DÉTERMINANT SPHÉRIQUE

Nous introduisons ici, imitant en cela Conner et Floyd [21] et Stong [48], chapitre VIII, une classe de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -variétés dont la présentation canonique est particulièrement simple.

3.1. DÉFINITION. On appellera variété à déterminant sphérique une paire (M, φ) composée d'une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -variété compacte M et d'un morphisme strict (bijectif sur chaque fibre) $\varphi = (F, f) : \det \tau M \rightarrow \eta_1$ où η_1 désigne le fibré canonique au-dessus de l'espace projectif $P_1(\mathbb{C})$.

On supposera toujours f lisse. Soit $x_0 \in P_1(\mathbb{C})$ une valeur régulière de f . Alors $f^{-1}(x_0) = V$ est une sous-variété lisse de M , close si M est close.

PROPOSITION. Si $bM = \emptyset$, V est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) , où $\xi = \det \tau M$.

Démonstration. Soit $E\eta_1$ l'espace du fibré canonique η_1 . On peut considérer $E\eta_1$ comme l'espace du fibré vectoriel $\bar{\beta}$, où β est le fibré complexe linéaire associé au \mathbb{C}^* -fibré $(\mathbb{C}^2 - 0) \rightarrow P_1(\mathbb{C})$, $(z_0, z_1) \mapsto [z_0 : z_1]$. Donc $E\eta_1 = (\mathbb{C}^2 - 0) \times \mathbb{C}/\mathbb{C}^*$, où l'action de \mathbb{C}^* est donnée par $\lambda \cdot ((z_0, z_1), t) = ((\lambda z_0, \lambda z_1), \lambda t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 - 0$, $t \in \mathbb{C}$). La projection $\pi : E\eta_1 \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ est alors définie par $\pi(\overline{((z_0, z_1), t)}) = [z_0 : z_1]$, où $\overline{((z_0, z_1), t)}$ est la classe de $((z_0, z_1), t)$ dans le quotient $E\eta_1$. On définit une section $\epsilon : P_1(\mathbb{C}) \rightarrow E\eta_1$ par $\epsilon([z_0 : z_1]) = \overline{((z_0, z_1), z_1)}$. On voit tout de suite que ϵ est transverse à la section nulle $P_1(\mathbb{C}) \subset E\eta_1$ et que $\epsilon^{-1}(P_1(\mathbb{C})) = [1 : 0]$.

Soit maintenant $\varphi = (F, f) : \xi \rightarrow \eta_1$ le morphisme définissant la structure de variété à déterminant sphérique de M , $\xi = (E, p, M)$. On a un diagramme

commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{F} & E\eta_1 \\
 p \downarrow & & \downarrow \pi \\
 M & \xrightarrow{f} & P_1(\mathbb{C})
 \end{array}$$

On peut supposer que $x_0 = [1 : 0]$. On définit alors une section $s : M \rightarrow E$ de ξ comme étant l'unique section qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{F} & E\eta_1 \\
 s \uparrow & & \uparrow \epsilon \\
 M & \xrightarrow{f} & P_1(\mathbb{C})
 \end{array}$$

On voit d'abord que $s^{-1}(M) = V$. On voit ensuite que s est transverse à la section nulle $M \subset E$. En effet, soit $x \in V$, $f(x) = x_0$. Il faut prouver que la projection de $ds_x(TM_x)$ sur la fibre ξ_x de ξ au-dessus de x est surjective. Or, pour cela, il suffit, en vertu des diagrammes ci-dessus, de voir que la projection de $d\epsilon_{x_0} \cdot df_x(TM_x)$ sur la fibre $(\eta_1)_{x_0}$ de η_1 est surjective. Mais ceci est vrai puisque $df_x : TM_x \rightarrow T(P_1(\mathbb{C}))_{x_0}$ est surjective, x_0 étant une valeur régulière, et la section ω est transverse à la section nulle.

3.2. Remarquons maintenant que V a un fibré normal trivial (et trivialisé par df).

Il en découle que M possède une présentation canonique (cf. 2.7.) particulièrement simple : On a $D\xi = V \times D^2$, le bord $b(D\xi) = S\xi = V \times S^1$ est muni de la Spin-structure-produit $V \times \bar{S}^1$, où \bar{S}^1 désigne le cercle $S\theta^2$ muni de la Spin-structure correspondant à la trivialisatation ω du déterminant $\det \tau(S^1) = \pi^* \theta^2 | S\theta^2$ (cf. 2.7.).

Inversement, supposons que M est une Spin^c -variété close, (V, J) est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) , $\xi = \det \tau M$. Supposons également

donnée une trivialisation $\psi : \zeta \rightarrow \theta^2$ du fibré normal ζ de V dans M , où θ^2 est le fibré trivial au-dessus d'un point. Le morphisme ψ induit une application $D\zeta \rightarrow D\theta^2$ et un morphisme strict $\pi^*\zeta \rightarrow \pi^*\theta^2$. De plus, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(\pi^*\zeta) & \xrightarrow{\quad} & E(\pi^*\theta^2) \\ \omega \uparrow & & \uparrow \omega \\ D\zeta & \xrightarrow{\quad} & D\theta^2 \end{array}$$

En utilisant une présentation canonique de M correspondant à (V, J) , on définit une application $\hat{f} : U \rightarrow D\theta^2$ et un morphisme strict $\hat{\varphi} = (\hat{F}, \hat{f}) : \xi | U \rightarrow \pi^*\theta^2$, tels que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(\xi | bU) & \xrightarrow{\hat{F}} & E(\pi^*\theta^2 | S\theta^2) \\ s|bU \uparrow & & \uparrow \omega \\ bU & \xrightarrow{\hat{f}|bU} & S\theta^2 \end{array}$$

On peut donc définir une application $\tilde{f} : M \rightarrow M/W = U/bU \rightarrow D\theta^2/S\theta^2 = P_1(\mathbb{C})$ et un morphisme strict $\tilde{\varphi} = (\tilde{F}, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \eta_1$ au-dessus de \tilde{f} . Pour terminer, il suffit maintenant d'approcher \tilde{f} par une application lisse f identique à \tilde{f} au voisinage de V et la recouvrir par une application F pour obtenir un morphisme strict $\varphi = (F, f) : \xi \rightarrow \eta_1$ définissant sur M une structure de variété à déterminant sphérique.

3.3. En utilisant les variétés à déterminant sphérique, on construit maintenant un groupe $W_*^{\mathbb{C}}$ de cobordisme analogue au groupe $W(\mathbb{C}, 2)$ de [48]. On a également un homomorphisme d'oubli $W_*^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}}$, donc un homomorphisme composé $W_*^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}} \xrightarrow{\partial} \Omega_*^{\text{Spin}}$, que nous noterons également ∂ .

§ 4 - UN PROJECTEUR $\Omega_*^{\text{Spin}^C} \longrightarrow W_*^C$.

Nous allons construire dans ce paragraphe un homomorphisme $\Phi : \Omega_*^{\text{Spin}^C} \rightarrow W_*^C$ homogène de degré 0 , tel que $\partial \circ \Phi = \partial$. Un tel homomorphisme a été construit dans le cadre des variétés faiblement complexes par Conner et Floyd [21] . L'homomorphisme que nous allons construire, plus commode, est analogue à un autre homomorphisme, celui qu'utilise Stong dans [48] .

4.1. Soit M^n une Spin^C -variété close, $\xi = \det \tau M$. Soit $\chi = \text{pr}_1^* \xi \otimes_{\mathbb{C}} \text{pr}_2^* \eta_1$. C'est un fibré linéaire complexe au-dessus de $M^n \times P_1(\mathbb{C})$. On notera $(P(M), I)$ une sous-variété caractéristique de $(M^n \times P_1(\mathbb{C}), \chi)$. Si l'on considère $M^n \times P_1(\mathbb{C})$ munie de la Spin^C -structure-produit, $P(M)$ reçoit canoniquement une Spin^C -structure (cf. 2.2) . Notons $i : P(M) \rightarrow M \times P_1(\mathbb{C})$ l'injection canonique. Le fibré $\tau(M \times P_1(\mathbb{C}))$ s'identifie à $\text{pr}_1^* \tau M \oplus \text{pr}_2^* \tau(P_1(\mathbb{C}))$. Or, on peut identifier $\tau(P_1(\mathbb{C}))$ avec $\eta_1 \oplus \eta_1$. Fixons une telle identification. Alors, $\tau(M \times P_1(\mathbb{C})) = \text{pr}_1^* \tau M \oplus \text{pr}_2^* \eta_1 \oplus \text{pr}_2^* \eta_1$. A l'aide de I , on obtient (cf. 2.2) :

$$i^* \tau(M \times P_1(\mathbb{C})) = \tau(P(M)) \oplus i^* \chi ,$$

donc :

$$i^* \text{pr}_1^* \tau M \oplus i^* \text{pr}_2^* \eta_1 \oplus i^* \text{pr}_2^* \eta_1 = \tau(P(M)) \oplus i^* (\text{pr}_1^* \xi \otimes_{\mathbb{C}} \text{pr}_2^* \eta_1) ;$$

ou encore :

$$i^* \text{pr}_1^* \det \tau M \otimes i^* \text{pr}_1^* \eta_1 \otimes i^* \text{pr}_2^* \eta_1 = \det \tau(P(M)) \otimes i^* \text{pr}_1^* \xi \otimes i^* \text{pr}_2^* \eta_1$$

et finalement :

$$\det \tau(P(M)) = i^* \text{pr}_2^* \eta_1 .$$

Donc, il existe un morphisme strict bien précis $\varphi : \det \tau P(M) \rightarrow \eta_1$ au-dessus de $f = \text{pr}_2 \circ i$. Ainsi $P(M)$ admet une structure de variété à déterminant sphérique.

On voit immédiatement que la classe de $(P(M), \varphi)$ dans W_*^C ne dépend que de la classe de M dans $\Omega_*^{Spin^C}$, ce qui nous donne un homomorphisme $\Phi : \Omega_*^{Spin^C} \rightarrow W_*^C$ homogène de degré 0.

4.2. On peut prouver que Φ est un projecteur de $\Omega_*^{Spin^C}$ sur W_*^C en ce sens que l'homomorphisme composé

$$W_*^C \xrightarrow{\text{oubli}} \Omega_*^{Spin^C} \xrightarrow{\Phi} W_*^C$$

est identique (en particulier, l'homomorphisme d'oubli est injectif). Pour cela, on peut imiter la démonstration de Stong [48], chapitre VIII, ou bien utiliser l'expression de Φ en termes du groupe formel des cobordismes complexes (cf. [18]). Comme nous n'utiliserons pas ce résultat, nous n'en donnerons pas de preuve.

4.3. Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration de $\partial \circ \Phi = \partial$.

Nous allons appliquer les résultats de 2.4.

Soient M une $Spin^C$ -variété close, $\xi = \det \tau M$. Sur la variété $M \times P_1(\mathbb{C})$ considérons deux fibrés : $\omega_1 = pr_2^* \eta_1$ et $\omega_2 = \chi = pr_1^* \xi \otimes pr_2^* \eta_1$. Remarquons d'abord que la variété $M = M \times \{x_0\} \subset M \times P_1(\mathbb{C})$ peut être considérée comme sous-variété caractéristique de $(M \times P_1(\mathbb{C}), \omega_1)$ correspondant à une section s_1 de ω_1 (définie, par exemple, à l'aide de la section ϵ de 3.1). En appliquant le lemme 2, on obtient, comme dans 2.4, une variété $V_2 = P(M)$ caractéristique pour $(M \times P_1(\mathbb{C}), \omega_2)$. Nous avons vu plus haut que $\det \tau(M \times P_1(\mathbb{C}))$ s'identifie à $pr_1^* \xi \otimes pr_2^* \eta_1 \otimes pr_2^* \eta_1 = \det \omega_1 \otimes \det \omega_2$. Notons cette identification K . Si on note $j_1 : V_1 = M \rightarrow M \times P_1(\mathbb{C})$ l'injection canonique, l'identification $K_1 : \det \tau V_1 \rightarrow \det \xi_1$, où $\xi_1 = j_1^* \omega_2$, s'écrit $K_1 : \det \tau V_1 \rightarrow j_1^* pr_1^* \xi \otimes j_1^* pr_2^* \eta_1 = \xi$. On voit immédiatement que K_1 est simplement l'identité. $V = V_1 \cap V_2 = M \cap P(M)$ est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) et sa

Spin-structure est celle que détermine K_1 . V est également une sous-variété caractéristique de $P(M)$. L'identification $K_2: \det \tau P(M) \rightarrow \det \xi_2$, où $\xi_2 = i^* \omega_1 = i^* \text{pr}_2^* \eta_1$, coïncide avec celle que l'on a décrit dans 4.1. La variété V , munie de la Spin-structure correspondant à K_2 , représente donc $\partial[P(M)]$. Il suffit alors d'appliquer la proposition de 2.4 pour obtenir :

PROPOSITION. $\partial \circ \Phi = \partial$.

§ 5 - UN INVARIANT DU COBORDISME SPINORIEL

Toute Spin-variété close de dimension $8n + 2$ peut être considérée comme sous-variété caractéristique d'une Spin^C -variété close de dimension $8n + 4$. Ce fait et l'existence en dimension $8n + 4$ d'un analogue du théorème de Rokhlin sur la signature modulo 16 permettent d'introduire, pour toute Spin-variété close V de dimension $8n + 2$, un invariant $k(V) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5.1. Nous avons besoin de connaître la structure du noyau de l'homomorphisme d'oubli $\Omega_*^{\text{Spin}} \rightarrow \Omega_*^{\text{SO}}$, où Ω_*^{SO} désigne l'anneau de cobordisme orienté. Le théorème suivant est dû à Anderson, Brown, Peterson ([3], cf. [48], ch. XI) :

THÉORÈME. Le noyau de l'homomorphisme d'oubli $\Omega_*^{\text{Spin}} \rightarrow \Omega_*^{\text{SO}}$ coïncide avec l'idéal engendré par la classe de \bar{S}^1 dans $\Omega_1^{\text{Spin}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est nul en dimensions $m \not\equiv 1, 2 \pmod{8}$ et coïncide avec $[\bar{S}^1] \cdot \Omega_{8n}^{\text{Spin}}$ et $[\bar{S}^1]^2 \cdot \Omega_{8n}^{\text{Spin}}$ respectivement pour $m = 8n + 1$ et $m = 8n + 2$.

Soit V une Spin-variété close de dimension $8n + 2$, $n \geq 0$. D'après le théorème ci-dessus, $V \times \bar{S}^1$ représente 0 dans $\Omega_{8n+3}^{\text{Spin}}$. Il existe donc une Spin-variété W^{8n+4} compacte telle que $bW^{8n+4} = -(V \times \bar{S}^1)$. Considérons alors la Spin^C -variété $W \cup (V \times D^2) = M$. Comme nous l'avons vu dans 2.7, V est une sous-variété caractéristique de M et la Spin-structure que détermine M sur V est la structure initiale.

COROLLAIRE. Toute Spin-variété close V de dimension $8n + 2$ est une sous-variété caractéristique d'une Spin^C -variété close M de dimension $8n + 4$.

Remarque : Le même raisonnement s'applique aux Spin-variétés V de dimension $m \not\equiv 0, 1 \pmod{8}$.

5.2. Dans [41], nous avons démontré, dans le cadre des SU-variétés, un théorème analogue au théorème de Rokhlin ([44]) sur la signature. Le théorème suivant en est une conséquence immédiate :

THÉORÈME. Soit M une Spin-variété close de dimension $8n + 4$, $n \geq 0$. Alors, la signature $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$.

On trouvera une démonstration améliorée de ce théorème dans l'appendice II.

Revenons à la situation de 5.1. Soit W^{8n+4} une Spin-variété compacte telle que $bW^{8n+4} = -(V \times \bar{S}^1)$.

PROPOSITION. $\sigma(W^{8n+4}) \equiv 0 \pmod{8}$.

Démonstration. \bar{S}^1 représente un élément d'ordre 2 dans Ω_1^{Spin} . Soit P^2 une Spin-variété compacte telle que $bP^2 = \bar{S}^1 \cup \bar{S}^1$ (réunion disjointe). Alors $b(W \cup W) = -(V \times \bar{S}^1 \cup V \times \bar{S}^1) = -b(V \times P^2)$. On peut donc former une Spin-variété close $(W \cup W) \cup V \times P^2$ de dimension $8n + 4$. D'après le théorème ci-dessus, $\sigma((W \cup W) \cup V \times P^2) \equiv 0 \pmod{16}$. Or, d'après le théorème d'additivité de la signature [6, 40], $\sigma((W \cup W) \cup V \times P^2) = 2\sigma(W) + \sigma(V \times P^2) \equiv 0 \pmod{16}$. La proposition en découle.

5.3. Supposons maintenant que W' est une autre Spin-variété compacte telle que $bW' = -(V \times \bar{S}^1)$. Alors, on peut former une Spin-variété close $M = W' \cup -W$. On a $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$, donc $\sigma(W') \equiv \sigma(W) \pmod{16}$. Nous pouvons donc donner la définition suivante :

DÉFINITION. $k(V) = (\sigma(W)/8) \bmod 2 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, où W est n'importe quelle Spin-variété compacte telle que $bW = -(V \times \bar{S}^1)$.

PROPOSITION. $k(V)$ ne dépend que de la classe de V dans $\Omega_{8n+2}^{\text{Spin}}$.

Démonstration. Supposons que $V = bX$ où X est une Spin-variété compacte de dimension $8n + 3$. Alors, si on pose $W = -X \times \bar{S}^1$, $bW = -V \times \bar{S}^1$. Par ailleurs, $\sigma(W) = -\sigma(X \times \bar{S}^1) = 0$. Donc $k(V) = 0$.

COROLLAIRE. k détermine un homomorphisme $\Omega_{8n+2}^{\text{Spin}} \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, noté également k .

§ 6 - L'INVARIANT k D'UNE SOUS-VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE

Dans ce paragraphe, l'invariant k d'une sous-variété caractéristique d'une Spin^C -variété est lié à la signature de celle-ci.

6.1. Soit M^n une Spin^C -variété close, $\xi = \det \tau M$, (V, J) une sous-variété caractéristique de (M, ξ) .

LEMME. V représente dans $H_{n-2}(M; \mathbf{Z})$ la classe duale (au sens de la dualité de Poincaré) à la classe d'Euler $e(\xi)$.

Démonstration. Prenons une présentation canonique de M (cf. 2.7) : $M = W \cup u$. Le fibré ξ est trivialisé au-dessus de W . Il existe donc un isomorphisme $\xi \simeq q^* \tilde{\xi}$, où $\tilde{\xi}$ est un SO_2 -fibré vectoriel au-dessus de u/bu , construit à l'aide de la section s qui sert à définir (V, J) , et où $q : M \rightarrow M/W = u/bu$ est la projection.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^2(M; \mathbf{Z}) & \xleftarrow{q^*} & H^2(u, bu; \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-2}(M; \mathbf{Z}) & \xleftarrow{i_*} & H_{n-2}(u; \mathbf{Z}) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les isomorphismes de dualité. Comme $e(\xi) = q^* e(\tilde{\xi})$, il suffit de prouver que V représente la classe duale de $e(\tilde{\xi})$ dans u . Le diagramme du lemme 3 de 2.6 montre qu'il suffit de prouver que V représente la classe duale à la classe $e(\xi_0)$ où ξ_0 est construit à partir du fibré $\pi^* \zeta$ sur $D\zeta$ à l'aide de la section $\omega|_{S\zeta}$.

Soit $u \in H^2(D\zeta, S\zeta; \mathbf{Z})$ la classe de Thom de ζ , entièrement déterminée par la propriété $\langle i_x^* u, [D_x, S_x] \rangle = 1$ pour tout $x \in V$, où

$$\begin{aligned} \text{th } v &= \text{th}(v_1 + v_2) = \frac{\text{th } v_1 + \text{th } v_2}{1 + \text{th } v_1 \text{th } v_2} = (Y_1 + Y_2)(1 - Y_1 Y_2 + Y_1^2 Y_2^2 - \dots) = \\ &= Y_1 + Y_2 - Y_1^2 Y_2 + \text{termes } Y_1^i Y_2^j \text{ avec } j \geq 2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \sigma(P(M)) &= \langle (\text{th } v_1 + \text{th } v_2 - \text{th}^2 v_1 \text{th } v_2) L(M \times P_1(\mathbb{C})), [M \times P_1(\mathbb{C})] \rangle = \\ &= \langle (1 - \text{th}^2 x) L(M), [M] \rangle, \text{ puisque } \text{th } v_2 = v_2' \text{ et } L(P_1(\mathbb{C})) = 1. \end{aligned}$$

6. 2. Soit de nouveau M une Spin^c -variété close de dimension $m \equiv 4 \pmod{8}$, (V, J) une sous-variété caractéristique de (M, ξ) où $\xi = \det \tau M$. Par une homotopie régulière, on peut trouver un autre plongement de V dans M , disons $V' \subset M$, transverse à V . Alors la variété $V \cap V'$ est de dimension $m - 4 \equiv 0 \pmod{8}$. Nous allons noter cette variété $V \cdot V$ (auto-intersection de V).

PROPOSITION. (i) $\sigma(M) \equiv \sigma(V \cdot V) \pmod{8}$.

$$(ii) \frac{1}{8}(\sigma(M) - \sigma(V \cdot V)) \pmod{2} = k(V).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que d'après la formule Hirzebruch [24],

$$\sigma(V \cdot V) = \langle \text{th}^2 x \cdot L(M), [M] \rangle, \text{ donc } \sigma(M) - \sigma(V \cdot V) = (1 - \text{th}^2 x) L(M) [M] = \sigma(P(M))$$

d'après la proposition de 6.1. Nous avons vu dans le § 3 et dans 4.3 que

$$P(M) = W \cup V \times D^2 \text{ où } W \text{ est une Spin-variété compacte de dimension } m \equiv 4 \pmod{8},$$

$$\text{telle que } bW = -(V \times \bar{S}^1); \text{ donc } \sigma(P(M)) = \sigma(W) + \sigma(V \times D^2) = \sigma(W) \equiv 0 \pmod{8}$$

en vertu de la proposition de 5.2. Ceci prouve (i).

$$(ii) \text{ découle maintenant de la définition de } k, \text{ puisque } \frac{1}{8}(\sigma(M) - \sigma(V \cdot V)) = \frac{\sigma(W)}{8}.$$

Exemple : Lorsque la dimension de M est 4, $V \cdot V$ est un ensemble fini de points orientés, et $\sigma(V \cdot V)$ est simplement le nombre algébrique de ces points, c'est-à-dire le nombre d'auto-intersection de V dans M .

$i_x : (D_x, S_x) \hookrightarrow (D\zeta, S\zeta)$ est l'injection de la fibre au-dessus du point x .

Notons $y \in H^2(D\zeta, S\zeta; \mathbb{Z})$ la classe duale à la classe de V dans $H_{n-2}(D\zeta; \mathbb{Z})$.

Le lemme résulte maintenant des égalités :

(i) $u = y$

(ii) $e(\xi_0) = u$.

Preuve de (i) : Par définition de la dualité :

$$\langle i_x^* y, [D_x, S_x] \rangle = \langle y, i_{x*} [D_x, S_x] \rangle = [V] \cdot [D_x, S_x] = 1.$$

Preuve de (ii) : $i_x^* e(\xi_0) = e(i_x^* \xi_0)$. Il suffit donc de vérifier $e(\xi_0) = u$ pour

le cas où ζ est le fibré trivial θ^2 au-dessus d'un point. Or, on a

$D\theta^2/S\theta^2 = P_1(\mathbb{C})$ et $\xi_0 = \eta_1$, donc $e(\xi_0)$ est le générateur canonique de $H^2(P_1(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. C.q.f.d.

PROPOSITION. Soit M une Spin^c -variété close de dimension $m \equiv 0 \pmod{4}$,

$\xi = \det \tau M$. Soit $P(M) \subset M \times P_1(\mathbb{C})$ une sous-variété caractéristique de $(M \times P_1(\mathbb{C}), \text{pr}_1^* \xi \otimes \text{pr}_2^* \eta_1)$ qui sert à définir Φ (cf. 4.1). Alors $\sigma(P(M)) = (1 - \text{th}^2 x) L(M)[M]$, où $x = e(\xi)$ et $L(M)$ est la classe totale de Hirzebruch du fibré tangent de M .

Démonstration. Nous utiliserons la formule de Hirzebruch [24], p. 86

("virtual index"). On a :

$$\sigma(P(M)) = \langle \text{th } v \cdot L(M \times P_1(\mathbb{C})), [M \times P_1(\mathbb{C})] \rangle,$$

où v est la classe de cohomologie entière duale à la classe de $P(M)$ dans

l'homologie de $M \times P_1(\mathbb{C})$. D'après le lemme ci-dessus, $v = e(\text{pr}_1^* \xi) + e(\text{pr}_2^* \eta_1)$.

Posons $v_1 = e(\text{pr}_1^* \xi) = \text{pr}_1^* x$, $v_2 = e(\text{pr}_2^* \eta_1)$ et exprimons $\text{th } v$ en série formelle en $Y_1 = \text{th } v_1$ et $Y_2 = \text{th } v_2$:

6.3. Afin de pouvoir utiliser la proposition ci-dessus pour le calcul de k , nous allons démontrer maintenant une proposition qui permet de reconnaître les sous-variétés caractéristiques.

Soit M une Spin^C -variété close, $\xi = \det \tau M$. Nous avons vu dans 6.1 que les sous-variétés caractéristiques représentent la classe d'homologie duale à la classe d'Euler $e(\xi) \in H^2(M; \mathbf{Z})$. Inversement,

PROPOSITION. Soit V une sous-variété orientée close de M , dont la classe d'homologie entière est duale à la classe $e(\xi)$. Alors V est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) .

Démonstration. On remarque d'abord que pour démontrer la proposition, il suffit de trouver sur M un SO_2 -fibré vectoriel ξ_0 tel que V soit une sous-variété caractéristique de (M, ξ_0) . En effet, la proposition de 6.1 entraîne alors qu'il existe un isomorphisme $\varphi = (F, \text{id}) : \xi_0 \rightarrow \xi$ et, si $s_0 : M \rightarrow E\xi_0$ est la section qui définit V en tant que sous-variété caractéristique de (M, ξ_0) , la section $s : M \xrightarrow{s_0} E\xi_0 \xrightarrow{F} E\xi$ définit V en tant que sous-variété caractéristique de (M, ξ) .

Pour construire ξ_0 , prenons un voisinage tubulaire u de V dans M et un difféomorphisme exponentiel $h : D\zeta \rightarrow u$ identique sur V , où ζ est le fibré normal de V dans M . On construit alors sur $M' = W \cup_h D\zeta$ ($W = M - \text{int } u$) un SO_2 -fibré $\tilde{\xi}$ en recollant $\pi^*\zeta$ avec le fibré trivial au-dessus de W à l'aide de la section ω (cf. 2.6). Par définition de $\tilde{\xi}$, il existe une section \tilde{s} de $\tilde{\xi}$ qui coïncide avec ω au voisinage de V et qui est non-nulle en dehors de V . \tilde{s} est transverse à la section nulle de $\tilde{\xi}$, puisque ω est transverse à la section nulle de $\pi^*\zeta$. Donc V est une sous-variété caractéristique pour $(M', \tilde{\xi})$. En transportant maintenant $\tilde{\xi}$ sur M à l'aide du difféomorphisme $M' \rightarrow M$, identique sur W et exponentiel sur $D\zeta$, on obtient le fibré recherché ξ_0 .

§ 7 - FORMULES DE PRODUIT POUR L'INVARIANT k

Nous allons calculer $k(V)$ dans le cas où V est un produit de deux variétés $V_1 \times V_2$.

7.1. Nous calculerons d'abord $k((\bar{S}^1)^2)$.

PROPOSITION. $k(\bar{T}^2) \equiv 1$, où $\bar{T}^2 = \bar{S}^1 \times \bar{S}^1$.

Démonstration. Considérons dans l'espace projectif $P_2(\mathbb{C})$ une cubique non-singulière C . Comme la classe de Chern $c_1(P_2(\mathbb{C}))$ réduite modulo 2 coïncide avec $w_2(P_2(\mathbb{C}))$, $P_2(\mathbb{C})$ peut être muni d'une Spin^c -structure pour laquelle $e(\det \tau P_2(\mathbb{C})) = c_1(P_2(\mathbb{C}))$ (cf. 1.2). Par ailleurs, on sait que C représente dans $P_2(\mathbb{C})$ la classe $3u = c_1(P_2(\mathbb{C}))$, où $u \in H^2(P_2(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est le générateur canonique. D'après la proposition 6.3, C est une sous-variété caractéristique de $P_2(\mathbb{C})$. Pour la Spin -structure que cela induit sur C , on a (cf. la proposition 6.2 et l'exemple qui la suit) :

$$k(C) = \frac{1}{8}(\sigma(P_2(\mathbb{C})) - C \cdot C) \bmod 2 = \frac{1}{8}(1 - 9) \bmod 2 = 1 \bmod 2 .$$

D'autre part, le genre de C est égal à $\frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1$ (cf. [47], p. 274).

Donc, C est difféomorphe au tore T^2 . Il reste à prouver que la Spin -structure de C est équivalente à celle de \bar{T}^2 . Or, T^2 possède 4 Spin -structures différentes (à équivalence près), puisque $H^1(T^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ a 4 éléments, dont \bar{T}^2 et trois autres qui se prolongent sur le tore plein que borde T^2 . Donc l'unique Spin -structure sur C pour laquelle $k(C)$ peut être non nul, est celle de \bar{T}^2 .

7.2. Pour donner une forme commode aux formules de produit pour k , introduisons d'abord R_* , une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algèbre graduée, engendrée par trois éléments

α, β, γ de degrés 1, 4, 8 respectivement et soumis aux seules relations $\alpha^3 = \alpha\beta = \beta^2 = 0$ (\dagger). On voit tout de suite que $R_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $i \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 8$ et $R_i = 0$ pour $i \equiv 3, 5, 6, 7 \pmod 8$.

Soit $\chi : \Omega_*^{\text{Spin}} \rightarrow R_*$ l'homomorphisme de groupes défini par :

$$\chi([M]) = \begin{cases} \sigma(M) \pmod 2, & \dim M \equiv 0 \pmod 8 \\ k(M) & , \dim M \equiv 2 \pmod 8 \\ k(M \times \bar{S}^1), & \dim M \equiv 1 \pmod 8 \\ \sigma(M)/16 \pmod 2, & \dim M \equiv 4 \pmod 8 \\ 0 & \dim M \equiv 3, 5, 6, 7 \pmod 8 . \end{cases}$$

PROPOSITION. χ est un homomorphisme d'anneaux.

Démonstration. Soient V_1 et V_2 deux Spin-variétés closes, $V = V_1 \times V_2$, $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$. L'égalité $\chi(V) = \chi(V_1) \cdot \chi(V_2)$ pour $n_1 + n_2 \not\equiv 1, 2 \pmod 8$ résulte facilement de la définition de R_* , de la multiplicativité de la signature et du fait que $\sigma(M^{8m+4}) \equiv 0 \pmod 2$ pour une Spin-variété close M . Examinons le reste des cas :

1. $n_1 \equiv 0 \pmod 8$, $n_2 \equiv 2 \pmod 8$. Il existe une Spin-variété compacte W^{n_2+2} telle que $bW = -V_2 \times \bar{S}^1$. Alors $b(V_1 \times W) = V_1 \times V_2 \times \bar{S}^1$, donc $\frac{1}{8}\sigma(V_1 \times W) \pmod 2 = k(V_1 \times V_2) = \sigma(V_1) \cdot \frac{\sigma(W)}{8} \pmod 2 = \sigma(V_1) \cdot k(V_2)$.

2. $n_1 \equiv 0 \pmod 8$, $n_2 \equiv 1 \pmod 8$. Même démonstration que 1, en remplaçant V_2 par $V_2 \times \bar{S}^1$.

3. $n_1 \equiv 1 \pmod 8$, $n_2 \equiv 1 \pmod 8$. La variété $V_2 \times \bar{S}^1$ représente un élément du noyau de $\Omega_*^{\text{Spin}} \rightarrow \Omega_*^{\text{SO}}$; donc, d'après le théorème 5.1, $V_2 \times \bar{S}^1$ est cobordante à une variété $M \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1$, où M est une Spin-variété close de dimension

(\dagger) En fait, $R_i = KO_*(pt) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où $KO_*(pt)$ est l'anneau de coefficients de la K-théorie réelle (cf. 17.4 et 17.5).

$n_2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$. Il s'ensuit que $k(V_2 \times \bar{S}^1) = k(M \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1) = \sigma(M) \cdot k(\bar{S}^1 \times \bar{S}^1) = \sigma(M) \pmod{2}$, d'après le cas 1 et la proposition 7.1. D'autre part, soit W_0 une Spin-variété compacte de dimension $n_2 + 2$, telle que $bW_0 = V_2 \times \bar{S}^1 \cup -(M \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1)$ et W_1 une Spin-variété compacte de dimension $n_1 + 3$, telle que $bW_1 = -V_1 \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1$. Alors :

$$b(V_1 \times W_0) = V_1 \times V_2 \times \bar{S}^1 \cup -(V_1 \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1 \times M) \text{ et}$$

$$b(W_1 \times M) = -(V_1 \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1 \times M).$$

Donc, en recollant $-V_1 \times W_0$ avec $W_1 \times M$ le long de $V_1 \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1 \times M$, on obtient une variété W telle que $bW = -(V_1 \times V_2 \times \bar{S}^1)$. Donc :

$$k(V_1 \times V_2) = \frac{1}{8} \sigma(W) \pmod{2} = \frac{1}{8} (-\sigma(V_1 \times W_0) + \sigma(W_1 \times M)) \pmod{2} =$$

$$= \frac{\sigma(W_1)}{8} \cdot \sigma(M) \pmod{2} = k(V_1 \times \bar{S}^1) \cdot \sigma(M) = k(V_1 \times \bar{S}^1) \cdot k(V_2 \times \bar{S}^1).$$

4. $n_1 \equiv 4 \pmod{8}$, $n_2 \equiv 5, 6 \pmod{8}$. On raisonne exactement comme dans les cas 1 et 2 en tenant compte de ce que $\sigma(V_1) \equiv 0 \pmod{2}$.

5. $n_1 \not\equiv 0 \pmod{4}$, $n_2 \not\equiv 0, 1, 2 \pmod{8}$. Alors il existe une Spin-variété compacte W , telle que $bW = -V_2 \times \bar{S}^1$ (cf. remarque 5.1). Si $n_1 + n_2 \equiv 2 \pmod{8}$,

$$b(V_1 \times W) = -V_1 \times V_2 \times \bar{S}^1 \text{ et } \sigma(V_1 \times W) = 0, \text{ d'où } \chi(V_1 \times V_2) = 0 = \chi(V_1) \chi(V_2).$$

Si $n_1 + n_2 \equiv 1 \pmod{8}$, $b(V_1 \times \bar{S}^1 \times W) = -V_1 \times V_2 \times \bar{S}^1 \times \bar{S}^1$ et $\sigma(V_1 \times \bar{S}^1 \times W) = 0$,

$$\text{donc } \chi(V_1 \times V_2) = k(V_1 \times V_2 \times \bar{S}^1) = 0 = \chi(V_1) \cdot \chi(V_2).$$

§ 8 - INVARIANTS DE KERVAIRE GÉNÉRALISÉS

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons donner une interprétation homotopique de l'invariant k . Il se trouve que, pour une large classe de Spin-variétés V^{8n+2} , $k(V)$ coïncide avec divers invariants du type de l'invariant de Kervaire, construits à partir d'une forme quadratique sur $H^{4n+1}(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans le paragraphe présent, nous donnons une axiomatique pour de tels invariants et rappelons l'exemple principal - l'invariant de Kervaire-Brown [16].

8.1. Soit K une fonction qui, à chaque Spin-variété close V de dimension $8n+2$, associe un élément $K(V) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

DÉFINITION. On dira que K est un invariant de Kervaire (généralisé), pour les Spin-variétés, si K vérifie les propriétés suivantes :

(i) Si V_1 et V_2 sont deux Spin-variétés closes de dimension $8n+2$ et que $V = V_1 \cup V_2$ est leur réunion disjointe, alors $K(V) = K(V_1) + K(V_2)$.

(ii) Si W est une Spin-variété compacte de dimension $8n+3$, alors $K(W) = 0$.

(iii) Si V est une Spin-variété close de dimension $8n+2$ telle que $H^{4n+1}(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, alors $K(V) = 0$.

(iv) Si M est une Spin-variété close de dimension $8n$, on a : $K(\bar{T}^2 \times M) = \sigma(M) \pmod{2}$, où $\bar{T}^2 = \bar{S}^1 \times \bar{S}^1$.

Les conditions (i) et (ii) impliquent que K induit un homomorphisme $\Omega_{8n+2}^{\text{Spin}} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que nous noterons également K .

8.2. E.H. Brown a donné, dans [16], une méthode générale permettant de construire des invariants du type de celui de Kervaire pour différentes classes de

variétés (ou d'espaces de Poincaré). Nous allons rappeler très brièvement la méthode de Brown. Le lecteur trouvera tous les détails dans [16].

Pour deux CW-complexes X, Y , on note $\langle X, Y \rangle = \lim_{\rightarrow} [S^i X, S^i Y]$ le groupe des classes homotopiques d'applications stables $X \rightarrow Y$.

Brown démontre d'abord que $\langle S^{2n}, K_n \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $K_n = K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n)$. Soit $\mu \in \langle S^{2n}, K_n \rangle$ l'élément non-nul de ce groupe.

Soit maintenant X^{2n} une variété close connexe, ξ son fibré normal dans une sphère S^{2n+m} , où m est assez grand. On note $\lambda \in \langle S^{2n+m}, T_\xi \wedge K_n \rangle$ l'image de $S^m \wedge \mu$ par l'homomorphisme $\langle S^{2n+m}, S^m \wedge K_n \rangle \rightarrow \langle S^{2n+m}, T_\xi \wedge K_n \rangle$ induit par l'inclusion de la fibre $S^m \subset T_\xi$.

PROPOSITION ([16]). Les formes quadratiques $q: H^n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ associées à la forme bilinéaire du produit cohomologique, c'est-à-dire telles que $q(v+u) = q(v) + q(u) + j(v \cdot u) [X]$, où $j: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est l'inclusion, correspondent bijectivement aux homomorphismes $h: \langle S^{2n+m}, T_\xi \wedge K_n \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tels que $h(\lambda) = 2$.

Si h est un tel homomorphisme, la forme correspondante q est donnée par l'application composée :

$$H^n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = [X^+, K_n] \rightarrow [X^+, K_n] \xrightarrow{A} \langle S^{2n+m}, T_\xi \wedge K_n \rangle \xrightarrow{h} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

où X^+ désigne la réunion de X avec un point, tandis que A désigne la S -dualité.

