MÉMOIRES DE LA S. M. F.

L. BEGUERI

Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 4 (1980)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1980_2_4__1_0>

DUALITÉ SUR UN CORPS LOCAL
A CORPS RÉSIDUEL ALGÉBRIQUEMENT CLOS

LUCILE BÉGUERI (*)

Résumé : La définition par Serre d'une structure proalgébrique sur le groupe des unités d'un corps local à corps résiduel algébriquement clos, en inégale caractéristique, soulevait des questions de dualité qui sont abordées ici pour les groupes finis, les tores, les variétés abéliennes. Les dualités obtenues sont de nature quasi-algébrique sur le corps résiduel. Par exemple on obtient, pour une variété abélienne A sur le corps local K, un isomorphisme canonique entre le groupe des classes des K-torseurs sous A et le groupe des classes des isogénies à noyau cyclique (sur le corps résiduel), dont le but est le groupe proalgébrique des K-points de la variété abélienne duale.

The definition by Serre of a proalgebraic structure on the group of units of a local field with algebraically closed residue field, of unequal characteristic, gives rise to questions of duality, whose study we begin here, for finite groups, tori, and abelian varieties. We obtain dualities of a quasi-algebraic nature over the residue field. For example, for an abelian variety A over the local field K, we obtain a canonical isomorphism between the group of classes of K-torseurs under A and the group of classes of isogenies with cyclic kernel (over the residue field), and whose image is the pro-algebraic group of K-rational points of the dual abelian variety.

(*) Thèse de Sciences Mathématiques, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, juin 1976.

TABLE DES MATIÈRES

L. BÉGUERI

INTRODUCTION

0.1. Comme on sait, la théorie du corps de classes, lors de son expression cohomologique, a été enrichie de théorèmes de dualité. Sur un corps local K, à corps résiduel k fini, en inégale caractéristique, ces théorèmes sont essentiellement de trois types, selon qu'ils concernent les modules galoisiens finis, les modules galoisiens qui sont $\mathbb{Z}$-libres de rang fini, ou les variétés abéliennes. Tous utilisent cependant l'identification canonique du groupe de Brauer $Br(K) = H^2(K,\mathbb{G}_m)$ avec $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ([23], chap. XIII).

a) Pour un module galoisien fini X, dont on note X' le dual de Cartier, les groupes de cohomologie $H^0(X)$ et $H^2(X')$ d'une part, $H^1(X)$ et $H^1(X')$ d'autre part, sont finis et mis en dualité par le cup-produit à valeurs dans le groupe de Brauer de K.

b) Pour un module galoisien $\mathbb{Z}$-libre de type fini, c'est-à-dire le groupe des caractères d'un K-tore, les dualités obtenues par Tate et Nakayama à partir de la théorie des formations de classes d'Artin-Tate sont déduites du cup-produit dans le groupe de Brauer de K.

c) Pour une variété abélienne, la dualité de Tate apparie le groupe des classes de K-torseurs sous cette variété ("groupe de Weil-Châtelet") avec le groupe compact des points rationnels sur K de la variété abélienne duale.

Puisque, en inégale caractéristique, la cohomologie (aussi bien étale que fppf) d'un schéma en groupes commutatifs sur K coïncide avec la cohomologie galoisienne de son groupe de points à valeurs dans une clôture algébrique de K, ces théorèmes de dualité peuvent tout aussi bien s'exprimer par des dualités entre les groupes de cohomologie des schémas en groupes correspondants. Par contre, lorsque X est un schéma en groupes fini commutatif et plat sur l'anneau R des entiers de K, il convient de considérer les groupes de cohomologie fppf $H^i(R,X)$: B. Mazur ([13]) a obtenu une dualité entre les groupes $H^1(R,X)$ et $H^1(K,X')/H^1(R,X')$, à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et cette dualité est compatible avec la dualité sur K considérée dans a).

0.2. Lorsque le corps résiduel k du corps local K, au lieu d'être fini, est algébriquement clos, et que nous sommes toujours en inégale caractéristique (c'est-à-dire lorsque K est une extension finie du corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de longueur infinie à coordonnées dans k), le groupe de Brauer de K est nul ([24]), ce qui a des conséquences importantes : les tores sont cohomologiquement triviaux, et les groupes de cohomologie, à partir du second, des schémas en groupes finis commutatifs sur K sont nuls. Au contraire de ce qui se passe dans le cas d'un corps p-adique, le premier groupe de cohomologie d'un K-schéma en groupes fini n'est pas, en général, un groupe fini (il suffit de considérer $H^1(K,\mu_p)$, où $p > 0$ est la caractéristique de k : ce groupe, égal à K^*/K^{*p} contient en effet le corps algébriquement clos k) ; mais comme on le verra, il a une structure naturelle de groupe quasi-algébrique (au sens de [21]) sur k. Cette propriété intervient de manière essentielle dans les théorèmes de dualité établis ici, la dualité de Serre des k-groupes quasi-algébriques unipotents connexes remplaçant la dualité de Pontrjagin des groupes finis.

Les difficultés proviennent surtout des p-groupes finis, p étant la caractéristique de k ; car si l'ordre du K-groupe fini X est premier à p, le groupe $H^1(K,X)$ est fini, et le cup-produit à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ le met en dualité avec le groupe des K-points de son dual de Cartier. Ceci résulte par exemple de ([10], I, n° 5) ou de ([6], Dualité, n° 1).

Quant aux résultats sur les variétés abéliennes, il faut citer les travaux de Ogg, Šafarevič, et Vvedenskii. Ogg et Šafarevič, indépendamment, ont exprimé le groupe des classes de K-torseurs sous la variété abélienne A, où l'on néglige la p-torsion, comme le dual de Pontrjagin du groupe profini $\pi_1(A'(K))$, groupe fondamental du k-groupe proalgébrique (au sens de [21]) des K-points de la variété abélienne duale A', où l'on néglige aussi la p-torsion ([18]). Quant à Vvedenskii, qui se pose le problème de la partie de p-torsion, il a traité divers cas particuliers de courbes elliptiques, par des méthodes de groupes formels ([21]).

0.3. Entrons maintenant dans le détail du présent travail. Tous les schémas en groupes considérés ici sont commutatifs.

Le point de départ est une remarque de Serre, page 55 de "Groupes proalgébriques" ([21]) : "Si U est un groupe unipotent connexe quasi-algébrique, il y a, sur $U^* = \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, une structure canonique de groupe unipotent connexe quasi-algébrique ; la correspondance $U \mapsto U^*$ jouit de propriétés analogues à celles que l'on rencontre dans la dualité des variétés abéliennes ; on a $U^{**} = U$, etc...".

Le développement de cette remarque constitue le §1. Les résultats y sont, en fait, étendus au cas d'un corps de base parfait de caractéristique $p > 0$. Après avoir décrit, sur un schéma affine quelconque de caractéristique p, les isogénies dont le but est le groupe additif $\mathbb{G}_a$ et dont le noyau est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on voit ce qu'il advient lorsqu'on remplace $\mathbb{G}_a$ par le schéma W_n des vecteurs de Witt de longueur n, et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, ceci sur un schéma affine parfait quelconque. On passe alors au cas général d'un groupe quasi-algébrique (au sens de [21],1.2, ou de [7],5.3.4) unipotent connexe quelconque G : son dual de Serre G^*, dont les points à valeurs dans un schéma affine parfait sont les classes d'isogénies dont le but est G et le noyau cyclique constant, est lui-même muni d'une structure de groupe quasi-algébrique unipotent connexe, via des résolutions par des produits finis de groupes quasi-algébriques de vecteurs de Witt de longueur finie. Les groupes G et G^* sont isogènes, et la correspondance $G \mapsto G^*$ est un foncteur exact et involutif. En outre cette dualité de Serre des groupes quasi-algébriques unipotents connexes sur un corps parfait de caractéristique p s'étend en une autodualité $\mathcal{S}$ de la catégorie dérivée des complexes bornés formés de groupes quasi-algébriques unipotents, qui joue aussi un rôle essentiel dans [15].

Le §2 établit un lemme de rigidification des Ext^1 de deux faisceaux en groupes abéliens sur un site. De ce lemme, on déduit par exemple la "résolution lisse standard" d'un schéma en groupes fini et plat sur une base quelconque. En fait, la principale motivation de cette technique de rigidification apparaîtra au §8.

Le §3 précise quelques propriétés cohomologiques résultant de [24], en particulier la trivialité cohomologique des tores et quelques unes de ses conséquences.

Au §4, on précise la structure de k-groupe algébrique de $H^1(R,X)$, pour un schéma en groupes X fini et plat d'ordre une puissance de p sur l'anneau R des entiers de K, la cohomologie étant calculée au sens fppf ; on montre que ce k-groupe $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ est affine, unipotent, connexe, et l'on calcule sa dimension par une méthode inspirée d'un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré dû à Mazur et Roberts ([14]). Les propriétés algébriques sont obtenues en plongeant X dans un groupe lisse, et en prenant la réalisation de Greenberg relative à R (au sens de [8]) du conoyau de ce plongement. D'autre part, pour un K-groupe fini X, tout plongement de X dans un tore définit, via la réalisation de Greenberg relative à R du modèle de Néron (au sens de [17]) du conoyau de ce plongement, un k-groupe algébrique dont le groupe des k-points est le groupe habituel $H^1(K,X)$ et dont le groupe quasi-algébrique associé $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ est indépendant du choix du plongement de X dans un tore. Le k-groupe $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ est affine, et sa composante neutre est unipotente. Par une méthode inspirée d'un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré dû à J. Tate ([25]), on calcule la dimension de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$. En outre, lorsque X provient d'un R-groupe fini et plat, le k-groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ contient comme sous-groupe le groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ associé à $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$.

Le §5 est consacré à l'"isomorphisme de réciprocité". Lorsque le corps K contient les racines de l'unité d'ordre p^n , on cherche à classifier les extensions de K engendrées par une racine p^n-ième d'un élément non nul de K . Cette classification se déduit d'un isomorphisme dit "de réciprocité" du groupe $H^1(K,\mu_{p^n})$ avec le groupe des homomorphismes continus du groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de K dans $\mu_{p^n}(K) = M_n$. Par la théorie du corps de classes de Serre ([24]), cet isomorphisme s'écrit :

$$H^1(K,\mu_{p^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{U}}_K),M_n) ,$$

ou encore comme un isomorphisme de groupes abéliens :

$$K^*/K^{*p^n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{U}}_K,M_n) ,$$

où $\underline{\underline{U}}_K$ est le k-groupe proalgébrique des unités de K , dont $\pi_1(\underline{\underline{U}}_K)$ est le groupe fondamental. La source a une structure canonique de k-groupe quasi-algébrique unipotent ; le but aussi. L'essentiel du présent paragraphe consiste à établir la quasi-algébricité de cet isomorphisme de réciprocité. Pour cela, on est conduit, en quelque sorte, à "universaliser" la construction de l'isomorphisme de Serre.

Ces préparatifs permettent d'aborder au §6 la démonstration des théorèmes principaux de dualité pour les schémas en groupes finis sur

INTRODUCTION

K . Soit X un K-groupe fini, et soit X' son dual de Cartier. Nous mettons en dualité (à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) le groupe $X'(K)$ des K-points de X' et le groupe $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,X))$, groupe des composantes connexes de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$. D'autre part, la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ est canoniquement isomorphe au dual de Serre de la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X')$. La démonstration de ces résultats utilise, outre le changement du corps de base et l'isomorphisme de réciprocité, l'interprétation des H^1 comme des Ext^1 , puis, à la Yoneda, comme des classes de suites exactes. Lorsqu'on fixe un entier n et que l'on considère la catégorie $\mathcal{M}_n$ (resp. $\mathcal{Q}_n$) des K-groupes finis (resp. k-groupes quasi-algébriques) annulés par p^n , on peut voir que le prolongement $\underline{\underline{H}}^1 : \mathcal{K}^b(\mathcal{M}_n) \to \mathcal{K}^b(\mathcal{Q}_n)$ de $\underline{\underline{H}}^1 : \mathcal{M}_n \to \mathcal{Q}_n$ $(\underline{\underline{H}}^1(X) = \underline{\underline{H}}^1(K,X))$ à la catégorie des complexes bornés (à homotopie près) formés d'objets de $\mathcal{M}_n$, admet un dérivé gauche $L\underline{\underline{H}}^1 : D^b(\mathcal{M}_n) \to D^b(\mathcal{Q}_n)$ entre les catégories dérivées correspondantes. Les deux énoncés ci-dessus se regroupent alors dans ce cadre de catégories dérivées. On construit en effet canoniquement un isomorphisme du foncteur $L\underline{\underline{H}}^1$ sur le composé de la dualité de Serre dans $D^b(\mathcal{Q}_n)$, de $L\underline{\underline{H}}^1$ et de la dualité de Cartier dans $D^b(\mathcal{M}_n)$. On pourra comparer ceci avec [15].

Notons que, lorsque X est un R-groupe fini et plat, l'isomorphisme canonique entre la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ et le dual de Serre de la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X')$ induit un isomorphisme (6.3.2) entre le k-groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ et le dual de Serre du k-groupe quotient $\underline{\underline{H}}^1(K,X')^o/\underline{\underline{H}}^1(R,X')$. On rejoint ainsi des théorèmes de B. Mazur cités en 1.