Soit $\underline{Y} = \{Y_m\}$ un spectre multiplicatif (cf. [48], chap. III). Ceci signifie, en particulier, que l'on a fixé un morphisme ("unité") $\alpha: \underline{S} \rightarrow \underline{Y}$, où $\underline{S} = \{S^m\}$ est le spectre des sphères. On supposera en plus que $H^0(\underline{Y}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que \underline{Y} est un spectre stable, c'est-à-dire que Y_m est $(m-1)$ -connexe pour tout m . On note $u \in H^0(\underline{Y}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la classe de Thom cohomologique.

Comme on l'a fait ci-dessus pour T_ξ , on peut définir pour chaque m un élément $\lambda_m \in \langle S^{2n+m}, Y_m \wedge K_n \rangle$ en utilisant le morphisme α . Les λ_m déterminent

un élément $\lambda \in \check{Y}_{2n}(K_n) = \lim_{\rightarrow m} \pi_{2n+m}(Y_m \wedge K_n)$.

PROPOSITION. ([16]). Pour qu'il existe un homomorphisme $h : \check{Y}_{2n}(K_n) \rightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ tel que $h(\lambda) = 2$, il faut et il suffit que $\chi(\text{Sq}^{n+1})u = 0$, où χ est l'anti-automorphisme de l'algèbre de Steenrod (cf. [32]).

Supposons maintenant que les hypothèses de cette proposition soient réunies et choisissons un tel h .

Soit \underline{MG} un spectre d'espaces de Thom MG_m , où G_m est un groupe de Lie. Supposons que \underline{MG} est \underline{Y} -orienté (cf. [48], chap. III), c'est-à-dire que l'on a fixé un morphisme $\underline{MG} \rightarrow \underline{Y}$ tel que le morphisme $\underline{S} \rightarrow \underline{MG} \rightarrow \underline{Y}$, où $\underline{S} \rightarrow \underline{MG}$ est défini par l'inclusion des fibres, coïncide avec α .

Alors, pour toute G -variété close X^{2n} , l'homomorphisme composé : $\{S^{2n+m}, T\xi \wedge K_n\} \rightarrow \{S^{2n+m}, MG_m \wedge K_n\} \rightarrow \{S^{2n+m}, Y_m \wedge K_n\} \rightarrow \check{Y}_{2n}(K_n) \xrightarrow{h} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ noté également h , est tel que $h(\lambda) = 2$ et détermine donc une forme quadratique

$$q : H^n(X ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} .$$

Pour de telles formes, Brown construit un invariant $\sigma(q) \in \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ qui généralise l'invariant d'Arf des formes à valeurs dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Il montre ensuite que, h étant fixé, σ détermine un homomorphisme $\sigma_h : \Omega_{2n}^G \rightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, où Ω_{2n}^G est le groupe de cobordisme correspondant aux G -variétés.

8.3. Revenons au cas qui nous intéresse. Soit \underline{Y} le spectre multiplicatif stable \underline{MSpin} . Comme $\text{Sq}^{4n+2} = \text{Sq}^2 \text{Sq}^{4n} + \text{Sq}^{4n+1} \text{Sq}^1 = \text{Sq}^2 \text{Sq}^{4n} + \text{Sq}^2 \text{Sq}^{4n-1} \text{Sq}^1 = \text{Sq}^2(\text{Sq}^{4n} + \text{Sq}^{4n-1} \text{Sq}^1)$, $\chi(\text{Sq}^{4n+2}) = \chi(\text{Sq}^{4n} + \text{Sq}^{4n-1} \text{Sq}^1)\chi(\text{Sq}^2)$, donc $\chi(\text{Sq}^{4n+2})u = 0$, car $\chi(\text{Sq}^2)u = (w_2 + w_1^2)u = 0$ dans $H^*(\underline{MSpin} ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Comme nous l'avons vu, cela implique l'existence d'un $h : \check{H}_{8n+2}(K_{4n+1} ; \underline{MSpin}) \rightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ tel que $h(\lambda) = 2$, donc détermine un invariant $\sigma_h : \Omega_{8n+2}^{\text{Spin}} \rightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ (ici $\underline{MG} = \underline{Y}$).

INVARIANTS DE KERVAIRE GÉNÉRALISÉS

Tous les éléments de $\Omega_{8n+2}^{\text{Spin}}$ sont d'ordre 2 (cf. [48], chap. XI). σ_h prend donc ses valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et définit un homomorphisme $\Omega_{8n+2}^{\text{Spin}} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que nous noterons σ_h également. Le fait que σ_h soit un invariant de Kervaire au sens de 8.1 découle de ce que (iv) est vérifié pour tout h (cf. [17], où l'on donne une formule de produit pour σ_h beaucoup plus générale).

Remarque : L'invariant σ_h donne le principal exemple d'invariants de Kervaire généralisés. L'auteur de ce travail ne sait pas si ce sont là tous les exemples possibles d'invariants de Kervaire.

§ 9 - THÉORÈME DE ROKHLIN EN DIMENSION $8n + 4$

Ce paragraphe contient la démonstration du résultat principal.

Avec les notations introduites dans les paragraphes précédents, il affirme que pour une large classe de Spin-variétés closes V de dimension $8n + 2$, $k(V) = K(V)$ quel que soit l'invariant de Kervaire généralisé K . Cette affirmation est vraie en particulier pour les invariants de Kervaire-Brown définis en termes homotopiques. Le résultat peut donc être considéré comme une généralisation du théorème de V.A. Rokhlin [45] cité dans l'introduction.

9.1. Démontrons d'abord un cas très particulier du théorème principal.

PROPOSITION. Soit V une Spin-variété close de dimension $8n + 2$, telle que tous les nombres de Stiefel-Whitney $w_{\omega}[V] = w_{i_1} \dots w_{i_r}[V]$ soient nuls. Alors $k(V) = K(V)$ pour tout invariant de Kervaire K .

Démonstration. Comme tous les nombres de Pontriaguine $P_{\omega}[V]$ sont nuls (pour des raisons de dimension), V représente l'élément nul de Ω_{8n+2}^{SO} . Le théorème 5.1 montre alors que V est Spin-cobordante à une variété $\bar{T}^2 \times M$, où M est une Spin-variété close de dimension $8n$. Alors, d'après 7.2 et (iv) : $k(V) = \sigma(M) \bmod 2 = K(V)$ pour tout invariant de Kervaire K .

9.2. La proposition 9.1 montre que, si V_1 et V_2 sont deux Spin-variétés closes ayant les mêmes nombres de Stiefel-Whitney et si $k(V_1) = K(V_1)$, alors $k(V_2) = K(V_2)$. Il est donc très important de connaître l'image de l'homomorphisme d'oubli $\Omega_*^{Spin} \rightarrow \Omega_*^0$, où Ω_*^0 est l'anneau de cobordisme non-orienté.

Malheureusement, il n'existe pas de description commode de cette image \dagger . Mais on peut décrire un assez grand sous-anneau de cette image à l'aide des résultats de P.G. Anderson [4]. Voici un bref résumé de ces résultats.

Soient M^m et N^{2m} deux variétés closes. On écrira $R(M, N)$ pour indiquer qu'il existe un isomorphisme $D : H^*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algèbres qui double les dimensions et tel que $Dw_i(M) = w_{2i}(N)$ pour $i \geq 0$. En particulier, $R(M, N)$ entraîne $H^{2j+1}(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ pour $j \geq 0$.

Soit M une variété close, λ un fibré vectoriel réel de dimension 1 tel que $w(\lambda) = 1 + w_1(M)$. On pose alors $g_m(M) = \mathbb{R}P(\lambda \oplus \theta_{\mathbb{R}}^m)$, espace de la projection du fibré $\lambda \oplus \theta_{\mathbb{R}}^m$, où $\theta_{\mathbb{R}}^m$ est le fibré trivial réel de dimension m .

De même, pour une U -variété close N^\ddagger , on pose $h_m(N) = \mathbb{C}P(\xi \oplus \theta_{\mathbb{C}}^m)$, où ξ est un fibré vectoriel complexe de dimension 1 tel que $c(\xi) = 1 + c_1(N)$. $h_m(N)$ est un espace fibré sur N de fibre $P_m(\mathbb{C})$. $h_m(N)$ admet donc une U -structure induite par la U -structure de N et celle de $P_m(\mathbb{C})$.

Les résultats de P.G. Anderson dont nous aurons besoin se résument dans la proposition suivante.

PROPOSITION ([4]). (i) Tout élément de $\text{Tor } \Omega_*^{SO}$ est représenté par une réunion disjointe de variétés de la forme $g_{2r+1}(M)$ et pour toutes les variétés M utilisées dans cette réunion il existe une U -variété close N telle que $R(M, N)$.

(ii) $R(M, N) \Rightarrow R(g_m(M), h_m(N))$ pour $m \geq 0$ et toutes variétés closes M, N dont N est une U -variété.

(iii) $R(M, N) \Rightarrow N$ est cobordante en tant que variété non-orientée à $M \times M$.

9.3. La classe de variétés V dont il sera question dans ce qui suit est définie

\dagger Cf. cependant la proposition 10.3 ci-dessous.

\ddagger Une U -variété est une variété dont le fibré tangent stable est muni d'une structure complexe.

par la condition suivante :

Condition C. V est une variété close telle que les nombres de Stiefel-Whitney $w_{i_1} \dots w_{i_s} [V]$, où l'un au moins des i_r est impair, sont nuls.

On sait (cf. [48], chapitre VII) que la condition C est équivalente aux conditions suivantes :

Condition C'. La classe de V dans Ω_*^0 contient une U-variété.

Condition C''. La classe de V dans Ω_*^0 contient un carré.

PROPOSITION. Toute Spin-variété close V^{8n+2} qui satisfait à la condition C est cobordante en tant que variété non-orientée à une réunion disjointe

$\cup_{\alpha} h_{2r_{\alpha}+1}(N_{\alpha})$, où les N_{α} sont des U-variétés closes telles que

$H^{2j+1}(N_{\alpha}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, pour $j \geq 0$.

Démonstration. Il existe une variété close M^{4n+1} telle que V est cobordante en tant que variété non orientée à $M \times M$. On voit tout de suite (cf. [48], chap. VIII) que, si $\omega = (i_1, \dots, i_s)$ est une partition de $4n+1$, $w_{i_1} \dots w_{i_s} [M] = w_{2i_1} \dots w_{2i_s} [V]$.

En particulier, comme $w_2(V) = 0$, tous les nombres $w_1 w_{i_2} \dots w_{i_s} [M] = 0$ pour toute partition (i_2, \dots, i_s) de $4n$. Donc (cf. [48], chap. IX), M est cobordante à une variété orientée P . P représente un élément de $\text{Tor } \Omega_{4n+1}^{SO} = \Omega_{4n+1}^{SO}$, donc, d'après la proposition 9.2, P est cobordante à une réunion disjointe

$\cup_{\alpha} g_{2r_{\alpha}+1}(M_{\alpha})$ et il existe des U-variétés N_{α} telles que $R(M_{\alpha}, N_{\alpha})$. Donc, dans Ω_*^0 on a : $[P] = \sum_{\alpha} [g_{2r_{\alpha}+1}(M_{\alpha})]$, où $[P]$ désigne la classe de P dans Ω_*^0 . Il en découle d'après 9.2 :

$$[V] = [P]^2 = \sum_{\alpha} [g_{2r_{\alpha}+1}(M_{\alpha})]^2 = \sum_{\alpha} [h_{2r_{\alpha}+1}(N_{\alpha})],$$

et $H^{2j+1}(N_{\alpha}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, puisque $R(M_{\alpha}, N_{\alpha})$.

9.4. Soit N une U -variété close telle que $H^{2j+1}(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ pour $j \geq 0$.
 Pour tout m , $h_m(N)$ a une orientation canonique, induite par la U -structure.

LEMME. Soit m un nombre impair. Alors :

- (i) $h_m(N)$ admet une unique Spin-structure ;
- (ii) $h_m(N)$ est une sous-variété de $h_{m+1}(N)$ dont la classe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -homologie est duale à $w_2(h_{m+1}(N))$.

Démonstration. Considérons la fibration $p: h_m(N) \rightarrow N$. Le fibré tangent stable de $h_m(N)$ est isomorphe à $p^* \tau_N \oplus \eta \otimes_{\mathbb{C}} p^*(\xi \oplus \theta_{\mathbb{C}}^m)$, où η est le fibré linéaire canonique sur $h_m(N)$ (cf. [49]). On sait (cf. [27], chapitre XVI) que $H^*(h_m(N); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un $H^*(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -module libre (la structure de module est donnée par l'homomorphisme p^*), de base $1, \alpha, \dots, \alpha^m$, où $\alpha = w_2(\eta)$. Le produit dans $H^*(h_m(N); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est entièrement défini par la relation $\alpha^{m+1} + \alpha^m \cdot p^* w_2(N) = 0$. Donc, $w(h_m(N)) = p^* w(N) w(\eta \otimes_{\mathbb{C}} p^* \xi) w(\eta)^m = p^* w(N) (1 + \alpha + p^* w_2(N)) (1 + \alpha)^m$. En particulier, $w_2(h_m(N)) = (m+1)\alpha = 0$. Donc $h_m(N)$ admet une Spin-structure, unique puisque $H^1(h_m(N); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ (cf. 1.1). Ceci prouve (i).

Soit $v \in H^2(h_{m+1}(N); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la classe duale à la classe d'homologie de $h_m(N)$, et soit $i: h_m(N) \rightarrow h_{m+1}(N)$ l'inclusion. Par définition de la dualité, v est entièrement définie par la propriété $\langle i^* x, h_m(N) \rangle = \langle v \cdot x, h_{m+1}(N) \rangle$, où $x \in H^{d-2}(h_{m+1}(N); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $d = \dim h_{m+1}(N)$. On voit tout de suite, d'après la description de $H^*(h_{m+1}(N); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donnée ci-dessus, que $v = \alpha$. Comme $w_2(h_{m+1}(N)) = (m+2)\alpha = \alpha$, cela prouve (ii).

9.5. Soit $m \geq 1$.

PROPOSITION. L'auto-intersection de $h_m(N)$ dans $h_{m+1}(N)$ (au sens de 6.2)

coincide avec $h_{m-1}(N)$.

Démonstration. Considérons l'homotopie régulière $f_t : P_m(\mathbb{C}) \rightarrow P_{m+1}(\mathbb{C})$ définie en coordonnées homogènes par $f_t([z_0, \dots, z_m]) = [z_0, \dots, z_{m-1}, (1-t)z_m, tz_{m+1}]$. f_0 est l'injection canonique de $P_m(\mathbb{C})$. $f_1([z_0, \dots, z_m]) = [z_0, \dots, z_{m-1}, 0, z_m]$. On voit que f_1 est transverse à $P_m(\mathbb{C}) \subset P_{m+1}(\mathbb{C})$ et que $P_m(\mathbb{C}) \cap f_1(P_m(\mathbb{C})) = P_{m-1}(\mathbb{C})$.

Remarquons maintenant que $h_{m+1}(N) = \mathbb{C}P(\xi \otimes \theta_{\mathbb{C}}^m)$ est l'espace total du fibré associé au fibré ξ de fibre $P_{m+1}(\mathbb{C})$, où le groupe structural U_1 de ξ n'agit que sur la première coordonnée z_0 : si $\lambda \in U_1$, l'action de λ sur $P_{m+1}(\mathbb{C})$ est donnée par $\lambda([z_0, \dots, z_{m+1}]) = [\lambda z_0, z_1, \dots, z_{m+1}]$. Par conséquent, cette action commute avec l'homotopie f_t . Celle-ci définit donc une homotopie régulière $F_t : h_m(N) \rightarrow h_{m+1}(N)$ telle que F_0 est l'injection canonique $h_m(N) \subset h_{m+1}(N)$, F_1 transverse à $h_m(N)$ et $h_m(N) \cap F_1(h_m(N)) = h_{m-1}(N)$.

9.6. Nous sommes prêts maintenant pour la démonstration du théorème principal.

THÉORÈME. Soit V une Spin-variété close de dimension $8n + 2$ qui satisfait à la condition C. Alors, pour tout invariant de Kervaire K , on a : $k(V) = K(V)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 9.3 et de la remarque faite au début de 9.2, il suffit de prouver : $k(h_{2r+1}(N)) = K(h_{2r+1}(N))$ où N est une U -variété close de dimension $(8n + 2) - (2r + 1)$ telle que $H^{2j+1}(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ pour $j \geq 0$, et où $h_{2r+1}(N)$ est munie de son unique Spin-structure (cf. le lemme 9.4). Comme $H^{2r+1}(h_{2r+1}(N); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, $K(h_{2r+1}(N)) = 0$ (propriété (iii) de K , cf. 8.1).

Soit $x \in H^2(h_{2r+2}(N); \mathbb{Z})$ la classe duale de la classe d'homologie entière que représente $h_{2r+1}(N)$. D'après le lemme 9.4, x réduite modulo 2

coïncide avec $w_2(h_{2r+2}(N))$. Donc, d'après 1.2, $h_{2r+2}(N)$ admet une Spin^C -structure pour laquelle $e(\det \tau h_{2r+2}(N)) = x$. D'après la proposition 6.3, $h_{2r+1}(N)$ est une sous-variété caractéristique de $(h_{2r+2}(N), \psi)$, $\psi = \det \tau h_{2r+2}(N)$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 6.2. Comme l'auto-intersection de $h_{2r+1}(N)$ coïncide avec $h_{2r}(N)$, on a :

$$k(h_{2r+1}(N)) = \frac{1}{8} (\sigma(h_{2r+2}(N)) - \sigma(h_{2r}(N))) \text{ mod } 2 .$$

Or, pour m pair, on a :

$$\sigma(h_m(N)) = \sigma(P_m(\mathbb{C})) \cdot \sigma(N) = \sigma(N) \text{ (cf. [20])} .$$

Donc :

$$k(h_{2r+1}(N)) = 0 = K(h_{2r+1}(N)) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

§ 10 - INVARIANTS DE KERVAIRE GÉNÉRALISÉS

EN DIMENSION ≤ 26

Par un calcul des relations de Wu, nous allons voir que la condition C (cf. 9.3) est satisfaite pour toute Spin-variété close V^{8n+2} où $n \leq 3$.

10.1. Soit $v = 1 + v_1 + \dots + v_m + \dots$ la classe totale de Wu définie par la relation $w = Sq v$, $w = 1 + w_1 + \dots + w_m + \dots$ étant la classe totale de Stiefel-Whitney.

PROPOSITION. Soit V une Spin-variété close de dimension $8n + 2$. Alors,

$$v(V) = 1 + v_4 + v_8 + \dots + v_{4n}.$$

Démonstration. Les relations de Wu (cf. [27], chap. XVII) $\langle v_i \cdot x, [V] \rangle = \langle Sq^i x, [V] \rangle$, $x \in H^*(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, montrent que $v_i = 0$ pour $i \geq 4n + 2$. La relation d'Adem (*) $Sq^1 Sq^{2r} = Sq^{2r+1}$ donne $\langle v_{2r+1} \cdot x, [V] \rangle = \langle Sq^1 Sq^{2r} x, [V] \rangle = \langle v_1 \cdot Sq^{2r} x, [V] \rangle$.

Comme V est orientée, $v_1 = w_1 = 0$, d'où $v_{2r+1} = 0$ pour $r \geq 0$. De même, $Sq^{4r+2} = Sq^2 Sq^{4r} + Sq^{4r+1} Sq^1$, d'où $\langle v_{4r+2} \cdot x, [V] \rangle = \langle Sq^2 Sq^{4r} x, [V] \rangle + \langle Sq^{4r+1} Sq^1 x, [V] \rangle = \langle v_2 \cdot Sq^{4r} x, [V] \rangle + \langle v_{4r+1} \cdot Sq^1 x, [V] \rangle = 0$, puisque $v_{4r+1} = 0$ et $v_2 = w_2 + w_1^2 = 0$. Donc $v_{4r+2} = 0$ pour $r \geq 0$. \square

10.2. Soit V une Spin-variété close de dimension $8n + 2$.

PROPOSITION. Si $n \leq 3$, V satisfait à la condition C.

Démonstration. Comme V est une Spin-variété, $w_1 = w_2 = 0$. L'emploi successif de la formule de Wu ([8], [36] p. 94)

$$Sq^i w_j = \sum_{t=0}^i \binom{i-j}{t} w_{i-t} w_{j+t}$$

donne $w_3 = Sq^1 w_2 = 0$, $w_5 = Sq^2 w_3 = 0$, $w_9 = Sq^4 w_5 = 0$. La proposition en découle pour $n = 0$ et $n = 1$. \square

(*) Nous utilisons la liste des relations d'Adem de [38], chap. III.

Examinons maintenant le cas $n = 2$. Soit w_ω un monôme en $w_4, w_6, w_7, w_{10}, w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_{17}, w_{18}$ qui contient au moins un w_j avec j impair. Si $\deg(w_\omega) = 18$, w_ω en contient obligatoirement au moins deux. On voit tout de suite que les seules relations à vérifier sont : $w_7 w_{11} [V] = 0$ et $w_7^2 w_4 [V] = 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } w_7 w_{11} [V] &= (Sq^1 w_6 \cdot w_{11}) [V] = Sq^1(w_6 w_{11}) [V] + (w_6 \cdot Sq^1 w_{11}) [V] \\ &= v_1 \cdot w_6 \cdot w_{11} [V] + (w_6 \cdot Sq^1 Sq^1 w_{10}) [V] = 0 \end{aligned}$$

puisque $v_1 = 0$ et $Sq^1 Sq^1 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{De même, } w_7^2 w_4 [V] &= (w_7 \cdot Sq^1 w_6 \cdot w_4) [V] = Sq^1(w_7 \cdot w_6 \cdot w_4) [V] + \\ &+ (Sq^1 Sq^1 w_6 \cdot w_6 \cdot w_4) [V] + (w_7 \cdot w_6 \cdot Sq^1 w_4) [V] = 0 \end{aligned}$$

car, $v_1 = 0$, $Sq^1 Sq^1 = 0$ et $Sq^1 w_4 = w_5 = 0$. Cela prouve la proposition pour $n = 2$. \square

Dans le cas $n = 3$, remarquons d'abord que si $\deg(w_\omega) = 26$, si $w_\omega [V] \neq 0$ et si w_ω contient un w_j avec j impair, w_ω contient $w_7, w_{11}, w_{13}, w_{15}$ ou w_{19} puisque $w_1 = w_2 = w_3 = w_5 = w_9 = 0$. Nous allons énumérer les possibilités pour w_ω .

(a) w_ω contient w_{19} . Seule possibilité : $w_{19} w_7$. On a :

$$w_{19} w_7 [V] = (w_{19} \cdot Sq^1 w_6) [V] = Sq^1(w_{19} \cdot w_6) [V] + (Sq^1 w_{19} \cdot w_6) [V] = 0$$

car $v_1 = 0$ et $Sq^1 w_{19} = Sq^1 Sq^1 w_{18} = 0$.

(b) w_ω ne contient pas de w_{19} , mais contient un w_{15} . Deux possibilités :

$w_{15} w_{11}, w_{15} w_7 w_4$. On montre que $w_{15} w_{11} [V] = 0$ comme dans (a).

$$\begin{aligned} w_{15} \cdot w_7 \cdot w_4 [V] &= Sq^1(w_{15} w_6 w_4) [V] + (w_{15} w_6 \cdot Sq^1 w_4) [V] + \\ &+ (Sq^1 w_{15} \cdot w_6 \cdot w_4) [V] = 0 \quad \text{car } v_1 = 0, Sq^1 w_4 = w_5 = 0, Sq^1 w_{15} = Sq^1 Sq^1 w_{14} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) w_ω ne contient pas de w_{19}, w_{15} , mais contient un w_{13} .

Deux possibilités : $w_{13}^2, w_{13} \cdot w_7 \cdot w_6$. On a $w_{13}^2[V] = \text{Sq}^{13} w_{13}[V] = v_{13} \cdot w_{13}[V] = 0$, puisque $v_{13} = 0$ (cf. Proposition 10.1).

$$\begin{aligned} \text{Ensuite, } w_{13} \cdot w_7 \cdot w_6[V] &= (\text{Sq}^1 w_{12} \cdot w_7 \cdot w_6)[V] = \\ &= \text{Sq}^1(w_{12} \cdot w_7 \cdot w_6)[V] + w_{12} \cdot w_7^2[V] + (w_{12} \cdot \text{Sq}^1 w_7 \cdot w_6)[V] \\ &= w_{12} \cdot w_7^2[V] \end{aligned}$$

car $v_1 = 0$ et $\text{Sq}^1 w_7 = \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 w_6 = 0$.

Comme la classe v de V est égale à $1 + v_4 + v_8 + v_{12}$ (Proposition 10.1), $w_{12} = v_{12} + \text{Sq}^4 v_8$. Donc $w_{12} \cdot w_7^2[V] = v_{12} \cdot w_7^2[V] + (\text{Sq}^4 v_8 \cdot w_7^2)[V]$.

Le premier terme : $v_{12} \cdot w_7^2[V] = \text{Sq}^{12}(w_7)^2[V] = (\text{Sq}^6 w_7)^2[V] =$

$$= \text{Sq}^{13}(\text{Sq}^6 w_7)[V] = v_{13} \cdot \text{Sq}^6 w_7[V] = 0 \text{ puisque } v_{13} = 0.$$

Le second terme : $\text{Sq}^4 v_8 \cdot w_7^2[V] = \text{Sq}^4(v_8 \cdot w_7^2)[V] + (\text{Sq}^3 v_8 \cdot \text{Sq}^1(w_7^2))[V] +$
 $+ (\text{Sq}^2 v_8 \cdot \text{Sq}^2(w_7^2))[V] + (\text{Sq}^1 v_8 \cdot \text{Sq}^3(w_7^2))[V] +$
 $+ (v_8 \cdot \text{Sq}^4(w_7^2))[V].$

On a : $\text{Sq}^1(w_7^2) = \text{Sq}^3(w_7^2) = 0$. $\text{Sq}^2(w_7^2) = (\text{Sq}^1 w_7)^2 = (\text{Sq}^1 \text{Sq}^1 w_6)^2 = 0$.

$\text{Sq}^4(w_7^2) = (\text{Sq}^2 w_7)^2$, donc :

$$\begin{aligned} (v_8 \cdot \text{Sq}^4(w_7^2))[V] &= \text{Sq}^8((\text{Sq}^2 w_7)^2) = (\text{Sq}^4 \text{Sq}^2 w_7)^2[V] = (\text{Sq}^{13} \text{Sq}^4 \text{Sq}^2 w_7)[V] = \\ &= (v_{13} \cdot \text{Sq}^4 \text{Sq}^2 w_7)[V] = 0, \text{ car } v_{13} = 0. \end{aligned}$$

Donc : $(w_{13} \cdot w_7 \cdot w_6)[V] = (w_{12} \cdot w_7^2)[V] = \text{Sq}^4(v_8 \cdot w_7^2)[V] = v_4 \cdot v_8 \cdot w_7^2[V] =$

$$= \text{Sq}^8(v_4 \cdot w_7^2)[V] = (v_4 \cdot \text{Sq}^8(w_7^2))[V] + (\text{Sq}^1 v_4 \cdot \text{Sq}^7(w_7^2))[V] +$$

$$+ (\text{Sq}^2 v_4 \cdot \text{Sq}^6(w_7^2))[V] + (\text{Sq}^3 v_4 \cdot \text{Sq}^5(w_7^2))[V] + (\text{Sq}^4 v_4 \cdot \text{Sq}^4(w_7^2))[V] = 0,$$

car $(v_4 \cdot \text{Sq}^8(w_7^2))[V] = \text{Sq}^4((\text{Sq}^4 w_7)^2)[V] = (\text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7)^2[V] =$

$$= \text{Sq}^{13} \text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7[V] = (v_{13} \cdot \text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7)[V] = 0, \text{ puisque } v_{13} = 0;$$

$$\text{Sq}^7(w_7^2) = \text{Sq}^5(w_7^2) = 0 ;$$

$$\text{Sq}^6(w_7^2) = (\text{Sq}^3 w_7)^2 = (\text{Sq}^3 \text{Sq}^3 v_4)^2 = (\text{Sq}^5 \text{Sq}^1 v_4)^2 = (\text{Sq}^5 w_5)^2 = 0, \text{ puisque } w_5 = 0 ;$$

$$\begin{aligned} (\text{Sq}^4 v_4 \cdot \text{Sq}^4(w_7^2))[V] &= (v_4^2 \cdot (\text{Sq}^2 w_7)^2)[V] = \text{Sq}^{13}(v_4 \cdot \text{Sq}^2 w_7)[V] = \\ &= (v_{13} \cdot v_4 \cdot \text{Sq}^2 w_7)[V] = 0 . \end{aligned}$$

(d) w_ω ne contient pas de w_{19}, w_{15}, w_{13} , mais contient un w_{11} .

Trois possibilités : $w_{11}^2 w_4$, $w_{11} w_7 w_8$, $w_{11} w_7 w_4^2$.

$$\begin{aligned} w_{11}^2 w_4[V] &= \text{Sq}^1(\overline{w_{11}} \cdot w_{10} \cdot w_4)[V] + (\text{Sq}^1 w_{11} \cdot w_{10} \cdot w_4)[V] + \\ &+ (w_{11} \cdot w_{10} \cdot \text{Sq}^1 w_4)[V] = 0, \text{ car } v_1 = 0, \text{ Sq}^1 w_{11} = \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 w_{10} = 0, \\ &\text{Sq}^1 w_4 = w_5 = 0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } w_{11} \cdot w_7 \cdot w_8[V] &= \text{Sq}^1(w_{11} \cdot w_6 \cdot w_8)[V] + (\text{Sq}^1 w_{11} \cdot w_6 \cdot w_8)[V] + \\ &+ (w_{11} \cdot w_6 \cdot \text{Sq}^1 w_8)[V] = 0, \text{ car } v_1 = \text{Sq}^1 w_{11} = 0 \text{ et } \text{Sq}^1 w_8 = w_9 = 0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin, } w_{11} \cdot w_7 \cdot w_4^2[V] &= \text{Sq}^1(w_{11} \cdot w_6 \cdot w_4^2)[V] + (\text{Sq}^1 w_{11} \cdot w_6 \cdot w_4^2)[V] + \\ &+ (w_{11} \cdot w_6 \cdot \text{Sq}^1(w_4^2))[V] = 0, \text{ puisque } v_1 = \text{Sq}^1 w_{11} = 0 \text{ et } \text{Sq}^1(w_4^2) = 0 . \end{aligned}$$

(e) w_ω ne contient pas de $w_{19}, w_{15}, w_{13}, w_{11}$, mais contient un w_7 .

Quatre possibilités : $w_7^2 w_{12}$, $w_7^2 \cdot w_8 \cdot w_4$, $w_7^2 \cdot w_6^2$, $w_7^2 \cdot w_4^3$.

On a vu, dans (c), que : $w_7^2 \cdot w_{12}[V] = 0$.

$$\begin{aligned} w_7^2 \cdot w_8 \cdot w_4[V] &= \text{Sq}^1(w_7 \cdot w_6 \cdot w_8 \cdot w_4)[V] + (\text{Sq}^1 w_7 \cdot w_6 \cdot w_8 \cdot w_4)[V] + \\ &+ (w_7 \cdot w_6 \cdot \text{Sq}^1(w_8 \cdot w_4))[V] = 0, \end{aligned}$$

car $v_1 = \text{Sq}^1 w_7 = 0$ et $\text{Sq}^1(w_8 \cdot w_4) = w_9 \cdot w_4 + w_8 \cdot w_5 = 0$.

$$w_7^2 \cdot w_6^2[V] = \text{Sq}^{13}(w_7 \cdot w_6)[V] = v_{13} \cdot w_7 \cdot w_6 = 0 .$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin, } w_7^2 \cdot w_4^3[V] &= \text{Sq}^1(w_7 \cdot w_6 \cdot w_4^3)[V] + (\text{Sq}^1 w_7 \cdot w_6 \cdot w_4^3)[V] + \\ &+ (w_7 \cdot w_6 \cdot \text{Sq}^1(w_4^3))[V] = 0, \end{aligned}$$

$$\text{puisque } v_1 = \text{Sq}^1 w_7 = 0 \text{ et } \text{Sq}(w_4^3) = 3 w_5 \cdot w_4^2 = 0.$$

Les cas (a) - (e) épuisent les possibilités, ce qui donne la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. Pour toute Spin-variété close V de dimension 2, 10, 18 ou 26 et tout invariant de Kervaire K, $k(V) = K(V)$.

10.3. Remarquons, pour terminer ce paragraphe, que l'affirmation de la Proposition 10.2 devient fausse pour $n = 4$. Pour le prouver, rappelons une proposition de Stong [48], chap. XI :

PROPOSITION. L'image de l'homomorphisme d'oubli $\Omega_*^{\text{Spin}} \rightarrow \Omega_*^{\text{O}}$ est composée des classes de variétés closes M telles que $w_\omega[M] = 0$ dès que w_ω contient w_1 ou w_2 .

Milnor [35] a démontré l'existence d'une variété close X de dimension 24 telle que tous les nombres de Stiefel-Whitney $w_\omega[X] = 0$ où w_ω contient w_1 ou w_2 , et telle que $w_7^2 w_4 w_6[X] \neq 0$. Donc, d'après la proposition ci-dessus, la classe de X dans Ω_*^{O} contient une Spin-variété close X_1 .

D'autre part, soit Z un représentant de l'élément non-nul de $\Omega_5^{\text{SO}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le seul nombre de Stiefel-Whitney non-nul de Z est $w_2 w_3[Z]$. Donc le seul nombre de Stiefel-Whitney non-nul de $Z \times Z$ est $w_4 w_6[Z \times Z]$. Il existe par conséquent une Spin-variété close Y_1 dans la classe de $Z \times Z$ dans Ω_*^{O} . Soit $V = X_1 \times Y_1$. C'est une Spin-variété close de dimension $34 = 8 \cdot 4 + 2$. Or, en calculant la diagonale $\Delta^*(w_7^2 w_8 w_{12})$ (où $\Delta : \text{BO} \times \text{BO} \rightarrow \text{BO}$ correspond à la somme de Whitney) et en tenant compte de ce que $w_1(X_1) = w_2(X_1) = w_3(X_1) = 0$, on voit que $w_7^2 w_8 w_{12}[V] = w_7^2 w_4 w_6[X_1] \cdot w_4 w_6[Y_1] \neq 0$, donc V est un contre-exemple pour la proposition 10.1 en dimension 34.

§ 11 - QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INVARIANTS DE KERVAIRE

Le théorème 9.6 permet de démontrer quelques propriétés générales des invariants de Kervaire.

11.1. Examinons de nouveau les petites dimensions.

PROPOSITION. (i) Soit K_1 et K_2 deux invariants de Kervaire en dimension $8n + 2$, $n \leq 3$. Alors, pour toute Spin-variété close V de dimension $8n + 2$, $K_1(V) = K_2(V)$.

(ii) Il existe deux invariants de Kervaire K_1 et K_2 en dimension $34 = 8 \cdot 4 + 2$ et une Spin-variété close V telle que $K_1(V) \neq K_2(V)$.

Démonstration : (i) découle immédiatement du corollaire 10.2.

Pour démontrer (ii), on va d'abord démontrer le lemme suivant :

LEMME. Soit V une Spin-variété de dimension 34, telle que $H^{17}(V; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$. Alors, le nombre de Stiefel-Whitney $w_7^2 \cdot w_8 \cdot w_{12}[V] = 0$.

Démonstration du lemme. Nous allons procéder en deux étapes.

$$a) \quad w_7^2 \cdot w_8 \cdot w_{12}[V] = w_7^2 \cdot w_8 \cdot v_{12}[V].$$

En effet, $w_7^2 \cdot w_8 \cdot w_{12}[V] = Sq^1(w_6 \cdot w_7 \cdot w_8 \cdot w_{12})[V] + w_6 \cdot Sq^1 w_7 \cdot w_8 \cdot w_{12}[V] + w_6 \cdot w_7 \cdot Sq^1 w_8 \cdot w_{12}[V] + w_6 \cdot w_7 \cdot w_8 \cdot Sq^1 w_{12}[V] = w_6 \cdot w_7 \cdot w_8 \cdot Sq^1 w_{12}[V]$ puisque $v_1 = Sq^1 w_7 = Sq^1 w_8 = 0$ (cf. la démonstration de la proposition 10.2).

$$\begin{aligned} \text{Comme } Sq^1 w_8 = Sq^1 w_7 = Sq^1 v_4 = 0 \text{ et } Sq^2 w_7 = Sq^2 Sq^3 v_4 = \\ = (Sq^5 + Sq^4 Sq^1) v_4 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on a : } w_7^2 \cdot w_8 \cdot w_{12}[V] = Sq^2(v_4 \cdot w_7 \cdot w_8 \cdot Sq^1 w_{12})[V] + (v_4 \cdot w_7 \cdot Sq^2 w_8 \cdot Sq^1 w_{12})[V] + \\ + (v_4 \cdot w_7 \cdot w_8 \cdot Sq^2 Sq^1 w_{12})[V]. \end{aligned}$$

Le premier terme est nul puisque $v_2 = 0$.

Le second est nul puisque $w_7 \cdot \text{Sq}^2 w_8 \in H^{17}(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Donc : $w_7^2 w_8 w_{12}[V] = (v_4 \cdot w_7 \cdot w_8 \cdot \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 w_{12})[V]$. Or, $w_{12} = v_{12} + \text{Sq}^4 v_8$,
d'où : $\text{Sq}^2 \text{Sq}^1 w_{12} = \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 v_{12} + \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \text{Sq}^4 v_8$, et, comme $\text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \text{Sq}^4 =$
 $= \text{Sq}^2 \text{Sq}^5 = \text{Sq}^6 \text{Sq}^1$ et comme $\text{Sq}^1 v_8 = w_9 = 0$, on a :

$$w_7^2 w_8 w_{12}[V] = v_4 \cdot w_7 \cdot w_8 \cdot \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 v_{12}.$$

En refaisant maintenant les transformations en sens inverse, on obtient la démonstration de a).

$$b) w_7^2 w_8 v_{12}[V] = 0.$$

Remarquons d'abord que l'on a : $\text{Sq}^1 w_7 = \text{Sq}^2 w_7 = 0$,

$$\text{Sq}^3 w_7 = \text{Sq}^3 \text{Sq}^3 v_4 = \text{Sq}^5 \text{Sq}^1 v_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Sq}^5 w_7 &= \text{Sq}^5 \text{Sq}^3 v_4 = \text{Sq}^5 \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 v_4 = (\text{Sq}^2 \text{Sq}^3 + \text{Sq}^4 \text{Sq}^1) \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 v_4 = \\ &= \text{Sq}^2 (\text{Sq}^3 \text{Sq}^1) \text{Sq}^2 v_4 = \text{Sq}^2 \text{Sq}^2 \text{Sq}^2 \text{Sq}^2 v_4 = \text{Sq}^2 \text{Sq}^2 (\text{Sq}^3 \text{Sq}^1) v_4 = 0. \end{aligned}$$

Donc $\text{Sq}^j(w_7^2) = 0$, pour $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} w_7^2 w_8 v_{12}[V] &= (\text{Sq}^6 w_7)^2 w_8 [V] + (\text{Sq}^4 w_7)^2 \text{Sq}^4 w_8 [V], (\text{Sq}^6 w_7)^2 w_8 [V] = \\ &= (\text{Sq}^6 w_7)^2 v_8 [V] + (\text{Sq}^6 w_7)^2 v_4^2 [V] = (\text{Sq}^4 \text{Sq}^6 w_7)^2 [V] + (\text{Sq}^6 w_7 \cdot v_4)^2 [V] = 0, \end{aligned}$$

car $\text{Sq}^4 \text{Sq}^6 w_7, \text{Sq}^6 w_7 \cdot v_4 \in H^{17}(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} \text{De même, } ((\text{Sq}^4 w_7)^2 \cdot \text{Sq}^4 w_8)[V] &= (v_4 \cdot (\text{Sq}^4 w_7)^2 \cdot w_8)[V] + \\ &+ ((\text{Sq}^1 \text{Sq}^4 w_7)^2 \cdot \text{Sq}^2 w_8)[V] + (\text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7)^2 w_8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \text{Sq}^1 \text{Sq}^4 w_7 &= \text{Sq}^1 \text{Sq}^4 \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 v_4 = \text{Sq}^1 (\text{Sq}^5 + \text{Sq}^2 \text{Sq}^3) \text{Sq}^2 v_4 = \\ &= \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 \text{Sq}^3 \text{Sq}^2 v_4 = \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 \text{Sq}^2 v_4 = \\ &= \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \text{Sq}^3 \text{Sq}^1 v_4 = 0, \end{aligned}$$

car $\text{Sq}^1 \text{Sq}^5 = 0$ et $\text{Sq}^1 v_4 = 0$.