Les résultats du §6 donnent une prise sur les tores et les variétés abéliennes, par l'intermédiaire de leurs points d'ordre fini. Le §7 exploite cette situation. Dans le cas d'une variété abélienne à bonne réduction, il y a une structure quasi-algébrique canonique sur le groupe $H^1(K,A)_n$ des classes de K-torseurs sous A annulées par n . On obtient une dualité parfaite à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ entre le groupe des composantes connexes de ce groupe quasi-algébrique et le groupe $A'_n(R) = A'_n(K)$ des K-points annulés par n du R-schéma abélien dual A' . D'autre part, la composante neutre de ce groupe quasi-algébrique s'identifie au dual de Serre du conoyau de la multiplication par n dans le groupe proalgébrique $\underline{\underline{A}}'(R)$, réalisation de Greenberg parfaite relative à R de A'. Pour un tore, au contraire, il y a lieu de considérer les trois groupes de cohomologie $H^i(K,M)$, $i = 0,1,2$, où M est le groupe des caractères du tore T , de sorte qu'on obtient des théorèmes du type 0.1 b). On montre que $H^0(K,M)$ est un réseau, dual dans $\mathbb{Z}$ du groupe $\pi_0(\mathcal{C}_k)$ des composantes connexes de la fibre spéciale du modèle de Néron du tore. Le groupe $H^1(K,M)$ est en dualité, dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, avec le sous-groupe de torsion de $\pi_0(\mathcal{C}_k)$. Le groupe $H^2(K,M)$ est un groupe discret, dual du groupe profini $\pi_1(\underline{\underline{T}}(K))$, groupe fondamental de la réalisation de Greenberg parfaite relative à R du modèle de Néron du tore T .

Il reste à préciser, et à généraliser, pour les variétés abéliennes quelconques, ce qui vient d'être dit dans le cas de bonne réduction. Ceci est rendu possible par l'existence des modèles de Néron de ces variétés ([16]). Ce problème est étudié, dans le §8, en définissant le k-groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n$, dont le groupe des k-points est le groupe $H^1(K,A)_n$ des classes de K-torseurs sous A annulées par n . L'équivalent d'une flèche de dualité est fourni par un homomorphisme Ψ_n qui, à la classe d'un K-torseur sous A , annulée par n , associe une k-isogénie dont le but est $\underline{\underline{A}}'(K)^0$, composante neutre de la réalisation de Greenberg parfaite relative à R du modèle de Néron de la variété abélienne A' duale de A , et dont le noyau est cyclique d'ordre n . Cette construction passe par la définition, pour un K-groupe E, qui est extension d'un groupe fini par une variété abélienne, d'un k-groupe proalgébrique $\underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)$, ceci, comme toujours, de manière que son groupe des k-points soit le groupe habituel $\mathrm{Ext}^1_K(E,\mathbb{G}_m)$: c'est là que prend tout son sens l'idée de rigidification. L'homomorphisme Ψ_n induit une isogénie $(\Psi_n)^o$ de la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n$ sur le dual de Serre de $\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o$, ce qui permet d'obtenir un épimorphisme de $\underline{\underline{H}}^1(K,A_n)^o$ sur le dual de Serre de $\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o$, dont le noyau est $(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K))^o$. On en vient alors à montrer que les groupes des composantes connexes des fibres spéciales des modèles de Néron de A et A' sont en dualité parfaite, ce qui démontre une conjecture de Grothendieck ([11], p. 323) dans le cas d'un corps local à corps résiduel algébriquement clos, en inégale caractéristique ; cette conjecture a été prouvée par M. Artin et B. Mazur dans le cas de la jacobienne d'une courbe propre et lisse sur le point générique d'un trait, et aussi dans le cas d'une variété abélienne quelconque sur un corps local à corps résiduel fini (en utilisant la dualité de Tate) ; enfin, elle était prouvée pour les composantes ℓ-primaires, $\ell \neq p$, de ces groupes de composantes connexes, et aussi dans le cas de réduction semi-stable ([ibid.]). La méthode de démonstration utilisée ici est basée sur la dualité de Serre. Cette dualité des π_o a alors pour conséquence que l'isogénie $(\Psi_n)^o$ est un isomorphisme, et qu'il y a une dualité canonique, à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, entre $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n)$ et le noyau de la multiplication par n dans $\underline{\underline{A}}'(K)^o$. Il reste alors à reconnaître l'homomorphisme induit par Ψ_n sur $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n)$: c'est l'opposé de celui qui donne la dualité canonique ci-dessus. Et donc Ψ_n est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Je suis très reconnaissante à Michel Raynaud de m'avoir indiqué ce sujet et d'avoir dirigé ce travail. Je remercie Madame Bonnardel pour la frappe du manuscrit.

INDEX DES NOTATIONS

$\prod_{T|S} X$ est la restriction de Weil, de T à S, du T-schéma X (pour des morphismes $X \to T \to S$).

$\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(E,G)_F$ associe, à tout S-schéma T, le groupe des classes d'extensions du T-groupe commutatif E_T par le T-groupe commutatif G_T, rigidifiées suivant le sous-groupe F_T de E_T.

$\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(E,G)$ associe, à tout S-schéma T, le groupe des classes d'extensions du T-groupe commutatif E_T par le T-groupe commutatif G_T.

$\mathbb{G}_{m,S}$ est le S-groupe multiplicatif.

$\mu_{n,S}$ est le S-groupe des racines n-ièmes de l'unité.

R est un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, à corps des fractions K de caractéristique 0.

$H^i(R,X)$ (resp. $H^i(K,X) = H^i(X)$) est le i-ème groupe de cohomologie fppf du R-groupe (resp. du K-groupe) X à valeurs dans R (resp. à valeurs dans K).

X' est le dual de Cartier du R-groupe fini et plat X (resp. du K-groupe fini X).

A' est la variété abélienne duale de la K-variété abélienne A.

Etant donné un k-groupe G, on note G^o sa composante neutre, $\pi_o(G)$ son k-groupe des composantes connexes, et $\pi_1(G)$ son groupe fondamental, au sens de [7].

INDEX

$G \mapsto G^*$ est l'autodualité de Serre de la catégorie des k-groupes quasi-algébriques unipotents connexes.

$\underset{\sim}{G}_r(S)$ est la réalisation de Greenberg relative à R , au cran r , du R-schéma S , et $\underset{\sim}{G}(S) = \varprojlim_r \underset{\sim}{G}_r(S)$ en est la réalisation de Greenberg relative à R .

$\underline{\underline{G}}_r(S)$ [resp. $\underline{\underline{G}}(S)$] est le k-schéma parfait associé à $\underset{\sim}{G}_r(S)$ (resp. à $\underset{\sim}{G}(S)$].

Le groupe des k-points de $\underset{\sim}{U}_K = \underset{\sim}{G}(\mathbb{G}_{m,R})$ et de $\underline{\underline{U}}_K = \underline{\underline{G}}(\mathbb{G}_{m,R})$ est le groupe U_K des unités de R .

$\underset{\sim}{H}^1(R,X)$ est le 1er k-groupe algébrique de cohomologie fppf d'un R-groupe fini et plat X à valeurs dans R ; le k-groupe quasi-algébrique associé à $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$ est noté $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$. Le groupe $\underset{\sim}{H}^1(R,X)(k) = \underline{\underline{H}}^1(R,X)(k)$ est égal à $H^1(R,X)$.

$\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{Q}$) est le R-modèle de Néron du K-tore T (resp. de la K-variété abélienne A), et $\underline{\underline{T}}(K) = \underline{\underline{G}}(\mathcal{C})$ [resp. $\underline{\underline{A}}(K) = \underline{\underline{G}}(\mathcal{Q})$] est la réalisation de Greenberg parfaite, relative à R , de ce R-modèle de Néron.

$\underline{\underline{H}}^1(K,X) = \underline{\underline{H}}^1(X)$ est le 1er k-groupe quasi-algébrique de cohomologie d'un K-groupe fini X à valeurs dans K . Le groupe $\underline{\underline{H}}^1(K,X)(k)$ est égal à $H^1(K,X) = H^1(X)$.

§1. DUALITÉ DE SERRE

Ce § met en oeuvre une idée de J.-P. Serre ([21], p. 55) : la catégorie des groupes quasi-algébriques unipotents connexes sur un corps k algébriquement clos (ou, plus généralement, parfait) de caractéristique non nulle est autoduale. Cette autodualité s'obtient en associant à tout k-groupe quasi-algébrique unipotent connexe G le k-groupe G^* dont les points à valeurs dans un k-schéma affine parfait S classifient, à isomorphisme près, les isogénies dont le but est G_S et dont le noyau est cyclique constant.

Dans tout ce §, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

1.0. Pour tout k-groupe algébrique lisse Γ , soit Γ^{parf} le k-groupe quasi-algébrique qui lui est associé. C'est le k-groupe parfait tel que $\Gamma^{\mathrm{parf}}(S) = \Gamma(S)$ pour tout k-schéma parfait S ; c'est aussi le revêtement proinfinitésimal universel de Γ , obtenu comme limite du système projectif filtrant

$$\ldots \longrightarrow \Gamma^{(p^{-n})} \xrightarrow{F} \Gamma^{(p^{-n+1})} \xrightarrow{F} \ldots \longrightarrow \Gamma^{(p^{-1})} \xrightarrow{F} \Gamma ,$$

où $\Gamma^{(p^{-n})}$ est le k-groupe déduit de Γ par le changement de base correspondant à l'endomorphisme $a \mapsto a^{p^{-n}}$ de k , et où F est le k-morphisme de Frobenius. Le noyau $\varpi_1(\Gamma)$ de la projection $\Gamma^{\mathrm{parf}} \to \Gamma$ est proinfinitésimal. Un morphisme $u : \Gamma \to \Gamma'$ de k-groupes algébriques lisses est une isogénie radicielle si et seulement si le morphisme associé $u^{\mathrm{parf}} : \Gamma^{\mathrm{parf}} \to \Gamma'^{\mathrm{parf}}$ est un isomorphisme.

DUALITÉ DE SERRE

Soit Γ un k-groupe algébrique lisse unipotent connexe. Pour tout k-schéma affine S et tout $n > 0$, les groupes $\mathrm{Hom}_S(\Gamma_S, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}_S(\varpi_1(\Gamma)_S, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, $\mathrm{Ext}^1_S(\varpi_1(\Gamma)_S, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sont nuls. Pour $G = \Gamma$ ou Γ^{parf}, pour tout k-schéma affine S, posons :

$$G^*(S) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^1_S(G_S, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1_S(G_S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

L'homomorphisme canonique :

$$\Gamma^*(S) \to (\Gamma^{\mathrm{parf}})^*(S)$$

est alors un isomorphisme.

1.1. <u>Cas des groupes de</u> Witt.

Soit W_n $(n \geqslant 1)$ le groupe algébrique, sur le corps premier $\mathbb{F}_p$, des vecteurs de Witt de longueur n. Notons ε_n la $\mathbb{F}_p$-isogénie d'Artin-Schreier :

$$0 \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to W_n \xrightarrow{F-\mathrm{id}} W_n \to 0 .$$

Pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma affine S, soit $\varepsilon_{n,S}$ la S-isogénie déduite de ε_n par le changement de base $S \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p$. En appliquant $\mathrm{Hom}_S(\,.\,, W_{n,S})$ à $\varepsilon_{n,S}$, on trouve un homomorphisme bord

$$\partial_n(S) : \mathrm{End}_S(W_{n,S}) \to \mathrm{Ext}^1_S(W_{n,S}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

qui, à l'endomorphisme u de $W_{n,S}$, associe l'isogénie $u^*(\varepsilon_{n,S})$ image par u de $\varepsilon_{n,S}$. Cet homomorphisme induit, sur le groupe de $\mathrm{End}_S(W_{n,S})$ formé des homothéties de rapport $a \in W_n(S)$, un homomorphisme

$$\theta_n(S) : W_n(S) \to W_n^*(S) = (W_n^{\mathrm{parf}})^*(S) .$$

Par restriction à la sous-catégorie des $\mathbb{F}_p$-schémas affines parfaits, on obtient donc un morphisme de foncteurs en groupes abéliens :

$$\Theta_n : W_n^{\mathrm{parf}} \to (W_n^{\mathrm{parf}})^* .$$

PROPOSITION 1.1.1. a) <u>Pour tout</u> $\mathbb{F}_p$-<u>schéma affine</u> S , <u>l'homomorphisme</u> $\partial_1(S)$ <u>est surjectif</u>.

b) <u>Le morphisme</u> Θ_1 <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : a) Soit $S = \operatorname{Spec} A$ un $\mathbb{F}_p$-schéma affine, et soit ξ une S-suite exacte :

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S \longrightarrow E \xrightarrow{p} \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow 0 .$$

En particulier, E est un $\mathbb{G}_{a,S}$-torseur sous $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Par la théorie d'Artin-Schreier, ([9], exposé XI, corollaire 6.9), il existe un polynôme $P(t)$ à coefficients dans A tel que E soit le spectre de la A-algèbre

$$B = A[t,u]/(u^p-u-P(t)) ,$$

l'opération de translation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E étant donnée par l'homomorphisme de A-algèbres

$$\delta : B \to (A[X]/(X^p-X))\otimes_A B$$

tel que $\delta(u) = 1\otimes u + \bar{X}\otimes 1$, $\delta(t) = 1\otimes t$.