Pour $(v_4 \cdot (\text{Sq}^4 w_7)^2 w_8)[V]$, on procède comme suit : $w_8 = v_8 + v_4^2$.

$$(v_4 \cdot (\text{Sq}^4 w_7)^2 w_8)[V] = (\text{Sq}^2(v_4 \cdot \text{Sq}^4 w_7))^2[V] + (v_4(\text{Sq}^4 w_7)^2 v_8)[V] =$$

$$= (v_8 \cdot v_4 \cdot (\text{Sq}^4 w_7)^2)[V] ,$$

car $\text{Sq}^2(v_4 \cdot \text{Sq}^4 w_7) \in H^{17}(V ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Enfin, $(v_8 \cdot v_4 \cdot (\text{Sq}^4 w_7)^2)[V] = \text{Sq}^8(v_4 \cdot (\text{Sq}^4 w_7)^2)[V] = \text{Sq}^4 v_4 \cdot (\text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7)^2[V]$
 $+ (\text{Sq}^2 v_4 \cdot (\text{Sq}^3 \text{Sq}^4 w_7)^2)[V] + (v_4 \cdot (\text{Sq}^4 \text{Sq}^4 w_7)^2)[V] .$

Le premier terme est nul, car $\text{Sq}^4 v_4 \cdot (\text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7)^2 = (v_4 \cdot \text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7)^2$
 et $v_4 \cdot \text{Sq}^2 \text{Sq}^4 w_7 \in H^{17}(V ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Le second terme est nul, car

$$(\text{Sq}^2 v_4 \cdot (\text{Sq}^3 \text{Sq}^4 w_7)^2)[V] = \text{Sq}^2(v_4 \cdot (\text{Sq}^3 \text{Sq}^4 w_7)^2)[V] + (v_4 \cdot (\text{Sq}^1 \text{Sq}^3 \text{Sq}^4 w_7)^2)[V] ,$$

$v_2 = 0$ et $(v_4 \cdot (\text{Sq}^1 \text{Sq}^3 \text{Sq}^4 w_7)^2)[V] = (\text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \text{Sq}^3 \text{Sq}^4 w_7)^2[V]$
 avec $\text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \text{Sq}^3 \text{Sq}^4 w_7 \in H^{17}(V ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Enfin, le troisième terme est nul, car $(v_4 \cdot (\text{Sq}^4 \text{Sq}^4 w_7)^2)[V] =$
 $= (\text{Sq}^2 \text{Sq}^4 \text{Sq}^4 w_7)^2[V]$, avec $\text{Sq}^2 \text{Sq}^4 \text{Sq}^4 w_7 \in H^{17}(V ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Ceci démontre
 le lemme.

Pour achever la démonstration de la proposition 11.1, remarquons que si K_1 est un invariant de Kervaire en dimension 34, K_2 , défini par $K_2(V) = K_1(V) + w_7^2 w_8 w_{12}[V]$, est également un invariant de Kervaire. En effet, les propriétés (i), (ii) et (iv) de 8.1 sont évidentes, alors que (iii) résulte du lemme que l'on vient de prouver.

Par ailleurs, nous avons prouvé dans 10.3, l'existence d'une Spin-variété close V de dimension 34, telle que $w_7^2 w_8 w_{12}[V] \neq 0$, donc $K_1(V) \neq K_2(V)$. Ceci démontre la proposition.

11.2. Considérons maintenant les dimensions supérieures ou égales à 34.

PROPOSITION. Soient K_1 et K_2 deux invariants de Kervaire en dimension $8n+2$ ($n \geq 4$). Alors, il existe une classe $\beta \in H^{8n+2}(B0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ appartenant à l'idéal de $H^*(B0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ engendré par les classes w_{2j+1} , où $j \geq 3$ n'est pas une puissance de 2, telle que $K_1(V) = K_2(V) + \beta[V]$ pour toute Spin-variété close V de dimension $8n+2$.

Démonstration. Soit $I = \oplus I^m$ l'idéal de $H^*(B0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ engendré par les classes w_{2j+1} , où $j \geq 0$ est arbitraire. Chaque élément $x \in I^{8n+2}$ détermine un homomorphisme $[V] \rightarrow x[V]$ de Ω_{8n+2}^{Spin} dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a donc un homomorphisme $\varphi : I^{8n+2} \rightarrow \text{Hom}(\Omega_{8n+2}^{Spin}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Soit $A \subset \Omega_{8n+2}^{Spin}$ l'annulateur de $\varphi(I^{8n+2})$. Posons $f = K_1 - K_2$. Le théorème 9.6 implique que f s'annule sur A , donc définit un homomorphisme $\hat{f} : \Omega_{8n+2}^{Spin}/A \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De son côté, φ définit un homomorphisme $\bar{\varphi} : I^{8n+2} \rightarrow \text{Hom}(\Omega_{8n+2}^{Spin}/A, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui est bijectif, car Ω_{8n+2}^{Spin} est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il existe donc une classe $\beta_0 \in I^{8n+2}$ telle que $\bar{\varphi}(\beta_0) = \hat{f}$, donc $f(V) = \beta_0[V]$ pour toute Spin-variété close V de dimension $8n+2$. L'existence de β découle maintenant du lemme suivant :

LEMME. L'image de w_{2r+1} ($r \geq 0$) par l'homomorphisme canonique $H^*(B0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^*(B\text{Spin}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est décomposable.

Démonstration : L'affirmation est vraie pour $r = 0$, puisque $\psi(w_2) = 0$. Supposons déjà prouvé que $\psi(w_{2^r+1})$ est décomposable dans $H^*(B\text{Spin}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$:

$$\psi(w_{2^r+1}) = \sum a_i b_i, \text{ avec } \text{deg} a_i, \text{deg} b_i > 0.$$

Alors $\text{Sq}^{2^r} \psi(w_{2^r+1}) = \sum \text{Sq}^{2^r-j}(a_i) \text{Sq}^j(b_i)$ est encore décomposable. Or, d'après

$$\text{la formule de Wu (cf. 10.2), } \text{Sq}^{2^r} \psi(w_{2^r+1}) = \psi(\text{Sq}^{2^r} w_{2^r+1}) = \psi(w_{2^r+1} + u) \text{ où}$$

$u \in H^*(B0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un élément décomposable. Le lemme en découle.

11.3. Nous allons déduire maintenant de la proposition 11.2 l'invariance homotopique des invariants de Kervaire. Pour donner à cette notion un sens précis, remarquons d'abord que la notion de Spin-structure est une notion homotopique. En effet, soit BSG_m l'espace classifiant des fibrés sphériques de fibre S^{m-1} , et soit $BGSpin_m \rightarrow BSG_m$ la fibration de fibre $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$ induite par l'application $w_2 : BSG_m \rightarrow K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$.

Si X est un CW-complexe et $f : X \rightarrow BSG_m$ une application, f se relève en une application $F : X \rightarrow BGSpin_m$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & BGSpin_m \\ & \nearrow F & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & BSG_m \end{array}$$

si et seulement si $f^* w_2 = 0$ dans $H^2(X ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si cette condition est satisfaite, il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie verticale de tels relèvements et $H^1(X ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

En particulier, il existe une unique classe d'applications $BSpin_m \rightarrow BGSpin_m$ qui rend commutatif, à homotopie près, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} BSpin_m & \longrightarrow & BGSpin_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ BS0_m & \longrightarrow & BSG_m \end{array}$$

où l'application $BS0_m \rightarrow BSG_m$ classifie le fibré en sphères associé au fibré canonique sur $BS0_m$.

Soit maintenant V une variété orientée de dimension n et soit $g : V \rightarrow BS0_m$ une application classifiant le fibré normal ξ de V dans une sphère S^{n+m} (m étant suffisamment grand). De ce qui précède, il résulte que l'application composée $f : V \xrightarrow{g} BS0_m \rightarrow BSG_m$ se relève en une application $F : V \rightarrow BGSpin_m$ si et seulement si le fibré ξ admet une Spin-structure. De plus, dans ce cas, il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie

verticale de tels relèvements et l'ensemble des classes d'équivalence des Spin-structures dans ξ .

Soient maintenant V_1 et V_2 deux variétés orientées closes et $h : V_1 \rightarrow V_2$ une équivalence d'homotopie orientée. On note ξ_1 et ξ_2 les fibrés normaux de V_1 et V_2 dans une sphère S^{n+m} (on peut prendre le même m pour les deux variétés). Soit enfin α_i ($i = 1, 2$) l'élément de $\pi_{n+m}(T\xi_i)$ représenté par la projection $S^{n+m} \xrightarrow{c_i} T\xi_i$. Spivak a démontré, dans un cadre plus général, qu'il existe une équivalence d'homotopie $b : S(\xi_1) \rightarrow S(h^*\xi_2)$ des fibrés en sphères associés à ξ_1 et $h^*\xi_2$, unique à homotopie près, telle que, pour l'application induite $T\xi_1 \xrightarrow{Tb} T(h^*\xi_2) \rightarrow T\xi_2$, on ait : $(Tb)_* \alpha_1 = \alpha_2$ (cf. [12], p. 28).

Si $f_2 : V_2 \rightarrow BSG_m$ classe le fibré $S(\xi_2)$, $f_1 = f_2 \circ h$ classe le fibré ξ_1 . Soit $F_2 : V_2 \rightarrow BSpin_m$ un relèvement de l'application $f_2 : V_2 \rightarrow BSG_m$. L'application F_2 détermine une Spin-structure sur la variété V_2 . Alors $F_1 = F_2 \circ h : V_1 \rightarrow BSpin_m$ est un relèvement de f_1 qui définit une Spin-structure sur V_1 . Nous dirons que c'est la Spin-structure induite par h et la Spin-structure de V_2 .

DÉFINITION. Nous dirons qu'une équivalence d'homotopie $h : V_1 \rightarrow V_2$ entre deux Spin-variétés closes est une Spin-équivalence, si h est orientée et la Spin-structure induite sur V_1 par h et la Spin-structure de V_2 est équivalente à la Spin-structure de V_1 .

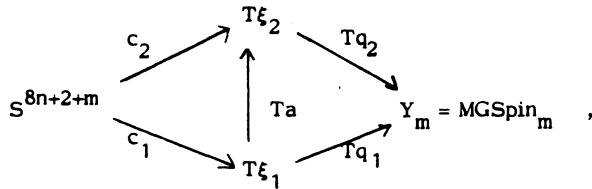
PROPOSITION. Supposons qu'il existe une Spin-équivalence d'homotopie entre deux Spin-variétés closes V_1 et V_2 de dimension $8n+2$, $n \geq 0$. Alors, pour tout invariant de Kervaire K , on a $K(V_1) = K(V_2)$.

Démonstration : Les propositions 11.1 et 11.2 et l'invariance homotopique des nombres de Stiefel-Whitney impliquent que, si la proposition est vraie pour un invariant de Kervaire, elle est vraie pour tous les invariants de Kervaire.

Notre tâche consistera donc à trouver un invariant de Kervaire qui satisfasse à la condition $K(V_1) = K(V_2)$.

Soit $EGSpin_m \xrightarrow{\pi} BGSpin_m$ le fibré γ_m en sphères induit sur $BGSpin_m$ par la projection $BGSpin_m \rightarrow BSG_m$. On note $MGSpin_m = Y_m$ l'espace de Thom de ce fibré, c'est-à-dire le cône de l'application π . Comme d'habitude, les Y_m s'organisent en un spectre multiplicatif $\underline{Y} = MGSpin$ et on a une \underline{Y} -orientation $\underline{MSpin} \rightarrow \underline{Y}$ induite par les applications $BSpin_m \rightarrow BGSpin_m$.

La condition $\chi(Sq^{4n+1})_u$ pour le spectre \underline{Y} (cf. 8.2) est vérifiée de la même manière que pour \underline{MSpin} puisque $w_1 = w_2 = 0$ dans la cohomologie de $BGSpin_m$ (cf. 8.3). Donc, il existe un homomorphisme $\ell : \check{Y}_{8n+2}(K_{4n+1}) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ tel que $\ell(\lambda) = 2$. Il lui correspond, par la méthode de Brown, un invariant de Kervaire $K = \sigma_\ell$. Nous allons voir que $K(V_1) = K(V_2)$. L'existence d'une Spin-équivalence d'homotopie $h : V_1 \rightarrow V_2$ implique l'existence d'un diagramme commutatif (à homotopie près) :



où Ta correspond au morphisme $\xi_1 \xrightarrow{b} h^* \xi_2 \rightarrow \xi_2$ au-dessus de h et où Tq_i correspond au morphisme $q_i : S(\xi_i) \rightarrow \gamma_m$ recouvrant l'application $F_i : V_i \rightarrow BGSpin_m$. Il en résulte un diagramme commutatif D (page suivante) qui prouve que les formes quadratiques correspondant à ℓ dans $H^{4n+1}(V_1; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ et $H^{4n+1}(V_2; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ sont isomorphes, ce qui prouve $K(V_1) = K(V_2)$.

COROLLAIRE. Soit V_1 une Spin-variété close de dimension $8n+2$ telle que $H^1(V_1; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$. Si V_2 est une variété close du même type d'homotopie, V_2

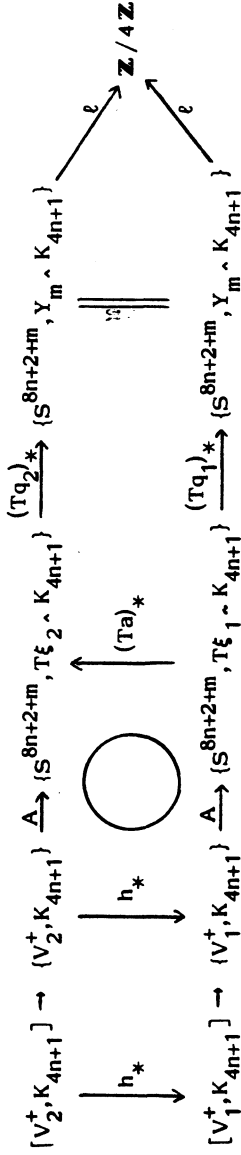


DIAGRAMME D

La commutativité du carré désigné par un cercle découle de la définition de A (cf., par exemple, [48], chapitre III) et du triangle de gauche du diagramme précédent.

possède une unique classe de Spin-structures et $K(V_1) = K(V_2)$ pour tout invariant de Kervaire K .

Démonstration : Comme w_2 est un invariant homotopique, $w_2(V_2) = 0$. En plus, $H^1(V_2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Donc V_2 possède une Spin-structure unique à équivalence près. De plus, toute équivalence d'homotopie $h : V_1 \rightarrow V_2$ est une Spin-équivalence d'homotopie. Le corollaire découle maintenant de la proposition.

§ 12 - CALCUL DE L'INVARIANT DE KERVAIRE DE CERTAINES
VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Le théorème 9.6 permet de calculer les invariants de Kervaire pour des intersections transverses d'hypersurfaces non-singulières de $P_N(\mathbb{C})$. On obtient ainsi une généralisation et une nouvelle démonstration d'un résultat de Morita [37] et de Wood [52] (cf. également [13]).

12. 1. Soit $\mathbb{Z}[[x, y]]$ l'anneau des séries formelles sur \mathbb{Z} de deux variables x et y . On considère dans $\mathbb{Z}[[x, y]]$ la série formelle $f(x, y) = (x + y)/(1 + xy) = (x + y)(1 - xy + x^2y^2 - \dots)$. On vérifie immédiatement que l'on a :

- (i) $f(x, y) = f(y, x)$
- (ii) $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$
- (iii) $f(0, x) = f(x, 0) = x$.

Autrement dit, f est un groupe formel sur \mathbb{Z} (cf. [26]). On a $f(x, -x) = 0$, donc $-x$ est l'élément inverse de x . On notera $[x]_n$ la puissance n -ième de x dans f c'est-à-dire l'unique série $[x]_n \in \mathbb{Z}[[x]]$ telle que

$$[x]_{-1} = -x, \quad [x] = x, \quad [x]_{n+m} = f([x]_n, [x]_m).$$

Ici $m, n \in \mathbb{Z}$.

12. 2. Soient $F_1, \dots, F_s \subset P_{n+s}(\mathbb{C})$ s hypersurfaces non-singulières en position générale et soit $V = F_1 \cap \dots \cap F_s$. La variété V est de dimension complexe n . Si $g(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$, on notera $S_n(g(x))$ la somme de tous les coefficients des termes x^i de $g(x)$ où $i \leq n$.

PROPOSITION. Soit n un nombre pair. Alors

$$\sigma(V) = S_n \left(\prod_{i=1}^s \frac{[x]_{d_i}}{x} \right), \quad \text{où } d_i \text{ est le degré de } F_i.$$

Démonstration : Remarquons d'abord que $[x]_d = dx + o(x)$, donc $\frac{[x]_d}{x}$ est bien définie. Soit η le fibré canonique sur $P_{n+s}(\mathbb{C})$ et soit $u \in H^2(P_{n+s}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ le générateur canonique. On a : $c_1(\eta) = u$.

Le fibré normal de F_i dans $P_{n+s}(\mathbb{C})$ est isomorphe au fibré $\eta^{d_i}|_{F_i}$, où η^{d_i} désigne le produit tensoriel de d_i exemplaires de η . Donc le fibré normal ζ de V dans $P_{n+s}(\mathbb{C})$ est isomorphe au fibré $i^*(\eta^{d_1} \otimes \dots \otimes \eta^{d_s})$, $i : V \rightarrow P_{n+s}(\mathbb{C})$ étant l'injection canonique. Donc, on a :

$$i^*T(P_{n+s}(\mathbb{C})) = T(V) \otimes i^*(\eta^{d_1} \otimes \dots \otimes \eta^{d_s}) .$$

Si $L(\xi)$ désigne la classe totale de Hirzebruch du fibré ξ , on a :

$$L(V) = i^* \frac{L(T(P_{n+s}(\mathbb{C})))}{\prod_{i=1}^s L(\eta^{d_i})} = \frac{1}{d} i^* \frac{(\prod_{i=1}^s \text{th}(d_i u)) u^{n+1}}{(thu)^{n+s+1}}$$

où l'on a posé $d = d_1 \dots d_s$. La variété V représente dans $H_n(P_{n+s}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ la classe duale de du^s . Donc, la formule $\langle i^*y, [V] \rangle = \langle y, i_*[V] \rangle = \langle y, [P_{n+s}(\mathbb{C})] \cap du^s \rangle = \langle d \cdot u^s \cdot y, [P_{n+s}(\mathbb{C})] \rangle$ montre que

$$\sigma(V) = \langle \prod_{i=1}^s \text{th}(d_i u) \left(\frac{u}{thu}\right)^{n+s+1}, [P_{n+s}(\mathbb{C})] \rangle .$$

Soit $\gamma \subset \mathbb{C}^*$ un petit lacet fermé entourant l'origine et parcouru dans le sens positif. Alors :

$$\sigma(V) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\prod_{i=1}^s \text{th}(d_i u)}{(thu)^{n+s+1}} du ,$$

u étant considérée comme variable complexe.

Remarquons maintenant que $[-x]_d = -[x]_d$, donc $\frac{[x]_d}{x}$ est une série paire. Notons a_{2j} les coefficients de $\prod_{i=1}^s \frac{[x]_{d_i}}{x}$:

$$\prod_{i=1}^s \frac{[x]_{d_i}}{x} = \sum_{j \geq 0} a_{2j} x^{2j} .$$

Comme $\text{th}(a+b) = f(\text{th}a, \text{th}b)$, $\text{th}(du) = [\text{th}u]_d$, la substitution de $x = \text{th}u$ dans $[x]_d$ étant correcte puisque $\text{th}0 = 0$. Il résulte que :

$$\sigma(V) = \sum_{j \geq 0} a_{2j} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{du}{(\text{th}u)^{n-2j+1}} \right) = S_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{[x]_{d_i}}{x} \right),$$

puisque, en posant $t = \text{th}u$, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{du}{(\text{th}u)^{n-2j+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dt}{t^{n-2j+1}(1-t^2)} = \begin{cases} 1, & \text{si } 2j \leq n \\ 0, & \text{si } 2j > n. \end{cases}$$

12.3. Nous avons besoin maintenant de mieux connaître les coefficients des séries $[x]_n$.

PROPOSITION. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors modulo 16 :

$$\frac{[x]_n}{x} \equiv \begin{cases} n(1 - x^2 + x^4 - \dots) = \frac{n}{1+x^2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ n - (n^2-1)(x^2 - x^4 + x^6 - \dots) = n - \frac{(n^2-1)x^2}{1+x^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $[x]_2 = 2x/1+x^2 \equiv 0 \pmod{2}$. Donc

$[x]_{16} = [[[[x]_2]_2]_2]_2 \equiv 0 \pmod{16}$. Il résulte que $[x]_{16m+r} = f([x]_{16m}, [x]_r) \equiv [x]_r \pmod{16}$. Enfin, comme $[x]_{-r} = -[x]_r$, il suffit de vérifier la proposition pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

$n = 0, 1$. La proposition est évidente.

$n = 2$. $[x]_2 = 2x/1+x^2$, d'où $\frac{[x]_2}{x} = \frac{2}{1+x^2}$.

$n = 4$. $[x]_4 = [[x]_2]_2 \equiv 2([x]_2 - [x]_2^3 + [x]_2^5 - \dots)$ en vertu du cas $n = 2$.

Comme $[x]_2 \equiv 0 \pmod{2}$, $[x]_2^i \equiv 0 \pmod{8}$ pour $i \geq 3$. Donc, $[x]_4 \equiv 2[x]_2 \pmod{16}$.

$n = 3$. $[x]_3 = f(-x, [x]_4) \equiv (-x + [x]_4)(1 + x[x]_4) \equiv -x + [x]_4 - x^2[x]_4 \pmod{16}$.

Donc $\frac{[x]_3}{x} \equiv -1 + \frac{4}{1+x^2} - \frac{4x^2}{1+x^2} = \frac{3-5x^2}{1+x^2} = 3 - \frac{8x^2}{1+x^2}$.

$n = 8$. $[x]_8 = [[x]_4]_2 = 2[x]_4(1 - [x]_4^2 + \dots) \equiv 2[x]_4 \pmod{16}$, puisque $[x]_4 \equiv 0 \pmod{4}$.

$n = 5$. On procède comme pour $n = 3$, en utilisant $[x]_5 = f(x, [x]_4)$.

$n = 7$. On procède comme pour $n = 3$, en utilisant le cas $n = 8$ et $[x]_7 = f(-x, [x]_8)$.

$n = 6$. En vertu du cas $n = 3$, $[x]_6 = [[x]_2]_3 \equiv 3[x]_2 - \frac{8[x]_2^2}{1+[x]_2^2} \equiv 3[x]_2 \pmod{16}$, puisque $[x]_2 \equiv 0 \pmod{2}$.

Remarque : Pour n impair, $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$. Donc $\frac{[x]_n}{x} \equiv n \pmod{8}$.

12. 4. Revenons à la situation de 12.2 : on suppose que $V = F_1 \cap \dots \cap F_s$ où F_i est une hypersurface de $P_{m+s}(\mathbb{C})$ de degré d_i .

LEMME. Supposons que $m > 1$. Alors $H^1(V ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et

$i^* : H^2(P_{m+s}(\mathbb{C}) ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(V ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un homomorphisme injectif

($i : V \rightarrow P_{m+s}(\mathbb{C})$ est l'injection canonique).

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes. Soit $M \subset P_{m+s}(\mathbb{C})$ une sous-variété lisse projective de $P_{m+s}(\mathbb{C})$ (qui peut coïncider avec $P_{m+s}(\mathbb{C})$). Supposons que $F \subset P_{m+s}(\mathbb{C})$ est une hypersurface de $P_{m+s}(\mathbb{C})$ définie par un polynôme homogène $F(z_0, \dots, z_{m+s})$ de degré d . On considère le morphisme de Veronese $v_d : P_{m+s}(\mathbb{C}) \rightarrow P_N(\mathbb{C})$ (cf. [47], ch. I, § 5), où N est le nombre de monômes en z_0, \dots, z_{m+s} de degré d . Par définition, v_d associe au point $[z_0 : \dots : z_{m+s}]$ de $P_{m+s}(\mathbb{C})$ le point de $P_N(\mathbb{C})$ dont les coordonnées homogènes sont précisément tous les monômes en z_0, \dots, z_{m+s} . On voit que $F \cap M$ est isomorphe à l'intersection de $v_d(M)$ avec l'hyperplan de $P_N(\mathbb{C})$

correspondant au polynôme $F(z_0, \dots, z_{m+s})$. Donc, pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que si M est une sous-variété algébrique non-singulière de $P_q(\mathbb{C})$, de dimension complexe $m > 2$, telle que $H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, et si H est un hyperplan de $P_q(\mathbb{C})$, alors $H^1(H \cap M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et l'homomorphisme de restriction $H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(H \cap M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est injectif. Or, d'après le théorème de Lefschetz (cf. [33], p. 41), on a $\pi_r(M, H \cap M) = 0$ pour $r < m$, donc $r \leq 2$. Il résulte que $H^r(M, H \cap M) = 0$ pour $r \leq 2$, d'où le résultat. \square

PROPOSITION. Soit, comme ci-dessus, $V = F_1 \cap \dots \cap F_s$ où F_i est de degré d_i . On suppose que $m = 4n + 1$ et $n > 0$. Alors :

- (i) Pour que V admette une Spin-structure, il faut et il suffit que $s \equiv d_1 + \dots + d_s \pmod{2}$;
- (ii) Si cette condition est vérifiée, la Spin-structure de V est unique à équivalence près.

Démonstration. Nous avons vu dans 12.2 que $i^*T(P_{m+s}(\mathbb{C})) = T(V) \oplus i^*(\eta^{d_1} \oplus \dots \oplus \eta^{d_s})$. Donc, $w_2(V)$ coïncide avec la réduction modulo 2 de la classe $i^*((m+s+1-d_1-d_2-\dots-d_s)u)$. Comme $m+1 \equiv 0 \pmod{2}$, la proposition découle immédiatement du lemme. \square

12.5. Soit, comme ci-dessus, V une intersection transverse de s hypersurfaces non-singulières F_1, \dots, F_s de $P_{m+s}(\mathbb{C})$, $m = 4n + 1$, $n > 0$. On suppose que V est une Spin-variété. Comme V admet une structure complexe, V satisfait à la condition C de 9.3. Le théorème 9.6 montre alors que $K(V) = k(V)$ pour tout invariant de Kervaire K .

PROPOSITION. Soit K un invariant de Kervaire et $d = d_1 \dots d_s$ le degré de V . Alors :

- (i) si d est impair, $K(V) = \frac{d^2 - 1}{8} \pmod{2}$;
- (ii) Si d est pair, alors $d \equiv 0 \pmod{4}$ et $K(V) = \frac{d(n+1)}{4} \pmod{2}$.

Démonstration. : Considérons d'abord le cas où d est impair. Comme $d_1 \dots d_s = d$, chaque d_i est impair. Posons $M = F_2 \cap \dots \cap F_s$ (si $s = 1$, on prend $M = P_{m+1}(\mathbb{C})$). La variété M est une variété close orientée de dimension $2(m+1) = 8n+4$. Comme on a vu ci-dessus, F_1 est duale dans $P_{m+s}(\mathbb{C})$ à la classe $d_1 u$. Donc V est duale dans M à la restriction de la classe $d_1 u$ sur M . Or, $w_2(M)$ est la réduction modulo 2 de la restriction sur M de la classe $(m+s+1-d_2-d_3-\dots-d_s)u$. Il résulte que M possède une Spin^C -structure pour laquelle V est une sous-variété caractéristique (puisque $m+s+1-d_2-d_3-\dots-d_s \equiv d_1 \pmod{2}$). Comme V a une seule classe de Spin-structures, celle-ci est induite par la Spin^C -structure de M (au sens de 2.5). On peut alors appliquer à M et V la proposition 6.2 : $k(V) = \frac{1}{8} (\sigma(M) - \sigma(V \cdot V)) \pmod{2}$.

Remarquons maintenant que l'on peut calculer $\sigma(V \cdot V)$ de la manière suivante : soit F_0 une hypersurface non-singulière de $P_{m+s}(\mathbb{C})$ de degré $d_0 = d_1$ et en position générale avec V . Alors $\sigma(F_0 \cap V) = \sigma(F_0 \cap \dots \cap F_s) = \sigma(V \cdot V)$. En effet, $\sigma(F_0 \cap \dots \cap F_s)$ ne dépend que des degrés d_1, \dots, d_s (en vertu de la proposition 12.2). On aurait donc pu prendre pour $V \cdot V$ la variété $V \cap V'$ où V' est obtenue de $F_1 \cap \dots \cap F_s$ par une petite translation linéaire de F_1 . Ainsi

$$k(V) = \frac{1}{8} (\sigma(F_2 \cap \dots \cap F_s) - \sigma(F_0 \cap F_1 \cap \dots \cap F_s)) \pmod{2}.$$

D'après la proposition 12.2 :

$$k(V) = \frac{1}{8} \left(S_{m+1} \left(\prod_{i=2}^s \frac{[x]_{d_i}}{x} \right) - S_{m-1} \left(\prod_{i=0}^s \frac{[x]_{d_i}}{x} \right) \right) \pmod{2}$$

ou encore :

$$k(V) = \frac{1}{8} \left(S_{m+s} \left(\prod_{i=2}^s [x]_{d_i} - \prod_{i=0}^s [x]_{d_i} \right) \right) \pmod{2}.$$

D'après la proposition 12.3, si d est impair :

$$[x]_d \equiv dx - (d^2 - 1)g(x) \quad \text{où } g(x) = x^3 - x^5 + x^7 - \dots \text{ (congruence modulo 16).}$$

Donc :

$$\prod_{i=2}^s [x]_{d_i} \equiv \prod_{i=2}^s (d_i x - (d_i^2 - 1)g(x)) \equiv d_2 \dots d_s x^{s-1} - \left[\sum_{i=2}^s d_i \dots \right] x^{s-2}$$

car $d_1^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$.

De même :

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^s [x]_{d_i} &\equiv (d_2 \dots d_s x^{s-1} - \left[\sum_{i=2}^s (d_i^2 - 1) \right] g(x) x^{s-2}) d_1^2 x^2 \equiv \\ &\equiv d_1^2 d_2 \dots d_s x^{s+1} - \left(\sum_{i=2}^s (d_i^2 - 1) x^s g(x) \right) . \end{aligned}$$

On a :

$$S_{m+s}(x^{s-1}) = S_{m+s}(x^{s+1}) = 1 ,$$

$$S_{m+s}(g(x)x^{s-2}) = S_{m+2}(g(x)) = 1 , \quad \text{car } m \equiv 1 \pmod 4 ,$$

$$S_{m+s}(g(x)x^s) = S_m(g(x)) = 0 .$$

Donc :

$$k(V) = \frac{1}{8} \left((1-d_1^2) d_2 \dots d_s - \sum_{i=2}^s (d_i^2 - 1) \right) \pmod 2 = \sum_{i=1}^s \left(\frac{d_i^2 - 1}{8} \right) \pmod 2 .$$

Il reste à remarquer que l'application $d \mapsto \frac{d^2-1}{8} \pmod 2$ de $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un homomorphisme. Ceci prouve (i).

Si d est pair, remarquons d'abord que la condition $s \equiv \sum_{i=1}^s d_i$ montre qu'au moins deux des d_i sont pairs. Donc d est divisible par 4 et $s \geq 2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que d_1 et d_2 sont pairs. On construit alors, comme ci-dessus, $M = F_2 \cap \dots \cap F_s$ et on vérifie que $\sigma(V \cdot V) = \sigma(F_0 \cap \dots \cap F_s)$ où F_0 est une hypersurface non-singulière de degré d_1 en position générale avec F_1, F_2, \dots, F_s .

Comme d_1 est pair, $s \equiv \sum_{i=1}^s d_i \equiv \sum_{i=2}^s d_i \pmod 2$. Donc, la variété M est une Spin-variété (la Spin-structure est unique à équivalence près en vertu de la proposition 12.4). Donc $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$ (cf. théorème 5.2). Donc :

$$k(V) = \frac{\sigma(V \cdot V)}{8} \pmod 2 = \frac{1}{8} S_{m+s} \left([x]_{d_1}^2 [x]_{d_2} \dots [x]_{d_s} \right) \pmod 2 .$$

Deux cas se présentent :

1er cas : Il existe un d_r pair parmi d_3, \dots, d_s . Alors la proposition 12.3 implique que $k(V) = 0$. D'autre part, $d \equiv 0 \pmod{8}$, donc $\frac{d(n+1)}{4} \pmod{2} = 0$, et la proposition est démontrée dans ce cas.

2e cas : Seuls d_1 et d_2 sont pairs. Alors $S_{m+s}([x]_{d_1}^2 [x]_{d_2} \dots [x]_{d_s}) \equiv d_1^2 d_2 \dots d_s \cdot$

$S_{m+s}(x^{s-2} g_0(x)^3) \equiv d_1^2 d_2 \dots d_s S_{m+2}(g_0(x)^3) \pmod{16}$, où $g_0(x) = x - x^3 + x^5 - \dots$.

Comme $d_1^2 d_2 \dots d_s$ est divisible par 8, il faut calculer $S_{m+2}(g_0(x)^3) \pmod{2}$.

Or :

$$g_0(x)^3 = x^3(1+x^2)^{-3} = x^3 \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(i+1)(i+2)}{2} x^{2i} \right) \equiv x^3 \left(\sum_{r=0}^{\infty} (x^{8r} + x^{8r+2}) \right) \pmod{2}.$$

Donc :

$$S_{m+2}(g_0(x)^3) \equiv S_{m-1} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (x^{8r} + x^{8r+2}) \right) = S_{4n} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (x^{8r} + x^{8r+2}) \right) \equiv (n+1) \pmod{2}.$$

Ainsi :

$$k(V) = \frac{d_1^2 d_2 d_3 \dots d_s}{8} (n+1) \pmod{2}.$$

Si $d_1 \equiv d_2 \equiv 2 \pmod{4}$, $k(V) \equiv (n+1) \pmod{2} \equiv \frac{d(n+1)}{4} \pmod{2}$.

Si $d_1 \equiv 0 \pmod{4}$, $k(V) = 0 = \frac{d(n+1)}{4} \pmod{2}$.

Enfin, si $d_1 \equiv 2 \pmod{4}$, $d_2 \equiv 0 \pmod{4}$, $k(V) = 0 = \frac{d(n+1)}{4} \pmod{2}$.

Donc, dans tous les cas, $k(V) = \frac{d(n+1)}{4} \pmod{2}$.

§ 13 - INVARIANT DE ROKHLIN D'UNE SPIN-VARIÉTÉ CLOSE

DE DIMENSION $8n + 3$

Le théorème 5.2 permet d'associer à chaque Spin-variété close M de dimension $8n + 3$ telle que $w_\omega[M] = 0$ pour tout $\omega = (i_1, \dots, i_s)$, un élément $\rho(M) \in \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$. On va voir, dans ce paragraphe, comment calculer $\rho(M)$ à partir d'une Spin^C-variété compacte que borde M .

13. 1. Soit M une Spin-variété close de dimension $8n + 3$, $n \geq 0$. Le théorème 5.1 montre que, pour que M représente zéro dans $\Omega_{8n+3}^{\text{Spin}}$, il faut et il suffit que tous les nombres de Stiefel-Whitney de M soient nuls.

Supposons cette condition vérifiée. Soit W^{8n+4} une Spin-variété compacte telle que $bW = M$. Alors, $\sigma(W) \bmod 16$ ne dépend que de M . En effet, si W' est une autre Spin-variété compacte telle que $bW' = M$, $W \cup -W'$ est une Spin-variété close de dimension $8n + 4$, donc, d'après le théorème 5.2, $\sigma(W \cup -W') \equiv 0 \bmod 16$, d'où $\sigma(W) \equiv \sigma(W') \bmod 16$.

DÉFINITION. $\rho(M) = \sigma(W) \bmod 16 \in \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$. Le nombre $\rho(M)$ est directement lié à l'invariant k étudié dans les paragraphes précédents.

PROPOSITION. Soit V une Spin-variété close de dimension $8n + 2$. Alors $\rho(V \times \bar{S}^1) = 8k(V)$, où 8 est considéré comme étant l'unique homomorphisme de groupes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$ qui envoie 1 sur 8 .

Démonstration. Soit W une Spin-variété close telle que $bW = -V \times \bar{S}^1$. Par définition de $k(V)$, $k(V) = \frac{\sigma(W)}{8} \bmod 2$. Comme, par ailleurs, on a $\rho(V) = -\sigma(W) \bmod 16$, la proposition résulte de ce que $8 \equiv -8 \bmod 16$. \square

13.2. Il est parfois difficile de trouver une variété W telle que $bW = M$ et qui admet une Spin-structure compatible avec la Spin-structure de M .

Soit W une Spin^C-variété compacte. Supposons que l'on ait choisi une trivialisation de $\det \tau W$ au-dessus du bord $bW = M$. Alors M admet une Spin-structure correspondant à cette trivialisation (cf. 1.3) compatible avec la Spin^C-structure. Supposons que le fibré $\det \tau W|_{bW}$ est trivialisé par la section non-nulle s . Le lemme 1 de 2.1 permet de trouver une section lisse S de $\det \tau W$ transverse à la section nulle, qui prolonge s . Alors $V = S^{-1}(0)$ est une sous-variété close de W et l'on a une identification canonique $J : \zeta \rightarrow j^* \det \tau W$ où ζ est le fibré normal de V dans W et $j : V \rightarrow W$ l'injection (cf. 2.1). Nous dirons, comme dans 2.1, que V est une sous-variété caractéristique de W . On peut alors munir V d'une Spin-structure, exactement comme on l'a fait dans le § 2.

Soit $V \cdot V$ l'autointersection de V dans W . C'est une variété orientée close de dimension $8n$.

PROPOSITION. $\rho(M) = \sigma(W) - \sigma(V \cdot V) + 8k(V)$.

Démonstration. Soit W_0 une Spin-variété compacte telle que $bW_0 = M$. W_0 peut être considérée comme Spin^C-variété par affaiblissement de structure. Le fibré $\det \tau W_0$ est trivial. On peut donc prolonger la section s du fibré $\det \tau W_0|_{bW_0}$ en une section non-nulle S_0 au-dessus de W_0 . Alors $-W_0 \cup W$ est une Spin^C-variété et, en recollant (et en lissant) les sections S_0 et S , on obtient une section S_1 de $\det \tau (-W_0 \cup W)$ transverse à la section nulle. (V, J) est alors une sous-variété caractéristique de $(-W_0 \cup W, \xi)$, $\xi = \det \tau (-W_0 \cup W)$, et la Spin-structure sur V , construite à partir de $-W_0 \cup W$, est équivalente à celle que l'on a construit ci-dessus.

En appliquant la proposition 6.2 à $-W_0 \cup W$, on a : $-\sigma(W_0) + \sigma(W) - \sigma(V \cdot V) \text{ mod } 16 = 8k(V)$. Or, $\rho(M) = \sigma(W_0) \text{ mod } 16$. La proposition en découle. \square

13.3. Nous allons appliquer la proposition 13.2 au calcul de ρ pour certains espaces lenticulaires. Soit $n \geq 0$ et identifions la sphère S^{8n+3} avec le sous-ensemble $\Sigma |z_i|^2 = 1$ de \mathbb{C}^{4n+2} .

Si q est un nombre naturel, on définit une action de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sur S^{8n+3} par $\lambda(z_0, \dots, z_{4n+1}) = (e^{2\pi i/q} z_0, \dots, e^{2\pi i/q} z_{4n+1})$, où λ est le générateur de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Soit $L(q)$ l'espace quotient de cette action. On note $\pi : S^{8n+3} \rightarrow L(q)$ la projection canonique. L'application $(z_0, \dots, z_{4n+1}) \rightarrow [z_0 : \dots : z_{4n+1}]$ de $\mathbb{C}^{4n+2} - 0$ sur $P_{4n+1}(\mathbb{C})$ détermine deux espaces fibrés en cercles $p_S : S^{8n+3} \rightarrow P_{4n+1}(\mathbb{C})$ et $p_\ell : L(q) \rightarrow P_{4n+1}(\mathbb{C})$, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 S^{8n+3} & \xrightarrow{\pi} & L(q) \\
 p_S \searrow & & \swarrow p_\ell \\
 & & P_{4n+1}(\mathbb{C})
 \end{array}$$

On sait que le fibré linéaire complexe associé à p_S est le conjugué du fibré canonique η . On le note $\bar{\eta}$. Comme π est de degré q sur chaque fibre, le fibré linéaire complexe associé à p_ℓ s'identifie avec $\bar{\eta}^q$. Donc $L(q) = S(\bar{\eta}^q) = S(D(\bar{\eta}^q))$, où $S(\bar{\eta}^q)$ et $D(\bar{\eta}^q)$ sont respectivement les espaces des fibrés en cercles et en disques associés à $\bar{\eta}^q$. Il en résulte que $\tau(L(q)) = p_\ell^* \tau(P_{4n+1}(\mathbb{C})) \otimes p_\ell^*(\bar{\eta}^q)$. Or $\tau(P_{4n+1}(\mathbb{C}))$ est isomorphe à $(2n+1)(\eta \otimes \bar{\eta})$. Le fibré η étant orienté de dimension 2, admet une Spin^C -structure canonique telle que $\det \eta = \eta$ (cf. 1.2). Il en est de même de $\bar{\eta}$. Donc $\tau(P_{4n+1}(\mathbb{C}))$ admet une Spin^C -structure pour laquelle $\det \tau(P_{4n+1}(\mathbb{C})) = (\eta \otimes \bar{\eta})^{2n+1}$. Si on trivialise $\eta \otimes \bar{\eta}$ de la manière habituelle, $P_{4n+1}(\mathbb{C})$ devient une Spin -variété dont l'orientation est opposée à celle qui est induite par la structure complexe de $P_{4n+1}(\mathbb{C})$.

Donc $\tau(L(q))$ admet une Spin^C -structure pour laquelle $\det \tau(L(q)) = p_\ell^* \det \tau(P_{4n+1}(\mathbb{C})) \otimes p_\ell^*(\bar{\eta}^q)$ s'identifie à $p_\ell^*(\bar{\eta}^q)$.

Nous allons construire des Spin -structures sur $L(q)$.

Premièrement, pour tout q , $p_\ell^*(\bar{\eta}^q)$ peut être trivialisé par la section ω (cf. 2.6). Notons S_1 la Spin-structure de $L(q)$ qui lui correspond.

Ensuite, pour q pair, le fibré $\bar{\eta}^q$ admet une Spin-structure, puisque $c_1(\bar{\eta}^q) = -q \cdot c_1(\eta) \equiv 0 \pmod{2}$. Donc, le fibré tangent stable $\tau(D(\bar{\eta}^q))$ admet une Spin-structure. On notera S_0 la Spin-structure induite sur le bord $bD(\bar{\eta}^q) = L(q)$.

LEMME. (i) Pour q impair, $L(q)$ admet une unique classe de Spin-structures représentée par S_1 ;

(ii) Pour q pair, $L(q)$ admet deux classes distinctes de Spin-structures représentées par S_0 et S_1 .

Démonstration. Comme S^{8n+3} est le revêtement universel de $L(q)$, $\pi_1(L(q)) = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. $H_1(L(q) ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Donc :

$$H^1(L(q) ; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \begin{cases} 0, & \text{si } q \text{ est impair} \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \text{si } q \text{ est pair.} \end{cases}$$

Donc $L(q)$ a une classe de Spin-structures pour q impair et deux pour q pair. Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que, pour q pair, les structures S_1 et S_0 ne sont pas équivalentes.

Si la structure S_1 se prolongeait sur $D(\bar{\eta}^q)$, le fibré $p_\ell^*(\bar{\eta}^q)$ admettrait une Spin-structure correspondante (au-dessus de $D(\bar{\eta}^q)$). Il en résulterait que S_1 induit sur la fibre $S^1 \subset S(\bar{\eta}^q) = L(q)$ une Spin-structure qui se prolonge sur le disque D^2 (puisque $p_\ell^*(\bar{\eta}^q)|_{D^2}$ coïncide avec $\tau(D^2)$). Or, on sait (cf. 3.2) que S_1 induit la structure de \bar{S}^1 qui ne se prolonge pas sur le disque D^2 (puisque $[\bar{S}^1] \neq 0$ dans Ω_1^{Spin}). Cette contradiction prouve le lemme. \square

PROPOSITION. (i) Pour tout q et la Spin-structure S_1 , on a :
 $\rho(L(q)) = (q - 1) \pmod{16}$.

(ii) Pour q pair et la Spin-structure S_0 , on a : $\rho(L(q)) = -1$.

Démonstration.

(i) Nous allons appliquer la proposition 13.2 avec $M = L(q)$, $W = D(\bar{\eta}^q)$.

On a vu dans le § 2 que $V = P_{4n+1}(\mathbb{C}) \subset D(\bar{\eta}^q)$ est une sous-variété caractéristique de $D(\bar{\eta}^q)$, si $\rho_{\ell}^*(\bar{\eta}^q)$ est trivialisé par ω . Donc, comme $k(V) = 0$ (puisque $k(V) = K(V)$ et $H^{4n+1}(P_{4n+1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$), $\rho(L(q)) = \sigma(W) - \sigma(V \cdot V)$.

En utilisant l'isomorphisme de Thom $H^{4n}(P_{4n+1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^{4n+2}(D(\bar{\eta}^q), S(\bar{\eta}^q); \mathbb{Z})$, on voit que l'on peut identifier la forme de produit cohomologique sur $H^{4n+2}(D(\bar{\eta}^q), S(\bar{\eta}^q); \mathbb{Z})$ avec la forme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto -qxy$. Donc : $\sigma(D(\bar{\eta}^q)) = \sigma(W) = -1$.

La variété $V \cdot V \subset V$ est duale à la classe $e(\bar{\eta}^q) = -q \cdot u$ et son fibré normal est la restriction de $\bar{\eta}^q$. Donc, on voit, comme dans la proposition 12.2, que

$\sigma(V \cdot V) = S_{4n} \left(\frac{[x]_{-q}}{x} \right)$. En vertu de la proposition 12.3, si q est pair :

$$S_{4n} \left(\frac{[x]_{-q}}{x} \right) \equiv S_{4n} \left(-\frac{q}{1+x^2} \right) \equiv -q S_{4n}(1-x^2+x^4-\dots) \equiv -q \pmod{16}.$$

De même, pour q impair :

$$S_{4n} \left(\frac{[x]_{-q}}{x} \right) \equiv S_{4n}(-q - (q^2-1)(x^2-x^4+x^6-x^8+\dots)) \equiv -q \pmod{16}.$$

Donc $\rho(L(q)) \equiv -1 - (-q) \equiv (q-1) \pmod{16}$.

(ii) Soit q pair. Alors la structure S_0 se prolonge par définition sur $D(\bar{\eta}^q)$. Donc $\rho(S(\bar{\eta}^q)) = \rho(L(q)) = \sigma(D(\bar{\eta}^q)) \pmod{16} \equiv -1 \pmod{16}$. \square

§ 14 - VARIÉTÉS CLOSES DONT LA DEUXIÈME CLASSE DE STIEFEL-WHITNEY EST DUALE A UNE $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -SPHÈRE D'HOMOLOGIE OU A UNE π -VARIÉTÉ.

Les théorèmes 6.2 et 9.6 permettent d'obtenir des renseignements précis sur la signature d'une variété close orientée dont une $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -sphère d'homologie ou une π -variété plongée est duale à la deuxième classe de Stiefel-Whitney.

14. 1. Soit M une variété close orientée de dimension $8n+4$, V une sous-variété close de M duale à $w_2(M)$.

PROPOSITION. Si $n > 0$, et si V est une $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -sphère d'homologie, c'est-à-dire si $H^*(V; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = H^*(S^{8n+2}; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, alors $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$.

Démonstration. Comme $H^1(V; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$, V est orientable. Choisissons une orientation de V . Soit $x \in H^2(M; \mathbf{Z})$ la classe duale à la classe de V . La classe x réduite modulo 2 coïncide avec $w_2(M)$. Il existe une Spin^c -structure sur M telle que $e(\det \tau M) = x$ (cf. 1.2) et V est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) , $\xi = \det \tau M$ (cf. la proposition 6.3). La proposition 6.2 donne $\sigma(M) \equiv \sigma(V \cdot V) + 8k(V) \pmod{16}$. Or, comme $H^{4n+1}(V; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$, le théorème 9.6 implique $k(V) = K(V) = 0$, où K est un invariant de Kervaire quelconque.

Par ailleurs, $H^2(V; \mathbf{Z})$ est un groupe de torsion. En effet, la suite exacte

$$0 \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \text{Tor}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, H^3(V; \mathbf{Z})) \rightarrow 0$$

implique $H^2(V; \mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$, puisque $H^2(V; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = H^2(S^{8n+2}; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ ($n > 0$!).

D'autre part, $\sigma(V \cdot V) = \text{th} x \cdot L(V)[V]$, où $x \in H^2(V; \mathbf{Z})$ est la classe d'Euler du fibré normal de V dans M (formule de Hirzebruch). Comme x est d'ordre fini, cela donne $\sigma(V \cdot V) = 0$. Finalement, $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$. \square

Remarque : Pour $n = 0$, on ne peut pas démontrer $\sigma(V \cdot V) = 0$. Comme la seule $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -sphère d'homologie de dimension 2 est S^2 , on obtient le théorème de Kervaire-Milnor [29] cité dans l'introduction : $\sigma(M) \equiv S^2 \cdot S^2 \pmod{16}$.

14. 2. Rappelons qu'une variété close V est une π -variété si le complément d'un point $x_0 \in V$ est stablement parallélisable.

Soit M une variété close orientée de dimension $8n + 4$, V une sous-variété close orientée de M duale modulo 2 à $w_2(M)$. On notera $V \cdot \dots \cdot V$ ($4n + 2$ termes) l'autointersection itérée de V . Comme $V \cdot \dots \cdot V$ est de dimension 0, on peut la considérer comme étant un nombre entier.

PROPOSITION. Si V est une π -variété et $n > 0$, alors

$\sigma(M) \equiv a_{4n+2} \cdot (V \cdot \dots \cdot V) \pmod{16}$, où a_{4n+2} est le coefficient de x^{4n+2} dans la série $x \operatorname{th} x$.

Remarque : Comme tous les coefficients de $\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$ appartiennent au sous-anneau $\mathbf{Z}_{(2)} \subset \mathbf{Q}$ composé des fractions à dénominateur impair, il en est de même de $\operatorname{th} x$, donc de $x \operatorname{th} x$. La congruence ci-dessus doit être comprise comme égalité dans $\mathbf{Z}_{(2)}/16\mathbf{Z}_{(2)} = \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$.

Démonstration. Comme dans 14.1, on construit sur M une Spin^C -structure pour laquelle V est une sous-variété caractéristique.

Nous allons voir d'abord que $k(V) = 0$. Comme V est une π -variété, on peut choisir une trivialisations stable de $\tau(V - x_0)$. Soit D un petit disque plongé dans M , $x_0 \in \operatorname{int} D$. La trivialisations stable de $\tau(V - x_0)$ induit une trivialisations stable de $bD = S^{8n+1}$, donc détermine un élément de $\pi_{8n+1}(S^0)$ dans le noyau de l'homomorphisme $J : \pi_{8n+1}(S^0) \rightarrow \pi_{8n+1}^S$. Or, on sait que ce noyau est nul (cf. [1]). On peut donc prolonger la trivialisations stable de $\tau(V - \operatorname{int} D)$ en une trivialisations t_0 de τV . En particulier, la classe β de V dans $\Omega_{8n+2}^{S^0}$ est nulle.

La variété V est munie de deux Spin-structures : l'une (notons-la s_1) provenant de la Spin^c -structure de M , l'autre (s_0) provenant de la trivialisation t_0 . Remarquons maintenant que l'on peut trouver une trivialisation t_1 de τV qui induit s_1 . En effet, les Spin-structures s_0 et s_1 diffèrent par une application $g : V \rightarrow \mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$ (cf. 1.1). Or, il existe une application $f : \mathbb{R}P^\infty \rightarrow S^0$ qui induit un isomorphisme sur les groupes $H^1(\ ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On peut définir f , par exemple, en associant à toute droite ℓ dans \mathbb{R}^n la rotation composée de la réflexion dans l'hyperplan orthogonal à ℓ puis de la réflexion dans l'hyperplan $0 \times \mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$. L'application $fg : V \rightarrow S^0$ et la trivialisation t_0 donnent une trivialisation stable t_1 de τV et on voit tout de suite que la Spin-structure qui correspond à t_1 est équivalente à s_1 .

La nullité de $k(V)$ découle maintenant de ce que :

- a) Tous les nombres de Stiefel-Whitney de V sont nuls, et, en vertu du théorème 9.6, $k(V) = K(V)$ pour tout invariant de Kervaire K ;
- b) L'invariant de Kervaire K est nul pour toute variété V de dimension $8n+2$ ($n > 0$) dont la Spin-structure provient d'une trivialisation stable de τV .

Le point b) a été démontré dans [2] pour un invariant K particulier, mais tous les invariants de Kervaire coïncident pour de telles variétés en vertu du théorème 9.6.

Calculons maintenant $\sigma(V \cdot V)$. Soit $y \in H^2(M; \mathbb{Z})$ la classe d'Euler $e(\det \tau M)$ et soit $i : V \rightarrow M$ l'injection canonique. On a (formule de Hirzebruch) :
 $\sigma(V \cdot V) = \langle \text{th } i^* y \cdot L(V), [V] \rangle$. Or, $L(V) = 1$. Donc $\sigma(V \cdot V) = \langle \text{th } i^* y, [V] \rangle =$
 $= \langle \text{th } y, i_* [V] \rangle = \langle \text{th } y, [M] \cap y \rangle = (y \text{ th } y) [M] = a_{4n+2} y^{4n+2} [M] =$
 $= a_{4n+2} (V \cdot \dots \cdot V)$.

La proposition résulte maintenant de la proposition 6.2. \square

Pour permettre une utilisation explicite de cette proposition, nous avons calculé les coefficients $a_{4n+2} \pmod{16}$ (cf. Appendice III). En particulier, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE. Soit M une variété close orientée de dimension $8n+4$ ($n > 0$).

Supposons qu'il existe une π -variété close V plongée dans M duale à $w_2(M)$ modulo 2 .

Alors, si n comporte plus de 3 unités dans sa décomposition binaire,
 $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$.

Exemple : Soit $8n + 4 = 1812$, $n = 226$. La décomposition binaire de n est $\overline{11100010}$, donc, dans les hypothèses du corollaire, $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$.

§ 15. - UNE OPERATION COHOMOLOGIQUE FONCTIONNELLE

Nous construisons ici, dans un cadre assez général, une opération cohomologique fonctionnelle qui, pour les Spin- et Spin^C-cobordismes, donne une opération inverse à droite de l'opération ∂ de 2.5 .

Pour le langage des spectres, le lecteur peut consulter [48] et surtout [51], chap. I. Les spectres seront désignés par des lettres majuscules soulignées : \underline{X} , \underline{Y} , etc.

15.1. Soit \underline{X} un spectre arbitraire (non nécessairement multiplicatif). Les applications $\epsilon_n : S^1 \wedge X_n \rightarrow X_{n+1}$ qui définissent \underline{X} permettent de le considérer comme un module à gauche sur le spectre des sphères \underline{S} . En effet, on peut définir par récurrence des applications $f_{p,q} : S^p \wedge X_q \rightarrow X_{p+q}$ en posant :

$$\begin{cases} f_{1,n} = \epsilon_n \\ f_{p,q} = f_{p-1,q+1} \cdot S^{p-1} \epsilon_q \quad (p > 1), \end{cases}$$

où $S^{p-1} \epsilon_q : S^{p-1} \wedge S^1 \wedge X_q \rightarrow S^{p-1} \wedge X_{q+1}$ est la suspension (p-1)-ième de ϵ_q .

Les applications $f_{p,q}$ définissent un accouplement $(\underline{S}, \underline{X}) \rightarrow \underline{X}$ (cf. [51], chap. I) qui transforme \underline{X} en \underline{S} -module à gauche.

15.2. Nous allons aussi considérer \underline{X} comme un \underline{S} -module à droite. Pour cela, notons $-1 : S^q \rightarrow S^q$ une application de degré -1. On prend pour

$$\tilde{f}_{p,q} : X_p \wedge S^q \rightarrow X_{p+q}$$

l'application composée :

$$X_p \wedge S^q \xrightarrow{\tau} S^q \wedge X_p \xrightarrow{(-1)^{pq} \wedge 1} S^q \wedge X_p \xrightarrow{f_{q,p}} X_{p+q},$$

où τ est la permutation des termes. On vérifie que les $\tilde{f}_{p,q}$ définissent un accouplement $(\underline{X}, \underline{S}) \rightarrow \underline{X}$ qui transforme \underline{X} en \underline{S} -module à droite.

Il résulte pour $\pi_*(\underline{X})$ une structure de $\pi_*(\underline{S})$ -module à droite. Nous allons toujours identifier $\pi_*(\underline{S})$ avec l'anneau σ_* des homotopies stables des sphères, ou encore avec l'anneau Ω_*^{fr} du cobordisme parallélisé.

15.3. Soit $\lambda \in \sigma_i$ un élément arbitraire. On notera φ_λ l'homomorphisme $\pi_k(\underline{X}) \rightarrow \pi_{k+i}(\underline{X})$ donné par $\varphi_\lambda(x) = x \cdot \lambda$.

Soient \underline{Y} un autre spectre et $a : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de spectres. Alors on a évidemment le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(\underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & \pi_{k+i}(\underline{X}) \\ a_* \downarrow & & \downarrow a_* \\ \pi_k(\underline{Y}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & \pi_{k+i}(\underline{Y}) \end{array}$$

qui exprime le fait que φ_λ est naturel en \underline{X} .

15.4. La proposition suivante exprime le fait que φ_λ est stable en \underline{X} .

PROPOSITION. Pour tout \underline{X} , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(\underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & \pi_{k+i}(\underline{X}) \\ S_* \downarrow & & \downarrow S_* \\ \pi_{k+1}(S\underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & \pi_{k+i+1}(S\underline{X}) \end{array}$$

(cf. la définition de S_* dans [51], chap. 1).

Démonstration. Soient $x \in \pi_k(\underline{X})$ un élément et $f : S^{k+m} \rightarrow X_m$ un représentant de x . Par définition de S_* , $(-1)^m S_* x$ est représenté par l'application :

$$S^1 \wedge S^{k+m} \xrightarrow{Sb} S^1 \wedge X_m = S X_m .$$

Par définition du produit, $(-1)^{m+(k+1)n} (S_* x) \cdot \lambda$ est représenté par l'application composée :

$$S^1 \wedge S^{k+m} \wedge S^{i+n} \xrightarrow{Sb \wedge \lambda} S^1 \wedge X_m \wedge S^n \xrightarrow{S\tilde{f}_{m,n}} S^1 \wedge X_{m+n} = SX_{m+n} .$$

D'un autre côté, $(-1)^{kn} x \cdot \lambda$ est représenté par :

$$S^{k+m} \wedge S^{i+n} \xrightarrow{b \wedge \lambda} X_m \wedge S^n \xrightarrow{\tilde{f}_{m,n}} X_{m+n} .$$

Donc, $(-1)^{kn+m+n} S_*(x \cdot \lambda)$ est représenté par la même application que $(-1)^{m+(k+1)n} (S_* x) \cdot \lambda$. En comparant les signes, on voit que $S_*(x \cdot \lambda) = S_*(x) \cdot \lambda$, ce qui est équivalent à la commutativité du diagramme.

15.5. Par définition, si B est un CW-complexe pointé fini, on a $\tilde{X}_k(B) = \pi_k(\underline{X} \wedge B)$ (cf. [51], chap. I). L'opérateur de suspension :

$$\tilde{X}_k(B) \rightarrow \tilde{X}_{k+1}(SB)$$

est donné par :

$$\pi_k(\underline{X} \wedge B) \xrightarrow{S_*} \pi_{k+1}(S^1 \wedge \underline{X} \wedge B) \xrightarrow{t_*} \pi_{k+1}(\underline{X} \wedge SB) ,$$

où $t : S^1 \wedge \underline{X} \wedge B \rightarrow \underline{X} \wedge SB$ est la permutation des termes. La proposition 15.4 montre alors que φ_λ peut être considéré comme une opération homologique stable.

15.6. Soit \underline{X} un spectre arbitraire.

PROPOSITION. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(\Omega \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & \pi_{k+i}(\Omega \underline{X}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ \pi_{k+1}(\underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & \pi_{k+i+1}(\underline{X}) \end{array}$$

(cf. définition de ω dans [51], chap. I).

Démonstration. Remarquons d'abord que si A est un espace pointé, il existe une application $p : S\Omega A \rightarrow A$ donnée par $p(s \wedge \ell) = \ell(s)$, où $s \in S^1$ et où $\ell : S^1 \rightarrow A$

est un lacet de ΩA . Les applications $p_n : S\Omega X_n \rightarrow X_n$ définissent un morphisme de spectres $p : S\Omega \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ et il est immédiat que l'homomorphisme composé :

$$\pi_k(\Omega \underline{X}) \xrightarrow{S_*} \pi_{k+1}(S\Omega \underline{X}) \xrightarrow{p_*} \pi_{k+1}(\underline{X})$$

coïncide avec ω . La proposition découle maintenant de la proposition 1.4 et de ce que φ_λ est naturel en \underline{X} .

15.7. On a, par définition, $\tilde{X}^k(B) = \pi_{-k}(\underline{F}(B, \underline{X}))$ (cf. [51], chap. I). L'opérateur de suspension cohomologique $\tilde{X}^{k+1}(SB) \rightarrow \tilde{X}^k(B)$ est donné par :

$$\pi_{-k-1}(\underline{F}(SB, \underline{X})) \xrightarrow{\psi_*} \pi_{-k-1}(\Omega \underline{F}(B, \underline{X})) \xrightarrow{\omega} \pi_{-k}(\underline{F}(B, \underline{X})),$$

où $\psi : \underline{F}(SB, \underline{X}) \rightarrow \Omega \underline{F}(B, \underline{X})$ est l'identification canonique. Il en résulte, en vertu de la proposition 15.6 et de ce que φ_λ est naturel en \underline{X} , que φ_λ peut être également considéré comme une opération cohomologique stable.

15.8. Supposons maintenant que le spectre \underline{X} est multiplicatif. Cela suppose, en particulier, que l'on a fixé un morphisme-unité $\iota : \underline{S} \rightarrow \underline{X}$, de sorte que nous avons, pour les accouplements correspondants, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\underline{X}, \underline{S}) & \xrightarrow{(1, \iota)} & (\underline{X}, \underline{X}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \underline{X} & \end{array}$$

Donc, dans ce cas, φ_λ peut être décrit comme multiplication à droite par l'élément $\iota_* \lambda$ de $\pi_1(\underline{X})$. Il résulte de l'associativité du produit que :

$$\varphi_\lambda : \pi_*(\underline{X}) \longrightarrow \pi_*(\underline{X})$$

est un homomorphisme de $\pi_*(\underline{X})$ -modules à gauche.

15.9. Nous utilisons par la suite les notations suivantes :

D'abord, I_+ et I_- désigneront les segments $[0,1]$ et $[-1,0]$ pointés respectivement par $+1$ et -1 . $I = I_+ \cup I_- = [-1,1]$ est un espace libre (sans point-base). Le cercle S^1 sera canoniquement identifié avec I/bI et pointé par bI/bI .

Pour tout espace pointé A on posera

$$C_+A = A \wedge I_+, \quad C_-A = A \wedge I_-.$$

On vérifie que l'identité

$$A \times I = A \times I_+ \cup A \times I_-$$

induit, par passage aux quotients, l'identité :

$$A \wedge S^1 = C_+A \cup C_-A.$$

De plus on a :

$$C_+A \cap C_-A = A.$$

15.10. Soit $\lambda \in \sigma_i$ un élément arbitraire. Pour n suffisamment grand, on peut représenter λ par une application $\lambda : S^{n+i} \rightarrow S^n$. On pose d'abord

$$Z_n^\lambda = S^n \cup_\lambda C_+S^{n+i} = S^n \cup_\lambda D^{n+i+1}$$

(c'est aussi le cône réduit de λ). Ensuite, on définit

$$Z_{n+q}^\lambda = S^q \wedge Z_n^\lambda = S^{q+n} \cup_{S^q \wedge \lambda} C_+S^{q+n+i}.$$

En particulier, on a une identification $S^1 \wedge Z_n^\lambda = Z_{n+1}^\lambda$, ce qui fait de $\{Z_m^\lambda\}_{m \geq n}$ un spectre \underline{Z}^λ .

Les applications canoniques $j_n : S^n \rightarrow Z_n^\lambda$ et $r_n : C_+S^{n+i} \rightarrow Z_n^\lambda$ donnent des morphismes de spectres :

$$j : \underline{S} \rightarrow \underline{Z}^\lambda \quad \text{et} \quad r : C_+(\underline{S} \wedge S^i) \rightarrow \underline{Z}^\lambda.$$

15.11. Le spectre \underline{Z}^λ n'est pas multiplicatif. Néanmoins, il est commode de parler de \underline{Z}^λ -modules unitaires à droite (ou, simplement, de \underline{Z}^λ -modules), c'est-à-dire de spectres \underline{Y} munis d'un accouplement $(\underline{Y}, \underline{Z}^\lambda) \rightarrow \underline{Y}$ pour lequel le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\underline{Y}, \underline{S}) & \xrightarrow{(1, j)} & (\underline{Y}, \underline{Z}^\lambda) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \underline{Y} & \end{array}$$

Remarquons que $j_*^\lambda = 0$ dans $\pi_i(\underline{Y})$, car, pour n suffisamment grand, l'application composée

$$S^{n+i} \xrightarrow{\lambda} S^n \xrightarrow{j_n} Z_n^\lambda$$

est homotope à 0. Il en résulte que φ_λ est identiquement nul dans $\pi_*(\underline{Y})$.

15.12. Dans le cas où \underline{Y} est un spectre multiplicatif, pour construire une structure de \underline{Z}^λ -module dans \underline{Y} , il suffit de se donner un morphisme de spectres $c : \underline{Z}^\lambda \rightarrow \underline{Y}$ pour lequel le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{S} & \xrightarrow{l} & \underline{Y} \\ & \searrow j & \nearrow c \\ & & \underline{Z}^\lambda \end{array}$$

est commutatif. En effet, l'accouplement composé

$$(\underline{Y}, \underline{Z}^\lambda) \xrightarrow{(1, c)} (\underline{Y}, \underline{Y}) \xrightarrow{\text{produit}} \underline{Y}$$

définit alors une structure de \underline{Z}^λ -module dans \underline{Y} .

15.13. Soit \underline{X} un spectre arbitraire. On notera $I_*^\lambda(\underline{X})$ le noyau de $\varphi_\lambda : \pi_*(\underline{X}) \rightarrow \pi_*(\underline{X})$. On vérifie immédiatement que I_*^λ est un foncteur covariant sur la catégorie des spectres. Il découle de 15.8 que si \underline{X} est multiplicatif, $I_*^\lambda(\underline{X})$ est un idéal à gauche de $\pi_*(\underline{X})$.

15.14. Soient \underline{X} et \underline{Y} deux spectres (non-nécessairement multiplicatifs) et $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de spectres. On supposera fixée dans \underline{Y} une structure de \underline{Z}^λ -module unitaire à droite. Dans ces conditions, nous allons définir un homomorphisme

$$T_f : I_*^\lambda(\underline{X}) \rightarrow \pi_*(\underline{Y}) / I_* \pi_*(\underline{X})$$

homogène de degré $i+1$ (où i est le degré de λ).

Soit donc x un élément de $I_k^\lambda(\underline{X})$ et soit $b : S^{m+k} \rightarrow X_m$ un représentant de x . On choisit également un représentant pour $\lambda : S^{n+i} \rightarrow S^n$. Considérons

l'application composée $g :$

$$S^{m+k} \wedge S^{n+i} \xrightarrow{b \wedge \lambda} X_m \wedge S^n \xrightarrow{\tilde{f}_{m,n}} X_{m+n} \xrightarrow{f_{m+n}} Y_{m+n} .$$

Nous allons étendre g sur les cônes $C_+ (S^{n+k} \wedge S^{n+i})$ de deux manières différentes.

D'abord, prenons pour G_+ l'application

$$C_+(S^{m+k} \wedge S^{n+i}) = S^{m+k} \wedge C_+(S^{n+i}) \xrightarrow{b \wedge r_n} X_m \wedge Z_n^\lambda \xrightarrow{f_m \wedge 1} Y_m \wedge Z_n^\lambda \rightarrow Y_{m+n}.$$

Il est clair que la restriction de G_+ sur $S^{m+k} \wedge S^{n+i}$ coïncide avec g .

Ensuite, comme $x \in I_k^\lambda(X)$, si m et n sont suffisamment grands, il existe une extension $G_- : C_+(S^{m+k} \wedge S^{n+i}) \rightarrow X_{m+n}$ de $\tilde{f}_{m,n} \cdot (b \wedge \lambda)$. Posons $G_- = f_{m+n} \cdot G_-'$. Là également, on voit que G_-' prolonge g .

En recollant G_+ et G_-' le long de $S^{m+k} \wedge S^{n+i}$, on obtient une application (cf. 15.9) :

$$G : S^{m+k} \wedge S^{n+i} \wedge S^1 \rightarrow Y_{m+n}.$$

DÉFINITION. $T_f(x) \in \pi_{k+i+1}(\underline{Y}) / f_* \pi_{k+i+1}(X)$ est la classe de l'élément $(-1)^{kn} [G]$ de $\pi_{k+i+1}(\underline{Y})$.

15.15. Pour justifier cette définition, remarquons d'abord que $T_f(x)$ ne dépend pas du prolongement G_-' . En effet, le remplacement de G_-' par un autre prolongement G_-'' conduit à une application $G_1 : S^{m+k} \wedge S^{n+i} \wedge S^1 \rightarrow Y_{m+n}$ dont la classe $[G_1] \in \pi_{k+i+1}(\underline{Y})$ diffère de $[G]$ par l'addition d'un élément de la forme $f_* y$, $y \in \pi_{k+i+1}(X)$.

Ensuite, si l'on remplace b par sa suspension

$$S^{m+k+1} = S^1 \wedge S^{m+k} \xrightarrow{1 \wedge b} S^1 \wedge X_m \xrightarrow{\epsilon_m} X_{m+1},$$

il est clair que l'application correspondante

$$\tilde{G} : S^{m+k+1} \wedge S^{n+i} \wedge S^1 \rightarrow Y_{m+n+1}$$

est la suspension de G et définit donc le même élément de $\pi_{k+i+1}(\underline{Y})$.

Enfin, remplaçons $\lambda : S^{n+i} \rightarrow S^n$ par sa suspension

$$S\lambda : S^{n+i+1} = S^1 \wedge S^{n+i} \xrightarrow{1 \wedge \lambda} S^1 \wedge S^n = S^{n+1}.$$

L'application \tilde{G}_+ est alors donnée par

$$C_+(S^{m+k} \wedge S^{n+i+1}) = S^{m+k} \wedge C_+(S^{n+i+1}) \rightarrow X_m \wedge Z_{n+1}^\lambda \rightarrow Y_m \wedge Z_{n+1}^\lambda \rightarrow Y_{m+n+1}$$

et peut s'écrire aussi

$$S^{m+k} \wedge C_+(S^{n+i+1}) = S^{m+k} \wedge S^1 \wedge C_+ S^{n+i} \rightarrow X_m \wedge S^1 \wedge Z_n^\lambda \rightarrow X_m \wedge Z_{n+1}^\lambda \rightarrow Y_m \wedge Z_{n+1}^\lambda \rightarrow Y_{m+n+1}$$

Elle diffère donc par le signe $(-1)^k$ de la suspension de G_+ ($(-1)^{m+k}$ provient de la permutation $S^{m+k} \wedge S^1 \rightarrow S^1 \wedge S^{m+k}$ et $(-1)^m$ de la permutation $X_m \wedge S^1 \rightarrow S^1 \wedge X_m$).

De même, \bar{G}_- diffère par le signe $(-1)^k$ de la suspension de G_- . Donc, dans $\pi_{k+i+1}(\underline{Y})$ on a $[\bar{G}] = (-1)^k[G]$. Or, pour la définition de $T_f(x)$, il faut prendre $(-1)^{kn}[G]$, si l'on part de λ et $(-1)^{k(n+1)}[\bar{G}]$, si l'on part de $S\lambda$.

En conclusion, $T_f(x)$ ne dépend ni du choix de G' , ni du choix du représentant b de x , ni de celui de λ , ce qui justifie la définition de $T_f(x)$.

15.16. Supposons donnés : deux spectres arbitraires \underline{X}_1 et \underline{X}_2 , deux \underline{Z}^λ -modules \underline{Y}_1 et \underline{Y}_2 , deux morphismes $f_1 : \underline{X}_1 \rightarrow \underline{Y}_1$ et $f_2 : \underline{X}_2 \rightarrow \underline{Y}_2$, un morphisme $h : \underline{X}_1 \rightarrow \underline{X}_2$ et un morphisme de \underline{Z}^λ -modules $H : \underline{Y}_1 \rightarrow \underline{Y}_2$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}_1 & \xrightarrow{f_1} & \underline{Y}_1 \\ h \downarrow & & \downarrow H \\ \underline{X}_2 & \xrightarrow{f_2} & \underline{Y}_2 \end{array}$$

soit commutatif.

PROPOSITION. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} I_k^\lambda(\underline{X}_1) & \xrightarrow{Tf_1} & \pi_{k+i+1}(\underline{Y}_1)/f_{1*} \pi_{k+i+1}(\underline{X}_1) \\ h_* \downarrow & & \downarrow H_* \\ I_k^\lambda(\underline{X}_2) & \xrightarrow{Tf_2} & \pi_{k+i+1}(\underline{Y}_2)/f_{2*} \pi_{k+i+1}(\underline{X}_2) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration évidente.

15.17. Supposons que \underline{Y} est un \underline{Z}^λ -module à droite. On peut munir $S\underline{Y}$ de la structure de \underline{Z}^λ -module de la manière suivante : prenons pour

$$S\underline{Y}_n \wedge Z_m^\lambda \rightarrow S\underline{Y}_{n+m}$$

l'application :

$$S^1 \wedge Y_n \wedge Z_m^\lambda \xrightarrow{1 \wedge f_{n,m}} S^1 \wedge Y_{n+m} = SY_{n+m},$$

où $f_{n,m} : Y_n \wedge Z_m^\lambda \rightarrow Y_{n+m}$ définit la structure de \underline{Z}^λ -module dans \underline{Y} .

Soient comme avant \underline{X} un spectre, \underline{Y} un \underline{Z}^λ -module et $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un morphisme de spectres. Comme φ_λ commute avec la suspension (cf. 15.4), l'opérateur S_* envoie $I_*^\lambda(\underline{X})$ dans $I_*^\lambda(S\underline{X})$.

PROPOSITION. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} I_k^\lambda(\underline{X}) & \xrightarrow{T_f} & \pi_{k+i+1}(\underline{Y}) / f_* \pi_{k+i+1}(\underline{X}) \\ S_* \downarrow & & \downarrow S_* \\ I_{k+1}^\lambda(S\underline{X}) & \xrightarrow{T_{Sf}} & \pi_{k+i+2}(S\underline{Y}) / Sf_* \pi_{k+i+2}(S\underline{X}). \end{array}$$

Démonstration. C'est à peu près trivial, si l'on tient compte de ce que par définition de la structure de \underline{Z}^λ -module dans $S\underline{Y}$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (SY_m) \wedge Z_n^\lambda & \longrightarrow & SY_{m+n} \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ S^1 \wedge (Y_m \wedge Z_n^\lambda) & \longrightarrow & S^1 \wedge Y_{m+n}. \end{array}$$

15.18. La proposition 15.17 entraîne, comme pour φ_λ , que T_f peut être considéré comme une opération homologique fonctionnelle stable.