Le coproduit $d : B \to B\otimes_A B$ vérifie l'égalité : $(\delta\otimes \mathrm{id})\circ d = (\mathrm{id}\otimes d)\circ\delta$. Ceci s'exprime par l'existence d'un polynôme $Q(1\otimes t , t\otimes 1)$ dans $A[1\otimes t , t\otimes 1]$ tel que : $d(u) = 1\otimes u + u\otimes 1 + Q(1\otimes t , t\otimes 1)$, et donc tel que :

$$Q(1\otimes t , t\otimes 1)^p - Q(1\otimes t , t\otimes 1) = P(1\otimes t + t\otimes 1) - P(1\otimes t) - P(t\otimes 1) .$$

Il existe donc $R(t) \in A[t]$ tel que :

$$Q(1\otimes t , t\otimes 1) = R(1\otimes t + t\otimes 1) - R(1\otimes t) - R(t\otimes 1) .$$

L'élément $v = u-R(t)$ de la $A[t]$-algèbre B en est un générateur qui vérifie :

$$\begin{cases} d(v) = 1\otimes v + v\otimes 1 \\ v^p - v = S(t) \end{cases}$$

avec $S(t)$ dans $A[t]$. En particulier, $S(t)$ est un p-polynôme, donc donné par :

$$S(t) = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} a_i t^{p^i} = (\sum_{0\leqslant i\leqslant n} a_i F^i)(t) .$$

Ceci montre que l'on obtient E par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{G}_{a,S} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F-\mathrm{id}} \\ \mathbb{G}_{a,S} & \xrightarrow[0\leqslant i\leqslant n]{\Sigma\, a_i F^i} & \mathbb{G}_{a,S} \end{array}$$

autrement dit que la classe $[\xi] \in \mathrm{Ext}^1_S(\mathbb{G}_{a,S},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la S-isogénie ξ est égale à $\partial_1(S)(\sum_{0\leqslant i\leqslant n} a_i F^i)$.

REMARQUE. Lorsque S est parfait, on peut éviter cette démonstration élémentaire en utilisant la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{V^p}(\mathbb{G}_a^{parf},\mathbb{G}_a^{parf})$, où V_p est la catégorie des faisceaux en $\mathbb{F}_p$-vectoriels sur le site des S-schémas parfaits muni de la topologie étale ([5]).

b) Supposons S parfait.

Pour tout $a \in A$, on a alors : $a\circ F = F\circ F^{-1}(a)$, et $\partial_1(S)(aF) = \Theta_1(S)(F^{-1}(a))$ (puisque $F^*(\varepsilon_{1,S}) = \varepsilon_{1,S}$) ; donc $\Theta_1(S)$ est surjectif.

Si $\Theta_1(S)(a) = 0$, il existe $u \in \mathrm{End}_S(\mathbb{G}_{a,S})$ tel que $a = (F-\mathrm{id})\circ u$. Ceci implique que $F^r(a)$ est nul pour r assez grand, et donc que a lui-même est nul.

Pour $n \geqslant 2$, soient $V : W_{n-1} \to W_n$, $R : W_n \to W_{n-1}$ les $\mathbb{F}_p$-morphismes de "Verschiebung" et restriction, respectivement.

LEMME 1.1.2. 1) $\theta_n = F^*\circ\theta_n\circ F$ $\quad \forall n \geqslant 1$

2) $\theta_n\circ FV = R^*\circ\theta_{n-1}$ $\quad \forall n \geqslant 2$

3) $\theta_{n-1}\circ FR = V^*\circ\theta_n$ $\quad \forall n \geqslant 2$

4) $\theta_n(S)\circ a = a^*\circ\theta_n(S)$ $\quad \forall n \geqslant 1$, $\forall a \in W_n(S)$, pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma affine S .

<u>Preuve</u> : C'est là une généralisation des formules de compatibilité de ([21], p. 54) ; la démonstration en est identique.

PROPOSITION 1.1.3. *Le morphisme* Θ_n *est, pour tout* $n \geq 1$, *un isomorphisme*.

<u>Preuve</u> : Pour $n = 1$, c'est le b) de la proposition ci-dessus.

Pour $n \geq 2$, on a un diagramme commutatif à lignes exactes (le morphisme $(FR)(S)$ est en effet surjectif pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma affine parfait S) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathbb{G}_a^{parf} & \xrightarrow{((FV)^{n-1})^{parf}} & W_n^{parf} & \xrightarrow{(FR)^{parf}} & W_{n-1}^{parf} \to 0 \\
\downarrow \Theta_1 & & \downarrow \Theta_n & & \downarrow \Theta_{n-1} \\
0 \to (\mathbb{G}_a^{parf})^* & \xrightarrow[((R^{n-1})^{parf})^*]{} & (W_n^{parf})^* & \xrightarrow[(V^{parf})^*]{} & (W_{n-1}^{parf})^*
\end{array}$$

On en déduit, par récurrence, que Θ_n est un isomorphisme.

1.2. <u>Cas général</u>.

PROPOSITION 1.2.1 ("Dualité de Serre"). *Soit* k *un corps parfait de caractéristique* $p > 0$. *Pour tout* k-*groupe quasi-algébrique unipotent connexe* G , *il existe un* k-*groupe quasi-algébrique unipotent connexe* G^* (unique à isomorphisme unique près) *dont les points à valeurs dans un* k-*schéma affine parfait quelconque* S *sont les classes d'isogénies dont le but est* G_S *et dont le noyau est cyclique constant*. *Les groupes* G *et* G^* *sont isogènes*. *Le foncteur* $G \mapsto G^*$ *est exact* (c'est-à-dire transforme toute suite exacte courte de groupes quasi-algébriques unipotents connexes en une suite exacte), *et involutif* (c'est-à-dire de carré l'identité).

<u>Preuve</u> : Tout k-groupe algébrique lisse unipotent connexe est quotient d'un produit fini de k-groupes de vecteurs de Witt de longueur finie par un sous-k-groupe connexe ([7] ; ou [22], p. 179, si k

est algébriquement clos). On en déduit que, si G est un k-groupe quasi-algébrique unipotent connexe, il existe une k-suite exacte

$$U_2 \xrightarrow{g} U_1 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \qquad (U_i = (W_{n_i}^{\text{parf}})^{I_i}\ ,\ I_i \text{ fini}\ ,\ i = 1,2)\ ,$$

le noyau de g étant connexe. Le foncteur G^* est alors le noyau de g^*, donc est représentable par un k-groupe quasi-algébrique, qui est unipotent. En outre, il existe une k-isogénie $G \xrightarrow{f} U$, où U est un produit fini de k-groupes quasi-algébriques associés à des k-groupes de vecteurs de Witt de longueur finie ([7], p. 595 ; ou [22], p. 176, si k est algébriquement clos). Soit M le k-groupe fini étale noyau de f. On en déduit une suite exacte de k-groupes quasi-algébriques :

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_k(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to U^* \xrightarrow{f^*} G^*\ .$$

Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, le groupe $(\mathrm{Coker}\ f^*)(\bar{k})$, qui est un sous-groupe de $\mathrm{Ext}^1_{\bar{k}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, est nul. Il en résulte que f^* est un épimorphisme. En particulier, G^* est connexe, isogène à U^*, donc à U, et aussi à G. Les groupes G et G^* ont, en particulier, même dimension.

Supposons donnée une suite exacte de k-groupes quasi-algébriques unipotents connexes :

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{h} G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0\ .$$

On en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow G_3^* \longrightarrow G_2^* \xrightarrow{h^*} G_1^*\ .$$

Le k-groupe quasi-algébrique $\mathrm{Coker}(h^*)$ est connexe et de dimension zéro : il est donc nul.

Pour un k-groupe quasi-algébrique U isomorphe à $(W_n^{\text{parf}})^I$, écrivons $\Theta(\Gamma)$ l'isomorphisme $\Theta_n^I : \Gamma \to \Gamma^*$. Soit $U_2 \xrightarrow{g} U_1 \longrightarrow G \longrightarrow 0$ une résolution comme ci-dessus. Les formules du lemme 1.1.2 permettent alors d'établir la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} U_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & U_1 \arrow[d] \\ (U_2^*)^* \arrow[r, "(g^*)^*"'] & (U_1^*)^* \end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes $\Theta(U_i^*)\circ\Theta(U_i)$ $(i=1,2)$. Par passage aux conoyaux, on en déduit un isomorphisme :

$$G \to (G^*)^* ,$$

qui ne dépend pas de la résolution choisie pour G .

1.3. Dualité de Serre dans $D^b(\mathcal{Q}_u)$.

Soit $\mathcal{Q}_u$ la catégorie abélienne des k-groupes quasi-algébriques unipotents, et $\mathcal{Q}_{uc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}_u$ dont les objets sont connexes. Pour tout objet G de $\mathcal{Q}_u$, posons :

$$G^* = (G^o)^* ,$$

où G^o est la composante neutre de G . On obtient ainsi un foncteur contravariant de $\mathcal{Q}_u$ dans $\mathcal{Q}_{uc}$, qui prolonge l'autodualité de Serre de $\mathcal{Q}_{uc}$. Ce foncteur est exact à gauche (c'est-à-dire : $(\varprojlim_I G_i)^* = \varinjlim_I (G_i^*)$, si I est fini).

Soit $\mathcal{K}^b(\mathcal{Q}_u)$ la catégorie triangulée des complexes bornés, à homotopie près, formés d'objets de $\mathcal{Q}_u$, et soit $\mathcal{K}^b(\mathcal{Q}_{uc})$ la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{K}^b(\mathcal{Q}_u)$ dont les objets sont formés de k-groupes connexes. On considère le foncteur contravariant $*$ de $\mathcal{K}^b(\mathcal{Q}_u)$ dans elle-même qui, à tout objet $X^\cdot$ de $\mathcal{K}^b(\mathcal{Q}_u)$, associe $(X^\cdot)^*$ défini par :

$$[(X^\cdot)^*]_n = (X_{-n})^* , \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z} .$$

C'est un ∂-foncteur au sens de [12], p. 22 .

Tout k-groupe quasi-algébrique unipotent est le noyau d'un épimorphisme de k-groupes quasi-algébriques unipotents connexes ([7],

p. 547), et donc tout objet de $\mathcal{K}^b(\mathfrak{D}_u)$ est quasi-isomorphe à un objet de $\mathcal{K}^b(\mathfrak{D}_{uc})$. De plus, si $X^\cdot$ est un objet acyclique de $\mathcal{K}^b(\mathfrak{D}_{uc})$, le complexe $(X^\cdot)^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}^b(\mathfrak{D}_{uc}))$ est aussi acyclique (proposition 1.2.1). Il en résulte ([12], p. 53) que le ∂-foncteur $* : \mathcal{K}^b(\mathfrak{D}_u) \to \mathcal{K}^b(\mathfrak{D}_u)$ admet un dérivé droit, noté

$$\mathcal{S} : D^b(\mathfrak{D}_u) \to D^b(\mathfrak{D}_u)$$

de la catégorie dérivée des complexes bornés formés d'objets de $\mathfrak{D}_u$ dans elle-même. Ce foncteur $\mathcal{S}$, contravariant, est involutif : c'est l'autodualité de Serre de $D^b(\mathfrak{D}_u)$. Remarquons que, si $(G^\cdot)_n = 0$ pour $n \neq 0$, et $(G^\cdot)_o = G$, on a :

$$\begin{cases} H^i((G^\cdot)^*) = 0 & \text{pour } i \neq 0,-1 \\ H^o((G^\cdot)^*) = G^* & \\ H^{-1}((G^\cdot)^*) = \underline{\mathrm{Hom}}_k(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Hom}}_k(\pi_o(G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) , & \end{cases}$$

où $\pi_o(G)$ est le groupe des composantes connexes de G.

§2. RIGIDIFICATION DES Ext^1

2.1. Lemme de rigidification.

Soit C un site ([1]), et soit $\widetilde{C}$ la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur C. Pour tout objet T de C, pour tout objet E de $\widetilde{C}$, on désigne par E_T la restriction de E au site C/T. Pour tout couple (E,G) d'objets de $\widetilde{C}$, soit $\underline{\mathrm{Mor}}(E,G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(E,G)$) l'objet de $\widetilde{C}$ tel que, pour tout objet T de C, le groupe $\underline{\mathrm{Mor}}(E,G)(T)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(E,G)(T)$) soit le groupe $\mathrm{Mor}_T(E_T,G_T)$ (resp. $\mathrm{Hom}_T(E_T,G_T)$) des morphismes $E_T \to G_T$ de faisceaux d'ensembles (resp. de faisceaux en groupes) sur le site C/T.