Pour tout \underline{Z}^λ -module \underline{Y} on peut définir une structure de \underline{Z}^λ -module dans $\Omega\underline{Y}$ en prenant pour

$$\Omega Y_m \wedge Z_n^\lambda \rightarrow \Omega Y_{m+n}$$

l'application qui à $\ell \wedge z$ associe le lacet

$$t \mapsto f_{m,n}(\ell(t) \wedge z),$$

où $f_{m,n} : Y_m \wedge Z_n^\lambda \rightarrow Y_{m+n}$ définit la structure de \underline{Z}^λ -module dans \underline{Y} . Par le même procédé que dans 15.6, on peut alors prouver que T_f commute avec l'opérateur de lacets ω et en déduire (cf. 15.7) que T_f peut être considéré également comme une opération cohomologique fonctionnelle stable.

15.19. Considérons maintenant le cas où \underline{X} et \underline{Y} sont des spectres multiplicatifs et où $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ est compatible avec les produits. Nous avons déjà vu que $\Gamma_*^\lambda(\underline{X})$ est un $\pi_*(\underline{X})$ -module à gauche (cf. 15.13).. Par l'intermédiaire de f_* , on transforme également $\pi_*(\underline{Y})$ en un $\pi_*(\underline{X})$ -module à gauche. De plus, $f_*\pi_*(\underline{X})$ est évidemment un $\pi_*(\underline{X})$ -sous-module de $\pi_*(\underline{Y})$, de sorte que $\pi_*(\underline{Y})/f_*\pi_*(\underline{X})$ est également un $\pi_*(\underline{X})$ -module.

PROPOSITION. L'homomorphisme

$$T_f : \Gamma_*^\lambda(\underline{X}) \longrightarrow \pi_*(\underline{Y})/f_*\pi_*(\underline{X})$$

est un homomorphisme de $\pi_*(\underline{X})$ -modules à gauche gradués.

Démonstration évidente :

15.20. Pour terminer ce paragraphe, nous allons voir de quelle manière T_f dépend de la structure de \underline{Z}^λ -module dans \underline{Y} . Pour cela, supposons, comme dans 15.19, que $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ est un morphisme de spectres multiplicatifs et que la structure de \underline{Z}^λ -module dans \underline{Y} est définie, comme dans 15.12, à l'aide d'un morphisme $c : \underline{Z}^\lambda \rightarrow \underline{Y}$. Supposons que sans changer f , \underline{X} et \underline{Y} , on remplace c par un autre morphisme c' .

PROPOSITION. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & \Gamma_k^\lambda(\underline{X}) & \\
 T_f^c \swarrow & & \searrow T_f^{c'} \\
 \pi_{k+i+1}(\underline{Y})/f_*\pi_{k+i+1}(\underline{X}) & & \pi_{k+i+1}(\underline{Y})/f_*\pi_{k+i+1}(\underline{X}) \\
 \text{projection} \searrow & & \swarrow \text{projection} \\
 \pi_{k+i+1}(\underline{Y})/f_*\pi_{k+i+1}(\underline{X}) + f_*\Gamma_k^\lambda(\underline{X}) \cdot \pi_{i+1}(\underline{Y}) & &
 \end{array}$$

Démonstration. Il découle de la définition de T_f que $T_f^c(x) - T_f^{c'}(x)$ est représenté (au signe près) par le produit de f_*x par une classe de $\pi_{i+1}(\underline{Y})$ obtenue en recollant les deux applications :

$$\begin{array}{l}
 C_+S^{n+i} \xrightarrow{r_n} Z_n^\lambda \xrightarrow{c_n} Y_n \\
 \text{et} \\
 C_-S^{n+i} \simeq C_+S^{n+i} \xrightarrow{r_n} Z_n^\lambda \xrightarrow{c_n'} Y_n,
 \end{array}$$

d'où le résultat.

§ 16. - DEUX CAS PARTICULIERS DE T_f .

Dans ce paragraphe, on étudie deux cas particuliers des constructions du § 1 : le cas des cobordismes spinoriels et le cas de la K-théorie. Le lecteur remarquera l'analogie qui existe entre la construction de T_f et la construction de l'opération T de Stong [48], ch. XI. Les propriétés de cette dernière constituent en fait la principale motivation pour l'introduction de T_f .

16.1. Dans ce paragraphe, λ désignera l'élément de $\Omega_1^{\text{fr}} = \pi_1(\underline{S})$ représenté par l'application de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$. Il nous sera commode d'avoir la description suivante du spectre \underline{Z}^λ : On sait que l'espace projectif $P_2(\mathbb{C})$ est formé à partir de $P_1(\mathbb{C}) = S^2$ en y ajoutant une cellule D^4 attachée à l'aide de l'application de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$. Donc, on peut poser $Z_2^\lambda = P_2(\mathbb{C})$ et $Z_m^\lambda = S^{m-2} \wedge P_2(\mathbb{C})$. Par ailleurs, si η_1 désigne le fibré complexe linéaire sur $P_1(\mathbb{C})$ tel que $\langle c_1(\eta_1), [P_1(\mathbb{C})] \rangle = 1$, on a une identification $T(\eta_1) = P_2(\mathbb{C})$. On peut donc poser $Z_m^\lambda = T(\theta^{m-2} \oplus \eta_1)$, où θ^{m-2} est le fibré réel trivial de dimension $m-2$ sur $P_1(\mathbb{C})$.

16.2. Notre premier exemple de T_f sera celui où $\underline{X} = \underline{MSpin}$ et $\underline{Y} = \underline{MSpin}^C$, spectres d'espaces de Thom, et où $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ est le morphisme d'oubli induit par l'injection de groupes $\text{Spin}_n \rightarrow \text{Spin}_n^C$ (cf. 1.3) . . Remarquons que les spectres \underline{X} et \underline{Y} sont multiplicatifs. En particulier, dans \underline{X} , l'opération φ_λ coïncide avec la multiplication par $\iota_* \lambda$ à droite (cf. 15.8). On voit tout de suite que $\iota_* \lambda = [\bar{S}^1]$ (cf. 3.2)

16.3. Pour donner une structure de \underline{Z}^λ -module à droite dans \underline{MSpin}^C il suffit, en vertu de 15.12, de choisir un morphisme $c : \underline{Z}^\lambda \rightarrow \underline{MSpin}^C$ qui prolonge le morphisme-unité $\iota : \underline{S} \rightarrow \underline{MSpin}^C$. Pour cela, remarquons que le fibré $\theta^{n-2} \oplus \eta_1$ a une structure canonique de Spin^C -fibré vectoriel (cf. 1.2) . Donc, il existe une application classifiante $P_1(\mathbb{C}) \rightarrow B\text{Spin}_n^C$ qui induit une application

$c_n : S^{n-2} \wedge P_2(\mathbb{C}) = T(\theta^{n-2} \oplus \eta_1) \rightarrow MSpin_n^{\mathbb{C}}$ des espaces de Thom. On obtient ainsi un morphisme $c : \mathbb{Z}^\lambda \rightarrow MSpin^{\mathbb{C}}$, et, comme chaque $c_n : T(\theta^{n-2} \oplus \eta_1) \rightarrow MSpin_n^{\mathbb{C}}$ préserve les fibres, le morphisme c prolonge ι .

16.4. Posons $\Gamma_k^\lambda(MSpin) = \Gamma_k^{Spin}$. Les résultats du §15 nous conduisent à l'existence d'une opération

$$T_f : \Gamma_k^{Spin} \rightarrow \Omega_{k+2}^{Spin^{\mathbb{C}}} / f_* \Omega_{k+2}^{Spin}$$

qui dépend, en général, du choix que nous avons fait de c .

Le cas particulier qui nous intéresse plus spécialement est celui où $k \equiv 2 \pmod 8$.

On sait (cf. 5.1) que la multiplication par $[\bar{S}^1]$ annule Ω_k^{Spin} , donc on a dans ce cas $\Gamma_k^{Spin} = \Omega_k^{Spin}$ et T_f est donc une application

$$T_f : \Omega_k^{Spin} \rightarrow \Omega_{k+2}^{Spin^{\mathbb{C}}} / f_* \Omega_{k+2}^{Spin}$$

16.5. Nous allons voir que dans le cas où $k \equiv 2 \pmod 8$, T_f ne dépend pas en fait du choix de c . D'après la proposition 15.20, pour le prouver, il suffit de prouver que le sous-groupe $f_* \Omega_k^{Spin} \cdot \Omega_2^{Spin^{\mathbb{C}}}$ de $\Omega_{k+2}^{Spin^{\mathbb{C}}}$ est nul. Pour ce faire, remarquons que c est un sous-groupe de torsion, car tous les éléments de Ω_k^{Spin} sont d'ordre 2. Remarquons ensuite que l'image de $f_* \Omega_k^{Spin} \cdot \Omega_2^{Spin^{\mathbb{C}}}$ par l'homomorphisme d'oubli $\Omega_{k+2}^{Spin^{\mathbb{C}}} \rightarrow \Omega_{k+2}^{SO}$ est nulle. En effet, $\Omega_2^{Spin^{\mathbb{C}}}$ est engendré par $[P_1(\mathbb{C})]$ qui est nul dans $\Omega_2^{SO} = 0$. Notre affirmation résulte maintenant de ce que le noyau de $\Omega_*^{Spin^{\mathbb{C}}} \rightarrow \Omega_*^{SO}$ est sans torsion (cf. [48], ch. XI).

16.6. L'homomorphisme T_f admet aussi une description géométrique. Soient $v \in \Gamma_k^{Spin}$ un élément arbitraire et V^k une Spin-variété close représentant v . La variété $V^k \times \bar{S}^1$ représente 0 dans Ω_{k+1}^{Spin} , donc il existe une Spin-variété compacte W^{k+2} de bord $bW = V \times \bar{S}^1$. Par ailleurs, en tant que Spin^C-variété, $\bar{S}^1 = bD^2$. On peut donc former une Spin^C-variété close $M^{k+2} = V \times D^2 \cup -W$. On voit tout de suite que M^{k+2} représente $T_f(v)$.

16.7. Le premier corollaire de cette description est que l'image de T_f est contenue dans $W_{k+2}^C / f_* \Omega_{k+2}^{Spin}$ (cf. la définition de $W_*^C \subset \Omega_*^{Spin^C}$ dans 3.3 et 4.2). En effet, la variété M^{k+2} est une variété à déterminant sphérique.

Ensuite, on a $\partial([M^{k+2}]) = [V^k]$ (cf. 2.7 et 3.2). Comme l'homomorphisme ∂ est nul sur $f_* \Omega_{k+2}^{Spin}$, il définit un homomorphisme

$$\bar{\partial} : W_{k+2}^C / f_* \Omega_{k+2}^{Spin} \rightarrow \Omega_k^{Spin}$$

dont l'image est contenue dans I_k^{Spin} (ceci résulte de la présentation canonique des variétés à déterminant sphérique (2.7)). En conclusion, l'homomorphisme $\bar{\partial}$ est l'inverse à gauche de T_f . En particulier, T_f est injectif. Il est également surjectif, car la forme $V \times D^2 \cup -W$ est la forme générale des variétés à déterminant sphérique (cf. 2.7). Nous avons démontré :

PROPOSITION. $T_f : I_k^{Spin} \rightarrow W_{k+2}^C / f_* \Omega_{k+2}^{Spin}$ est un isomorphisme. L'isomorphisme inverse $\bar{\partial}$ est induit par l'homomorphisme $\partial : W_{k+2}^C \rightarrow \Omega_k^{Spin}$.

16.8. On notera respectivement BO et BU les spectres qui définissent les K-théories réelle et complexe. On a par définition, $BU_{2m} = BU$, $BU_{2m+1} = \Omega BU$ et les applications $\epsilon_i : S^1 \wedge BU_i \rightarrow BU_{i+1}$ sont construites à l'aide des équivalences d'homotopie de Bott. Le spectre BO est construit d'une manière analogue.

Nous allons utiliser le fait qu'il existe des classes de Thom (orientations)

$$u^S : \underline{M Spin} \rightarrow \underline{BO}$$

et

$$u^C : \underline{M Spin}^C \rightarrow \underline{BU},$$

construites à l'aide des algèbres de Clifford dans [5] (cf. [48], Ch. XI).

On notera $\psi : \underline{BO} \rightarrow \underline{BU}$ le morphisme de complexification. Les classes u^S et u^C sont telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{M Spin} & \xrightarrow{u^S} & \underline{BO} \\ \text{oubli} \downarrow & & \downarrow \psi \\ \underline{M Spin}^C & \xrightarrow{u^C} & \underline{BU} \end{array}$$

est commutatif.

16.9. L'existence des orientations u^S et u^C permet de définir les nombres caractéristiques des Spin- et Spin^C-variétés respectivement dans la KO- et K-théories, de la manière suivante :

Soit Λ un des deux anneaux \mathbf{Z} ou $\mathbf{Z}_{(2)}$. On notera, pour tout espace topologique E , $K_{\Lambda}^*(E) = K^*(E) \otimes \Lambda$ et $KO_{\Lambda}^*(E) = KO^*(E) \otimes \Lambda$. Soient $a \in KO_{\Lambda}(B \text{Spin})$ une classe caractéristique et M^n une Spin-variété close. On représente la classe de cobordisme de M^n par une application $g : S^{n+p} \rightarrow M \text{Spin}_p$. Alors par définition, le nombre caractéristique normal $a[M^n]_{\nu} \in KO_{\Lambda}^{-n}(pt)$ est l'image de a par l'homomorphisme composé :

$$KO_{\Lambda}(B \text{Spin}_p) \xrightarrow{\Phi^S} \widetilde{KO}_{\Lambda}^p(M \text{Spin}_p) \xrightarrow{g^*} \widetilde{KO}_{\Lambda}^p(S^{n+p}) \simeq KO_{\Lambda}^{-n}(pt),$$

où Φ^S est l'isomorphisme de Thom correspondant à u^S .

Remarquons que en utilisant l'homomorphisme

$$KO_{\Lambda}(BSO) \rightarrow KO_{\Lambda}(B \text{Spin}),$$

on peut définir $a[M^n]_{\nu}$ pour $a \in KO_{\Lambda}(BSO)$.

De la même manière, si M^n est une Spin^C-variété close et si $a_1 \in K_{\Lambda}(B \text{Spin}^C)$ (ou $a_1 \in K_{\Lambda}(BSO)$), il est possible de définir $a_1[M^n]_{\nu} \in K_{\Lambda}^{-n}(pt)$.

Les nombres caractéristiques ainsi obtenus sont des invariants du cobordisme correspondant et définissent des homomorphismes

$$\tilde{a} : \Omega_n^{\text{Spin}} \rightarrow KO_{\Lambda}^{-n}(pt)$$

et

$$\tilde{a}_1 : \Omega_n^{\text{Spin}^C} \rightarrow K_{\Lambda}^{-n}(pt).$$

Comme il résulte du diagramme 16.8, on a, pour $a \in KO_{\Lambda}(BSO)$, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n^{\text{Spin}} & \xrightarrow{\tilde{a}} & KO_{\Lambda}^{-n}(pt) \\ \text{oubli} \downarrow & & \downarrow \psi_* \\ \Omega_n^{\text{Spin}^C} & \xrightarrow{\tilde{a}_1(a)} & K_{\Lambda}^{-n}(pt), \end{array}$$

où ψ_* est induit par le morphisme de complexification $\psi : \underline{BO} \rightarrow \underline{BU}$.

A côté des nombres caractéristiques normaux, on peut considérer les nombres

tangents, plus commodes pour les calculs.

Pour cela, considérons l'involution $I : BSO \rightarrow BSO$ obtenue en classifiant les fibrés $-\gamma_p$ sur $BSO(p)$ et en passant à la limite. Pour toute Spin-variété close M^n et tout $a \in KO_\Lambda(BSO)$, on pose $a[M^n] = (I^*a)[M^n]_\nu$. De même, pour toute Spin^C-variété close M^n et tout $a_1 \in K_\Lambda(BSO)$ on pose $a_1[M^n] = (I^*a_1)[M^n]_\nu$.

Bien entendu, les nombres tangents sont également des invariants du cobordisme correspondant.

Par la suite, tous les énoncés concerneront les nombres tangents, les nombres normaux apparaissant comme outils dans certaines démonstrations.

16.10. La proposition suivante montre que dans certaines dimensions $a[M^n]$ et $a_1[M^n]$ peuvent être exprimés comme nombres cohomologiques rationnels de M^n .

On notera $ch : K_\Lambda^{-n}(pt) \rightarrow H^*(S^n; \mathbb{Q})$ l'homomorphisme composé

$$K_\Lambda^{-n}(pt) \xrightarrow{\sim} \tilde{K}_\Lambda(S^n) \xrightarrow{ch} H^*(S^n; \mathbb{Q}).$$

PROPOSITION (cf. [48], ch. XI). a) Soit M^n une Spin-variété close et $a \in KO_\Lambda(BSO)$.

Alors on a :

$$ch(\psi_*(a[M^n])) [S^n] = (ch(\psi_*(a)) \cdot \hat{A}(M^n)) [M^n],$$

où $\hat{A}(M^n)$ désigne la \hat{A} -classe rationnelle de M^n correspondant à la série formelle $(\sqrt{t}/2)/sh(\sqrt{t}/2)$ (cf. ci-dessous 18.3).

b) Soit M^n une Spin^C-variété close et $a_1 \in K_\Lambda(BSO)$. Alors on a :

$$ch(a_1[M^n]) [S^n] = (ch a_1 \cdot Td(M^n)) [M^n],$$

où $Td(M^n) = e^{-x/2} \cdot \hat{A}(M^n)$, $x = c_1(\det \tau M^n)$.

Remarques. 1) Il est facile de voir que b) \Rightarrow a) si l'on pose $a_1 = \psi_*(a)$ et si l'on utilise le fait que pour une Spin-variété considérée comme Spin^C-variété on a $x = 0$ et la commutativité du diagramme 16.9.

2) On sait que l'application $K^{-n}(pt) \rightarrow \mathbb{Q}$ donnée par $y \mapsto (ch y)[S^n]$ est nulle pour n impair et est une bijection de $K^{-n}(pt) = \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ pour n pair.

De même, l'application $KO^{-n}(pt) \rightarrow \mathbb{Q}$ donnée par $y \mapsto \text{ch}(\psi_*(y))[S^n]$ est nulle pour $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, est une bijection de $KO^{-n}(pt) = \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ pour $n \equiv 0 \pmod{8}$ et est une bijection de $KO^{-n}(pt) = \mathbb{Z}$ sur $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ pour $n \equiv 4 \pmod{8}$. Ceci et la proposition ci-dessus expriment entièrement les nombres $a[M^n]$ et $a_1[M^n]$ respectivement pour $n \equiv 0 \pmod{4}$ et $n \equiv 0 \pmod{2}$ en termes des nombres de Pontrjaguine rationnels.

16.11. Nous allons maintenant appliquer les résultats du § 15 à la situation $\psi : \underline{BO} \rightarrow \underline{BU}$. Pour cela, il faut définir pour le spectre \underline{BU} une structure de \underline{Z}^λ -module (avec, comme toujours, $\underline{c} \cdot \lambda \in \sigma_1$ représenté par $S^3 \rightarrow S^2$). En vertu de 15.12, il suffit de fixer un morphisme $\bar{c} : \underline{Z}^\lambda \rightarrow \underline{BU}$ qui prolonge le morphisme-unité. Prenons donc pour \bar{c} le morphisme composé $\underline{Z}^\lambda \xrightarrow{c} \underline{MSpin}^c \xrightarrow{u^c} \underline{BU}$, où c a été défini dans 16.3.

On posera $I_k^{KO} = I_k^\lambda(\underline{BO})$. D'après le § 15, il existe un homomorphisme

$$T_\psi : I_k^{KO} \longrightarrow \pi_{k+2}(\underline{BU}) / \psi_* \pi_{k+2}(\underline{BO})$$

que l'on peut écrire aussi

$$T_\psi : I_k^{KO} \longrightarrow K^{-k-2}(pt) / \psi_* KO^{-k-2}(pt).$$

16.12. Le cas particulier qui nous intéresse est encore celui où $k \equiv 2 \pmod{8}$. On a alors $KO^{-k-1}(pt) = 0$, donc $I_k^{KO} = KO^{-k}(pt) = \pi_k(\underline{BO}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a ensuite $K^{-k-2}(pt) = \pi_{k+2}(\underline{BU}) = \mathbb{Z}$, et $KO^{-k-2}(pt) = \pi_{k+2}(\underline{BO}) = \mathbb{Z}$. De plus,

$$\psi_* : \pi_{k+2}(\underline{BO}) \longrightarrow \pi_{k+2}(\underline{BU})$$

est la multiplication par 2. Il en résulte que T_ψ est un homomorphisme

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_k(\underline{BO}) \longrightarrow \pi_{k+2}(\underline{BU}) / \psi_* \pi_{k+2}(\underline{BO}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

PROPOSITION. Pour $k \equiv 2 \pmod{8}$, T_ψ est indépendant du choix du morphisme $\bar{c} : \underline{Z}^\lambda \rightarrow \underline{BU}$.

Démonstration. Il suffit de voir que le sous-groupe $\psi_* I_k^{KO} \cdot \pi_2(\underline{BU}) = 0$. Or, c'est évident, puisque l'homomorphisme $\psi_* : \pi_k(\underline{BO}) \rightarrow \pi_k(\underline{BU})$ est nul pour $k \equiv 2 \pmod{8}$.

16.13. Nous allons maintenant utiliser la proposition 15.16.

PROPOSITION. Pour $k \equiv 2 \pmod 8$, l'homomorphisme T_ψ est bijectif.

Démonstration. Posons dans 15.16: $X_1 = \underline{MSpin}$, $X_2 = \underline{BO}$, $Y_1 = \underline{MSpin}^C$, $Y_2 = \underline{BU}$, $h = u^S$, $H = u^C$, $f_1 = f$, $f_2 = \psi$. Comme u^C est un morphisme de spectres multiplicatifs et que par définition de \bar{c} on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \underline{Z}^\lambda & \\ c \swarrow & & \searrow \bar{c} \\ \underline{MSpin}^C & \xrightarrow{u^C} & \underline{BU} \end{array}$$

H est un morphisme de \underline{Z}^λ -modules. Compte tenu du diagramme commutatif 16.8, il résulte de 15.16 que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k^{Spin} & \xrightarrow{T_f} & W_{k+2}^C / f_* \Omega_{k+2}^{Spin} \\ u_*^S \downarrow & & \downarrow u_*^C \\ \pi_k(\underline{BO}) & \xrightarrow{T_\psi} & \pi_{k+2}(\underline{BU}) / \psi_* \pi_{k+2}(\underline{BO}). \end{array}$$

Pour démontrer la proposition, il faut prouver que $T_\psi \neq 0$. Comme T_f est bijectif (cf. 16.7), il suffit de prouver que $u_*^C \neq 0$ ou encore, en vertu de la proposition 16.10 qu'il existe une $Spin^C$ -variété M^{k+2} à déterminant sphérique telle que $Td(M^{k+2}) [M^{k+2}] \equiv 1 \pmod 2$.

Posons d'abord $k=2$. Soit $M^4 = \mathbb{S}^1 \times D^2 \cup -W^4$, où W^4 est une $Spin$ -variété compacte telle que $bW^4 = (\mathbb{S}^1)^3$. Autrement dit, M^4 représente $T_f([\mathbb{S}^1]^2)$ (cf. 16.6). On sait que la signature $\sigma(M^4) \equiv 8 \pmod{16}$, car l'invariant $k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 1$ (cf. 7.1). Donc, $p_1(M^4)[M^4] \equiv 8 \pmod{16}$. Par ailleurs, on a

$$Td(M^4) = \frac{x^2 - p_1(M^4)}{24} = -\frac{p_1(M^4)}{24},$$

car $x^2 = 0$ pour toute $Spin^C$ -variété à déterminant sphérique, puisque $\det \tau M^4$ est la préimage du fibré η_1 sur $P_1(\mathbb{C})$ (cf. 3.1). Donc $Td(M^4)[M^4] \equiv 1 \pmod 2$.

Supposons maintenant que $k = 8l + 2$ ($l > 0$). Il existe des Spin-variétés M^{8l} telles que $\hat{A}(M^{8l})[M^{8l}] \equiv 1 \pmod{2}$. En effet, il existe une SU-variété M^8 telle que $\hat{A}(M^8)[M^8] = 1$ (cf. [21]). On peut donc poser $M^{8l} = (M^8)^l$.

Prenons alors pour M^{k+2} un représentant de $T_f([M^{8l}] \times [S^1]^2)$. Comme T_f est un homomorphisme de Ω_*^{Spin} -modules (cf. 15.8), on a $[M^{k+2}] = [M^{8l}] \times [M^4]$.

Alors

$$\begin{aligned} Td(M^{k+2})[M^{k+2}] &= Td(M^{8l} \times M^4)[M^{8l} \times M^4] = (Td(M^{8l}) \otimes Td(M^4))[M^{8l} \times M^4] \\ &= \hat{A}(M^{8l})[M^{8l}] \cdot Td(M^4)[M^4] \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

16.14. Nous arrivons maintenant au résultat principal de ce paragraphe. Soit comme toujours $\Lambda = \mathbf{Z}$ ou $\Lambda = \mathbf{Z}_{(2)}$.

THÉORÈME. Soient V^k ($k \equiv 2 \pmod{8}$) une Spin-variété close, M^{k+2} un représentant de $T_f([V^k])$ et $a \in KO_\Lambda(BSO)$ une classe caractéristique. Alors

$$\psi_*(a)[M^{k+2}] \pmod{2} \in K_\Lambda^{-k-2}(pt) \otimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

coïncide avec

$$a[V^k] \in KO_\Lambda^{-k}(pt) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Démonstration. Il suffit bien sûr de prouver le théorème pour $\Lambda = \mathbf{Z}$. Soit donc $a \in KO(BSO)$. Nous allons d'abord construire des morphismes

$$\bar{a} : \underline{MSpin} \longrightarrow \underline{BO}$$

et

$$\overline{\psi_*(a)} : \underline{MSpin}^C \longrightarrow \underline{BU}$$

correspondant aux classes $\Phi^S(a)$ et $\Phi^C(\psi_*(a))$. Pour cela, représentons la classe $\Phi^S(a) \in \widetilde{KO}^{8p}(MSpin_{8p})$ par une application $MSpin_{8p} \rightarrow BO = BO_{8p}$. C'est l'application \bar{a}_{8p} . Ensuite, l'application composée :

$$S^1 \wedge MSpin_{8p-1} \xrightarrow{\epsilon_{8p-1}} MSpin_{8p} \xrightarrow{\bar{a}_{8p}} BO = BO_{8p}$$

correspond à une application $\bar{a}_{8p-1} : MSpin_{8p-1} \rightarrow BO = BO_{8p-1}$. En répétant ce procédé on obtient pour tout q une application

$$\bar{a}_q : MSpin_q \longrightarrow BO_q$$

et l'on vérifie immédiatement que les \bar{a}_q définissent un morphisme de spectres $\bar{a} : \underline{MSpin} \rightarrow \underline{BO}$.

Le morphisme $\overline{\psi_*(a)} : \underline{MSpin}^C \rightarrow \underline{BU}$ est défini de la même manière.

Remarquons que l'homomorphisme induit $\bar{a}_* : \pi_k(\underline{MSpin}) \rightarrow \pi_k(\underline{BO})$ coïncide avec l'homomorphisme \tilde{a} introduit dans 16.9. De même, $(\overline{\psi_*(a)})_*$ coïncide avec $\widetilde{\psi_*(a)}$.

Enfin, le diagramme commutatif de 16.9 est induit par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{MSpin} & \xrightarrow{\bar{a}} & \underline{BO} \\ f \downarrow & \overline{\psi_*(a)} & \downarrow \psi \\ \underline{MSpin}^C & \xrightarrow{\quad} & \underline{BU} \end{array}$$

LEMME. $\overline{\psi_*(a)} : \underline{MSpin}^C \rightarrow \underline{BU}$ est un morphisme de \underline{Z}^λ -modules à droite.

Démonstration. Pour $a = 1$ nous l'avons déjà vu dans 16.13, car on a alors $\overline{\psi_*(a)} = u^C$. Nous allons donc supposer par la suite que $a \in \widetilde{KO}(BSO)$. Il suffit de vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{MSpin}_{2p}^C \wedge \underline{Z}_{2q}^\lambda & \xrightarrow{f_{2p,2q}} & \underline{MSpin}_{2p+2q}^C \\ \overline{\psi_*(a)}_{2p} \wedge 1 \downarrow & & \downarrow \overline{\psi_*(a)}_{2p+2q} \\ \underline{BU}_{2p} \wedge \underline{Z}_{2q}^\lambda & \xrightarrow{g_{2p,2q}} & \underline{BU}_{2p+2q} = \underline{BU} \end{array}$$

où $f : (\underline{MSpin}^C, \underline{Z}^\lambda) \rightarrow \underline{MSpin}^C$ et

$$g : (\underline{BU}, \underline{Z}^\lambda) \rightarrow \underline{BU}$$

sont les accouplements définissant les structures de \underline{Z}^λ -modules dans \underline{MSpin}^C et \underline{BU} .

Premièrement, l'application $\overline{\psi_*(a)}_{2p+2q} \cdot f_{2p,2q}$ représente l'élément

$$\varphi^C(\psi_*(a)(\gamma_{2p}^C \times (\theta^{2q-2} \oplus \eta_1)) \in \widetilde{K}^{2p+2q}(\underline{MSpin}_{2p}^C \wedge \underline{Z}_{2q}^\lambda),$$

où γ_{2p}^C est le fibré canonique sur $BSpin_{2p}^C$ et où $\gamma_{2p}^C \times (\theta^{2q-2} \oplus \eta_1)$ est un fibré sur $BSpin_{2p}^C \times P_1(\mathbb{C})$. Dans l'algèbre de Hopf $KO(BSO)$ on a

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum b_i \otimes c_i,$$

où $b_i, c_i \in \widetilde{KO}(BSO)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \psi_*(a)(\gamma_{2p}^C \times (\theta^{2q-2} \oplus \eta_1)) &= \psi_*(a)(\gamma_{2p}^C) \otimes 1 + 1 \otimes a(\theta^{2q-2} \oplus \eta_1) + \sum_I b_i(\gamma_{2p}^C) \otimes c_i(\theta^{2q-2} \oplus \eta_1) \\ &= \psi_*(a)(\gamma_{2p}^C) \otimes 1, \end{aligned}$$

car le fibré $\theta^{2q-2} \oplus \eta_1$ est stablement trivial en tant que fibré réel orienté

(l'homomorphisme $\pi_2(\text{BU}) \rightarrow \pi_2(\text{BSO})$ étant nul et compte tenu de ce que $P_1(\mathbb{C}) = S^2$).

Donc $\overline{\psi_* \langle a \rangle}_{2p+2q} \cdot f_{2p,2q}$ représente le produit $\Phi^c(\psi_*(a)(\gamma_{2p}^c)) \otimes u^c(\theta^{2q-2} \oplus \eta_1)$.

Par ailleurs, l'application $Z_{2q}^\lambda \xrightarrow{\bar{c}_{2q}} \text{BU}_{2q} = \text{BU}$ représente la classe de Thom $u^c(\theta^{2q-2} \oplus \eta_1)$, par définition même de \bar{c} . Donc, $g_{2p,2q} \cdot (\overline{\psi_* \langle a \rangle} \wedge 1)$ représente le produit

$$\Phi^c(\psi_*(a)(\gamma_{2p}^c)) \otimes u^c(\theta^{2q-2} \oplus \eta_1),$$

par définition de l'accouplement g et compte tenu de ce que le produit

$$\text{BU}_{2p} \wedge \text{BU}_{2q} \rightarrow \text{BU}_{2p+2q}$$

correspond au produit tensoriel de fibrés virtuels de dimension 0.

En conclusion, on a (à homotopie près) :

$$\overline{\psi_* \langle a \rangle}_{2p+2q} \circ f_{2p,2q} = g_{2p,2q} \circ (\overline{\psi_* \langle a \rangle} \wedge 1),$$

ce qui prouve le lemme.

Le diagramme qui précède le lemme, le lemme lui-même et la proposition 15.16 entraînent la commutativité du diagramme ($k \equiv 2 \pmod{8}$) :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k^{\text{Spin}} & \xrightarrow{T_f} & W_{k+2}^c / f_* \Omega_{k+2}^{\text{Spin}} \\ \bar{a}_* \downarrow & & \downarrow (\overline{\psi_* \langle a \rangle})_* \\ \pi_k(\underline{\text{BO}}) & \xrightarrow{T_\psi} & \pi_{k+2}(\underline{\text{BU}}) / \psi_* \pi_{k+2}(\underline{\text{BO}}). \end{array}$$

Comme T_ψ est bijectif (proposition 16.13), les remarques précédant le lemme montrent que $\psi_*(a)[M^{k+2}]_{\nu, \text{mod } 2}$ coïncide avec $a[V^k]_{\nu}$. La classe $a \in \text{KO}(\text{BSO})$ étant ici arbitraire, on peut la remplacer par I^*a (cf. 16.10). Le théorème découle alors de la définition des nombres caractéristiques tangents.

16.15. L'intérêt du théorème 16.14 réside dans le corollaire suivant :

PROPOSITION. Soit $a \in \text{KO}_\Lambda(\text{BSO})$ et supposons fixé $n \geq 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) Pour toute Spin-variété close V^{8n+2} on a dans $\text{KO}_\Lambda^{-8n-2}(\text{pt}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$a[V] = k(V)$ (où $k(V) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'invariant défini dans 5.3) .

b) Pour toute Spin^C -variété close M^{8n+4} à déterminant sphérique on a dans
 $K_{\Lambda}^{-8n-4}(\text{pt}) = \Lambda : \psi_*(a)[M^{8n+4}] \equiv \sigma(M)/8 \pmod{2}$.

Remarque. On a toujours $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{8}$ (cf. 5.2) ce qui justifie l'énoncé de b).

Démonstration. Ceci découle immédiatement du théorème 16.14 et de la définition de k en termes de signature.

§ 17. - QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES
QUI MESURENT L'INVARIANT k

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer quelques propriétés des classes $a \in K0_{\wedge}(BSO)$ équivalentes aux propriétés a) et b) de 16.15, mais plus faciles à vérifier.

17.1. Commençons par un résultat technique :

PROPOSITION. Soit M^{4m} une $Spin^c$ -variété close à déterminant sphérique et soit V^{4m} une sous-variété caractéristique de $P_1(\mathbb{C}) \times M$ (cf. 2.1), c'est-à-dire duale au fibré $\det \tau(P_1(\mathbb{C}) \times M) = \eta_1^2 \otimes \det \tau M$. Alors pour tout multi-indice ω , on a :

$$p_{\omega}[V] = 2p_{\omega}[M].$$

Démonstration. Posons $u = c_1(\eta_1) \otimes 1$ et $x = 1 \otimes c_1(\det \tau M)$. On a $u^2 = x^2 = 0$, car $\det \tau M$ est sphérique. Si p désigne la classe totale de Pontraguine et si $j: V \rightarrow P_1(\mathbb{C}) \times M$ est l'injection canonique, on a :

$$\begin{aligned} p(V) &= j^*(p(M)/p(\eta_1^2 \otimes \det \tau M)) = \\ &= j^*(p(M)/(1 + (2u+x)^2)) = \\ &= j^*(p(M)(1 - 4ux)). \end{aligned}$$

Donc $p_i(V) = j^*(p_i(M) - 4uxp_{i-1}(M))$.

Si l'on pose $p'_i = p_i(M) - 4uxp_{i-1}(M)$, on a :

$$\begin{aligned} p_{\omega}[V] &= \langle j^* p'_{\omega}, [V] \rangle = \langle p'_{\omega}, j_*[V] \rangle = \\ &= \langle p'_{\omega}, [P_1(\mathbb{C}) \times M] \cap (2u+x) \rangle = \\ &= ((2u+x)p'_{\omega})[P_1(\mathbb{C}) \times M]. \end{aligned}$$

Or, on a : $(2u+x)p'_{\omega} = (2u+x)p_{\omega}(M)$ (car $x^2 = u^2 = 0$).

Donc :

$$\begin{aligned} p_\omega[V] &= \langle 2u p_\omega(M), [P_1(\mathbb{C}) \times M] \rangle \\ &+ \langle x p_\omega(M), [P_1(\mathbb{C}) \times M] \rangle = \\ &= 2 p_\omega[M] . \qquad \qquad \qquad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

17.2. Nous allons tirer de 17.1 quelques conséquences.

D'abord, désignons par $K_*^{\text{Spin}} \subset \Omega_*^{\text{Spin}}$ l'ensemble des classes x telles que $a[x] = 0$ pour tout $a \in K0(\text{BSO})$. Il est clair que K_*^{Spin} est un sous-groupe de Ω_*^{Spin} (en fait, un idéal). Considérons l'homomorphisme :

$$W_*^{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega_*^{\text{Spin}} / K_*^{\text{Spin}}$$

défini par $u \longmapsto \partial([P_1(\mathbb{C})].y) + K_*^{\text{Spin}}$.

Si $y \in f_* \Omega_{8n+4}^{\text{Spin}} \subset W_{8n+4}^{\mathbb{C}}$ (autrement dit, si y est représenté par une Spin-variété), on a :

$$y \longmapsto y' + K_*^{\text{Spin}}$$

où, pour tout multi-indice ω , on a : $p_\omega[y'] = 2p_\omega[y]$ (cf. 17.1), donc également $a[y'] = 2a[y]$ pour tout $a \in K0(\text{BSO})$ puisque dans les dimensions divisibles par 4, $a[y]$ est une combinaison linéaire rationnelle des $p_\omega[y]$ (cf. remarques 16.10). En conclusion, $y \longmapsto \partial([P_1(\mathbb{C})].y)$ induit un homomorphisme :

$$\beta^{\mathbb{C}} : W_{8n+4}^{\mathbb{C}} / f_* \Omega_{8n+4}^{\text{Spin}} \longrightarrow (\Omega_{8n+4}^{\text{Spin}} / K_{8n+4}^{\text{Spin}}) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .$$

De la même manière, posons $K_*^{\text{SU}} \subset \Omega_*^{\text{SU}}$ la préimage de K_*^{Spin} par l'homomorphisme d'oubli $f_*^{\text{SU}} \rightarrow \Omega_*^{\text{Spin}}$. Il est clair que l'on a une injection :

$$\Omega_*^{\text{SU}} / K_*^{\text{SU}} \xrightarrow{i} \Omega_*^{\text{Spin}} / K_*^{\text{Spin}} .$$

Ensuite, $\text{Tor } \Omega_{8n+4}^{\text{Spin}} \subset K_{8n+4}^{\text{Spin}}$, car, nous venons de le voir, si $a \in K0(\text{BSO})$,

$a[y]$ est une combinaison linéaire de nombres de Pontriaguine, qui sont nuls pour

$y \in \text{Tor } \Omega_{8n+4}^{\text{Spin}}$. On sait ([50]) que l'homomorphisme $\Omega_{8n+4}^{\text{SU}} \longrightarrow \Omega_{8n+4}^{\text{Spin}} / \text{Tor}$ est

surjectif. Donc $\Omega_{8n+4}^{\text{SU}} \rightarrow \Omega_{8n+4}^{\text{Spin}} / K_{8n+4}^{\text{Spin}}$ l'est également et, finalement, on obtient :

PROPOSITION. L'homomorphisme d'oubli induit un isomorphisme :

$$i : \Omega_{8n+4}^{SU} / K_{8n+4}^{SU} \longrightarrow \Omega_{8n+4}^{Spin} / K_{8n+4}^{Spin} .$$

Il existe aussi un homomorphisme β^U analogue à β^C et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W_{8n+4}^U / f_* \Omega_{8n+4}^{SU} & \xrightarrow{\beta^U} & (\Omega_{8n+4}^{SU} / K_{8n+4}^{SU}) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \text{oubli} \downarrow & & \simeq \downarrow i \otimes 1 \\ W_{8n+4}^C / f_* \Omega_{8n+4}^{Spin} & \xrightarrow{\beta^C} & (\Omega_{8n+4}^{Spin} / K_{8n+4}^{Spin}) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{array}$$

17.3. Nous allons voir que l'homomorphisme β^U est surjectif. Rappelons que W_*^U possède une structure d'anneau commutatif relativement à un produit $*$ (différent de celui de Ω_*^U) (cf. II.1)[†]. Cet anneau est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_2, y_6, y_8, y_{10}, \dots]$, où $x_2 = [P_1(\mathbb{C})]$. Il est possible de choisir une base x_2, y_6, y_8, \dots pour $W_*^U \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour laquelle $d y_{4n} = y_{4n-2}$ ($n \geq 2$), où d désigne l'homomorphisme composé (cf. II.1) :

$$W_{4n}^U \xrightarrow{\text{oubli}} \Omega_{4n}^U \xrightarrow{\partial} \Omega_{4n-2}^{SU} \xrightarrow{\text{oubli}} W_{4n-2}^U .$$

On sait (cf. [21], [48], ch. X) que l'homomorphisme $\partial : W_{8n+6}^U \rightarrow \Omega_{8n+4}^{SU}$ est surjectif. Si $A \in W_{8n+6}^U$ est un monôme en $x_2, y_6, y_8, y_{10}, \dots$, on a :

soit a) $A = B * y_{4n-2}$ ($n \geq 2$), $B \in W_*^U$;

soit b) $A = x_2 * C$, $C \in W_{8n+4}^U$.