Pour tout couple (E,G) d'objets de $\widetilde{C}$, pour tout objet T de C, soit $\mathcal{E}(E,G)(T)$ l'ensemble des suites exactes d'objets de $(C/T)^{\sim}$:

$$0 \longrightarrow G_T \xrightarrow{\iota_V} V \xrightarrow{\pi_V} E_T \longrightarrow 0 .$$

Une telle suite exacte sera notée (V,π_V,ι_V) ou, plus brièvement, V. Soit $F \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E$ un sous-faisceau en groupes de E. Pour tout objet T de C, on considère l'ensemble $\mathcal{E}(E,G)_F(T)$ des éléments de $\mathcal{E}(E,G)(T)$ rigidifiés suivant F_T, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}(E,G)_F(T) = \{(V,s) \in \mathcal{E}(E,G)(T) \times \mathrm{Mor}_T(F_T,V) \ ; \ \pi_V \circ s = \alpha_T\} .$$

Deux éléments (V_1,s_1), (V_2,s_2) de $\mathcal{E}(E,G)_F(T)$ seront dits isomorphes s'il existe $f \in \mathrm{Hom}_T(V_1,V_2)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_T \arrow[r] \arrow[d, equal] & V_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] & & E_T \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & & F_T \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[ur, "\alpha_T"] \arrow[dl, "s_2"] \arrow[dr, "\alpha_T"'] & & \\
0 \arrow[r] & G_T \arrow[r] & V_2 \arrow[rr] & & E_T \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

On désigne par $\mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)_{F_T}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples $(V,s)\in\mathcal{E}(E,G)_F(T)$, et par $\mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des éléments de $\mathcal{E}(E,G)(T)$. Il y a, sur $\mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)_{F_T}$, une structure canonique de groupe abélien telle que l'application

$$q(T) : \mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)_{F_T} \to \mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)$$

qui, à (V,s), associe V, soit un homomorphisme de groupes. Un couple (V,s) représente l'élément nul de $\mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)_{F_T}$ si et seulement s'il existe $u\in\mathrm{Hom}_T(E_T,V)$ tel que $\pi_V\circ u = \mathrm{id}$, $s = u\circ\alpha_T$. On a ainsi défini un préfaisceau en groupes abéliens

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)_F : C^{\circ} \to \mathrm{Ab}$$

par : $\underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)_F(T) = \mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)_{F_T}$, et aussi un préfaisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)$ par : $\underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)(T) = \mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)$, ainsi qu'un morphisme de préfaisceaux en groupes abéliens $q : \underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)_F \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)$.

a) Soit T un objet de C. Si $(V,s)\in\mathcal{E}(E,G)_F(T)$ représente l'élément nul, associons, à tout $h\in\mathrm{Mor}_T(F_T,G_T)$, la classe de $(V,s+\iota_V h)$; celle-ci ne dépend pas du choix du représentant de l'élément nul de $\mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)_{F_T}$. On a donc défini une application, qui est un homomorphisme de groupes fonctoriel en T :

$$d(T) : \mathrm{Mor}_T(F_T,G_T) \to \mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T)_{F_T} ,$$

d'où un morphisme de préfaisceaux en groupes abéliens sur C :

$$d : \underline{\mathrm{Mor}}(F,G) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)_F .$$

b) Soit can le morphisme composé

$$\underline{\mathrm{Hom}}(E,G) \to \underline{\mathrm{Hom}}(F,G) \to \underline{\mathrm{Mor}}(F,G) .$$

c) Pour tout objet T de C, soit

$$\tau(T) : \mathrm{Ext}^1_T(E_T,G_T) \to H^1(F_T,G_T)$$

l'application qui, à la classe d'isomorphisme de V, associe la classe d'isomorphisme du F_T-torseur $\alpha_T^*(V)$ sous G_T. L'application $\tau(T)$ est un homomorphisme, fonctoriel en T. D'où un morphisme de préfaisceaux en groupes abéliens :

$$\tau : \underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G) \to \underline{H}^1(F,G) ,$$

où $\underline{H}^1(F,G)(T) = H^1(F_T,G_T)$.

LEMME 2.1.1 ("Lemme de rigidification"). <u>Le complexe de préfaisceaux en groupes abéliens sur</u> C : $0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E/F,G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E,G) \xrightarrow{\mathrm{can}} \underline{\mathrm{Mor}}(F,G) \xrightarrow{d} \underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G)_F \xrightarrow{q} \underline{\mathrm{Ext}}^1(E,G) \xrightarrow{\tau} \underline{H}^1(F,G)$ <u>est fonctoriel en</u> G <u>et par rapport aux couples</u> $(E, F \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E)$.
<u>Pour tout objet</u> T <u>de</u> C, <u>ce complexe induit, sur les points à valeurs dans</u> T, <u>une suite exacte de groupes abéliens</u>.

<u>Preuve</u> : Soit T un objet de C. Si $(V,s) \in \mathcal{S}(E,G)_F(T)$ représente un élément du noyau de $q(T)$, et si $u \in \mathrm{Hom}_T(E_T,V)$ vérifie $\pi_V \circ u = \mathrm{id}$, on a : $\pi_V \circ (s - u\alpha_T) = 0$; d'où l'existence de $h \in \mathrm{Mor}_T(F_T,G_T)$ tel que $s - u\alpha_T = \iota_V h$, ce qui montre que (V,s) représente $d(T)(h)$. Comme $q(T) \circ d(T) = 0$, on a l'exactitude du complexe

$$\cdot \xrightarrow{d(T)} \cdot \xrightarrow{q(T)} \cdot$$

Soit maintenant $h \in \mathrm{Mor}_T(F_T,G_T)$ un élément du noyau de $d(T)$. Soit $(V, u \circ \alpha_T)$, où $u \in \mathrm{Hom}_T(E_T,V)$ vérifie $\pi_V \circ u = \mathrm{id}$, un élément de $\mathcal{S}(E,G)_F(T)$ représentant l'élément nul de $\mathrm{Ext}_T^1(E_T,G_T)_{F_T}$. Alors $(V, u\circ\alpha_T + \iota_V \circ h)$ représente aussi l'élément nul, et donc il existe $u' \in \mathrm{Hom}_T(E_T,V)$ tel que $\pi_V \circ u' = \mathrm{id}$ et $u\circ\alpha_T + \iota_V \circ h = u' \circ \alpha_T$. Soit $h_o \in \mathrm{Hom}_T(E_T,G_T)$ tel que $u' - u = \iota_V \circ h_o$. On a donc : $h = h_o \circ \alpha_T = \mathrm{can}(T)(h_o)$: D'où l'exactitude du complexe

$$\cdot \xrightarrow{\mathrm{can}(T)} \cdot \xrightarrow{d(T)} \cdot$$

Enfin, pour que $V \in \mathrm{Ext}_T^1(E_T,G_T)$ admette une rigidification suivant F_T, il faut et il suffit que le F_T-torseur $\alpha_T^*(V)$ sous G_T soit trivial, d'où l'exactitude du complexe

$$\cdot \xrightarrow{q(T)} \cdot \xrightarrow{\tau(T)} \cdot$$

2.2. Application à la "résolution standard".

Soit S un schéma, et soit C le site fppf des S-schémas. Soit X un S-schéma en groupes fini et plat. Dans les notations de 2.1, on prend :

$$E = F = X \quad , \quad \alpha = \mathrm{id}_X \quad , \quad G = \mathbb{G}_{m,S} \ .$$

On notera avec un indice S les groupes ci-dessus, soit $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(X,\mathbb{G}_m)_X$, $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(X,\mathbb{G}_m)$, $\underline{\mathrm{Mor}}_S(X,\mathbb{G}_m)$ au lieu de $\underline{\mathrm{Ext}}^1(X,\mathbb{G}_m)_X$, etc...

Tout d'abord, le faisceau $\underline{\mathrm{Mor}}_S(X,\mathbb{G}_m)$ est représentable par le S-groupe affine lisse de type fini $\prod_{X|S} \mathbb{G}_{m,X}$. Soit $\underline{\mathrm{Mor}}_S(X\times_S X,\mathbb{G}_m)_{\mathrm{sym}}$ le S-groupe noyau du S-endomorphisme "symétrisation" :

$$\sigma : \underline{\mathrm{Mor}}_S(X\times_S X,\mathbb{G}_m) \to \underline{\mathrm{Mor}}_S(X\times_S X,\mathbb{G}_m)$$

défini par : $\sigma(f)(x,y) = f(y,x)(f(x,y))^{-1}$.

Soit alors

$$\delta : \underline{\mathrm{Mor}}_S(X\times_S X,\mathbb{G}_m)_{\mathrm{sym}} \to \underline{\mathrm{Mor}}_S(X\times_S X\times_S X,\mathbb{G}_m)$$

le morphisme de S-groupe défini, pour tout S-schéma T , et pour tout élément (x,y,z) de $(X\times_S X\times_S X)(T)$, par :

$$\delta(f)(x,y,z) = f(x,y)f(xy,z)[f(y,z)f(x,yz)]^{-1}$$

(où l'on a écrit f au lieu de $f(T)$).

Soit $\underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{\mathrm{sym}}$ le S-schéma en groupes S-affine commutatif, noyau de δ . C'est le S-groupe des "2-cocycles symétriques de X à valeurs dans $\mathbb{G}_m$". Soit enfin : $X' = \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,\mathbb{G}_m)$ le dual de Cartier de X .

PROPOSITION 2.2.1. <u>Le foncteur</u> $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(X,\mathbb{G}_m)_X$ <u>est représentable par le</u> S-<u>groupe</u> $\underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{\mathrm{sym}}$. <u>On a une suite exacte de</u> S-<u>groupes commutatifs</u> (<u>au sens</u> fppf) :

$$0 \to X' \to \prod_{X|S} \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{d} \underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{\mathrm{sym}} \to 0 \ .$$

<u>Cette suite sera appelée la</u> "<u>résolution lisse standard de</u> X " (<u>ou parfois</u> "<u>résolution standard</u>").

<u>Preuve</u> : Soit

$$\theta : \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_S(X,\mathbb{G}_m)_X \to \underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{sym}$$

le morphisme de préfaisceaux en groupes abéliens sur C défini, pour tout S-schéma T , par :

$$\theta(T)(V,s) : X_T \times_T X_T \to \mathbb{G}_{m,T}$$
$$(x,y) \mapsto s(x)s(y)(s(xy))^{-1}$$

(pour tout T-schéma T' et pour tout élément (x,y) de $(X_T \times_T X_T)(T')$, on a écrit s au lieu de $s(T')$).

Montrons que θ est un isomorphisme.

Soit T un S-schéma. Soit $(V,s) \in \mathcal{E}(X_T,\mathbb{G}_{m,T})_{X_T}$ représentant un élément du noyau de $\theta(T)$. Le T-morphisme $s : X_T \to V$ est alors un morphisme de T-schémas en groupes, et donc (V,s) représente l'élément nul de $\mathrm{Ext}^1_T(X_T,\mathbb{G}_{m,T})_{X_T}$. Donc $\theta(T)$ est injectif.

Soit maintenant $c \in \underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{sym}(T)$ un 2-cocycle symétrique. On munit $V = X_T \times_T \mathbb{G}_{m,T}$ de la loi de T-groupe abélien donnée par :

$$(x,a)*(y,b) = (xy\ ,\ c(T)(x,y)ab)\ ,$$

pour tout $(x,a),(y,b) \in (X \times_S G_{m,S})(T')$, pour tout T-schéma T'.

Soient $\pi : V \to X_T$ et $\iota : \mathbb{G}_{m,T} \to X_T$ les T-morphismes de schémas en groupes donnés par : $\pi(x,a) = x$, $\iota(a) = (1,a)$, où $(x,a) \in (X \times_S G_{m,S})(T')$, pour un T-schéma T' quelconque. On a ainsi une suite exacte de T-groupes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,T} \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} X_T \longrightarrow 0\ .$$

Soit $s : X_T \to V$ le T-morphisme donné par : $s(T')(x) = (x,1)$. On obtient ainsi un élément $(V,s) \in \mathcal{E}(X_T,\mathbb{G}_{m,T})$ dont la classe dans $\mathrm{Ext}^1_T(X_T,\mathbb{G}_{m,T})_{X_T}$ a pour image, par $\theta(T)$, le 2-cocycle c donné.

Ceci montre que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(X,\mathbb{G}_m)_X$ est représentable par $\underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{sym}$.

Par le lemme de rigidification, on a donc la suite exacte de S-groupes affines de type fini :

$$0 \to X' \to \prod_{X|S} \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{d} \underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{sym} .$$

Le faisceau associé, au sens fppf, au préfaisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(X,G_m)$ est nul ((6.2.2) de [20]). Le lemme de rigidification montre alors que d est couvrant pour la topologie fppf. En particulier, $\underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{sym}$ est lisse.

La suite exacte ainsi obtenue

$$0 \to X' \to \prod_{X|S} \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{d} \underline{Z}^2_S(X,\mathbb{G}_m)_{sym} \to 0$$

peut aussi se déduire de la suite exacte, décrite dans [7], chap. II, §1, n° 2 :

$$0 \to X' \to \prod_{X|S} \mathbb{G}_{m,X} \to \prod_{X\times_S X|S} \mathbb{G}_{m,X\times_S X} .$$

2.3. <u>Application aux variétés abéliennes</u>.

Soient K un corps, et C le site fppf des K-schémas. Etant donné une K-variété abélienne A et un entier $n > 1$, prenons, dans les notations de 2.1 :

$$E = A \quad , \quad G = \mathbb{G}_{m,K} \quad , \quad F = A_n \quad , \quad \alpha : A_n \hookrightarrow A \text{ (canonique)} ,$$

où A_n est le K-groupe noyau de la multiplication par n dans A .

PROPOSITION 2.3.1. <u>Le préfaisceau en groupes abéliens</u> $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)_{A_n}$ <u>est représentable</u>. <u>On a une suite exacte de</u> K-<u>groupes</u> :

$$0 \to \prod_{A_n|\mathrm{Spec}\ K} \mathbb{G}_{m,A_n} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)_{A_n} \to A' \to 0 ,$$

<u>où</u> A' <u>est la</u> K-<u>variété</u> <u>abélienne duale de</u> A .

<u>Preuve</u> : Montrons que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,G_m)_{A_n}$ est un faisceau sur C . Soit donc T un K-schéma, et soit $f : T' \to T$ un morphisme couvrant fppf.

Soient f_1 , f_2 les deux projections canoniques $T'' = T'\times_T T' \to T'$. Donnons un élément (D', s') de $\mathcal{E}(A,\mathbb{G}_m)_{A_n}(T')$ tel que ses images $f_1^*((D', s'))$, $f_2^*((D', s'))$ dans $\mathcal{E}(A,\mathbb{G}_m)_{A_n}(T'')$ soient isomorphes. Puisque $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)$ est un faisceau pour la topologie fppf , l'égalité $f_1^*(D') = f_2^*(D')$ implique l'existence d'une T-suite exacte $D \in \mathcal{E}(A,G_m)(T)$, unique à isomorphisme près, telle que D' soit isomorphe à $f^*(D)$; on peut donc supposer que $D' = f^*(D)$. Il existe alors un T''-endomorphisme u de $D\times_T T''$, induisant l'identité sur $A_{T''}$ et sur $\mathbb{G}_{m,T''}$, tel que $u\circ f_1^*(s') = f_2^*(s')$. Compte tenu de la nullité de $\mathrm{Hom}_{T''}(A_{T''},\mathbb{G}_{m,T''})$, on a nécessairement : $u = id$. Il existe donc un unique $s \in \mathrm{Mor}_T(A_{n,T},\mathbb{G}_{m,T})$ tel que $s' = f^*(s)$. On a alors : $(D',s') = f^*((D,s))$. On en déduit immédiatement que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,G_m)_{A_n}$ est un faisceau sur C .

Considérons la suite exacte de faisceaux sur C , déduite du lemme de rigidification et de la nullité de $\underline{\mathrm{Hom}}_K(A,\mathbb{G}_m)$:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Mor}}_K(A_n,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{d} \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)_{A_n} \xrightarrow{q} \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m) .$$

Le faisceau associé à $\underline{H}^1(A_n,\mathbb{G}_m)$ est nul, et donc q est couvrant pour la topologie fppf. Le faisceau $\underline{\mathrm{Mor}}_K(A_n,\mathbb{G}_m)$ est représentable par le K-groupe affine $\prod_{A_n|K} \mathbb{G}_{m,A_n}$, et $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)$ est représentable par la K-variété abélienne A' duale de A . On en déduit la représentabilité de $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)_{A_n}$ et la suite exacte de l'énoncé.

Remarquons que, si K est de caractéristique 0 , le K-groupe $\prod_{A_n|K} \mathbb{G}_{m,A_n}$ est un tore.

PROPOSITION 2.3.2. <u>Soit</u> X <u>un</u> <u>K-groupe</u> <u>fini annulé par</u> n , <u>et soit</u> E <u>un</u> <u>K-groupe</u> <u>extension de</u> X <u>par une variété abélienne</u> A . <u>Si</u> E_n <u>est le noyau de la multiplication par</u> n <u>dans</u> E , <u>le préfaisceau</u> $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n}$ <u>est représentable par le produit fibré de</u> $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)_{A_n}$ <u>et de</u> $\underline{Z}^2_K(E_n,\mathbb{G}_m)_{sym}$ <u>au-dessus de</u> $\underline{Z}^2_K(A_n,\mathbb{G}_m)_{sym}$. <u>On a</u>

une suite exacte de K-groupes :

$$0 \to X' \to \prod_{E_n | K} \mathbb{G}_{m,E_n} \xrightarrow{d} \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n} \to A' \to 0 .$$

Preuve : Appliquons le lemme de rigidification avec $E = E$, $F = E_n$, $G = \mathbb{G}_m$. Puisque E/E_n s'identifie à A , on a : $\underline{\mathrm{Hom}}_K(E/E_n,\mathbb{G}_m) = 0$. D'où la suite exacte de préfaisceaux en groupes abéliens :

$$0 \to X' \to \prod_{E_n | K} \mathbb{G}_{m,E_n} \xrightarrow{d} \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n} .$$

Nous allons montrer que le morphisme fonctoriel canonique :

$$\Theta : \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)_{A_n} \times_{\underline{Z}^2_K(A_n,\mathbb{G}_m)_{sym}} \underline{Z}^2_K(E_n,\mathbb{G}_m)_{sym}$$

est un isomorphisme : ceci montrera en particulier que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n}$ est représentable, et il nous restera juste à évaluer le conoyau de d.

Nous allons montrer la bijectivité de $\Theta(T)$ dans le cas où $T = \mathrm{Spec}\ K$; la démonstration est la même pour un K-schéma quelconque T . Prenons les notations du diagramme suivant, commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & E_n \arrow[r, "\rho_n"] \arrow[d, "\alpha'"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\beta'"'] & E \arrow[r, "\rho"'] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Soit (V,s) un élément de $\mathcal{E}(E,\mathbb{G}_m)_{E_n}(K)$ représentant un élément du noyau de $\Theta(K)$. Le composé $E_n \xrightarrow{s} V \xrightarrow{\pi_V} E$ est égal à α' , et s est un élément de $\mathrm{Hom}_K(E_n,V)$. De plus, il existe $u \in \mathrm{Hom}_K(A,V)$ tel que $u\circ\alpha = s\circ\beta$ et $\pi_V\circ u = \beta'$. Puisque E est la somme amalgamée de E_n et A sous A_n , on en déduit un unique $f \in \mathrm{Hom}_K(E,V)$ tel que : $f\circ\beta' = u$, $f\circ\alpha' = s$. On a alors $\pi_V\circ f = \mathrm{id}$, et cette condition, jointe à l'égalité $f\circ\alpha' = s$ montre que (V,s) représente l'élément nul de $\mathrm{Ext}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n}$, donc que $\Theta(K)$ est injectif.

Montrons maintenant que $\Theta(K)$ est surjectif. Soit $((D,s),(\Gamma,\sigma))$ un élément de $\mathcal{B}(A,\mathbb{G}_m)_{A_n}(K) \times \mathcal{B}(E_n,\mathbb{G}_m)_{E_n}(K)$ représentant un élément du but de $\Theta(K)$. Si $s' \in \mathrm{Mor}_K(A_n,\alpha^*(D))$ et $\sigma' \in \mathrm{Mor}_K(A_n,\beta^*(\Gamma))$ sont respectivement déduits (canoniquement) de s et σ, soit $f \in \mathrm{Hom}_K(\beta^*(\Gamma),\alpha^*(D))$ rendant commutatif le diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & \beta^*(\Gamma) \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f"] & A_n \arrow[r] \arrow[l, dashed, shift right, "\sigma'"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & \alpha^*(D) \arrow[r, shift right] & A_n \arrow[r] \arrow[l, dashed, shift right, "s'"'] & 0
\end{tikzcd} .$$

Notons $g \in \mathrm{Hom}_K(\beta^*(\Gamma),D)$ le composé du morphisme canonique $\alpha^*(D) \to D$ et de f, et soit $\beta_1 : \beta^*(\Gamma) \to \Gamma$ le morphisme canonique.
Soit V la somme amalgamée de D et de Γ sous $\beta^*(\Gamma)$, c'est-à-dire définie par le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
\beta^*(\Gamma) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"'] & D \arrow[d, "\beta'_1"] \\
\Gamma \arrow[r, "g'"'] & V
\end{tikzcd} .$$

L'égalité $\beta'\circ\pi_D\circ g = \alpha'\circ\pi_\Gamma\circ\beta_1$ définit donc $\pi_V \in \mathrm{Hom}_K(V,E)$ tel que $\pi_V\circ\beta'_1 = \beta'\circ\pi_D$, $\pi_V\circ g' = \alpha'\circ\pi_\Gamma$. Le K-morphisme π_V est un épimorphisme. Soit $\rho_V \in \mathrm{Hom}_K(V,X)$ l'élément défini par :

$$\rho\circ g' = \rho_n\circ\pi_\Gamma \quad , \quad \rho_V\circ\beta'_1 = 0 .$$

Ce K-morphisme ρ_V est égal à $\rho\circ\pi_V$. On en déduit le diagramme commutatif de K-groupes, à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r, "\iota_D"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, "\pi_D"] \arrow[d, "\beta'_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r, "\beta'_1 \circ \iota_D"] & V \arrow[r, "\pi_V"] \arrow[d, "\rho_V"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
 & & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La ligne exacte du milieu est rigidifiée suivant E_n par le composé t:

$$E_n \xrightarrow{\sigma} \Gamma \xrightarrow{g'} V .$$

La classe d'isomorphisme de l'élément (V,t) de $\mathcal{E}(E,\mathbb{G}_m)_{E_n}(K)$ ainsi obtenue donne, par $\Theta(K)$, le couple formé de la classe de (D,s) et de la classe de (Γ,σ). Ceci montre que $\Theta(K)$ est surjectif.

Le préfaisceau en groupes abéliens $\underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n}$ est donc représentable par un K-groupe de type fini. Le faisceau conoyau de d est alors aussi représentable par un K-groupe de type fini. Or, ce faisceau conoyau est, vu la nullité du faisceau associé à $\underline{H}^1(E_n,\mathbb{G}_m)$, le faisceau associé à $\underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)$. Puisque les faisceaux associés à $\underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^i_K(X,\mathbb{G}_m)$ sont nuls pour $i = 1,2$, le faisceau associé à $\underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)$ est égal au faisceau associé à $\underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)$, c'est-à-dire à A' . D'où la proposition.

§3. QUELQUES PROPRIÉTÉS COHOMOLOGIQUES

3.1. Hypothèses et notations.

A partir de ce §, on désigne par R un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, à corps des fractions K de caractéristique 0. On note $v : K^* \to \mathbb{Z}$ la valuation de K, et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R. Le groupe U_K des unités de R admet une filtration naturelle par les sous-groupes $U_{K,i}$ $(i \geqslant 0$, $U_K = U_{K,0})$ formés des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}^i$; on écrira U au lieu de $U_{K,1}$. Enfin, l'indice de ramification absolue $v(p)$ de K sera noté e ; c'est le rang du module libre R sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de longueur infinie à coefficients dans k.

Soit $\widetilde{K}$ une clôture algébrique de K. Pour les sous-extensions finies K'/K de $\widetilde{K}$, on prendra des notations analogues à celles que l'on vient d'introduire pour K : mêmes lettres, primées.

Soit X un K-groupe algébrique commutatif, et soit $i \geqslant 0$ un entier. Le i-ème groupe de cohomologie de X à valeurs dans K, calculé pour la topologie fppf, est égal à celui que l'on calcule pour la topologie étale ; il est encore égal au i-ième groupe de cohomologie galoisienne $H^i(G(\widetilde{K}/K), X(\widetilde{K}))$, en désignant par $G(\widetilde{K}/K)$ le groupe de Galois de $\widetilde{K}/K$. On le notera $H^i(K,X)$ (et parfois $H^i(X)$ s'il n'y a pas de confusion possible).

3.2. Trivialité cohomologique des tores-Conséquences.

PROPOSITION 3.2.1. Soit T un K-tore. Alors $H^i(K,T) = 0$ pour $i \geqslant 1$.

Preuve : Soit $M = \mathrm{Hom}_{\widetilde{K}}(T_{\widetilde{K}}, \mathbb{G}_{m,\widetilde{K}})$ le groupe des caractères du tore T. C'est un groupe abélien libre de type fini sur lequel le groupe de Galois $G(\widetilde{K}/K)$ opère continûment. Soit K'/K une extension finie galoisienne qui déploie T, et soit $g = G(K'/K)$ son groupe de Galois. On a donc : $M = M^{G(\widetilde{K}/K')}$, et donc $T(K') = \mathrm{Hom}_{Ab}(M, K'^*)$. Le g-module K'^* est cohomologiquement trivial ([24], p. 119) et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, K'^*)$ est nul ; il en résulte ([23], th. 9, p. 152) que le g-module $T(K')$ est aussi cohomologiquement trivial. Puisque l'ensemble des extensions finies galoisiennes qui déploient le tore T est cofinal dans l'ensemble de toutes les extensions finies galoisiennes, on voit que, pour tout $i \geqslant 1$, le groupe $H^i(K,T)$, qui est la limite des groupes nuls $H^i(G(K'/K), T(K'))$ (pour K' parcourant l'ensemble des extensions finies galoisiennes qui déploient T), est lui-même nul. D'où la proposition.

REMARQUE. Il résulte de la proposition que, pour toute extension finie galoisienne K'/K (dont on note $G(K'/K)$ le groupe de Galois), le $G(K'/K)$-module $T(K')$ est cohomologiquement trivial. En effet, $H^1(G(K'/K), T(K'))$ est nul comme sous-groupe de $H^1(K,T)$, et la norme $N_{K'/K} : T(K') \to T(K)$ est surjective, car c'est déjà le cas de la norme $N_{L/K} : T(L) \to T(K)$, où L/K est une surextension finie galoisienne de K' qui déploie le tore. On conclut alors grâce à [23], théorème 6, p. 150.

Soit X un K-groupe fini commutatif. Puisque K est de caractéristique 0, il existe un K-tore T et une immersion fermée de X dans T, le quotient étant aussi un tore (par exemple, si K'/K est une extension finie telle que $X_{K'}$ soit isomorphe à un produit fini de K'-groupes de racines de l'unité, on peut prendre pour T la restriction de Weil, de K' à K, de $\mathbb{G}^r_{m,K'}$, pour un r convenable).

COROLLAIRE 1. Si X est un K-groupe fini, on a : $H^1(K,X) = 0$ pour $i \geqslant 2$.

Preuve : Soit $0 \to X \to T_1 \to T_2 \to 0$ une K-résolution de X par des tores. La suite exacte $H^{i-1}(T_2) \to H^i(X) \to H^i(T_1)$ montre que $H^i(X) = 0$ pour $i \geqslant 2$.

COROLLAIRE 2. Soit K'/K une extension finie galoisienne, à groupe de Galois g. Pour tout K-groupe fini X, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le groupe $\hat{H}^i(g, H^1(K',X))$ ([23], p. 135) est fini, isomorphe à $\hat{H}^{i+2}(g, X(K'))$.

Preuve : En résolvant X par des K-tores comme ci-dessus, on obtient la suite exacte de g-modules :

$$0 \to X(K') \to T_1(K') \to T_2(K') \to H^1(K',X) \to 0 .$$

Puisque les g-modules $T_1(K')$ et $T_2(K')$ sont cohomologiquement triviaux, le cobord itéré $\hat{H}^i(g, H^1(K',X)) \to \hat{H}^{i+2}(g, X(K'))$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

COROLLAIRE 3. Soit K'/K une extension finie galoisienne, à groupe de Galois g. Pour tout K-groupe fini X, l'homomorphisme canoniquement déduit de la corestriction : $H_0(g, H^1(K',X)) \to H^1(K,X)$ est un isomorphisme.