Dans le premier cas, $\partial A = \partial B \cdot y_{4n-2} \in K_{8n+4}^{SU}$ (cf. II.1, formule pour $d(x * y)$ et utiliser l'injectivité de $\Omega_{8n+4}^{SU} \rightarrow W_{8n+4}^U$) .

Dans le second cas, $\partial(x_2 * C) = \partial \Phi(x_2, C) = \partial(x_2 \cdot C)$ (cf. 4.3) .

Comme les monômes en x_2, y_6, y_8, \dots engendrent additivement $W_{8n+6}^U \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$,

[†] "cf. II.1" renvoie au numéro 1 de l'Appendice II.

$$y \longmapsto \delta([P_1(\mathbb{C})] \cdot y) + K_*^{\text{SU}}$$

induit une surjection :

$$W_{8n+4}^{\text{U}} \longrightarrow (\Omega_{8n+4}^{\text{SU}} / K_{8n+4}^{\text{SU}}) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) ,$$

et l'on obtient :

PROPOSITION. L'homomorphisme β^{U} , et donc aussi β^{C} , sont surjectifs.

17.4. Rappelons que si $x \in W_{8n+4}^{\text{C}}$, on a $\sigma(x) \equiv 0 \pmod{8}$. De même, si $x \in \Omega_{8n+4}^{\text{Spin}}$, on a $\sigma(x) \equiv 0 \pmod{16}$. (II.6).

On fixe un indice $n \in \mathbb{N}$.

THÉORÈME. Soit $a \in K\mathcal{O}_{\wedge}(\text{BSO})$ une classe caractéristique. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) Pour toute Spin-variété close V^{8n+2} , on a dans $K\mathcal{O}_{\wedge}^{-8n-2}(\text{pt}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:
 $a[V] = k(V)$;
- b) Pour toute Spin^C-variété close M^{8n+4} à déterminant sphérique, on a dans $K\mathcal{O}_{\wedge}^{-8n-4}(\text{pt}) = \Lambda$:
 $\psi_*(a)[M^{8n+4}] \equiv \sigma(M)/8 \pmod{2}$;
- c) Pour toute U-variété close M^{8n+4} à déterminant sphérique, on a dans $K\mathcal{O}_{\wedge}^{-8n-4}(\text{pt}) = \Lambda$:
 $\psi_*(a)[M^{8n+4}] \equiv \sigma(M)/8 \pmod{2}$;
- d) Pour toute SU-variété close N^{8n+4} , on a dans $K\mathcal{O}_{\wedge}^{-8n-4}(\text{pt}) = \Lambda$:
 $a[N^{8n+4}] \equiv \sigma(N)/16 \pmod{2}$;
- e) Pour toute Spin-variété close N^{8n+4} , on a dans $K\mathcal{O}_{\wedge}^{-8n-4}(\text{pt}) = \Lambda$:
 $a[N^{8n+4}] \equiv \sigma(N)/16 \pmod{2}$.

Démonstration. Nous avons vu a) \Leftrightarrow b) dans 16.15.

b) \Rightarrow c) est évident ;

c) \Rightarrow d) découle de la proposition 17.1 de la surjectivité de β^U et de ce que

$\psi_* : K0_{\wedge}^{-8n-4}(pt) \rightarrow K_{\wedge}^{-8n-4}(pt)$ est la multiplication par 2 ;

d) \Rightarrow e) découle de ce que $i \otimes 1$ est un isomorphisme (cf. proposition 17.2) ;

e) \Rightarrow b) découle de la proposition 17.1 et de ce que $\psi_* : K0_{\wedge}^{-8n-4}(pt) \rightarrow K_{\wedge}^{-8n-4}(pt)$

est la multiplication par 2 .

17.5. Supposons fixé $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION. Soit $a \in K0_{\wedge}(BS0)$ une classe caractéristique satisfaisant à l'une des conditions a) - e) de 17.4 (et donc aussi aux quatre autres). Alors :

f) Pour toute Spin-variété close V^{8n+1} , on a dans $K0_{\wedge}^{-8n-1}(pt) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$a[V] = k(V \times \overline{S}^1) ;$$

g) Pour toute Spin-variété close P^{8n} , on a dans $K0_{\wedge}^{-8n}(pt) = \mathbb{Z}$:

$$a[P] \equiv \sigma(P) \pmod{2} . \dagger$$

Démonstration. Pour prouver f) , il suffit de voir que $a[V^{8n+1}] = a[V^{8n+1} \times \overline{S}^1]$.

L'affirmation est évidente pour $a = 1$, car $1[V^{8n+1} \times \overline{S}^1] = 1[V^{8n+1}] \cdot 1[\overline{S}^1] = 1[V^{8n+1}]$, puisque $1[\overline{S}^1] = 1$ (seul nombre caractéristique non nul !). Supposons

donc que $a \in \widetilde{K0}_{\wedge}(BS0)$ et que

$$\Delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum b_i \otimes c_i$$

où $b_i, c_i \in \widetilde{K0}_{\wedge}(BS0)$, Δ étant la diagonale de l'algèbre de Hopf $K0_{\wedge}(BS0)$. Alors

on a :

$$a[V \times \overline{S}^1] = a[V] \cdot 1[\overline{S}^1] + 1[V] \cdot a[\overline{S}^1] + \sum b_i [V] \cdot c_i [\overline{S}^1] = a[V] ,$$

car $1[\overline{S}^1] = 1$ et $a[\overline{S}^1] = c_i [\overline{S}^1] = 0$ le fibré tangent $\tau \overline{S}^1$ étant trivial.

De la même manière, on démontre que $a[P^{8n} \times \overline{S}^1 \times \overline{S}^1] = a[P^{8n}]$. g) découle alors de ce que $k(P^{8n} \times \overline{S}^1 \times \overline{S}^1) = \sigma(P^{8n}) \pmod{2}$ (cf. 7.2) .

\dagger Les points a), e), f) et g) signifient que a "mesure" χ (cf. 7.2) dans les dimensions entre $8n$ et $8n + 7$.

§ 18. - SYSTÈMES GÉNÉRATEURS ET SUITES MULTIPLICATIVES
DE HIRZEBRUCH

Nous abordons maintenant l'étude des classes caractéristiques $a \in KO_{\wedge}(BSO)$ qui satisfont aux conditions a) - g) de 17.4 et 17.5 .

18.1. Les classes de Pontriaguine $\pi_i \in KO_{\wedge}(BSO)$ peuvent être définies (cf. [2]) de la manière suivante :

Soit χ l'application composée :

$$KO_{\wedge}(BSO(2n+1)) \xrightarrow{\psi_*} K_{\wedge}(BSO(2n+1)) \xrightarrow{j} K_{\wedge}(BT^n)$$

où j est induite par l'injection $T^n \hookrightarrow SO(2n+1)$ du tore maximal. On a

$K_{\wedge}(BT^n) = \Lambda[[t_1, \dots, t_n]]$, où $t_i = \eta - 1$. L'homomorphisme χ est injectif et son

image est composée des éléments de $K_{\wedge}(BT^n)$ qui sont invariants sous l'action du groupe de Weyl $W(SO(2n+1))$ qui agit sur $\Lambda[[t_1, \dots, t_n]]$ par permutation des t_i et par

conjugaison $t_i \mapsto \bar{t}_i = \bar{\eta} - 1$. Donc $KO_{\wedge}(BSO(2n+1)) = \Lambda[[\pi_1, \dots, \pi_n]]$, où

$\pi_i \in KO_{\wedge}(BSO(2n+1))$ est l'unique élément tel que :

$$\chi(\pi_i) = \sigma_i(t_1 + \bar{t}_1, \dots, t_n + \bar{t}_n) ,$$

σ_i désignant le i -ème polynôme symétrique élémentaire. Enfin $KO_{\wedge}(BSO) =$

$$= \lim_{\leftarrow} KO_{\wedge}(BSO(2n+1)) = \Lambda[[\pi_1, \pi_2, \dots]] .$$

Il est utile de connaître $ch(\psi_*(\pi_i))$. Par définition de π_i , on a :

$$\begin{aligned} ch(\psi_*(\pi_i)) &= ch(\sigma_i(t_1 + \bar{t}_1, \dots, t_n + \bar{t}_n)) = \sigma_i(e^{u_1 + e^{-u_1} - 2}, \dots, e^{u_n + e^{-u_n} - 2}) = \\ &= \sigma_i(u_1^2, \dots, u_n^2) + \text{termes de degré supérieur} = p_i + \text{termes de degré supérieur} . \end{aligned}$$

Ici $u_i = c_1(t_i)$. Donc, pour tout multi-indice ω , on a :

$$ch(\psi_*(\pi_{\omega})) = p_{\omega} + \dots .$$

Par exemple, si M^{4m} est une $Spin^C$ -variété close et si $\omega = (i_1, \dots, i_s)$ est de degré m (c'est-à-dire que $|\omega| = i_1 + \dots + i_s = m$), on a :

$$\psi_* (\pi_\omega) [M^{4m}] = p_\omega [M] ,$$

comme il résulte de 16.10 .

18.2. On dit que $a \in KO_\Lambda (BSO)$ est de filtration $F(a) \geq k$, si pour toute application

$f : B \rightarrow BSO$ d'un CW-complexe fini de dimension $\leq k - 1$, on a : $f^* a = 0$.

Anderson, Brown, Peterson ([3] , cf. [48] , chap. XI) ont calculé la filtration

des π_ω :

PROPOSITION.

$$F(\pi_\omega) = \begin{cases} 8n , & \text{si } |\omega| = 2n \\ 8n + 2 , & \text{si } |\omega| = 2n + 1 . \end{cases}$$

Il découle de cette proposition qu'aucune classe a de la forme $\sum_{|\omega| \geq 2n+1} \lambda_\omega \pi_\omega$ ($\lambda_\omega \in \Lambda$) ne peut satisfaire aux conditions du théorème 17.4, car on aurait alors $F(a) \geq 8n + 2$; or, d'après 17.5, on doit avoir $a[P^{8n}] \equiv \sigma(P^{8n}) \pmod 2$ pour toute Spin-variété close P^{8n} . En posant $P^{8n} = P_{2n}^{8n}(\mathbb{H})$ on obtient une contradiction.

Nous allons donc chercher les classes a_n de la forme :

$$\sum_{|\omega| \geq 2n} \lambda_\omega \pi_\omega \quad (\lambda_\omega \in \Lambda) .$$

Nous allons également exiger que ces classes satisfassent à certaines conditions de multiplicativité qui trouveront leur justification dans la proposition 18.7 ci-dessous.

18.3. Soit comme toujours $\Lambda = \mathbb{Z}$ ou $\Lambda = \mathbb{Z}(2)$.

DÉFINITION. Un système générateur sur Λ est une paire de suites $\omega_0, \omega_1, \dots$;

μ_0, μ_1, \dots d'éléments de $KO_\Lambda (BSO)$ telles que :

1° $\omega_0 = 1$, $\mu_0 = 0$;

2° ω_i et μ_i sont de degré i , c'est-à-dire de la forme $\sum_{|\omega|=i} \lambda_\omega \pi_\omega$ ($\lambda_\omega \in \Lambda$) ;

3° Si Δ désigne la diagonale dans l'algèbre de Hopf $KO_{\Lambda}(BSO)$, on a :

$$\Delta \omega_k = \sum_{i+j=k} \omega_i \otimes \omega_j$$

et

$$\Delta \mu_k = \sum_{i+j=k} (\omega_i \otimes \mu_j + \mu_i \otimes \omega_j) .$$

Pour abrégé, on notera (ω, μ) le système générateur $\omega_0, \omega_1, \dots; \mu_0, \mu_1, \dots$.

Pour tout système générateur (ω, μ) , on posera $a_n = \omega_{2n} + \mu_{2n+1}$, et notre travail va consister maintenant à décrire les systèmes (ω, μ) qui conduisent à des classes a_n satisfaisant aux conditions de 17.4.

18.4. Considérons d'abord la suite (ω) . De telles suites sont engendrées par les suites multiplicatives de Hirzebruch (cf. [24], chap. I, § 1).

Soit A une Λ -algèbre. Une suite multiplicative S sur A est une suite de polynômes sur A : $S_0 = 1, S_1(x_1), S_2(x_1, x_2), \dots, S_n(x_1, \dots, x_n), \dots$ telle que :

a) $S_n(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme homogène de degré n , x_i étant considéré comme étant de degré i .

b) La relation $(1 + x_1 + x_2 + \dots)(1 + y_1 + y_2 + \dots) = 1 + z_1 + z_2 + \dots$

entraîne pour tout $k \geq 0$:

$$S_k(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i+j=k} S_i(x_1, \dots, x_i) S_j(y_1, \dots, y_j) .$$

Une suite multiplicative S est entièrement définie par sa série caractéristique

$$P(x) = \sum_{i \geq 0} S_i(x, 0, \dots, 0) .$$

La condition a) entraîne que $P(0) = 1$. Inversement, toute série formelle sur A telle que $P(0) = 1$ engendre une suite multiplicative par un procédé classique (cf. [24]).

Le logarithme $R(x)$ de la suite S est par définition la série formelle inverse de la série $Q(x) = x/P(x^2)$. Comme $Q(x) = x + o(x)$, $R(x)$ est bien définie sur A .

et l'on a $R(x) = x + o(x)$. De plus, comme $Q(-x) = -Q(x)$, on a aussi $R(-x) = -R(x)$.

Il est clair que, comme $P(x)$, $R(x)$ détermine entièrement la suite S . De plus, toute série formelle $R(x)$ sur A telle que $R(x) = x + o(x)$ et $R(-x) = -R(x)$ engendre une suite multiplicative S sur A .

Soit $A = \Lambda$. Il est évident que toute suite (ω) d'éléments de $KO_{\Lambda}(BSO)$ qui satisfait aux conditions :

$$1^{\circ} \omega_0 = 1 ;$$

$$2^{\circ} \omega_i \text{ est de degré } i ;$$

$$3^{\circ} \Delta \omega_k = \sum_{i+j=k} \omega_i \otimes \omega_j ,$$

correspond à une suite multiplicative sur Λ , S , telle que pour tout i , on ait :

$$\omega_i = S_i(\pi_1, \dots, \pi_i) .$$

Et inversement, toute suite (ω) définie de cette manière à partir d'une suite multiplicative S sur Λ , satisfait aux conditions $1^{\circ} - 3^{\circ}$ ci-dessus.

18.5. Soit (ω, μ) un système générateur sur Λ .

PROPOSITION. Si pour $n \geq 0$ les classes $a_n = \omega_{2n} + \mu_{2n+1}$ satisfont aux conditions du théorème 17.4, alors pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in W_{8n}^U$, on a :

$$\psi_*(a_n)[x] \equiv \sigma(x) \pmod{2} .$$

Démonstration. Posons $v = x_2 * x_2 = 9[P_1(\mathbb{C})]^2 - 8[P_2(\mathbb{C})]$ (dans Ω_4^U). On a $\sigma(v) = -8$, donc $p_1[v] = -24$. On a également $Td[v] = 1$. Donc :

$$\psi_*(1)[v] = 1 ,$$

$$\psi_*(d)[v] \equiv 0 \pmod{2} , \text{ pour } d \in \widetilde{KO}_{\Lambda}(BSO) .$$

Considérons maintenant le produit $y = v * x \in W_{8n+4}^U$. Par hypothèse, $\psi_*(a_n)[y] \equiv \sigma(y)/8 \equiv \sigma(x) \pmod{2}$. Il reste donc à vérifier que :

$$\psi_*(a_n)[y] \equiv \psi_*(\omega_{2n})[x] \pmod{2} .$$

Compte tenu des formules 18.3 pour $\Delta \omega_k$ et $\Delta \mu_k$ et des filtrations de ω_i et μ_j données par la proposition 18.2, on a :

$$\begin{aligned} \psi_*(a_n)[y] &= \psi_*(a_n)[v * x] = \psi_*(a_n)[v \cdot x] = \psi_*(1)[v] \cdot \psi_*(\omega_{2n})[x] + \\ &+ \psi_*(\omega_1)[v] \cdot \psi_*(\omega_{2n-1})[x] + \psi_*(\mu_1)[v] \cdot \psi_*(\omega_{2n})[x] + \psi_*(\omega_1)[v] \cdot \psi_*(\mu_{2n})[x] \equiv \\ &\equiv \psi_*(\omega_{2n})[x] \pmod{2} \end{aligned}$$

car $\psi_*(\omega_1)[v] \equiv \psi_*(\mu_1)[v] \equiv 0 \pmod{2}$.

COROLLAIRE. Dans les mêmes hypothèses, si S est la suite multiplicative sur Λ correspondant à la suite (ω) , on a :

$$S_{2n}(p_1, \dots, p_{2n})[M^{8n}] \equiv \sigma(M) \pmod{2}$$

pour toute U-variété M^{8n} à déterminant sphérique.

Démonstration. On a, compte tenu de 18.1 :

$$\text{ch}(\psi_*(\omega_{2n})) = \text{ch} S_{2n}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n})) = S_{2n}(p_1, \dots, p_{2n}) + \text{termes de degré supérieur.}$$

Donc : $S_{2n}(p_1, \dots, p_{2n})[M^{8n}] = \text{ch}(\psi_*(\omega_{2n}))[M^{8n}]$.

Le corollaire découle maintenant de ce que $F(\mu_{2n+1}) \geq 8n+2$, de la proposition 16.10 et la remarque 2 qui la suit.

18.6. Nous allons maintenant décrire toutes les suites multiplicatives S qui possèdent la propriété décrite dans le corollaire 18.5.

Soit donc S une suite multiplicative sur Λ .

PROPOSITION. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1° Pour tout $n \geq 0$ et toute U-variété M^{8n} à déterminant sphérique, on a :

$$S_{2n}(p_1, \dots, p_{2n})[M^{8n}] \equiv \sigma(M) \pmod{2} ;$$

2° Pour tout $n \geq 0$ et toute variété orientée N^{4n} , on a :

$$S_n(p_1, \dots, p_n)[N^{4n}] \equiv \sigma(N) \pmod{2} ;$$

3° Si l'on écrit le logarithme $R(x)$ de S sous la forme

$$R(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{r_n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad r_n \in \Lambda,$$

on a, pour tout $n \geq 0$, $r_n \equiv 1 \pmod{2}$.

Démonstration. Posons, pour abrégé, pour une variété orientée V :

$$S(V) = \sum_{j \geq 0} S_j(p_1^j(V), \dots, p_j(V)) \in H^*(V; \Lambda) \text{ et } S[V] \equiv \langle S(V), [V] \rangle \in \Lambda.$$

LEMME. Pour tout $n \geq 0$, on a $r_n = S[P_{2n}(\mathbb{C})]$.

Démonstration. Soit $P(x)$ la série caractéristique de S . Pour toute série $f(x)$, on désignera par $\kappa_i(f(x))$ le coefficient de x^i dans $f(x)$. Comme la classe totale de Pontriaguine $p(P_{2n}(\mathbb{C})) = (1 + u^2)^{2n+1}$, où $u = c_1(\eta_{2n})$, on en déduit que :

$$S[P_{2n}(\mathbb{C})] = \kappa_{2n}(P(x^2)^{2n+1}).$$

La formule de Lagrange pour l'inversion des séries nous donne le coefficient b de x^{2n+1} dans la série inverse de $Q(x) = x/P(x^2)$:

$$b = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{x Q'(x) dx}{Q(x)^{2n+2}},$$

où γ est un petit lacet entourant l'origine dans \mathbb{C} et parcouru en sens positif. En développant, on a :

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{x P(x^2)^{2n+2}}{x^{2n+2}} \left(\frac{P(x^2) - 2x^2 P'(x^2)}{P(x^2)^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(\frac{P(x^2)^{2n+1}}{x^{2n+1}} - \frac{1}{2n+1} \frac{(P(x^2)^{2n+1})'}{x^{2n}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(1 - \frac{2n}{2n+1} \right) \frac{P(x^2)^{2n+1}}{x^{2n+1}} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \kappa_{2n} (P(x^2))^{2n+1} = \frac{1}{2n+1} S[P_{2n}(\mathbb{C})] \quad \text{c.q.f.d.}$$

Revenons à notre proposition. Les implications $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ et $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ sont évidentes. Pour démontrer $3^\circ \Rightarrow 2^\circ$, il suffit de remarquer que :

$$(\Omega_*^{SO} / \text{Tor}) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[P_2(\mathbb{C}), P_4(\mathbb{C}), \dots, P_{2n}(\mathbb{C}), \dots]$$

et appliquer le lemme.

Il reste à prouver $1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Soit V^{8n} une sous-variété de $P_1(\mathbb{C}) \times P_{2n}(\mathbb{C}) \times P_{2n}(\mathbb{C})$ duale au fibré $\eta_1 \otimes \det \tau P_{2n}(\mathbb{C}) \otimes \det \tau P_{2n}(\mathbb{C})$. Dans les notations de 4.1, on a $V^{8n} = P(P_{2n}(\mathbb{C}) \times P_{2n}(\mathbb{C}))$ et il existe sur V^{8n} une structure de U-variété à déterminant sphérique.

$$\begin{aligned} \text{Posons :} \quad u &= c_1(\eta_1) \otimes 1 \otimes 1 \\ x_1 &= 1 \otimes c_1(P_{2n}(\mathbb{C})) \otimes 1 \\ x_2 &= 1 \otimes 1 \otimes c_1(P_{2n}(\mathbb{C})) \\ S_1 &= 1 \otimes S(P_{2n}(\mathbb{C})) \otimes 1 \\ S_2 &= 1 \otimes 1 \otimes S(P_{2n}(\mathbb{C})) . \end{aligned}$$

D'après les formules classiques de Hirzebruch, on a :

$$S[V] = \langle Q(u + x_1 + x_2) \cdot S_1 \cdot S_2, [P_1(\mathbb{C}) \times P_{2n}(\mathbb{C}) \times P_{2n}(\mathbb{C})] \rangle ,$$

car $S(P_1(\mathbb{C})) = 1$. La formule de Taylor appliquée à $Q(u + x_1 + x_2)$ au point $x_1 + x_2$ donne :

$$Q(u + x_1 + x_2) = Q(x_1 + x_2) + uQ'(x_1 + x_2) , \text{ puisque } u^2 = 0 .$$

Donc :

$$S[V] = \langle uQ'(x_1 + x_2) \cdot S_1 \cdot S_2, [P_1(\mathbb{C}) \times P_{2n}(\mathbb{C}) \times P_{2n}(\mathbb{C})] \rangle .$$

Si $Q'(x_1 + x_2) = \sum q_{ij} x_1^i x_2^j$ ($q_{ij} \in \Lambda$), on a :

$$S[V] \equiv \sum_i q_{ii} \langle c_1(P_{2n}(\mathbb{C}))^i S(P_{2n}(\mathbb{C})), [P_{2n}(\mathbb{C})] \rangle^2 \text{ mod } 2 .$$

Or, comme $Q(x) = x + o(x^2)$, on a : $Q'(x) = 1 + o(x)$, donc :

$$\sum_i q_{ii} x^{2i} \equiv Q'(2x) \equiv 1 \text{ mod } 2 .$$

Il s'ensuit que :

$$S[V] \equiv \langle S(P_{2n}(\mathbb{C})), [P_{2n}(\mathbb{C})] \rangle^2 \equiv S[P_{2n}(\mathbb{C})] \pmod{2} .$$

En particulier, cela est vrai pour $S = L$ -suite multiplicative de Hirzebruch pour le calcul de la signature. Donc $\sigma(V) \equiv 1 \pmod{2}$.

Si 1° est vrai, on obtient :

$$1 \equiv \sigma(V) \equiv S[V] \equiv S[P_{2n}(\mathbb{C})] \equiv r_n \pmod{2} ,$$

ce qui prouve 1° \Rightarrow 3°.

18.7. Pour terminer ce paragraphe, nous allons démontrer une propriété des systèmes générateurs qui justifie dans une certaine mesure leur introduction.

PROPOSITION. Soit (ω, μ) un système générateur sur Λ . Supposons que la suite multiplicative S qui correspond à la suite (ω) satisfait aux conditions de la proposition 18.6. Alors, si $x \in W_{8m}^U$, $y \in W_{8n+4}^U$, on a :

$$\psi_*(a_{n+m})[y * x] \equiv \psi_*(a_n)[y] \cdot \sigma(x) \pmod{2} .$$

Démonstration. Comme $\psi_*(a_{n+m})$ s'exprime en nombres de Pontriaguine rationnels de $y * x$ (cf. 16.10), et comme $y * x = y \cdot x + 2[V^4] dy \cdot dx$ (cf. II.1), on a : $\psi_*(a_{n+m})[y * x] = \psi_*(a_{n+m})[y \cdot x]$. Par ailleurs, les formules 18.3 pour $\Delta \omega_k$ et $\Delta \mu_k$ donnent :

$$\begin{aligned} \psi_*(a_{n+m})[y \cdot x] &= \psi_*(\omega_{2n+2m})[y \cdot x] + \psi_*(\mu_{2n+2m+1})[y \cdot x] = \\ &= \psi_*(\omega_{2n})[y] \cdot \psi_*(\omega_{2m})[x] + \psi_*(\omega_{2n+1})[y] \cdot \psi_*(\omega_{2m-1})[x] + \\ &\quad + \psi_*(\mu_{2n+1})[y] \cdot \psi_*(\omega_{2m})[x] + \psi_*(\omega_{2n+1})[y] \cdot \psi_*(\mu_{2m})[x] \equiv \\ &\equiv \psi_*(a_n)[y] \cdot \sigma(x) \pmod{2} , \end{aligned}$$

car $\psi_*(\omega_{2n})[x] \equiv \sigma(x) \pmod{2}$ par hypothèse, et $\psi_*(\omega_{2n+1})[y] \equiv \sigma(y) \equiv 0 \pmod{2}$ en vertu de la propriété 2° de la proposition 18.6 et de ce que $\sigma \equiv 0 \pmod{8}$ sur W_{8n+4}^U .

§ 19. - SUITES MULTIPLICATIVES SUR $\Lambda[t]/t^2 = 0$

A chaque système générateur (ω, μ) , on associe ici une suite multiplicative sur une extension quadratique de Λ . Le résultat principal de ce paragraphe décrit toutes les suites ainsi obtenues qui correspondent aux systèmes générateurs pour lesquels les classes a_n satisfont aux conditions de 17.4.

19.1. Soit comme toujours $\Lambda = \mathbf{Z}$ ou $\Lambda = \mathbf{Z}_{(2)}$. On pose $A = \Lambda[t]/t^2 = 0$ (ou $A = \mathbf{Q}[t]/t^2 = 0$). Nous allons d'abord considérer les suites multiplicatives sur A . Soit \hat{S} une telle suite. Chaque $\hat{S}_n(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit d'une manière unique comme

$$\hat{S}_n(x_1, \dots, x_n) = S_n(x_1, \dots, x_n) + T_n(x_1, \dots, x_n) \cdot t,$$

où S_n et T_n sont des polynômes homogènes de degré n sur Λ . On vérifie immédiatement que la suite $S : S_0, S_1, \dots$ est une suite multiplicative sur Λ .

Il existe un homomorphisme d'anneaux $A \xrightarrow{\alpha} \Lambda$ qui envoie $\beta + \delta \cdot t$ sur β . Il est clair que S_n est obtenu de \hat{S}_n en appliquant α aux coefficients. Il en découle que le logarithme $R(x)$ de S est obtenu à partir du logarithme $\hat{R}(x)$ de \hat{S} en appliquant α aux coefficients. Donc, on peut écrire :

$$\hat{R}(x) = R(x) + B(x) t,$$

où $B(x)$ est une série sur Λ . Comme $\hat{R}(x) = x + o(x)$ et $\hat{R}(-x) = -\hat{R}(x)$, on a $B(x) = o(x)$ et $B(-x) = -B(x)$.

Nous allons calculer en fonction de $\hat{R}(x)$ divers objets associés à la suite \hat{S} . Calculons d'abord la série $\hat{Q}(x)$ inverse de $\hat{R}(x)$. Soit $\hat{Q}(x) = C(x) + D(x) t$. On a :

$$\begin{aligned} x &= \hat{Q}(\hat{R}(x)) = C(R(x) + B(x)t) + D(R(x) + B(x)t)t = \\ &= C(R(x)) + C'(R(x)) \cdot B(x)t + D(R(x))t, \quad \text{car } t^2 = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc les équations :

$$\begin{cases} C(R(x)) = x \\ C'(R(x))B(x) = -D(R(x)) \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} C(x) = Q(x) \\ D(x) = -Q'(x)B(Q(x)) \end{cases},$$

où $Q(x)$ est la série inverse de $R(x)$. Finalement :

$$\hat{Q}(x) = Q(x) - Q'(x) \cdot B(Q(x))t.$$

Pour la série caractéristique de \hat{S} , on a :

$$\begin{aligned} \hat{P}(x^2) &= x/\hat{Q}(x) = \frac{x}{Q(x) - Q'(x)B(Q(x))t} = \frac{x}{Q(x)} \left(1 + \frac{Q'(x)B(Q(x))t}{Q(x)}\right) = \\ &= P(x^2) \left(1 + \frac{Q'(x)B(Q(x))t}{Q(x)}\right). \end{aligned}$$

Remarquons que cette série est paire, donc la formule obtenue définit bien une série $\hat{P}(x)$. Enfin, pour calculer $\hat{S}_n(x_1, \dots, x_n)$, il faut prendre le produit :

$$\prod_{i=1}^N \hat{P}(\beta_i^2),$$

qui est une série symétrique en β_1, \dots, β_N , et l'exprimer en fonction des

$x_i = \sigma_i(\beta_1^2, \dots, \beta_n^2)$ (cf. [24], chap. I, § 1). On obtient, en posant

$$\frac{Q'(x)B(Q(x))}{Q(x)} = \sum_{j \geq 1} \alpha_j x^{2j} :$$

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j \geq 1} \alpha_j s_j(x_1, \dots, x_j) S_{n-j}(x_1, \dots, x_{n-j}),$$

où $s_j(x_1, \dots, x_j)$ est le polynôme de Newton correspondant au polynôme symétrique $\beta_1^{2j} + \dots + \beta_N^{2j}$ (avec, comme ci-dessus, $x_i = \sigma_i(\beta_1^2, \dots, \beta_N^2)$).

19.2. Soit \hat{S} une suite multiplicative sur A . On pose :

$$\omega_k = S_k(\pi_1, \dots, \pi_k) \quad \text{et} \quad \mu_k = T_k(\pi_1, \dots, \pi_k).$$

On a : $\omega_k, \mu_k \in KO_\Lambda(BSO)$. Il est évident que (ω, μ) est un système générateur sur Λ . Inversement, à tout système générateur (ω, μ) , on peut associer une suite multiplicative \hat{S} sur $A = \Lambda[t]/t^2 = 0$.

L'existence de cette bijection est la raison principale pour l'introduction des suites multiplicatives sur A .

19.3. Nous allons voir maintenant une autre application des suites multiplicatives sur A .

Si M^{4n} est une $Spin^C$ -variété close et si ω est un multi-indice de degré n , il est facile de calculer $\psi_*(\pi_\omega)[M^{4n}]$ puisque ce nombre coïncide avec $p_\omega[M^{4n}]$ (cf. 18.1) . La situation est plus compliquée lorsque $4|\omega| < \dim M$. Nous nous proposons de calculer :

$$S_n(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))[M^{4n+4}] ,$$

où M^{4n+4} est une $Spin^C$ -variété close à déterminant sphérique.

Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme homogène sur Λ . Supposons que f soit de degré n et que nous voulons calculer $f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))[M^{4n+4}]$. D'après 16.10 et la remarque 2 qui suit la proposition 16.10 .

$$f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))[M^{4n+4}] = \text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n)) \text{Td}(M)[M^{4n+4}] .$$

Pour calculer $\text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))$, introduisons :

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_N) = f(\sigma_1(z_1, \dots, z_N), \dots, \sigma_n(z_1, \dots, z_N)) .$$

Alors, $\text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))$ est obtenue en exprimant

$$\tilde{f}(e^{u_1} + e^{-u_1} - 2, \dots, e^{u_N} + e^{-u_N} - 2) \text{ en fonction des } p_i = \sigma_i(u_1^2, \dots, u_N^2) \text{ (cf. 18.1)} .$$

Soit $z_1^{i_1} \dots z_N^{i_N}$ un monôme de \tilde{f} . On a :

$$\begin{aligned} (e^{u_1} + e^{-u_1} - 2)^{i_1} \dots (e^{u_N} + e^{-u_N} - 2)^{i_N} &= \\ &= u_1^{2i_1} \dots u_N^{2i_N} + \sum_s \binom{2i_1}{s} \binom{2i_N}{s-1} \left(\frac{i_s u_s}{12} \right) u_{s+1}^{2i_{s+1}} \dots u_N^{2i_N} + \text{termes de degré supérieur} \\ &= u_1^{2i_1} \dots u_N^{2i_N} + \frac{1}{24} \sum_s u_s^3 \frac{\partial}{\partial u_s} (u_1^{2i_1} \dots u_N^{2i_N}) + \text{termes de degré supérieur} . \end{aligned}$$

Donc, pour obtenir $\text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))$, il faut exprimer

$$\tilde{f}(u_1^2, \dots, u_N^2) + \frac{1}{24} \sum_s u_s^3 \frac{\partial}{\partial u_s} \tilde{f}(u_1^2, \dots, u_N^2) + \dots$$

en fonction des $p_i = \sigma_i(u_1^2, \dots, u_N^2)$.

Remarquons maintenant que pour une Spin^c -variété M^{4n+4} à déterminant sphérique, on a :

$$\text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n)) \text{Td}(M)[M] = \text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n)) \hat{A}(M)[M],$$

car $\text{Td}(M) = e^{-c_1(\det \tau M)/2} \hat{A}(M)$ (cf. 16.10) et, comme $\dim M$ est divisible par 4

et que $\text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))$ est une combinaison rationnelle de classes de

Pontriaguine, seules les puissances paires de $c_1(\det \tau M)$ entrent dans l'expression.

Or, comme M est à déterminant sphérique, $c_1^2(\det \tau M) = 0$.

Ensuite, on a :

$$\hat{A}(M) = 1 - \frac{1}{24} p_1(M) + \dots = 1 - \frac{1}{24} \sum_s u_s^2 + \dots$$

Donc, pour calculer $\text{ch } f(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n)) \text{Td}(M)[M]$, il faut évaluer sur $[M]$

la classe obtenue en exprimant

$$\frac{1}{24} \left(- \sum_s u_s^2 + \sum_s u_s^3 \frac{\partial}{\partial u_s} \right) \tilde{f}(u_1^2, \dots, u_N^2)$$

en fonction des $p_i = \sigma_i(u_1^2, \dots, u_N^2)$.

Posons en particulier $f = S_n$. Il est clair alors que $S_n(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n)) [M^{4n+4}]$ est obtenu en évaluant sur $[M]$ la classe obtenue en exprimant

$$\frac{1}{24} \left(- \sum_s u_s^2 + \sum_s u_s^3 \frac{\partial}{\partial u_s} \right) \left(\prod_s \frac{u_s}{Q(u_s)} \right),$$

où $Q(x)$ est la série inverse du logarithme de S , en fonction des p_i . Or, on a :

$$\left(-u^2 + u^3 \frac{\partial}{\partial u} \right) \left(\frac{u}{Q(u)} \right) = -u^2 \frac{u}{Q(u)} + \frac{u^3 Q(u) - u^4 Q'(u)}{Q(u)^2} = -\frac{u^3 Q'(u)}{Q(u)} \left(\frac{u}{Q(u)} \right).$$

Donc, si $-\frac{1}{24} \frac{u^3 Q'(u)}{Q(u)} = \sum_{j \geq 1} \alpha_j u^{2j}$, on a :

$$S_n(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n)) [M^{4n+4}] = \sum \alpha_j s_j(p_1, \dots, p_j) S_{n+1-j}(M)[M].$$

En comparant avec la formule pour T_n de 19.1, on a :

PROPOSITION. Soit S une suite multiplicative sur Λ et M^{4n+4} une Spin^C -variété à déterminant sphérique. Alors, on a dans $\Lambda \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$:

$$S_n(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_n))[M^{4n+4}] = T_{n+1}(p_1, \dots, p_{n+1})[M^{4n+4}] ,$$

où $\hat{S} = S + T \cdot t$ est la suite multiplicative sur $A = \mathbb{Q}[t]/t^2 = 0$ ayant pour logarithme :

$$\hat{R}(x) = R(x) - \frac{1}{24} R(x)^3 t .$$

19.4. Soit (ω, μ) un système générateur et soit S la suite multiplicative sur Λ qui correspond à (ω) .

PROPOSITION. Si S satisfait aux conditions de la proposition 18.6, pour que l'on ait $\psi_*(a_n)[x] \equiv \sigma(x)/8 \pmod{2}$ pour tout $x \in W_{8n+4}^U$, il faut et il suffit que l'on ait, pour $n \geq 1$, $\psi_*(a_n)[z_{8n+4}] \equiv 0 \pmod{2}$, où z_{8n+4} est le générateur (sur $\mathbb{Z}(2)$) décrit dans II.3 .