Preuve : En résolvant encore X par des K-tores, comme ci-dessus, on obtient un diagramme commutatif de g-modules, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
T_1(K') & \to & T_2(K') & \to & H^1(K',X) & \to & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle N} & & \downarrow{\scriptstyle N} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}} & & \\
T_1(K) & \to & T_2(K) & \to & H^1(K,X) & \to & 0
\end{array}$$

Appliquons-lui le foncteur $H_0(g,.)$, qui est exact à droite. On obtient ainsi un diagramme commutatif de groupes abéliens, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
H_o(g,T_1(K')) & \to & H_o(g,T_2(K')) & \to & H_o(g,H^1(K',X)) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
T_1(K) & \longrightarrow & T_2(K) & \longrightarrow & H^1(K,X) & \longrightarrow & 0 \ .
\end{array}$$

Les noyaux et conoyaux des deux premières flèches verticales sont respectivement les groupes $\hat{H}^{-1}(g,T_i(K'))$ et $\hat{H}^o(g,T_i(K'))$ (avec $i=1,2$), donc sont nuls. Par conséquent, toutes les flèches verticales de ce diagramme sont des isomorphismes.

REMARQUE. Soient X un K-groupe fini d'ordre une puissance de p, et $X \hookrightarrow T$ une immersion fermée de X dans un K-tore. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit ${}_{(p^n)}T$ le noyau de la multiplication par p^n dans T. Soit $n_o \geqslant 0$ un entier tel que $({}_{(p^n)}T)(K) = ({}_{(p^{n_o})}T)(K)$, $\forall n \geqslant n_o$. Pour tout $n \geqslant n_o$, soit $X^{(n)}$ le K-groupe fini produit fibré, sur T, de $X \hookrightarrow T$ et de $T \xrightarrow{p^n} T$. De la suite exacte $0 \to {}_{(p^n)}T \to X^{(n)} \to X \to 0$, on déduit la suite exacte de groupes abéliens:

$$0 \to X(K) \to H^1(K, {}_{(p^n)}T) \to H^1(K,X^{(n)}) \to H^1(K,X) \to 0 \ .$$

§4. STRUCTURES ALGÉBRIQUES ET QUASI-ALGÉBRIQUES

4.1. Réalisation de Greenberg.

Pour tout $W(k)$-schéma S, pour tout $r \geqslant 1$, soit $\mathrm{Green}_r(S)$ le k-schéma réalisation de Greenberg au cran r de S ([8]). Pour toute k-algèbre Λ, on a : $\mathrm{Green}_r(S)(\Lambda) = S(W_r(\Lambda))$. Les $\mathrm{Green}_r(S)$ forment un système projectif filtrant dont la limite $\mathrm{Green}(S)$ est la réalisation de Greenberg de S. Pour toute k-algèbre Λ, on a : $\mathrm{Green}(S)(\Lambda) = S(W(\Lambda))$.

Lorsque S est un R-schéma, sa réalisation de Greenberg relative à R, au cran r, est le k-schéma $\underset{\sim}{G}_r(S) = \mathrm{Green}_r(\prod_{R|W(k)} S)$, où $\prod_{R|W(k)} S$ est la restriction de Weil, de R à $W(k)$, du R-schéma S.
De même, sa réalisation de Greenberg relative à R est $\underset{\sim}{G}(S) = \mathrm{Green}(\prod_{R|W(k)} S)$. Soient $\underline{\underline{G}}_r(S)$ et $\underline{\underline{G}}(S)$ les k-schémas parfaits associés respectivement à $\underset{\sim}{G}_r(S)$ et à $\underset{\sim}{G}(S)$. Pour toute k-algèbre Λ parfaite, on a donc : $\underline{\underline{G}}_r(S)(\Lambda) = S(R \otimes_{W(k)} W_r(\Lambda))$ et $\underline{\underline{G}}(S)(\Lambda) = S(R \otimes_{W(k)} W(\Lambda))$, et, en particulier :

$$\underline{\underline{G}}_r(S)(k) = S(R/p^r R)$$
$$\underline{\underline{G}}(S)(k) = S(R) .$$

Pour cette raison, nous noterons le plus souvent $\underline{\underline{S}}(R/p^r R)$ au lieu de $\underline{\underline{G}}_r(S)$, et $\underline{\underline{S}}(R)$ au lieu de $\underline{\underline{G}}(S)$; de même $\underset{\sim}{S}(R/p^r R)$ et $\underset{\sim}{S}(R)$ au lieu de $\underset{\sim}{G}_r(S)$ et de $\underset{\sim}{G}(S)$.
Notons que $\underset{\sim}{G}$, $\underset{\sim}{G}_r$, $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{G}}_r$ transforment tout R-schéma affine en k-schéma affine, qu'ils transforment Spec R en Spec k, qu'ils commutent à la formation des produits et des noyaux. Ils transforment tout R-schéma en groupes S en un k-schéma en groupes, qui est commutatif si S l'est. Si S est un R-groupe commutatif de type

fini, le k-groupe $\underline{\underline{S}}(R)$ est un groupe proalgébrique au sens de ([21]).

Le k-groupe proalgébrique $\underline{\underline{\mathbb{G}}}_m(R)$ des unités de R sera noté $\underline{\underline{U}}_K$. Le noyau du k-épimorphisme direct $\underline{\underline{U}}_K \to \mathbb{G}^{pf}_{m,k}$ sera noté $\underline{\underline{U}}$; son groupe des k-points est le groupe U des unités de R congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}$.

On notera $\underset{\sim}{U}_K$ le k-groupe $\underset{\sim}{G}(\mathbb{G}_m) = \underset{\sim}{\mathbb{G}}_m(R)$, et $\underset{\sim}{U}_{K,re}$ le noyau de la projection $\underset{\sim}{U}_K \to \underset{\sim}{G}_r(\mathbb{G}_m)$, dont les k-points sont les unités de R congrues à 1 modulo p^r.

LEMME 4.1.1. <u>Soit</u> L <u>un</u> R-<u>groupe</u> <u>lisse</u>.

1. <u>Le noyau de l'épimorphisme canonique</u> $\underset{\sim}{G}_1(L) \to L_k$ <u>est lisse unipotent connexe</u>.

2. <u>Pour tout</u> $r \geqslant 1$, <u>pour tout</u> $r' \geqslant r$, <u>on a une suite exacte de</u> k-<u>groupes</u> :

$$0 \to \underset{\sim}{G}_r(V(\omega_L)) \to \underset{\sim}{G}_{r+r'}(L) \to \underset{\sim}{G}_{r'}(L) \to 0 ,$$

<u>où</u> $V(\omega_L)$ <u>est le spectre de l'algèbre symétrique du</u> R-<u>module</u> ω_L <u>des différentielles invariantes de</u> L, <u>muni de la structure de</u> R-<u>groupe</u> <u>donnée</u>, <u>pour toute</u> R-<u>algèbre</u> Λ, <u>par l'addition dans</u> $V(\omega_L)(\Lambda) = \mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(\omega_L, \Lambda)$.

3. <u>Le</u> k-<u>groupe</u> $\underset{\sim}{G}_r(L)$ <u>est lisse</u> (pour tout $r \geqslant 1$), <u>extension de</u> L_k <u>par un</u> k-<u>groupe</u> <u>lisse unipotent connexe</u>. <u>Il est connexe si et seulement si sa fibre spéciale</u> L_k <u>l'est</u>. <u>Sa dimension est</u> re <u>fois la dimension de</u> L_k, <u>où</u> e <u>est l'indice de ramification absolue de</u> K.

<u>Preuve</u> : 1. Si $e = 1$, le noyau de l'épimorphisme considéré est nul. Supposons $e \geqslant 2$. Pour $2 \leqslant n \leqslant e$, soit D_n la k-algèbre $k[x]/(x^n)$. Le noyau de l'épimorphisme de réduction :

$$\prod_{D_n|k} L_k \otimes_k D_n \to \prod_{D_{n-1}|k} L_k \otimes_k D_{n-1}$$

est $V(\omega_{L_k})$ que le choix d'une base de ω_{L_k} permet d'identifier à

$\mathbb{G}_a^d$, où $d = \dim L_k$. On en déduit (vu que $R/pR = D_e$ et que $\underset{\sim}{G}_1(L) = \prod_{(R/pR)|k} L_k \otimes_k (R/pR))$ que le noyau de $\underset{\sim}{G}_1(L) \to L_k$ est extension successive de $e-1$ copies de $\mathbb{G}_a^d$, donc est lisse unipotent connexe.

2. L'exactitude de la suite est claire, vu que, pour toute k-algèbre Λ , l'idéal noyau de la restriction

$$W_{r+r'}(\Lambda) \to W_{r'}(\Lambda)$$

s'identifie (par $V^{r'}$, où V est la Verschiebung) à $W_r(\Lambda)$, et donc est de carré nul si $r \leqslant r'$.

3. Le k groupe $\underset{\sim}{G}_1(V(\omega_L))$ est extension du k-groupe lisse unipotent connexe $V(\omega_{L_k})$ par un k-groupe lisse unipotent connexe : il est donc lui-même lisse unipotent connexe. Par récurrence sur r , on voit donc que $\underset{\sim}{G}_r(V(\omega_L))$ l'est aussi. Vu la lissité de $\underset{\sim}{G}_1(L)$, on en déduit, toujours par récurrence, que $\underset{\sim}{G}_r(L)$ est lisse pour tout $r \geqslant 1$, et qu'il est connexe si et seulement si L_k l'est. La dimension de $\underset{\sim}{G}_1(L)$ est ed , ainsi que celle de $\underset{\sim}{G}_1(V(\omega_L))$; il en résulte, par récurrence, que la dimension de $\underset{\sim}{G}_r(L)$ est red.

4.2. <u>Le</u> k-<u>groupe</u> <u>algébrique</u> $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$, <u>pour un</u> R-<u>groupe</u> <u>fini</u> <u>et plat d'ordre une puissance de</u> p .

Ici, la cohomologie va être calculée au sens fppf. Pour tout R-groupe lisse L , tous les groupes $H^1(R/p^rR,L)$ sont nuls, ainsi que $H^1(R,L)$ (puisque $H^1(k,L)$ l'est et que les homomorphismes canoniques $H^1(R/p^rR,L) \to H^1(k,L)$ sont injectifs). En particulier, si X est un R-groupe étale (ce qui est toujours le cas si X est un R-groupe fini et plat d'ordre premier à p), on a : $H^1(R,X) = 0$. Par contre, si le R-groupe fini et plat X est d'ordre une puissance de p , le groupe $H^1(R,X)$ n'est pas fini en général (par exemple $H^1(R,\mu_p) = U/U^p$ contient k). Soit donc X un R-groupe fini et plat d'ordre une puissance de p ; et soit $X' = \underline{\mathrm{Hom}}_{R\text{-}gr}(X, \mathbb{G}_m)$ son dual de Cartier. Le R-groupe X admet toujours une résolution lisse (par exemple la "résolution standard" décrite dans 2.2), que l'on peut utiliser pour calculer $H^1(R,X)$ ainsi que les $H^1(R/p^rR,X)$, et aussi, comme on va le voir, pour munir $H^1(R,X)$ d'une structure de groupe algébrique sur k.

LEMME 4.2.1. a) <u>Soit donnée une suite exacte fppf de</u> R-<u>groupes</u>.

$$0 \to X \to L_1 \xrightarrow{f_1} L_1' \to 0 ,$$

<u>où</u> L_1 <u>est lisse</u>. <u>Pour tout</u> $r \geqslant 1$, <u>le</u> k-<u>groupe</u> Coker $\underset{\sim}{G}_r(f_1)$ <u>est lisse, et le groupe de ses points à valeurs dans</u> k <u>est</u> $H^1(R/p^rR,X)$.

b) <u>Toute autre</u> R-<u>suite exacte, avec</u> L_2 <u>lisse</u>,

$$0 \to X \to L_2 \to L_2' \to 0$$

<u>définit canoniquement un isomorphisme de</u> k-<u>groupes algébriques</u> φ_{12} : Coker $\underset{\sim}{G}_r(f_1) \to$ Coker $G_r(f_2)$, <u>et</u> $\varphi_{13} = \varphi_{23} \circ \varphi_{12}$.

<u>Preuve</u> : a) Si L_1, donc aussi L_1', est lisse, le k-morphisme

$$\underset{\sim}{G}_r(f_1) : \underset{\sim}{G}_r(L_1) \to \underset{\sim}{G}_r(L_1')$$

est un morphisme de k-groupes lisses. Donc Coker $\underset{\sim}{G}_r(f_1)$ est lisse. Le groupe des k-points de Coker $\underset{\sim}{G}_r(f_1)$ est le conoyau de

$$\underset{\sim}{G}_r(L_1)(k) \to \underset{\sim}{G}_r(L_1')(k) ,$$

c'est-à-dire de

$$L_1(R/p^rR) \to L_1'(R/p^rR) .$$

La nullité de $H^1(R/p^rR,L_1)$ montre donc que le groupe des k-points de Coker $\underset{\sim}{G}_r(f_1)$ est $H^1(R/p^rR,X)$.

b) Soit $0 \to X \to L_2 \xrightarrow{f_2} L_2' \to 0$ une autre résolution de X par des R-groupes lisses. Prenant la somme amalgamée L_3 de L_1 et L_2 sous X, on en déduit un diagramme commutatif et exact de R-groupes plats :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{f_1'} & L_1' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_3 & \longrightarrow & L_1' & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & L_2' & = & L_2' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

On en déduit, pour tout $r \geqslant 1$, un diagramme commutatif exact de k-groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \underset{\sim}{G}_r(X) & \longrightarrow & \underset{\sim}{G}_r(L_1) & \xrightarrow{\underset{\sim}{G}_r(f_1)} & \underset{\sim}{G}_r(L_1') & \longrightarrow & \operatorname{Coker} \underset{\sim}{G}_r(f_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \underset{\sim}{G}_r(L_2) & \longrightarrow & \underset{\sim}{G}_r(L_3) & \longrightarrow & \underset{\sim}{G}_r(L_1') & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \underset{\sim}{G}_r(f_2)}\downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \underset{\sim}{G}_r(L_2') & = & \underset{\sim}{G}_r(L_2') & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \operatorname{Coker} \underset{\sim}{G}_r(f_2) & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Le lemme du serpent définit un isomorphisme canonique de k-groupes

$$\varphi_{12} : \operatorname{Coker} \underset{\sim}{G}_r(f_1) \to \operatorname{Coker} \underset{\sim}{G}_r(f_2) .$$

Enfin, ce groupe est de type fini, puisque X possède une R-résolution par des groupes lisses de type fini (par exemple, la résolution lisse standard).

<u>Notation</u>. Le k-groupe algébrique Coker $\underset{\sim}{G}_r(f)$, où $0 \to X \to L \xrightarrow{f} L' \to 0$ est une R-résolution lisse quelconque, sera noté $\underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$ (pour $r \geqslant 1$). Le k-groupe Coker $\underset{\sim}{G}(f)$, qui en est la limite projective filtrante selon r, sera noté $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$; le groupe de ses k-points est $H^1(R,X)$. Remarquons que tout morphisme $\alpha : X_1 \to X_2$ de R-groupes finis et plats dont l'ordre est une puissance de p, définit (via, par exemple, les résolutions lisses standard de X_1 et X_2) un système compatible de morphismes de k-groupes

$$\underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,\alpha) : \underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X_1) \to \underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X_2)$$

et donc aussi un k-morphisme :

$$\underset{\sim}{H}^1(R,\alpha) : \underset{\sim}{H}^1(R,X_1) \to \underset{\sim}{H}^1(R,X_2) .$$

THÉORÈME 4.2.2. <u>Pour tout</u> $r \geqslant 1$, <u>le</u> k-<u>groupe</u> <u>algébrique</u> <u>lisse</u> $\underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$ <u>est affine</u>, <u>connexe</u>, <u>unipotent</u>. <u>Il existe un</u> <u>entier</u> r_o <u>tel que la</u> k-<u>projection</u> <u>canonique</u> :

$$\underset{\sim}{H}^1(R,X) \to \underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$$

<u>soit un isomorphisme pour</u> $r \geqslant r_o$; <u>en particulier</u>, $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$ <u>est de</u> <u>dimension finie</u>. <u>Cette dimension est égale à</u> $v(d)$, <u>où</u> d <u>engendre</u> <u>l'idéal de</u> R <u>qui est la différente absolue de</u> X ([19]).

<u>Preuve</u> : Il existe une R-résolution lisse de X (par exemple la résolution lisse standard) $0 \to X \to L \xrightarrow{f} L' \to 0$ où L et L' sont affines. Les k-groupes $\underset{\sim}{G}_r(L)$ et $\underset{\sim}{G}_r(L')$ sont alors, pour tout $r \geqslant 1$, affines ; il en est de même de Coker $\underset{\sim}{G}_r(f) = \underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$. Puisque $f_k : L_k \to L'_k$ est un épimorphisme, le k-groupe $\underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$ apparaît, pour tout $r \geqslant 1$, comme un quotient du noyau de la projection canonique $\underset{\sim}{G}_r(L') \to L'_k$. Ce noyau étant unipotent connexe, $\underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$ l'est aussi.

Pour tout $r \geqslant 1$, considérons le diagramme commutatif exact de k-groupes.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \underset{\sim}{G}_{2r}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \underset{\sim}{G}_{r}(X) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \underset{\sim}{G}_{r}(V(\omega_L)) \arrow[r] \arrow[d] & \underset{\sim}{G}_{2r}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\underset{\sim}{G}_{2r}(f)"] & \underset{\sim}{G}_{r}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\underset{\sim}{G}_{r}(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underset{\sim}{G}_{r}(V(\omega_{L'})) \arrow[r] & \underset{\sim}{G}_{2r}(L') \arrow[r] \arrow[d] & \underset{\sim}{G}_{r}(L') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \underset{\sim}{H}^1(R/p^{2r}R,X) \arrow[r] \arrow[d] & \underset{\sim}{H}^1(R/p^{r}R,X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si $p^{r_1}W(k)$ est la différente absolue ([19]) de $\prod_{R|W(k)} X$, l'image de $\underset{\sim}{G}_{2r}(X) \to \underset{\sim}{G}_{r}(X)$ est de dimension zéro pour $r \geqslant r_1$, car $\dim \underset{\sim}{G}(X) = 0$ ([4]). Pour $r \geqslant r_1$, la dimension de $\underset{\sim}{H}^1(R/p^{2r},X)$ vaut donc

$$\dim \underset{\sim}{G}_{2r}(X) = \dim \operatorname{Ker}(\underset{\sim}{G}_{r}(V(\omega_L)) \to \underset{\sim}{G}_{r}(V(\omega_{L'}))\ ,$$

c'est-à-dire $\dim \underset{\sim}{G}_{r}(V(\omega_X))$, où ω_X est le R-module des différentielles invariantes de X. Pour $r \geqslant 1$, on a :

$$\underset{\sim}{G}_{r}(V(\omega_X))(k) = \operatorname{Hom}_{R\text{-mod}}(\omega_X, R/p^rR)\ .$$

On en déduit que la dimension de $\underset{\sim}{G}_{r}(V(\omega_X))$ est égale à la longueur du R-module fini $\operatorname{Hom}_{R\text{-mod}}(\omega_X, R/p^rR)$ qui, si r est assez grand, est égale à la longueur $\ell g(\omega_X)$ du R-module fini ω_X. Il existe donc un entier r'_o tel que, pour $r \geqslant r'_o$, on ait :

$$\dim_k \underset{\sim}{H}^1(R/p^{2r}R,X) = \ell g(\omega_X)\ .$$

D'où, pour $r \geqslant r_o = 2r'_o$:

$$\dim_k \underset{\sim}{H}^1(R/p^{r}R,X) = \ell g(\omega_X)\ .$$

Pour tout $r \geqslant 1$, le noyau de la projection $\underset{\sim}{H}^1(R/p^{r+1}R,X) \to \underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$ est un quotient du k-groupe lisse connexe $\underset{\sim}{G}_1(V(\omega_{L'}))$, donc est lisse et connexe ; pour $r \geqslant r_o$, ce noyau est de dimension zéro, donc est nul. On en déduit que, pour tout $r \geqslant r_o$, la projection de $\underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$ sur $\underset{\sim}{H}^1(R/p^{r_o}R,X)$ est un isomorphisme. Par passage à la limite projective, la projection de $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$ sur $\underset{\sim}{H}^1(R/p^{r_o}R,X)$ est aussi un isomorphisme (ainsi que la projection de $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$ sur $\underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,X)$, pour tout $r \geqslant r_o$).

La dimension de $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$ est donc égale à la longueur du R-module ω_X, ou encore, ce qui revient au même, à la longueur du conoyau du déterminant de l'application R-linéaire $\omega_{L'} \xrightarrow{\omega_f} \omega_L$. C'est encore, si a est la dimension commune de L et L', la valuation d'un générateur de l'idéal image de l'homomorphisme composé : $\Lambda^a(\omega_{L'}) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\Lambda^a(\omega_L), R) \to \Lambda^a(\omega_L) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\Lambda^a(\omega_L), R) \xrightarrow{\sim} R$, où la première flèche est $\Lambda^a(\omega_f) \otimes_R \mathrm{id}$. Cet idéal image est la différente absolue de X ([19]). D'où la proposition.

Ce calcul de dimensions est inspiré d'un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré fait par B. Mazur et L. Roberts dans le cas p-adique ([14]).

REMARQUE. La projection canonique :

$$\underset{\sim}{H}^1(R,\mu_{p^n}) \to \underset{\sim}{H}^1(R/p^rR,\mu_{p^n})$$

est un isomorphisme pour $r \rangle n+1$.

En effet, si $m \rangle (n+\frac{1}{p-1})e$, nous savons (par [24], 1.7) que l'élévation à la puissance p^n-ième est un isomorphisme de $U_{K,m-ne}$ sur $U_{K,m}$ (où $U_{K,m}$ est le groupe des unités de R congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}^m$), et donc la projection $H^1(R,\mu_{p^n}) \to H^1(R/p^rR,\mu_{p^n})$ est injective pour $r \rangle n+1$. De plus, le noyau de la projection considérée est un k-groupe algébrique lisse et connexe (c'est en effet un quotient du k-groupe lisse et connexe $\underset{\sim}{U}_{K,re}$).

PROPOSITION 4.2.3. <u>Pour toute suite exacte</u> (fppf) <u>de</u> R-<u>groupes finis et plats d'ordre une puissance de</u> p ; $0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to 0$, <u>on a une suite exacte de</u> k-<u>groupes</u> :

$$0 \to \underset{\sim}{G}(X_1) \to \underset{\sim}{G}(X_2) \to \underset{\sim}{G}(X_3) \to \underset{\sim}{H}^1(R,X_1) \to \underset{\sim}{H}^1(R,X_2) \to \underset{\sim}{H}^1(R,X_3) \to 0 .$$

<u>En prenant les points à valeurs dans</u> k , <u>on trouve la suite exacte habituelle de cohomologie</u>.

<u>Preuve</u> : Etant donné deux R-immersions fermées $X_2 \xrightarrow{j_2} L_1$ et $X_3 \xrightarrow{j_3} L_3$, où L_1 et L_3 sont lisses, on obtient un diagramme commutatif exact de R-groupes (où $L_2 = L_1 \times L_3$), où les groupes L_i et L_i' sont lisses :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j_2 u"] & X_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "(j_2, j_3 v)"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "j_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[d] & L_2 \arrow[r] \arrow[d] & L_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1' \arrow[r] \arrow[d] & L_2' \arrow[r] \arrow[d] & L_3' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $\underset{\sim}{G}$ et le lemme du serpent on trouve la proposition.

<u>Notation</u>. On notera $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ le k-groupe parfait associé au groupe algébrique $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$; c'est un k-groupe quasi-algébrique unipotent connexe. Remarquons que, si $0 \to X \to L \to L' \to 0$ est une R-résolution lisse quelconque de X , et si $X(R) \cap p^n L(R) = 0$, l'homologie du complexe de k-groupes quasi-algébriques unipotents :

$$\underline{\underline{L}}(R)/p^n\underline{\underline{L}}(R) \to \underline{\underline{L}}'(R)/p^n\underline{\underline{L}}(R)$$

est : $\underline{\underline{X}}(R)$ en dimension zéro, et $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ en dimension 1.

4.3. <u>Le</u> k-<u>groupe</u> <u>quasi-algébrique</u> $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$, <u>pour un</u> K-<u>groupe</u> <u>fini</u> X .

Par [17], nous savons que tout K-tore T admet un R-modèle de Néron $\mathcal{C}$; c'est un R-groupe lisse tel que, pour tout R-schéma lisse S , on ait : $\mathcal{C}(S) = T(S\otimes_R K)$. Notons que $\mathcal{C}$, qui est localement de type fini, n'est pas en général de type fini : la fibre spéciale du modèle de Néron de $\mathbb{G}_m$, par exemple, est extension du k-groupe constant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{G}_{m,k}$. Cependant, $\mathcal{C}$ est de type fini si T n'a pas de quotient déployé non nul.

Notons $\underline{\underline{T}}(K)$ la réalisation de Greenberg parfaite relative à R du R-modèle de Néron $\mathcal{C}$ du tore T . Sa composante neutre $\underline{\underline{T}}(K)^o$ est un groupe proalgébrique au sens de [21], et son groupe de composantes connexes $\pi_o(\underline{\underline{T}}(K))$ est un groupe abélien de type fini, égal au groupe des composantes connexes de la fibre spéciale de $\mathcal{C}$. Si $T^{(d)}$ est le tore sur K , plus grand quotient déployé de T , le groupe $\pi_o(\underline{\underline{T}}^{(d)}(K))$ est libre de rang égal à la dimension de $T^{(d)}$, et le noyau de l'homomorphisme canonique $\pi_o(\underline{\underline{T}}(K)) \to \pi_o(\underline{\underline{T}}^{(d)}(K))$ est fini.

LEMME 4.3.1. a) <u>Soit</u> $u : T_1 \to T_2$ <u>une</u> K-<u>isogénie</u> <u>de tores</u>. <u>Le</u> <u>morphisme de</u> k-<u>groupes</u> <u>parfaits</u> $\underline{\underline{u}}(K) : \underline{\underline{T}}_1(K) \to \underline{\underline{T}}_2(K)$ <u>admet alors un</u> <u>conoyau</u>, <u>qui est un groupe proalgébrique</u>, <u>et qui a</u> $H^1(K,X)$ <u>comme</u> <u>groupe de</u> k-<u>points</u>.

b) <u>Soit</u> X <u>un</u> K-<u>groupe</u> <u>fini</u>. <u>Soit</u> $0 \to X \to T_1 \xrightarrow{u} T_2 \to 0$ <u>et</u> $0 \to X \to T_3 \xrightarrow{v} T_4 \to 0$ <u>deux</u> K-<u>résolutions</u> <u>de</u> X <u>par des tores</u>. <u>Les</u> k-<u>groupes</u> <u>parfaits</u> Coker $\underline{\underline{u}}(K)$ <u>et</u> Coker $\underline{\underline{v}}(K)$ <u>sont alors</u> <u>canoniquement isomorphes</u>.