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire, puisque $\sigma(z_{8n+4}) = 0$ (cf. II.5) . Supposons que $\psi_*(a_n)[z_{8n+4}] \equiv 0 \pmod{2}$ ($n \geq 1$) .

On a $W_*^U \otimes \mathbb{Z}(2) \simeq \mathbb{Z}(2)[x_2, z_4, z_8, \dots]$. Soit $x \in W_{8n+4}^U$ un monôme en x_2, z_4, z_8, \dots . Alors, on a :

soit a) x est divisible par l'un des z_{4n-2} ; alors $x = z_{4n-2} * y = z_{4n-2} \cdot y$.

D'où $\sigma(x) = 0$ et $\psi_*(a_n)[x] = 0$ (nombre de Pontriaguine rationnel !) ;

soit b) x est divisible par l'un des z_{8m+4} ; alors $x = z_{8m+4} * y$. Donc $\psi_*(a_n)[x] \equiv \psi_*(a_m)[z_{8m+4}]\sigma(y) \equiv 0 \equiv \sigma(x) \pmod{2}$, en vertu de la proposition 18.7 ;

soit c) x est divisible par $v = x_2 * x_2$; alors $x = v * y$ et on a :

$\psi_*(a_n)[x] = \psi_*(1)[v] \cdot \sigma(y) \equiv \sigma(y) \equiv \sigma(x)/8 \pmod{2}$, en vertu de 18.7, et de ce que

$a_0 = \omega_0 + \mu_1 = 1 + \mu_1$, $\psi_*(\mu_1)[v] \equiv 0 \pmod{2}$, $\psi_*(1)[v] \equiv 1 \pmod{2}$ et $\sigma(v) = -8$ (cf. 18.5) .

Comme W_{8n+4}^U est engendré sur $\mathbf{Z}_{(2)}$ par les monômes des types a)-c), la proposition en découle.

19.5. La proposition 19.4 nous indique la nécessité de savoir calculer $\psi_*(a_n)[z_{8n+4}]$

Soit A une Λ -algèbre arbitraire et soit S une suite multiplicative sur A .

Nous allons calculer $S[z_{8n+4}] \in A$.

Rappelons que z_{8n+4} est représenté par la sous-variété V^{8n+4} de $P_1(\mathbb{C}) \times P_2^*(\mathbb{C}) \times P_{4n}^*(\mathbb{C})$ ($n \geq 1$) duale au fibré $\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \eta_{4n}$. D'après les formules classiques de Hirzebruch⁵⁷:

$$S[V^{8n+4}] = \langle Q(u+v+w) \cdot S(P_1(\mathbb{C})) \otimes S(P_2^*(\mathbb{C})) \otimes S(P_{4n}^*(\mathbb{C})), [P_1(\mathbb{C}) \times P_2^*(\mathbb{C}) \times P_{4n}^*(\mathbb{C})] \rangle,$$

où $u = c_1(\eta_1) \otimes 1 \otimes 1$; $u^2 = 0$,
 $v = 1 \otimes c_1(\eta_2) \otimes 1$; $v^3 = 0$,
 $w = 1 \otimes 1 \otimes c_1(\eta_{4n})$; $w^{4n+1} = 0$.

On a :

$$S(P_1(\mathbb{C})) = 1 ;$$

$$S_1 = 1 \otimes S(P_2^*(\mathbb{C})) \otimes 1 = P(v^2)^3 = \left(\frac{v}{Q(v)}\right)^3 = 1 + r_1 v^2$$

(où $R(x) = x + \frac{r_1}{3} x^3 + \dots$) ;

$$S_2 = 1 \otimes 1 \otimes S(P_{4n}^*(\mathbb{C})) = \left(\frac{w}{Q(w)}\right)^{4n+1} .$$

De plus, on a :

$$Q(u+v+w) = Q(w) + Q'(w)(u+v) + \frac{Q''(w)}{2} (2uv+v^2) + \frac{Q'''(w)}{2} uv^2 .$$

Donc :

$$Q(u+v+w) \cdot S_1 \cdot S_2 = [r_1 Q'(w) uv^2 + \frac{Q'''(w)}{2} uv^2 + \text{termes non divisibles par } uv^2] \left(\frac{w}{Q(w)}\right)^{4n+1} .$$

Comme l'orientation de $P_2^*(\mathbb{C})$ est l'opposée de celle de $P_2(\mathbb{C})$, il résulte que :

$$\begin{aligned}
 S[V] &= - \langle (r_1 Q'(w) + \frac{Q''(w)}{2}) (\frac{w}{Q(w)})^{4n+1}, [P_{4n}^*(C)] \rangle = \\
 &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (r_1 Q'(w) + \frac{Q''(w)}{2}) \frac{dw}{Q(w)^{4n+1}} = \\
 &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (r_1 Q'(R(x)) + \frac{Q''(R(x))}{2}) \frac{R'(x) dx}{x^{4n+1}},
 \end{aligned}$$

où l'on a posé $w = R(x)$.

En dérivant $Q(R(x)) = x$ successivement trois fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Q'(R(x)) &= \frac{1}{R'(x)}, \\
 Q''(R(x)) &= - \frac{R''(x)}{(R'(x))^3}, \\
 Q'''(R(x)) &= \frac{3(R''(x))^2 - R'''(x)R'(x)}{(R'(x))^5}.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 S[V] &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (r_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(R''(x))^2 - R'''(x)R'(x)}{(R'(x))^4}) \frac{dx}{x^{4n+1}} = \\
 &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{2} \frac{3(R''(x))^2 (R'(x))^2 - R'''(x)(R'(x))^3}{(R'(x))^6} \frac{dx}{x^{4n+1}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{2} \left(\frac{R''(x)}{(R'(x))^3} \right)' \frac{dx}{x^{4n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{4n+1}{2} \left(\frac{R''(x)}{(R'(x))^3} \right) \frac{dx}{x^{4n+2}} = \\
 &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{4n+1}{4} \left(\frac{1}{(R'(x))^2} \right)' \frac{dx}{x^{4n+2}} = \\
 &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(4n+1)(2n+1)}{2} \left(\frac{1}{(R'(x))^2} \right) \frac{dx}{x^{4n+3}} = \\
 &= - \frac{(4n+1)(2n+1)}{2} \oint_{\gamma} \frac{1}{(R'(x))^2} \frac{dx}{x^{4n+2}}.
 \end{aligned}$$

PROPOSITION. Soit S une suite multiplicative sur une Λ -algèbre A et soit

$R(x)$ son logarithme. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$S[z_{8n+4}] = -\frac{(4n+1)(2n+1)}{2} x_{4n+2} \left(\frac{1}{(R'(x))^2}\right).$$

Exemple. Le logarithme de la suite multiplicative de Hirzebruch L est

$R(x) = \operatorname{argth} x$. Donc :

$$\sigma(z_{8n+4}) = L[z_{8n+4}] = -\frac{(4n+1)(2n+1)}{2} x_{4n+2} ((1-x^2)^2) = 0,$$

ce que nous savions déjà (cf. II.5).

COROLLAIRE. Soit S une suite multiplicative sur Λ et soit $R(x)$ son logarithme.

Alors, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$S_{2n}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n}))[z_{8n+4}] = -\frac{(4n+1)(2n+1)}{8} x_{4n+2} \left(\left(\frac{R(x)}{R'(x)}\right)^2\right).$$

Démonstration. Soit \hat{S} la suite multiplicative de logarithme $\hat{R}(x) = R(x) - \frac{1}{24} R(x)^3$. t sur $A = \mathbb{Q}[t]/t^2 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\hat{R}'(x))^2} &= \frac{1}{(R'(x) - \frac{1}{8} R(x)^2 R'(x)t)^2} = \frac{1}{(R'(x))^2} \left(1 + \frac{1}{4} R(x)^2 t\right) = \\ &= \frac{1}{(R'(x))^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{R(x)}{R'(x)}\right)^2 t. \end{aligned}$$

Donc, en vertu de la proposition 19.5 et de la proposition 19.3 :

$$\begin{aligned} \hat{S}[z_{8n+4}] &= S[z_{8n+4}] + T_{2n+1}(p_1, \dots, p_{2n+1})[z_{8n+4}] \cdot t = \\ &= S[z_{8n+4}] - \frac{(4n+1)(2n+1)}{8} x_{4n+2} \left(\left(\frac{R(x)}{R'(x)}\right)^2\right) t = \\ &= S[z_{8n+4}] + S_{2n}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n}))[z_{8n+4}] \cdot t, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

19.6. Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME. Soit (ω, τ) un système générateur sur Λ et soit $\hat{S} = S + T.t$ la suite multiplicative sur $A = \Lambda[t]/t^2 = 0$ qui lui correspond. On note $\hat{R}(x) = R(x) + B(x)t$ le logarithme de \hat{S} .

Alors, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1° Pour tout $n \geq 1$, on a :

a) $r_n \equiv 1 \pmod{2}$,

b) $x_{4n+2} \left(\frac{B'(x)}{R'(x)} \right)^3 \equiv \frac{1}{8} x_{4n+2} \left(\left(\frac{R(x)}{R'(x)} \right)^2 \right) \pmod{2}$;

2° Pour tout $n \geq 0$, la classe $a_n = \omega_{2n+\mu_{2n+1}}$ satisfait aux conditions du théorème 17.4.

Remarque. $x_{4n+2} \left(\left(\frac{R(x)}{R'(x)} \right)^2 \right)$ est divisible par 8 dans Λ , puisque $S_{2n}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n})) [z_{8n+4}] \in \Lambda$ (cf. le corollaire 19.5).

Démonstration. Calculons $\psi_*(a_n) [z_{8n+4}]$:

$$\begin{aligned} \psi_*(a_n) [z_{8n+4}] &= S_{2n}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n})) [z_{8n+4}] + \\ &\quad + T_{2n+1}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n+1})) [z_{8n+4}]. \end{aligned}$$

On a :

$$S_{2n}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n})) [z_{8n+4}] = -\frac{(4n+1)(2n+1)}{8} x_{4n+2} \left(\left(\frac{R(x)}{R'(x)} \right)^2 \right)$$

(corollaire 19.5).

Pour calculer :

$$T_{2n+1}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n+1})) [z_{8n+4}] = T_{2n+1}(p_1, \dots, p_{2n+1}) [z_{8n+4}],$$

appliquons la proposition 19.5 à la suite \hat{S} :

$$\hat{S} [z_{8n+4}] = -\frac{(4n+1)(2n+1)}{2} x_{4n+2} \left(\frac{1}{\hat{R}'(x)} \right).$$

Or,

$$\frac{1}{\hat{R}'(x)^2} = \frac{1}{(R'(x) + B'(x)t)^2} = \frac{1}{(R'(x))^2} \left(1 - 2 \frac{B'(x)}{R'(x)} . t \right),$$

d'où :

$$\hat{S}[z_{8n+4}] = S[z_{8n+4}] + (4n+1)(2n+1) x_{4n+2} \left(\frac{B'(x)}{(R'(x))^3} \right) .$$

Donc, la condition b) est équivalente à la condition $\psi_*(a_n)[z_{8n+4}] \equiv 0 \pmod{2}$.

On a maintenant :

2° \Rightarrow a) en vertu de la proposition 18.5 et de la proposition 18.6.

2° \Rightarrow b) car $\sigma(z_{8n+4}) = 0$;

a) & b) \Rightarrow 2° en vertu de la proposition 19.4.

§ 20. - CALCUL EXPLICITE DES CLASSES a_n

Dans ce paragraphe, nous allons décrire toutes les suites multiplicatives \hat{S} sur $\Lambda[t]/t^2 = 0$ qui satisfont aux conditions a) et b) de 19.6.

20.1 Remarquons d'abord que le nombre

$$S_{2n}(\psi_*(\pi_1), \dots, \psi_*(\pi_{2n}))[z_{8n+4}]$$

ne dépend modulo 2 que de $R(x) \bmod 2$. Il en résulte que :

$$\frac{1}{8} x_{4n+2} \left(\left(\frac{R(x)}{R'(x)} \right)^2 \right) \bmod 2$$

ne dépend que de $R(x) \bmod 2$. Comme $R(x)$ satisfait à a) de 19.6 si et seulement si $R(x) \equiv x/1+x^2 \bmod 2$, et comme $(x/1+x^2)' = (1-x^2)/(1+x^2)^2$, a) entraîne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} x_{4n+2} \left(\left(\frac{R(x)}{R'(x)} \right)^2 \right) &\equiv \frac{1}{8} x_{4n+2} \left(x^2 \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^2 \right) \equiv \frac{1}{8} x_{4n} \left(\left(\frac{1+x^2}{1-x} \right)^2 \right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{8} x_{4n} ((1+2x^2+x^4)(1+2x^2+3x^4+\dots)) \equiv \frac{1}{8} ((2n+1) + 2.2n + (2n-1)) \\ &\equiv n \bmod 2. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant rechercher les séries $B(x)$ sur Λ telles que

$B(x) = o(x)$, $B(-x) = -B(x)$ et

$$x_{4n+2} \left(\frac{B'(x)}{R'(x)^3} \right) \equiv n \bmod 2 \quad (n \geq 1).$$

Cette dernière condition ne dépend que de $B(x) \bmod 2$ et de $R(x) \bmod 2$. On peut donc l'écrire, en posant $R(x) = \operatorname{argth} x$:

$$x_{4n+2} (B'(x)(1+x^2)^3) \equiv n \bmod 2 \quad (n \geq 1),$$

ou encore :

$$x_{4n+3}(B(x)) + x_{4n+1}(B(x)) + x_{4n-1}(B(x)) + x_{4n-3}(B(x)) \equiv n \bmod 2.$$

Posons $q_n = \kappa_{4n+1}(B(x)) + \kappa_{4n+3}(B(x)) \pmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On a : $q_0 = \kappa_3(B(x))$; puisque $B(x) = o(x)$. Il est évident que si $B(x)$ satisfait à la condition b) de 19.6, pour la suite q_0, q_1, \dots , il n'y a que deux possibilités :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
q_n	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...

ou

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
q_n	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...

On peut donc répartir les séries $B(x)$ satisfaisant à b) en deux types :

I type : $q_0 = \kappa_3(B(x)) \equiv 1 \pmod 2$

II type : $q_0 = \kappa_3(B(x)) \equiv 0 \pmod 2$.

Par exemple, la série $B_1(x) = \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x^{15} + x^{17}}{1+x^{16}}$ est du premier type,

alors que $B_2(x) = \frac{x^7 + x^9}{1+x^{16}}$ est du second type.

L'intérêt de considérer les deux types réside dans ce que, si $B(x)$ et $\tilde{B}(x)$ sont deux séries du même type, on a :

$$B(x) - \tilde{B}(x) \equiv \sum_{i \geq 1} \alpha_i (x^{4i+1} + x^{4i+3}) , \quad \alpha_i \in \Lambda .$$

Inversement, si $B(x)$ satisfait à la condition b) de 19.6 et si

$$\sum_{i \geq 1} \alpha_i (x^{4i+1} + x^{4i+3}) , \quad \alpha_i \in \Lambda$$

est une série arbitraire, la série :

$$\tilde{B}(x) = B(x) - \sum_{i \geq 1} \alpha_i (x^{4i+1} + x^{4i+3})$$

satisfait également à b) et appartient au même type que $B(x)$.

Nous venons de démontrer :

PROPOSITION. Pour que la suite multiplicative \hat{S} sur $A = \Lambda[t]/t^2 = 0$ satisfasse aux conditions du théorème 19.6, il faut et il suffit que :

a) $R(x) \equiv x/1 + x^2 \pmod{2}$;

b) Modulo 2 on ait : $B(x) \equiv \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x^{15} + x^{17}}{1+x^{16}} + \sum_{i \geq 1} \alpha_i (x^{4i+1} + x^{4i+3})$

ou $B(x) \equiv \frac{x^7 + x^9}{1+x^{16}} + \sum_{i \geq 1} \alpha_i (x^{4i+1} + x^{4i+3})$, où $\alpha_i \in \Lambda$ sont des coefficients

arbitraires.

20.2. Il est facile de décrire explicitement les polynômes \hat{S}_n (modulo 2) qui correspondent aux logarithmes $\hat{R}(x)$ donnés par la proposition 20.1.

D'abord, on a : $S_n(x_1, \dots, x_n) \equiv L_n(x_1, \dots, x_n) \pmod{2}$, où L est la suite de Hirzebruch pour la signature. En effet, le logarithme de L est $\text{argh } x \equiv R(x) \pmod{2}$.

Pour calculer $T_n(x_1, \dots, x_n)$ il faut, en vertu de 19.1, calculer modulo 2 les coefficients de la série $\frac{Q'(x) B(Q(x))}{Q(x)}$;

Pour $Q(x)$, on a :

$$Q(x) \equiv \text{th } x \equiv \sum_{j \geq 1} (-1)^{j+1} \frac{2^{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!} B_j x^{2j-1} \equiv \sum_{j \geq 1} x^{2^j-1} \pmod{2} .$$

Nous allons calculer $\frac{Q'(x) B(Q(x))}{Q(x)} \pmod{2}$ pour $B = B_1$, $B = B_2$ et $B = x^{4i+1} + x^{4i+3}$. Remarquons d'abord que si $D'(x) = B(x)/x$, $D(0) = 0$, on a :

$$\frac{Q'(x) B(Q(x))}{Q(x)} = D(Q(x))' .$$

Par ailleurs, il est clair que $D(x) \equiv B(x) \pmod{2}$, donc :

$$\frac{Q'(x) B(Q(x))}{Q(x)} \equiv \frac{B(Q(x))}{x} \pmod{2}$$

Il nous sera utile de savoir que : $\frac{x}{Q(x)} + x Q(x) \equiv 1 \pmod{2}$. En effet,

$$\frac{x}{Q(x)} \equiv \frac{x}{\text{th } x} \equiv \sum_{j \neq 0} (-1)^{j+1} \frac{2^{2j}}{(2j)!} B_j x^{2j} \equiv \sum_{j \neq 0} x^{2^j} .$$

Donc :

$$\frac{x}{Q(x)} + x Q(x) \equiv \sum_{j \neq 0} x^{2^j} + \sum_{j \neq 1} x^{2^j} \equiv 1 \pmod{2} .$$

On en déduit, par exemple, que :

$$Q(x)^{n-1} + Q(x)^{n+1} = \frac{Q(x)^n}{x} \left(\frac{x}{Q(x)} + x Q(x) \right) \equiv \frac{Q(x)^n}{x}$$

1) $B = B_1$.

$$\begin{aligned} \frac{Q'(x) B_1(Q(x))}{Q(x)} &\equiv \frac{B_1(Q(x))}{x} \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{Q(x)^3}{1+Q(x)^2} + \frac{Q(x)^{15} + Q(x)^{17}}{1+Q(x)^{16}} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{x} (Q(x)^2 \cdot x + Q(x)^8 \cdot x^7), \end{aligned}$$

car

$$\frac{Q(x)}{1+Q(x)^2} \equiv \operatorname{argth} Q(x) \equiv x \quad \text{et} \quad \frac{Q(x)^{15} + Q(x)^{17}}{1+Q(x)^{16}} \equiv \frac{1}{x} \frac{Q(x)^{16}}{1+Q(x)^{16}} \equiv Q(x)^8 x^7.$$

Par ailleurs,

$$Q(x)^2 x + Q(x)^8 x^7 \equiv \frac{1}{x} ((Q(x)x)^2 + (Q(x)x)^8) \equiv \frac{1}{x} \left(\sum_{j \geq 1} x^{2^{j+1}} + \sum_{j \geq 1} x^{2^{j+3}} \right) \equiv x^3 + x^7.$$

Donc,

$$\frac{Q'(x) B_1(Q(x))}{Q(x)} \equiv x^2 + x^6 \pmod{2}.$$

2) $B = B_2$.

$$\begin{aligned} \frac{Q'(x) B_2(Q(x))}{Q(x)} &\equiv \frac{B_2(Q(x))}{x} \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{Q(x)^7 + Q(x)^9}{1+Q(x)^{16}} \right) \equiv \frac{1}{x^2} \frac{Q(x)^8}{1+Q(x)^{16}} \equiv \\ &\equiv x^6 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{Q'(x) B_2(Q(x))}{Q(x)} \equiv x^6 \pmod{2}.$$

3) $B(x) = x^{4i+1} + x^{4i+3}$.

$$\frac{Q'(x) B(Q(x))}{Q(x)} \equiv \frac{B(Q(x))}{x} \equiv \frac{Q(x)^{4i+1} + Q(x)^{4i+3}}{x} \equiv \frac{Q(x)^{4i+2}}{x^2}.$$

Donc, si on prend : $B(x) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i (x^{4i+1} + x^{4i+3})$, on a :

$$\frac{Q'(x)B(Q(x))}{Q(x)} \equiv \frac{1}{x^2} \sum_{i \geq 1} \alpha_i Q(x)^{4i+2} \equiv \frac{1}{x^2} (\sum_{i \geq 1} \alpha_i Q(x)^{2i+1})^2 .$$

Comme la série $Q(x)$ est inversible, quand $\sum_{i \geq 1} \alpha_i x^{2i+1}$ parcourt l'ensemble des séries $f(x)$ sur Λ telles que $f(x) = o(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, $f(Q(x))$ parcourt le même ensemble, la réduction modulo 2 de $(f(Q(x)))^2$ parcourt l'ensemble des séries de la forme $\sum_{i \geq 1} \beta_i x^{4i+2}$ ($\beta_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), alors que $f^2(Q(x))/x^2$ parcourt l'ensemble des séries $\sum_{i \geq 1} \beta_i x^{4i}$ ($\beta_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Nous avons démontré :

THÉORÈME. Pour que la suite multiplicative \hat{S} sur $A = \Lambda[t]/t^2 = 0$ satisfasse aux conditions du théorème 19.6, il faut et il suffit que :

a) Pour tout $n \geq 0$, on ait :

$$S_n(x_1, \dots, x_n) \equiv L_n(x_1, \dots, x_n) \pmod{2} ;$$

b) Il existe une série $\sum_{i \geq 1} \beta_i x^{4i}$ ($\beta_i \in \Lambda$) telle que :

soit pour tout $n \geq 1$ on ait :

$$T_n(x_1, \dots, x_n) \equiv x_1 L_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + (x_1^3 + x_1 x_2 + x_3) L_{n-3}(x_1, x_2, \dots, x_{n-3}) + \\ + \sum_{i \geq 1} \beta_i s_{2i}(x_1, \dots, x_{2i}) L_{n-2i}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2i}) ,$$

soit pour tout $n \geq 1$ on ait :

$$T_n(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1^3 + x_1 x_2 + x_3) L_{n-3}(x_1, x_2, \dots, x_{n-3}) + \\ + \sum_{i \geq 1} \beta_i s_{2i}(x_1, \dots, x_{2i}) L_{n-2i}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2i}) .$$

20.3. Explicitons les classes $a_n \in K0(BS0) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $n \leq 2$, qui correspondent aux suites \hat{S} décrites dans 20.2. On a d'abord :

$$L_0 = 1$$

$$L_1(x_1) \equiv x_1$$

$$L_2(x_1, x_2) \equiv x_2 + x_1^2$$

$$L_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2 x_1$$

$$L_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_4 + x_3 x_1 + x_2^2 + x_1^4 \quad (\text{cf. [24], chap. I, § 1}).$$

Ensuite, on a :

$$s_1(x_1) \equiv x_1$$

$$s_2(x_1, x_2) \equiv x_1^2$$

$$s_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^3 + x_1 x_2 + x_3$$

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_1^4 \quad (\text{cf. [36], § 16, p. 188}).$$

Pour les suites du premier type, on obtient :

$$T_1(x_1) \equiv x_1$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3 + \beta_1 x_1^3 \quad (\beta_1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$T_5(x_1, \dots, x_5) \equiv x_1 x_4 + x_2 x_3 + \beta_1 x_1^3 x_2 + \beta_2 x_1^5, \quad (\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Pour les suites du second type, on a :

$$T_1(x_1) \equiv x_1,$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^3 + x_1 x_2 + x_3 + \beta_1 x_1^3 \quad (\beta_1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$T_5(x_1, \dots, x_5) \equiv x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3 + \beta_1 x_1^3 x_2 + \beta_2 x_1^5, \quad (\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Pour les classes $a_n \in K0(\text{BS0}) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on obtient :

I type.

$$a_0 = 1 + \pi_1$$

$$a_1 = \pi_2 + \pi_1^2 + \pi_3 + \beta_1 \pi_1^3$$

$$a_2 = \pi_4 + \pi_3 \pi_1 + \pi_2^2 + \pi_1^4 + \pi_4 \pi_1 + \pi_3 \pi_2 + \beta_1 \pi_2 \pi_1^3 + \beta_2 \pi_1^5.$$

II type.

$$a_0 = 1 + \pi_1$$

$$a_1 = \pi_2 + \pi_1^2 + \pi_3 + \pi_2 \pi_1 + \pi_1^3 + \beta_1 \pi_1^3$$

$$a_2 = \pi_4 + \pi_3 \pi_1 + \pi_2^2 + \pi_1^4 + \pi_3 \pi_2 + \pi_3 \pi_1^2 + \pi_2^2 \pi_1 + \beta_1 \pi_2 \pi_1^3 + \beta_2 \pi_1^5 .$$

APPENDICE I - DÉMONSTRATION DES LEMMES 1, 2 et 3

A l'aide du théorème de transversalité de Thom, on démontre ici les trois lemmes du § 2.

I. 1. Soit W une variété compacte, $\Xi = (E, p, W)$ un fibré vectoriel lisse sur W , $S_1 : W \rightarrow E$ une section lisse de Ξ .

On considère l'espace \mathfrak{F} des applications lisses $F : W \rightarrow E$ qui coïncident avec S_1 au voisinage du bord bW , avec la C^∞ -topologie, et le sous-espace $\Gamma \subset \mathfrak{F}$ des sections lisses de Ξ qui coïncident avec S_1 au voisinage de bW .

Par ailleurs, soit G le groupe des difféomorphismes de W identiques au voisinage de bW . On définit une action de G sur \mathfrak{F} par $g(F) = F \circ g$, $F \in \mathfrak{F}$, $g \in G$.

PROPOSITION. Soit $\Omega \subset \mathfrak{F}$ un sous-ensemble dense de \mathfrak{F} . On suppose que Ω est G -invariant, c'est-à-dire que si $g \in G$, $g(\Omega) \subset \Omega$. Alors $\Gamma \cap \Omega \neq \emptyset$.

Démonstration. On sait (cf. [46], chap. II, lemme 2) que toute application $W \rightarrow W$ proche de l'identité et identique au voisinage de bW appartient à G . Il existe donc un voisinage U de S_1 dans \mathfrak{F} tel que si $F \in U$, $p \circ F \in G$. Comme Ω est dense dans \mathfrak{F} , il existe un $F \in U \cap \Omega$. $dF : TW \rightarrow TE$ est alors un morphisme injectif, W est compact et $F : W \rightarrow F(W)$ est une bijection. Donc F est un plongement et $p|_{F(W)} : F(W) \rightarrow W$ est un difféomorphisme. Notons alors $g = (p \circ F)^{-1}$, et soit $S = g(F) = F \circ g$. Comme Ω est G -invariant, $S \in \Omega$. Par ailleurs, $p \circ S = \text{id}$, donc $S \in \Gamma$, d'où $\Gamma \cap \Omega \neq \emptyset$.

I. 2. Démonstration du lemme 1.

Avec les notations de 2.1, posons $M = bW$, $\xi = \Xi|_M$. Choisissons un collier $M \times [0, 1] = U \subset W$ du bord bW . On notera $\pi : U \rightarrow M$ la projection

$M \times [0, 1] \rightarrow M$. Comme π est C^∞ -homotope (dans U) à l'application identique, il existe un difféomorphisme $R : E(\pi^* \xi) \rightarrow p^{-1}(U)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E(\pi^* \xi) & \xrightarrow{R} & p^{-1}(U) \\ p \searrow & & \swarrow p \\ & U & \end{array}$$

soit commutatif. La structure du fibré $p : E(\pi^* \xi) \rightarrow U$ peut être décrite comme suit : $E(\pi^* \xi) = E(\xi) \times [0, 1]$ et la projection p coïncide avec $p_0 \times \text{id}$, où $p_0 : E(\xi) \rightarrow M$ est la projection de ξ .

Soit maintenant $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application de classe C^∞ telle que $\lambda(t) = 1$ pour $t \in [0, 1/3]$ et $\lambda(t) = 0$ pour $t \in [2/3, 1]$. On définit alors une section $S_1 : W \rightarrow E$ par :

$$S_1(w) = \begin{cases} 0, & w \in W - U \\ R(\lambda(t) s(m), t), & w = (m, t) \in U = M \times [0, 1] \end{cases}$$

S_1 est une section lisse de Ξ qui coïncide avec s sur le bord bW et qui est transverse à la section nulle au voisinage de bW (dans $M \times [0, 1/3]$).

On applique maintenant la proposition I. 1 à W, Ξ, S_1 et Ω , où Ω est le sous-espace de \mathcal{F} des applications $W \rightarrow E$ qui coïncident avec S_1 au voisinage de bW et qui sont transverses à la section nulle de Ξ . Pour ce faire, on remarque d'abord que Ω est G -invariant. Le théorème de transversalité de Thom implique que Ω est dense dans \mathcal{F} , donc Ω vérifie les hypothèses de 2.1 et, si $S \in \Gamma \cap \Omega$, S prolonge s et est transverse à la section nulle. C.Q.F.D.

I. 3. Nous avons besoin maintenant d'une autre conséquence de la proposition I.1.

PROPOSITION. Soit M une variété close, $V \subset M$ une sous-variété close, $\xi = (E, p, M)$ un fibré vectoriel lisse sur M . Alors il existe une section lisse $s : M \rightarrow E$ de ξ transverse à la section nulle de ξ et à $V \subset M \subset E$.

Démonstration. Soient Ω_1 et Ω_2 les sous-espaces de l'espace \mathcal{F} des applications lisses $F: M \rightarrow E$, composés des applications transverses respectivement à la section nulle et à $V \subset E$. D'après le théorème de transversalité de Thom, Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts denses de \mathcal{F} . Il s'ensuit que $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ est un ouvert dense de \mathcal{F} . De plus, Ω est manifestement G -invariant, où G est le groupe des difféomorphismes $M \rightarrow M$. En appliquant la proposition I.1 (avec pour S_1 la section nulle), on voit que Ω contient une section s de ξ . C.Q.F.D.

I. 4. Démonstration du lemme 2.

Dans les notations de 2.4, on considère $M_1 = s_1(M) \subset E_1$. Le fibré $\delta_1 = p_1^* \omega_2$ a pour espace E , pour base E_1 . Soit q_1 sa projection. De même, soit $q_2: E \rightarrow E_2$ la projection du fibré $\delta_2 = p_2^* \omega_1$. On pose $V_1 = M_1 \cap M$. La proposition I.3 appliquée à M_1, V_1 et $\delta_1|_{M_1}$, implique l'existence d'une section $\tilde{s}: M_1 \rightarrow E(\delta_1|_{M_1})$ transverse à la section nulle M_1 et à $V_1 \subset M_1$. On pose $s_2 = q_2 \circ \tilde{s}$, où s est l'application composée

$$M \xrightarrow{s_1} M_1 \xrightarrow{\tilde{s}} E(\delta_1|_{M_1}) \subset E(\delta_1) = E.$$

On voit tout de suite que s_2 est une section de ω_2 et que $s = (s_1, s_2)$. On va montrer que s_2 satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme 2.

D'abord, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(\delta_1|_{M_1}) & \xrightarrow{q_2} & E_2 \\ q_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ M_1 & \xrightarrow{p_1} & M \end{array}$$

les deux flèches horizontales étant des difféomorphismes. Comme \tilde{s} est transverse à M_1 , il en découle que s_2 est transverse à $M \subset E_2$.

Ensuite, soient $M_2 = s_2(M)$, $V_2 = M_2 \cap M$, $\bar{V} = \tilde{s}(M_1) \cap M_1$. On voit tout de suite que : $p_1(\bar{V}) = q_2(\tilde{s}(M_1) \cap M_1) = q_2(\tilde{s}(M_1) \cap M) = M_2 \cap M = V_2$. Comme \tilde{s} est

transverse $M_1 \subset E(\delta_1 | M_1)$ et $V_1 \subset M_1$, \bar{V} coupe transversalement V_1 . Donc, puisque $p_1 | M_1$ est un difféomorphisme, V_2 coupe transversalement V_1 .

Enfin, comme M_1 coupe M transversalement (dans E_1), le fibré normal de V_1 dans M_1 s'identifie à $\omega_1 | V_1$. Donc, le fibré normal de V_1 dans $E(\delta_1 | M_1)$ s'identifie au fibré $(\omega_1 \oplus \omega_2) | V_1$. Soit $x \in M \cap s(M)$. Alors $x = q_1(x) \in q_1(M \cap s(M)) \subset M \cap M_1 = V_1$. Comme $s(M)$ coupe transversalement V_1 dans $E(\delta_1 | M_1)$, $T_x(s(M))$ se projette surjectivement sur $(\omega_1 \oplus \omega_2) | \{x\}$, donc sur l'espace normal de M dans E . Il en résulte que s est transverse à M . C.Q.F.D

I.5. Le reste de l'appendice est consacré au lemme 3. La démonstration que nous en donnons ici nous a été communiquée par L.C. Siebenmann.

Soit M une variété close, $\xi = (E, p, M)$ un fibré vectoriel lisse sur M , (V, J) une sous-variété caractéristique de (M, ξ) correspondant à une section $s : M \rightarrow E$.

On choisit d'abord un voisinage tubulaire U_1 de V dans M et une rétraction lisse $r : U_1 \rightarrow V$. Comme r est C^∞ -homotope à l'identité (dans U_1), il existe un isomorphisme lisse $\xi | U_1 \rightarrow r^*(\xi | V)$. A l'aide de cet isomorphisme, on construit une rétraction de fibrés vectoriels lisses $\rho = (R, r) : \xi | U_1 \rightarrow \xi | V$ qui donne lieu à un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(\xi | U_1) & \xrightarrow{R} & E(\xi | V) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ U_1 & \xrightarrow{r} & V \end{array}$$

où R est un isomorphisme sur chaque fibre $p^{-1}(x)$, $x \in U_1$, et est identique sur $E(\xi | V) \subset E(\xi | U_1)$.

PROPOSITION. Il existe un voisinage $U_2 \subset U_1$ de V dans M tel que R soit un plongement de U_2 dans $E(\xi | V)$.

Démonstration. Comme $s : M \rightarrow E$ est transverse à la section nulle, la projection

$$TM|V \rightarrow Ts(M)|V \rightarrow \xi|V$$

est surjective sur chaque fibre et a pour noyau le sous-fibré TV . Il en résulte que

$$TM|V \rightarrow Ts(M)|V \xrightarrow{dR} TE(\xi|V)|V$$

est un isomorphisme sur chaque fibre.

On en déduit par continuité que, pour un voisinage compact $U_2 \subset U_1$ de V dans M , le morphisme $d(Rs)|U_2$:

$$TU_2 \xrightarrow{ds} Ts(U_2) \xrightarrow{dR} TE(\xi|V)$$

est bijectif sur chaque fibre. Comme $Rs|V = id$ et que U_2 est compact, $Rs|U_2$ est un plongement. C.Q.F.D.

I. 6. Démonstration du lemme 3.

En utilisant l'isomorphisme $J : \zeta \rightarrow \xi|V$ et la proposition I.5, on construit d'abord un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D(\xi|U) & \xrightarrow{R_0} & D\zeta \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{r} & V \end{array}$$

dans lequel r est une rétraction lisse d'un voisinage $U \subset U_2$ de V dans M , R_0 est une application induite par le morphisme $J^{-1} \circ p : \xi|U \rightarrow \zeta$, et tel que $q = R_0 s : U \rightarrow D\zeta$ soit un difféomorphisme identique sur $V \subset U$.

On définit ensuite une application lisse $Q : E(\xi|U) \rightarrow E(\pi^*\zeta) \subset D\zeta \times E\zeta$ par $Q(y) = (R_0 s(x), R_0(y))$, où $y \in E(\xi|U)$ et $x = p(y)$. On voit d'abord que $Q(y)$ est bien dans $E(\pi^*\zeta)$ puisque $\pi(R_0 s(x)) = rps(x) = r(x)$ et $\pi R_0(y) = rp(y) = r(x)$.

Ensuite, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 E(\xi | U) & \xrightarrow{Q} & E(\pi^* \zeta) \\
 p \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 U & \xrightarrow{q} & D\zeta
 \end{array}$$

où π' est la projection du fibré $\pi^* \zeta$. En effet, si $y \in E(\xi | U)$, $\pi'Q(y) = \pi'(R_0 s(x), R_0(y)) = R_0 s(x) = q(x)$ et $qp(y) = q(x)$. Comme l'application $R : E(\xi | U) \rightarrow E(\xi | V)$ (cf. I.5) détermine un morphisme bijectif sur chaque fibre, Q détermine un morphisme $\xi | U \rightarrow \pi^* \zeta$ inversible sur chaque fibre, donc inversible puisque q est inversible.

Enfin, si $x \in U$, $Qs(x) = (R_0 s(x), R_0 s(x)) = (q(x), q(x)) = \omega(q(x))$. Donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E(\xi | U) & \xrightarrow{Q} & E(\pi^* \zeta) \\
 s \uparrow & & \uparrow \omega \\
 U & \xrightarrow{q} & D\zeta
 \end{array}$$

est commutatif.

On voit donc que si (H, h) est le morphisme $\pi^* \zeta \rightarrow \xi | U$ inverse de (Q, q) , (H, h) satisfait aux conditions du lemme 3.

Remarque : La démonstration ci-dessus n'utilise pas le fait que le ξ est un SO_2 -fibré. Le lemme 3 reste donc vrai pour un fibré vectoriel ξ arbitraire.

APPENDICE II - SIGNATURE DES SPIN-VARIÉTÉS

Dans cet appendice, nous démontrons le théorème 5.2. La démonstration est celle de [41] simplifiée par l'utilisation de la structure multiplicative de W_* et par l'introduction d'une extension quadratique Λ_* de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[u]$, inspirée par la lecture de l'article [18] de V.M. Buchstaber.

II.1. Nous nous placerons d'abord dans le cadre des U -variétés, c'est-à-dire de variétés compactes M dont le fibré tangent stable τM est muni d'une structure complexe.

Soit U_m le groupe unitaire. Il existe une suite exacte $1 \rightarrow SU_m \rightarrow U_m \xrightarrow{d} U_1 \rightarrow 1$, analogue à la suite 1.3, dans laquelle d associe à chaque matrice unitaire son déterminant. Il est donc possible de refaire pour les U -variétés toutes les constructions que l'on a faites dans les §§ 1 - 4 pour les $Spin^C$ -variétés. En particulier, on peut construire le groupe W_m^U à partir de U -variétés à déterminant sphérique et des homomorphismes $\partial : \Omega_m^U \rightarrow \Omega_{m-2}^{SU}$, $\Phi : \Omega_m^U \rightarrow W_m^U$ pour lesquels $\partial \circ \Phi = \partial$.

Nous avons également des homomorphismes d'oubli $\Omega_m^{SU} \rightarrow W_m^U \rightarrow \Omega_m^U$ qui permettent de définir un homomorphisme $d : W_m^U \rightarrow W_{m-2}^U$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_m^U & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{m-2}^{SU} \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 W_m^U & \xrightarrow{d} & W_{m-2}^U
 \end{array}$$

Si M et N sont deux U -variétés à déterminant sphérique, $M \times N$ n'a pas cette structure a priori. De fait, il est impossible de définir une structure d'anneau dans W_*^U pour laquelle $W_*^U \rightarrow \Omega_*^U$ est un homomorphisme d'anneaux. On peut

cependant munir W_*^U d'un produit $*$ pour lequel W_*^U a une structure simple :

PROPOSITION (cf. [48], chap. VIII, X).

(i) Pour $x, y \in W_*^U$, on pose $x * y = \Phi(x \cdot y)$, où $x \cdot y$ désigne le produit de x et y dans Ω_*^U . Alors $(W_*^U, *)$ est un anneau commutatif.

(ii) On a $x * y = x \cdot y + [V^4] dx \cdot dy$, où $[V^4] = [P_1(\mathbb{C})]^2 - [P_2(\mathbb{C})]$ (l'égalité doit être comprise comme égalité dans Ω_*^U).

(iii) $d(x * y) = dx \cdot y + x \cdot dy - [P_1(\mathbb{C})] dx \cdot dy$ (toujours dans Ω_*^U).

Soit M^{2r} une U -variété close. On notera $s_r[M]$ le nombre caractéristique de Chern correspondant au polynôme symétrique $t_1^r + \dots + t_N^r$ (N grand). Comme $s_r[M]$ est un invariant du U -cobordisme, on peut correctement parler de $s_r(z)$, où $z \in \Omega_{2r}^U$.

THÉORÈME (cf. [48], chap. X). L'anneau $(W_*^U, *)$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_2, y_6, y_8, \dots]$ où $x_2 = [P_1(\mathbb{C})]$ et où $y_{2i} \in W_{2i}^U$ sont des classes de cobordisme telles que $s_1(y_{2i}) = m(i) m(i+1)$.

Ici $m(i) = p$, si i est une puissance d'un nombre premier p et $m(i) = 1$ si i n'est pas une puissance d'un nombre premier.

II. 2. Soit $\mathbb{Z}_{(2)}$ le sous-anneau de \mathbb{Q} formé des fractions à dénominateur impair. Nous allons construire une base de l'anneau de polynômes $W_*^U \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$.

LEMME. Soit $x_2 = [P_1(\mathbb{C})]$ et $z_{2i} \in W_{2i}^U$ ($i \geq 3$) des éléments de W_*^U tels que $s_1(z_{2i}) = \pm m(i) m(i+1)$. Alors x_2, z_{2i} , $i \geq 3$, est un système de générateurs libre de l'anneau de polynômes W_*^U .

Démonstration. Il suffit de prouver que, pour tout $i \geq 3$:

$$z_{2i} = \sum_{j=1}^i y_{2j} + f(x_2, y_6, y_8, \dots, y_{2i-2})$$

f étant un polynôme sur \mathbb{Z} (par rapport à $*$!). Or, comme x_2, y_{2i} ($i \geq 3$) engendrent W_* , $z_{2i} = \lambda y_{2i} + f(x_2, y_6, \dots, y_{2i-2})$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ et f un polynôme sur \mathbb{Z} . $s_1(y_{2i}) = m(i)m(i+1)$. Donc, il faut prouver que $s_1(f(x_2, y_6, \dots, y_{2i-2})) = 0$, ou encore que s_1 s'annule sur les éléments décomposables de W_{2i}^U pour $i \geq 3$. Soit $a, b \in W_*^U$; $\deg a, b > 0$, $a * b \in W_{2i}^U$. Alors $s_1(a * b) = s_1(ab) + s_1([\bigvee^4] da db)$. $s_1(ab) = 0$ puisque s_1 s'annule sur les éléments décomposables de Ω_*^U . De même, $s_1([\bigvee^4] da db) = 0$ car soit $\deg(da) > 0$, soit $\deg(db) > 0$.

PROPOSITION. Soit $\overline{x_2} = [P_1(\mathbb{C})]$, $z_{2i} \in W_{2i}^U$ ($i \geq 3$) dès éléments tels que $s_1(z_{2i}) = a_i m(i)m(i+1)$ où a_i est un nombre entier impair. Alors x_2, z_{2i} ($i \geq 3$) est un système de générateurs libre de l'anneau de polynômes $W_*^U \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$.

Démonstration. Soit x_2, y_{2i} ($i \geq 3$) le système de générateurs du théorème II. 1. Alors $s_1(z_{2i} - (a_i - 1)y_{2i}) = m(i)m(i+1)$. En vertu du lemme, $z_{2i} - (a_i - 1)y_{2i}$ ($i \geq 3$) forment avec x_2 un système de générateurs libre de W_*^U . Comme $a_i - 1 \equiv 0 \pmod{2}$, il en résulte que x_2, z_{2i} ($i \geq 3$) forment un système de générateurs libre de $W_*^U \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Comme le $\mathbb{Z}_{(2)}$ -module $W_*^U \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$ est de type fini en chaque dimension et que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le corps des résidus de l'anneau local $\mathbb{Z}_{(2)}$, il s'ensuit que x_2, z_{2i} ($i \geq 3$) est un système de générateurs libre de $W_*^U \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$ (comme il résulte par exemple de la proposition 2. 8 de [7]).

II. 3. Considérons l'espace projectif $P_{2r}(\mathbb{C})$. Le fibré tangent stable $\tau P_{2r}(\mathbb{C})$ est isomorphe à $(2r + 1)\eta$ où η est le fibré canonique sur $P_{2r}(\mathbb{C})$. On peut donc munir $P_{2r}(\mathbb{C})$ d'une U -structure correspondant à l'isomorphisme (réel) $\tau P_{2r}(\mathbb{C}) \simeq (r + 1)\eta \oplus r\bar{\eta}$. On notera $P_{2r}^*(\mathbb{C})$ la U -variété obtenue. On définit des éléments de W_*^U de la manière suivante :

$$x_2 = [P_1(\mathbb{C})] ;$$

$$z_{8n+4} = \Phi([P_2^*(\mathbb{C})] \times [P_{4n}^*(\mathbb{C})]), \quad n \geq 1 ;$$

$$z_{8n} = \Phi([P_{2r}^*(\mathbb{C})] \times [P_{2s}^*(\mathbb{C})]), \quad n \geq 1 ,$$

où r et s sont choisis de manière à avoir $r, s \geq 1$, $r + s = 2n$, $\binom{4n}{2r} \equiv 1 \pmod{2}$ si n n'est pas une puissance de 2 et $\binom{4r}{2r} \equiv 2 \pmod{4}$ dans le cas contraire ;

$$z_{4n-2} = dz_{4n} \quad (n \geq 2) .$$

Nous allons voir que x_2, z_{2i} ($i \geq 3$) est un système de générateurs libre de $W_*^U \otimes \mathbb{Z}(2)$.

LEMME. Soient X_1 et X_2 deux U -variétés closes de dimension $2n_1$ et $2n_2$.

On pose $M = X_1 \times X_2$. Alors, si n_1 et $n_2 \geq 2$, on a :

$$(i) \quad s_n \Phi[M] = (-1)^n (n+1) c_1^n[M] \text{ et}$$

$$(ii) \quad s_{n-1} d[M] = (-1)^{n-1} c_1^n[M], \quad \text{où } n = n_1 + n_2.$$

Démonstration. (i) Par définition de Φ (cf. 4.1), $\Phi([M])$ est représenté par une sous-variété caractéristique $P(M)$ de $(M \times P_1(\mathbb{C}), \xi)$ où

$\xi = pr_1^* \det \tau M \otimes pr_2^* \tau_1$. On notera $j: P(M) \rightarrow M \times P_1(\mathbb{C})$ l'injection,

$c_1 = pr_1^* c_1(M)$, $u = pr_2^* c_1(\eta)$. Alors, $c(P(M)) = j^*(c(M)c(P_1(\mathbb{C}))/c(\xi)) =$

$= j^* \left(\frac{c(M)(1+2u)}{1+c_1+u} \right)$. Donc, $s_n \Phi[M] = \langle j^* v, P(M) \rangle$, où $v = s_{(n)}(c(M)) + (2u)^n +$

$+ (-c_1+u) + (c_1+u)^2 - \dots)^n$. On a noté ici $s_{(n)}(c(M))$ la classe caractéristique de Chern correspondant à $t_1^n + \dots + t_N^n$. On a $u^n = 0$. D'autre part, $P(M)$ est

duale à $c_1 + u$. Donc :

$$s_n \Phi[M] = \langle (c_1+u)(s_n(c(M)) + (-c_1+u) + (c_1+u)^2 - \dots)^n, M \times P_1(\mathbb{C}) \rangle =$$

$$= \langle s_{(n)}(c(M)), M \rangle + (-1)^n (c_1+u)^{n+1} [M \times P_1(\mathbb{C})] = (-1)^n (c_1+u)^{n+1} [M \times P_1(\mathbb{C})] =$$

$$= (-1)^n (n+1) c_1^n[M], \quad \text{car } s_n[M] = 0 .$$

(ii) $d[M]$ est représentée par une sous-variété caractéristique V de (M, ξ) , $\xi = \det \tau M$. Soit $j : V \rightarrow M$ l'injection. Alors $c(V) = j^*(c(M)/1+c_1)$, où $c_1 = c_1(M)$. Comme V est duale à c_1 , on a

$$\begin{aligned} s_{n-1}[V] &= \langle c_1(s_{(n-1)}(c(M)) + c_1^{n-1}(-1+c_1-c_1^2+\dots)^{n-1}), M \rangle = \\ &= \langle c_1 s_{(n-1)}(c(M)), M \rangle + (-1)^{n-1} c_1^n [M]. \end{aligned}$$

La classe $c_1 s_{(n-1)}(c(M))$ correspond au polynôme $t_1^n + \dots + t_N^n + \sum_{i \neq j} t_i^{n-1} t_j = s_{(n)}(c(M)) + s_{(n-1,1)}(c(M))$. Or, $s_n[M] = 0$ puisque M est décomposable. De même, $s_{n-1,1}[X_1 \times X_2] = s_{n-1}[X_1] s_1[X_2] + s_1[X_1] s_{n-1}[X_2] = 0$ (cf. [36], lemme 16.2), puisque $\dim X_1, X_2 \geq 4$.

PROPOSITION. Le système x_2, z_{2i} ($i \geq 3$) défini ci-dessus est un système de générateurs libre de $W_*^U \otimes \mathbf{Z}(2)$.

Démonstration. Nous allons appliquer la proposition II. 2 :

$$\begin{aligned} s_{4n}(z_{8n}) &= (-1)^{4n} (4n+1) c_1^{4n} [P_{2r}^*(\mathbb{C}) \times P_{2s}^*(\mathbb{C})] = \\ &= (4n+1) \binom{4n}{2r} c_1^{2r} [P_{2r}^*(\mathbb{C})] c_1^{2s} [P_{2s}^*(\mathbb{C})]. \end{aligned}$$

L'orientation de $P_{2r}^*(\mathbb{C})$ diffère par $(-1)^r$ de celle de $P_{2r}(\mathbb{C})$. Donc $c_1^{2r} [P_{2r}^*(\mathbb{C})] = \langle c_1(\eta), P_{2r}^*(\mathbb{C}) \rangle = (-1)^r$. De même, $c_1^{2s} [P_{2s}^*(\mathbb{C})] = (-1)^s$.

D'où $s_{4n}(z_{8n}) = (4n+1) \binom{4n}{2r}$. Le choix de r est tel que $\binom{4n}{2r}$ est un multiple impair de $m(4n)m(4n+1)$.

On montre de la même manière que $s_{4n+2}(z_{8n+4})$ est un multiple impair de $m(4n+2)m(4n+3)$.

$s_{4n-1}(z_{8n-2}) = c_1^{4n} [P_{2r}^*(\mathbb{C}) \times P_{2s}^*(\mathbb{C})] = \binom{4n}{2r}$ est un multiple impair de $m(4n-1)m(4n)$. De même, $s_{4n+1}(z_{8n+2}) = -\binom{4n+2}{2} = -(2n+1)(4n+1)$ multiple impair de $m(4n+1)m(4n+2) = m(4n+1)$.

II. 4. La signature σ définit un homomorphisme additif $\sigma : W_*^U \rightarrow \mathbf{Z}$. Notons $\sigma_1 : W_*^U \rightarrow \mathbf{Z}$ l'homomorphisme composé $W_*^U \xrightarrow{d} W_*^U \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Z}$.

LEMME. Si $x, y \in W_*^U$, on a :

$$\sigma(x * y) = \sigma(x) \sigma(y) - 2\sigma_1(x) \sigma_1(y)$$

$$\sigma_1(x * y) = \sigma_1(x) \sigma(y) + \sigma(x) \sigma_1(y) .$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition II. 1, puisque $\sigma(V^4) = -\sigma[P_2(\mathbb{C})] = -1^4$.

Considérons l'anneau $\mathbf{Z}[t, u]$ où t est une variable de degré 0 et où u est de degré 2. L'idéal $(t^2 + 2)$ de $\mathbf{Z}[t, u]$ est homogène. On peut donc définir un anneau gradué $\Lambda_* = \mathbf{Z}[t, u] / (t^2 + 2)$.

On définit également un homomorphisme additif $\varphi : W_*^U \rightarrow \Lambda_*$ par

$$\varphi(x) = (\sigma(x) + \sigma_1(x)t)u^n, \quad \text{où } x \in W_{2n}^U .$$

PROPOSITION. φ est un homomorphisme d'anneaux gradués.

Démonstration. On a, pour $x \in W_{2n}^U$ et $y \in W_{2m}^U$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(y) &= (\sigma(x) + \sigma_1(x)t)(\sigma(y) + \sigma_1(y)t) u^{n+m} = \\ &= (\sigma(x) \sigma(y) + (\sigma_1(x) \sigma(y) + \sigma(x) \sigma_1(y))t + \sigma_1(x) \sigma_1(y)t^2) u^{n+m} = \\ &= [(\sigma(x) \sigma(y) - 2\sigma_1(x) \sigma_1(y)) + (\sigma_1(x) \sigma(y) + \sigma(x) \sigma_1(y))t] u^{n+m} = \\ &= \varphi(x * y) \end{aligned}$$

en vertu du lemme ci-dessus.

II. 5. Nous allons calculer φ sur les éléments du système de générateurs construit dans II. 3.

PROPOSITION. $\varphi(x_2) = 2tu$
 $\varphi(z_{8n+4}) = 0, \quad n \geq 1$
 $\varphi(z_{4n-2}) = 0, \quad n \geq 2 .$

Démonstration. On a $d[P_1(\mathbb{C})] = 2$. Donc $\varphi(x_2) = (\sigma(P_1(\mathbb{C}) + 2t)u = 2tu$.

Pour calculer $\varphi(z_{8n+4})$, rappelons que $\sigma\Phi([M]) = (1 - [thc_1(M)]^2)L(M)[M]$ (proposition 6. 1). Dans le cas qui nous intéresse, $M = P_2^*(\mathbb{C}) \times P_{4n}^*(\mathbb{C})$, $c_1(M) = u_1 + u_2$ où $u_\alpha = pr_\alpha^* c_1(\eta)$.
 On a : $[thc_1(M)]^2 = [th(u_1 + u_2)]^2 = \left(\frac{thu_1 + thu_2}{1 + thu_1 thu_2}\right)^2$. Si l'on pose $thu_\alpha = X_\alpha$,
 $[thc_1(M)]^2 = X_1^2 - 4X_1^2 X_2^2 + X_2^2 + 3X_1^2 X_2^4 + \text{termes } X_1^i X_2^j$ où i ou j est impair, ou $i > 2$.

$$\text{Comme } (thu_1)^i \left(\frac{u_1}{thu_1}\right)^3 [P_2^*(\mathbb{C})] = \begin{cases} -1, & \text{pour } i = 0, 2 \\ 0, & \text{pour d'autres valeurs} \end{cases}$$

$$\text{et } (thu_2)^j \left(\frac{u_2}{thu_2}\right)^{4n+1} [P_{4n}^*(\mathbb{C})] = \begin{cases} 1, & \text{pour } j \text{ pair } \leq 4n \\ 0, & \text{pour d'autres valeurs} \end{cases} ,$$

il en résulte que $\sigma(z_{8n+4}) = -1 - (-1 + 4 - 1 - 3) = 0$. D'où $\varphi(z_{8n+4}) = 0$.

Enfin, $\varphi(z_{4n-2}) = [\sigma(z_{4n-2}) + \sigma_1(z_{4n-2})t]u^{2n-1} = 0$, car $\sigma_1(z_{4n-2}) = \sigma d(z_{4n-2}) = \sigma d^2(z_{4n}) = 0$, puisque dz_{4n} est représenté par une SU-variété.

II. 6. Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal.

THÉORÈME ([21], cf. [48], chap. X). L'image de l'homomorphisme d'oubli

$$\Omega_{8n+4}^{SU} \rightarrow W_{8n+4}^U \text{ coïncide avec l'image de } d: W_{8n+6}^U \rightarrow W_{8n+4}^U .$$

PROPOSITION. Soit M une SU-variété close de dimension $8n + 4$, alors

$$\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16} .$$

Démonstration. Comme il résulte du théorème ci-dessus, il suffit de prouver que $\varphi(W_{8n+6}^U) \subset 16 \Lambda_*$. Comme d'autre part, x_2, z_{2i} ($i \geq 3$) engendrent $W_*^U \otimes \mathbb{Z}(2)$

(proposition II.3), il suffit de prouver que $\varphi(A) \equiv 0 \pmod{16}$ pour tout monôme A en x_2, z_{2i} ($i \geq 3$) de degré $8n + 6$.

Soit donc A un tel monôme. On a trois possibilités :

(i) A est divisible par z_{4n-2} , alors $\varphi(A) = 0$.

(ii) A est divisible par z_{8n+4} , alors $\varphi(A) = 0$.

(iii) A est divisible par $x_2 * x_2 * x_2$, alors $\varphi(A) \in 16 \Lambda_*$ puisque $\varphi(x_2)^3 = -16tu^3$.

Ceci achève la démonstration.

THÉORÈME (cf. 5.2). Soit M une Spin-variété close de dimension $8n + 4$, $n \geq 0$. Alors la signature $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$.

Démonstration. Considérons l'injection canonique $SU_m \subset SO_{2m}$. Comme $\pi_1(SU_m) = 0$, cette injection se relève en un homomorphisme $SU_m \rightarrow Spin_{2m}$. Ainsi, chaque SU-variété a une Spin-structure canonique, ce qui donne un homomorphisme $\Omega_m^{SU} \rightarrow \Omega_m^{Spin}$. Le théorème résulte maintenant de la proposition ci-dessus et du théorème de Wall [50] : l'homomorphisme $\Omega_m^{SU} \rightarrow \Omega_m^{Spin}/\text{Tor}$ est surjectif pour $m = 8n + 4$, $n \geq 0$.

APPENDICE III - DES COEFFICIENTS DE $x \operatorname{th} x$ MODULO 16

Pour utiliser la proposition 14. 2, il faut connaître les coefficients a_{4n+2} de x^{4n+2} dans la série formelle $x \operatorname{th} x$ modulo 16. Dans cet appendice, nous calculons ce coefficient.

Nous utiliserons les propriétés des nombres de Bernoulli telles qu'elles sont présentées dans [10]. Le lecteur peut se rapporter également à l'Appendice B de [36], mais il lui faudra alors changer légèrement de notations.

III. 1. Par définition ([10], chap. V), on a :

$$\frac{t}{e^t - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} t + \frac{B_2}{2!} t^2 + \dots$$

PROPOSITION ([10]).

- (i) Pour tout $n \geq 0$, B_n est un nombre rationnel ;
- (ii) $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_{2i+1} = 0$, pour $i > 0$;
- (iii) Pour tout $n \geq 2$, on a : $1 + nB_1 + \binom{n}{2} B_2 + \dots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$;
- (iv) Si $S_m(n)$ désigne la somme $1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m$, ($n, m \geq 1$), on a :

$$(m+1)S_m(n) = (m+1)nB_m + \binom{m+1}{m-1} n^2 B_{m-1} + \binom{m+1}{m-2} n^3 B_{m-2} + \dots$$
où l'on pose $B_j = 0$, pour $j < 0$.

PROPOSITION. $x \operatorname{th} x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^{2r}(2^{2r} - 1)}{(2r)!} B_{2r} x^{2r}$.

Démonstration. On a d'abord $\frac{y}{\operatorname{th} y} = \frac{2y}{e^{2y} - 1} + y = 1 + \frac{B_2}{2!} (2y)^2 + \frac{B_3}{3!} (2y)^3 + \dots$

D'autre part, $x \operatorname{th} x = \frac{2x}{\operatorname{th} 2x} - \frac{x}{\operatorname{th} x}$. En substituant $y = x$ et $y = 2x$ dans la formule précédente et en tenant compte de ce que $B_{2j+1} = 0$ pour $j > 0$, on obtient la démonstration.

III. 2. Etudions d'un peu plus près les nombres B_{2r} .

LEMME. Pour tout $r \geq 0$, $2B_r$ a un dénominateur impair.

Démonstration. Pour r impair, cela découle de la proposition ci-dessus, (ii).

Supposons-le démontré pour $r < 2m$. En vertu de (iii) :

$$2B_{2m} = -\frac{1}{2m+1} (\hat{2} + (2m+1)2B_1 + \binom{2m+1}{2} 2B_2 + \dots + \binom{2m+1}{2m-1} 2B_{2m-1}),$$

le terme de droite ayant un dénominateur impair par hypothèse.

PROPOSITION. Si $m \equiv 2 \pmod{4}$ et $m > 2$, on a $2B_m \equiv 5 \pmod{8}$, la congruence étant comprise comme égalité dans $\mathbf{Z}_{(2)}/8\mathbf{Z}_{(2)} = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Démonstration. Posons $n = 4$ dans la formule (iv) de III. 1. : $(m+1)S_m(4) = (m+1)4B_m + \binom{m+1}{m-2} 64B_{m-2} + \dots$ puisque $B_{m-1} = B_{m-3} = \dots = 0$. Comme les $2B_r$ ont un dénominateur impair, $S_m(4) \equiv 4B_m \pmod{32}$, ou encore $2B_m \equiv \frac{S_m(4)}{2} \pmod{16}$. Or, $S_m(4) = 1^m + 2^m + 3^m \equiv 1 + 3^m \pmod{32}$ (car $m \geq 6$). Si $m = 4r + 2$, $1 + 3^m = 1 + (81)^r \cdot 9 \equiv 10 \pmod{16}$. Donc $S_m(4) \equiv 10 \pmod{16}$ et $2B_m \equiv 5 \pmod{8}$.

III. 3. Soit $v : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuation 2-adique du corps \mathbb{Q} .

PROPOSITION. Pour $n \geq 1$, $v\left(\frac{2^{n-1}}{n!}\right) = \alpha(n) - 1 \geq 0$,

où $\alpha(n)$ est le nombre d'unités dans le développement binaire de n .

Démonstration. Si pour $a \in \mathbb{Q}$, $[a]$ désigne la partie entière de a , on a

$$v(n!) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots$$

Soit $n = \alpha_0 + \alpha_1 2^1 + \alpha_2 2^2 + \dots + \alpha_r 2^r$ avec $\alpha_i = 0$ ou 1 . Alors :

$$\begin{aligned}
 n + v(n!) &= \alpha_0 + \alpha_1 2^1 + \alpha_2 2^2 + \dots + \alpha_r 2^r + \\
 &\quad + \alpha_1 + \alpha_2 2^1 + \dots + \alpha_r 2^{r-1} + \\
 &\quad + \alpha_2 + \dots + \alpha_r 2^{r-2} + \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &\quad + \alpha_r = \\
 &= \alpha_0(2-1) + \alpha_1(2^2-1) + \dots + \alpha_r(2^{r+1}-1) = 2n - \alpha(n) .
 \end{aligned}$$

Donc : $v(n!) = n - \alpha(n)$ et $v(\frac{2^{n-1}}{n!}) = \alpha(n) - 1$.

III. 4. Ainsi $\frac{2^{n-1}}{n!} = 2^{\alpha(n)-1} \cdot A_n$ où $A_n \in \mathbf{Z}(2)$. On va étudier $A_n \pmod 8$.

Soit $q \in \mathbf{Q}^+$. On notera $\{q\}$ le produit des nombres naturels impairs $\leq q$:
 $\{q\} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s+1)$ où $2s+1 \leq q < 2s+3$.

PROPOSITION. $A_n^{-1} = \{n\} \left\{\frac{n}{2}\right\} \left\{\frac{n}{4}\right\} \dots \left\{\frac{n}{2^k}\right\}$ où $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

Démonstration. Par définition de A_n , A_n^{-1} est le plus grand diviseur impair de $n!$. Donc, comme $n! = \{n\} \cdot 2 \left\{\frac{n}{2}\right\} \cdot 4 \left\{\frac{n}{4}\right\} \dots \cdot 2^k \left\{\frac{n}{2^k}\right\}$ où $2^k \leq n < 2^{k+1}$,

on a : $A_n^{-1} = \{n\} \left\{\frac{n}{2}\right\} \dots \left\{\frac{n}{2^k}\right\}$.

PROPOSITION. Soit $\varphi : \{0, 1\}^3 \rightarrow (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*$ la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
 \varphi(0,0,0) &= \varphi(0,0,1) = \varphi(0,1,0) = \varphi(1,1,1) = 1, \\
 \varphi(0,1,1) &= \varphi(1,0,0) = 3, \\
 \varphi(1,0,1) &= \varphi(1,1,0) = 7.
 \end{aligned}$$

Alors, si $n = \alpha_0 + \alpha_1 2^1 + \dots + \alpha_r 2^r$ ($\alpha_i = 0, 1$),

$$\begin{aligned}
 A_n &\equiv \varphi(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) \varphi(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \varphi(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2) \dots \\
 &\quad \dots \varphi(\alpha_r, \alpha_{r-1}, \alpha_{r-2}) \varphi(0, \alpha_r, \alpha_{r-1}) \varphi(0, 0, \alpha_r) \pmod 8.
 \end{aligned}$$

Démonstration. On remarque d'abord que la fonction $m \rightarrow \{m\} \pmod 8$ est périodique de période 8, comme il résulte de ce que $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \equiv 1 \pmod 8$. Pour

$N \equiv \delta + 2\gamma + 4\beta \pmod 8$ ($\beta, \gamma, \delta = 0, 1$), on a alors $\{N\}^{-1} \equiv \varphi(\beta, \gamma, \delta) \pmod 8$.

Pour le voir, on fait un calcul direct :

$N \bmod 8$	$\{N\} \bmod 8$	$\{N\}^{-1} \bmod 8$	$\varphi(\beta, \gamma, \delta)$
1	1	1	1
2	1	1	1
3	3	3	3
4	3	3	3
5	7	7	7
6	7	7	7
7	1	1	1
0	1	1	1

On a donc pour $n = \alpha_0 + \alpha_1 2^1 + \dots + \alpha_r 2^r$:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n}{2^s} \right\}^{-1} &= \left\{ \left[\frac{n}{2^s} \right] \right\}^{-1} = \left\{ \alpha_s + \alpha_{s+1} 2^1 + \dots + \alpha_r 2^{r-s} \right\}^{-1} \equiv \\ &\equiv \varphi(\alpha_{s+2}, \alpha_{s+1}, \alpha_s) \bmod 8. \end{aligned}$$

III. 5. Soit $n \geq 6$ un nombre naturel tel que $n \equiv 2 \pmod{4}$, et soit a_n le coefficient de x^n dans la série $x \operatorname{th} x$.

PROPOSITION.

- a) $\alpha(n) \geq 5$, alors $a_n \equiv 0 \pmod{16}$
- b) $\alpha(n) = 4$, alors $a_n \equiv 8 \pmod{16}$
- c) $\alpha(n) = 3$, alors $a_{14} \equiv 12 \pmod{16}$
et si $n = 2^{r+1} + 2^r + 2$, $r \geq 3$, $a_n \equiv 4 \pmod{16}$
si $n = 2^s + 2^r + 2$, $s-1 > r \geq 3$, $a_n \equiv 12 \pmod{16}$
si $n = 2^r + 6$, $r \geq 4$, $a_n \equiv 4 \pmod{16}$.
- d) $\alpha(n) = 2$, alors $a_6 \equiv 14 \pmod{16}$ et $a_{10} \equiv 10 \pmod{16}$
et si $n = 2^r + 2$, $r \geq 4$, $a_n \equiv 2 \pmod{16}$.

Démonstration. On a vu que $a_n = \frac{2^n(2^n - 1)}{n!} B_n \equiv -\frac{2^n}{n!} B_n \pmod{6}$, puisque $n \geq 6$.

La proposition III.2 donne $a_n \equiv -5 \cdot 2^{\alpha(n)-1} \cdot A_n \pmod{16}$, puisque $\alpha(n) \geq 2$ et $v\left(\frac{2^{n-1}}{n!}\right) = \alpha(n) - 1 \geq 1$.

a) et b) en découlent immédiatement.

Pour c) : $14 = \overline{11110}$ (où $\overline{11110}$ désigne le développement binaire).

$$\begin{aligned} \text{Donc } a_{14} &\equiv -5 \cdot 4 \cdot A_{10} \equiv 12 A_{10} \equiv 12 \varphi(1, 1, 0) \varphi(1, 1, 1) \varphi(0, 1, 1) \cdot \varphi(0, 0, 1) \equiv \\ &\equiv 12 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \equiv 12 \pmod{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De la même manière } a_{26} &\equiv 12 \varphi(0, 1, 0) \varphi(1, 0, 1) \varphi(1, 1, 0) \cdot \varphi(0, 1, 1) \varphi(0, 0, 1) \equiv \\ &\equiv 12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 \equiv 4 \pmod{16} \quad \text{puisque } 26 = \overline{11010}. \end{aligned}$$

Tous les autres cas s'analysent de la même manière. Par exemple, si

$$n = 2^r + 6, \quad r \geq 4, \quad \text{on a } n = \overline{1 \underbrace{0 \dots 0}_{\geq 2} 110}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a_n &\equiv 12 \varphi(1, 1, 0) \varphi(0, 1, 1) \varphi(0, 0, 1) \varphi(1, 0, 0) \varphi(0, 1, 0) \varphi(0, 0, 1) \equiv \\ &\equiv 12 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 4 \pmod{12}, \quad \text{car } \varphi(0, 0, 0) = 1. \end{aligned}$$

Pour d) : $\alpha(n) = 2$, donc $a_n \equiv -5 \cdot 2 \cdot A_n \pmod{16} \equiv 6 A_n \pmod{16}$.

Le reste de la démonstration se fait comme dans c).

Terminons cet appendice par une liste des 16 premières valeurs de

$a_n \pmod{16}$:

n	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66
a_n	14	10	12	2	4	4	8	2	4	12	8	4	8	8	0	2

BIBLIOGRAPHIE *

- [1] ADAMS J.F., On the groups $J(X)$ - IV, *Topology*, 5, 1966, 21-27.
- [2] ANDERSON D.W., BROWN E.H., PETERSON F.P., SU-cobordism, KO-characteristic numbers, and the Kervaire invariant, *Ann. Math.*, 83, 1966, 54-67.
- [3] ANDERSON D.W., BROWN E.H., PETERSON F.P., The structure of the Spin cobordism ring, *Ann. Math.*, 86, 1967, 271-298.
- [4] ANDERSON P.G., Cobordism classes of squares of orientable manifolds, *Ann. Math.*, 83, 1966, 47-53.
- [5] ATIYAH M.F., BOTT R., SHAPIRO A., Clifford modules, *Topology*, 3, 1964, Suppl. 1, 3-38.
- [6] ATIYAH M.F., SINGER I.M., The index of elliptic operators : III, *Ann. Math.*, 87, 1968, 546-604.
- [7] ATIYAH M.F., MACDONALD I.G., Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [8] BOREL A., La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes, *Comment. Math. Helv.*, 27, 1953, 165-197.
- [9] BOREL A., HIRZEBRUCH F., Characteristic classes and homogeneous spaces, III, *Amer. J. Math.*, 82, 1960, 491-504.
- [10] БОРЕВИЧ З.И., ШАФАРЕВИЧ И.Р., Теория чисел. "Наука", Москва, 1972.
- [10*] BOREVICH Z.I., SHAFAREVICH I.R., Number theory, Acad. Press, New-York, 1966.
- [11] BROWDER W., The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalisations, *Ann. Math.*, 90, 1969, 157-186.
- [12] BROWDER W., Surgery on simply-connected manifolds, *Ergebnisse der Math.*, Band 65, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.
- [13] BROWDER W., Complete intersections and the Kervaire invariant, *Lecture Notes Math.*, 763, 1979, 88-108.
- [14] BROWN E.H., Note on an invariant of Kervaire, *Mich. Math. J.*, 12, 1965, 23-24.

* Lorsqu'un article ou livre écrit en russe a été traduit en anglais, la référence de la traduction suit celle de l'original et porte le même numéro muni d'un astérisque. Dans le cas contraire, le titre de celui-ci est suivi, entre parenthèses, de sa traduction en français.

- [15] BROWN E.H., PETERSON F.P., The Kervaire invariant of $(8k+2)$ -manifolds, Amer. J. Math., 88, 1966, 815-826.
- [16] BROWN E.H., Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. Math., 95, 1972, 368-383.
- [17] BROWN E.H., A product formula for an Arf-Kervaire invariant, Bull. Amer. Math. Soc., 80, 1974, 873-874.
- [18] БУХШТАБЕР В.М./BUCHSTABER/, Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией /Projecteurs en cobordismes complexes liés à la SU-théorie/. Успехи Мат. Наук, 27, 1972, 231-232.
- [19] CAPPELL S.E., SHANESON J.L., Some new four-manifolds, Ann. Math., 104, 1976, 61-72.
- [20] CHERN S.S., HIRZEBRUCH F., SERRE J.-P., On the index of a fibered manifold, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, 587-596.
- [21] CONNER P.E., FLOYD E.E., Torsion in SU-bordism, Memoirs Amer. Math. Soc., 60, 1966.
- [22] DACCACH J.A., The signature and the Kervaire invariant as cobordism invariants, Rutgers Univ. Thesis, 1976.
- [23] GUILLOU L., MARIN A., Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C.R. Acad. Sci., 285, 18 juillet 1977, 95-98.
- [24] HIRZEBRUCH F., Topological methods in algebraic geometry, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1966.
- [25] HIRZEBRUCH F., NEUMANN W., KOCH S.S., Differentiable manifolds and quadratic forms, Marcel Dekker, New-York, 1971.
- [26] HONDA T., Formal groups and zeta-functions, Osaka J. Math., 5, 1968, 199-213.
- [27] HUSEMOLLER D., Fibre bundles, McGraw-Hill, New-York etc, 1966.
- [28] JONES L.P., The image of the signature homomorphism for symplectic cobordism, Trans. Amer. Math. Soc., 240, 1978, 253-262.
- [29] KERVAIRE M.A., MILNOR J.W., On 2-spheres in 4-manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47, 1961, 1651-1657.
- [30] KERVAIRE M.A., MILNOR J.W., Groups of homotopy spheres, I, Ann. Math., 77, 1963, 504-537.
- [31] LANDWEBER P.S., The signature of symplectic and self-conjugate manifolds, Lecture Notes Math., 741, 1979, 461-472.
- [32] MILNOR J.W., The Steenrod algebra and its dual, Ann. Math., 67, 1958, 150-171.

- [33] MILNOR J.W., Morse theory, Princeton Univ. Press, Princeton, New-Jersey, 1963.
- [34] MILNOR J.W., Spin structures on manifolds. Enseignement Math., 2, 1963, 198-203.
- [35] MILNOR J.W., On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and spin-manifolds, Topology, 3, 1965, 223-230.
- [36] MILNOR J.W., STASHEFF J.D., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, Princeton, New-Jersey, 1974.
- [37] MORITA S., The Kervaire invariant of hypersurfaces in complex projective spaces, Comment. Math. Helv., 50, 1975, 403-419.
- [38] MOSHER R.E., TANGORA M.C., Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, New-York, Evanston, London, 1968.
- [39] НАДИРАДЗЕ Р.Г. (Nadiradze) Инволюции на многообразиях Стонга и их применение в теории кобордизмов (Involutions sur les variétés de Stong et leurs applications dans la théorie des cobordismes). Успехи мат. наук, 35, 1980, 206-209.
- [40] NOVIKOV S.P., Pontrjagin classes, the fundamental group and some problems of stable algebra. Essays on topology and related topics, Mém. dédié à G. de Rham, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1970, 147-155.
- [41] ОШАНИН С.Д., Сигнатура SU-многообразий. Мат. Заметки, 13, 1973, 97-102.
- [41*] OSHANIN S.D., The signature of SU-manifolds, Math. notes, 13, 1973, 57-60.
- [42] OCHANINE S., Signature et invariants de Kervaire généralisés, C.R. Acad. Sci., 285, série A, 1977, 211-213.
- [43] OCHANINE S., Formules "à la Hirzebruch" pour les invariants de Kervaire généralisés, C.R. Acad. Sci., 289, série A, 1979, 487-490.
- [44] РОХЛИН В.А./ROKHLIN/, Новые результаты в теории четырехмерных многообразий /Nouveaux résultats dans la théorie des variétés de dimension quatre/. Докл. АН СССР, 84, 1952, 221-224.
- [45] РОХЛИН В.А., Доказательство гипотезы Гудкова. Функц. Анал. и прил., 6, 1971, 62-64.

- [45*] ROKHLIN V.A., Proof of the Gudkov's hypothesis, *Func. Anal. and Appl.*, 6, 1972, 136-138.
- [46] SCHWARTZ J.T., *Differential geometry and topology, Notes on Math. and its Appl.*, New-York, 1968.
- [47] ШАФАРЕВИЧ И.Р., *Основы алгебраической геометрии*. "Наука", Москва, 1972.
- [47*] SHAFAREVICH I.R., *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1974.
- [48] STONG R.E., *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, New-Jersey, 1968.
- [49] SZCZARBA R.H., *On tangent bundles of fibre spaces and quotient spaces*, *Amer. J. Math.*, 86, 1964, 685-697.
- [50] WALL C.T.C., *Addendum to a paper of Conner and Floyd*, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 62, 1966, 171-175.
- [51] WHITEHEAD G.W., *Recent advances in homotopy theory*, *Amer. Math. Soc. Regional conference series in Math.*, n° 5, 1970.
- [52] WOOD J., *Removing handles from non-singular algebraic hypersurfaces in $\mathbb{C}P_{n+1}$* , *Invent. Math.*, 31, 1975, 1-3.

S. OCHANINE
Université de Paris-Sud
Département de Mathématique
Bâtiment 425
91405 ORSAY CEDEX