<u>Preuve</u> : a) Le K-morphisme $u^{(d)} : T_1^{(d)} \to T_2^{(d)}$ déduit de u est aussi une isogénie. Comme les tores $T_1^{(d)}$ et $T_2^{(d)}$ sont déployés, l'homomorphisme $\pi_o(T_1^{(d)}(K)) \to \pi_o(T_2^{(d)}(K))$ est injectif. Le noyau de l'homomorphisme $\pi_o(\underline{\underline{T}}_1(K)) \to \pi_o(\underline{\underline{T}}_2(K))$ est donc fini ; son conoyau est aussi fini.

D'autre part, le k-morphisme de groupes proalgébriques $\underline{\underline{u}}(K)^o : \underline{\underline{T}}_1(K)^o \to \underline{\underline{T}}_2(K)^o$, induit par $\underline{\underline{u}}(K)$, admet un conoyau. Le faisceau (sur le site étale des k-schémas parfaits) Coker $\underline{\underline{u}}(K)$ apparaît alors comme extension du groupe fini conoyau de $\pi_o(\underline{\underline{u}}(K)) : \pi_o(\underline{\underline{T}}_1(K)) \to \pi_o(\underline{\underline{T}}_2(K))$, par un groupe proalgébrique, quotient de Coker$(\underline{\underline{u}}(K)^o)$ par un groupe fini ; il en résulte que Coker $\underline{\underline{u}}(K)$ est lui-même un k-groupe proalgébrique. Le groupe des k-points de Coker $\underline{\underline{u}}(K)$ est égal au conoyau de $u(K) : T_1(K) \to T_2(K)$, c'est-à-dire à $H^1(K,X)$.

b) Quitte à remplacer T_3 par la somme amalgamée de T_1 et T_3 sous X, nous pouvons toujours supposer que nous avons un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & T_3 \arrow[r, "v"] & T_4 \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Ceci donne un morphisme de k-groupes proalgébriques : Coker $\underline{\underline{u}}(K) \to$ Coker $\underline{\underline{v}}(K)$. Ce morphisme induit, sur le groupe des k-points, l'identité de $H^1(K,X)$; c'est donc lui-même un isomorphisme.

<u>Notation</u>. Pour tout K-groupe fini X, nous allons noter $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$, (ou même $\underline{\underline{H}}^1(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le k-groupe proalgébrique Coker $\underline{\underline{u}}(K)$, où $u : T_1 \to T_2$ est une isogénie de K-tores dont X est le noyau. Le groupe de ses k-points est $H^1(K,X)$. Remarquons que, si $X \to Y$ est un épimorphisme de K-groupes finis, le morphisme de k-groupes proalgébriques $\underline{\underline{H}}^1(X) \to \underline{\underline{H}}^1(Y)$ que

l'on en déduit est aussi un épimorphisme.

PROPOSITION 4.3.2. <u>Soit</u> X <u>un</u> K-<u>groupe</u> <u>fini</u>. <u>Le</u> k-<u>groupe</u> $\underline{\underline{H}}^1(X)$ <u>est affine, quasi-algébrique</u>. <u>Sa composante neutre est unipotente</u>.

<u>Preuve</u> : Soit $X_{(p)}$ la composante p-primaire de X . Le k-groupe proalgébrique $\underline{\underline{H}}^1(X)$ est extension (triviale) du k-groupe fini constant $H^1(X/X_{(p)})$ par $\underline{\underline{H}}^1(X_{(p)})$. Nous pouvons donc supposer que X est un p-groupe.

Démontrons d'abord la proposition lorsque X est un p-groupe de racines de l'unité. Pour tout $n \geqslant 1$, le diagramme suivant de R-groupes lisses est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathcal{G}_m \\ {\scriptstyle p^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^n} \\ \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathcal{G}_m \end{array}$$

(les flèches horizontales sont toutes deux l'immersion canonique de $\mathbb{G}_{m,R}$ dans le R-modèle de Néron $\mathcal{G}_m$ de $\mathbb{G}_{m,K}$). On en déduit, par passage aux conoyaux des flèches verticales du diagramme obtenu en prenant la réalisation de Greenberg parfaite relative à R de ceci, un morphisme de k-groupes proalgébriques $\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^n}) \to \underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$, qui, sur les groupes des k-points, induit l'injection canonique $U_K/U_K^{p^n} \to K^*/K^{*p^n}$, à conoyau fini, s'identifiant à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ par la valuation de K . Ce morphisme est donc une immersion fermée, à conoyau fini, égal à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Puisque $\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^n})$ est quasi-algébrique, unipotent, il en est de même de $\underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$; la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$ est égale à $\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^n})$. Les mêmes résultats valent pour $\underline{\underline{H}}^1(K',\mu_{p^n}) = \underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} \mu_{p^n})$, où K'/K est une extension finie quelconque.

Passons maintenant au cas général d'un p-groupe fini X . Il existe une extension finie K'/K , des entiers $r, r' > 0$, des puissances : q , q' de p et une K-suite exacte

$$\prod_{K'|K} \mu_q^r \to \prod_{K'|K} \mu_{q'}^{r'} \to X \to 0 .$$

On en déduit un complexe de k-groupes proalgébriques :

$$\underline{\underline{H}}^1(K',\mu_q^r) \to \underline{\underline{H}}^1(K',\mu_{q'}^{r'}) \to \underline{\underline{H}}^1(K,X) \to 0$$

qui, induisant une suite exacte sur les groupes des k-points, est lui-même une suite exacte. Alors $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ apparaît comme le conoyau d'un morphisme de k-groupes quasi-algébriques, affines, unipotents ; il possède donc les mêmes propriétés.

Notons que, si $0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to 0$ est une suite exacte de K-groupes finis, on obtient une suite exacte de k-groupes quasi-algébriques

$$0 \to X_1(K) \to X_2(K) \to X_3(K) \to \underline{\underline{H}}^1(X_1) \to \underline{\underline{H}}^1(X_2) \to \underline{\underline{H}}^1(X_3) \to 0 .$$

THÉORÈME 4.3.3. <u>Soient</u> X <u>un</u> K-<u>groupe</u> <u>fini</u>, <u>et</u> $|X|$ <u>son</u> <u>ordre</u>. <u>La dimension du</u> k-<u>groupe</u> <u>quasi-algébrique</u> $\underline{\underline{H}}^1(X)$ <u>est égale à</u> $v(|X|)$.

<u>Preuve</u> : Elle est inspirée d'une démonstration de J. Tate ([25], II, 5.7). Si $X_{(p)}$ est la composante p-primaire de X , la dimension de $\underline{\underline{H}}^1(X)$ est égale à celle de $\underline{\underline{H}}^1(X_{(p)})$. Nous supposons donc que X est un p-groupe. Les deux membres de la formule à établir

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(X) = v(|X|)$$

dépendent additivement de X au sens suivant : si l'on a une K-suite exacte $0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to 0$, la valeur pour X_2 est la somme des valeurs pour X_1 et X_3 . Nous supposons donc X annulé par p . Soit K'/K une extension finie galoisienne trivialisant X , c'est-à-dire telle que $X(K') = X(\widetilde{K})$; soient g son groupe de Galois, et g_p le p-sous-groupe de Sylow de g (il est unique, puisque toute extension finie de K, de degré premier à p, est cyclique). Alors X admet une suite de composition dont les quotients successifs sont trivialisés par des extensions finies de K de degré premier à p. Utilisant encore l'additivité, nous supposons donc maintenant que X, outre qu'il est annulé par p, est trivialisé par une extension finie K'/K, de degré premier à p, et contenant les racines p-ièmes de l'unité. Si $X_{K'} \simeq \mu^r_{p,K'}$ on a donc :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'}) = \dim_k \underline{\underline{H}}^1(R', \mu_p^r) = r \dim_k \underline{\underline{H}}^1(R', \mu_p) .$$

La différente absolue de μ_p étant engendrée par p, on a : $\dim_k \underline{\underline{H}}^1(R', \mu_p) = e'$, indice de ramification absolue de K', d'où :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'}) = re' = v'(p^r) ,$$

et donc, puisque K'/K est totalement ramifiée :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'}) = [K':K] v(p^r) ,$$

ou encore :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'}) = [K':K] v(|X|) .$$

Il reste donc à montrer que :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'}) = [K':K] \dim_k \underline{\underline{H}}^1(K,X) .$$

Cette dernière égalité est vraie si $X = \mu_p$. Pour l'établir en général, il nous faut décrire la structure de $\underline{\underline{H}}^1(K', \mu_p)$ comme groupe quasi-algébrique avec opération de g, ce qui va faire l'objet du

LEMME 4.3.4. _Soient_ K'/K _une extension finie de degré premier à_ p, _et_ g _son groupe de_ Galois. _Soit_ $\mathcal{K}(g)$ _le groupe de_ Grothendieck _de la catégorie abélienne_ $\mathcal{C}(g)$ _des_ k-_groupes quasi-algébriques sur lesquels_ g _opère, et qui sont annulés par_ p. _Si_ r_g _désigne la_

<u>représentation régulière</u>, <u>on a</u>, <u>dans</u> $\mathcal{K}(g)$, <u>l'égalité</u> :

$$[\underline{\underline{H}}^1(R',\mu_p)] = e[r_g] + [\mu_p(K')] \ .$$

<u>Preuve</u> : Pour tout entier $h \geq 1$, notons U'_h le k-groupe proalgébrique dont les k-points sont les unités de R' congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}'^h$. La k-immersion fermée canonique $U'_{h+1} \to U'_h$ est compatible avec les opérations de g, et on en déduit, dans $\mathcal{C}(g)$, la suite exacte des noyaux et conoyaux de l'élévation à la puissance p-ième dans U'_{h+1}, U'_h, U'_h/U'_{h+1} respectivement

$$0 \to \mu_p(K') \cap U'_{h+1} \to \mu_p(K') \cap U'_h \to U'_h/U'_{h+1} \to U'_{h+1}/U'^p_{h+1} \to U'_h/U'^p_h \to U'_h/U'_{h+1} \to 0 \ .$$

On en déduit, dans $\mathcal{K}(g)$, l'égalité :

$$[U'_h/U'^p_h] = [U'_{h+1}/U'^p_{h+1}] + [\mu_p(K') \cap U'_h] - [\mu_p(K') \cap U'_{h+1}] \ .$$

Donnons à h les valeurs successives $1,2,\dots,e' = v'(p)$. On en déduit, par addition dans $\mathcal{K}(g)$, l'égalité :

$$\begin{aligned}[U'_1/U'^p_1] &= [U'_{e'+1}/U'^p_{e'+1}] + [\mu_p(K') \cap U'_1] \\ &= [U'_{e'+1}/U'_{2e'+1}] + [\mu_p(K')] \ ,\end{aligned}$$

cette dernière égalité résultant de [24], p. 113.

Or, dans $\mathcal{C}(g)$, on a l'égalité :

$$[U'_{e'+1}/U'_{2e'+1}] = \bigoplus_{1 \leq i \leq e'} U'_{e'+i}/U'_{e'+i+1} = \bigoplus_{e'+1 \leq i \leq 2e'} \mathbb{G}_a^{(i)} \ ,$$

où g opère sur $\mathbb{G}_a^{(i)}$ par : $z.\alpha_i = z^{i+e'}\alpha_i$ (où z est une racine de l'unité d'ordre égal à celui de g). On a donc :

$$U'_{e'+1}/U'_{2e'+1} = r_g^e \ ,$$

et le lemme en résulte.

On va maintenant achever la preuve de la proposition.

L'accouplement $X \times X' \to \mu_p$ définit, dans $\mathcal{C}(g)$, un isomorphisme

$$\underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_k(X'(K'), \underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} \mu_p)) \ ,$$

donc un isomorphisme des composantes neutres :

$$\underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'})^o \to \underline{\mathrm{Hom}}_k(X'(K'), \underline{\underline{H}}^1(R', \mu_p)) \ .$$

La classe, dans $\mathcal{K}(g)$, de $\underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'})^o$, à la classe d'un objet fini près, est donc égale à la classe de

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(X'(K'), \underline{\mathrm{Hom}}_k(\mathbb{F}_p[g], \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_p)) = \underline{\mathrm{Hom}}_k(X'(K') \otimes \mathbb{F}_p[g], \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_p)) \ .$$

En prenant les points fixes par g , il en résulte que $[\underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'})^o]^g$ est isogène à $\underline{\mathrm{Hom}}_k(H_o(g, X'(K') \otimes \mathbb{F}_p[g]), \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_p))$, c'est-à-dire à $\underline{\mathrm{Hom}}_k(X'(K'), \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_p))$. Puisque $[\underline{\underline{H}}^1(K, \prod_{K'|K} X_{K'})^o]^g$ est isogène à $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$, on a l'égalité :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(K,X) = ne \ ,$$

où p^n est l'ordre de X . La proposition en résulte.

PROPOSITION 4.4.4. <u>Soit</u> X <u>un</u> R-<u>groupe fini et plat d'ordre une puissance de</u> p . <u>La résolution lisse standard de</u> X <u>définit une immersion fermée de</u> k-<u>groupes quasi-algébriques</u>

$$\underline{\underline{H}}^1(R,X) \to \underline{\underline{H}}^1(K,X) \ .$$

<u>Preuve</u> : De la R-résolution lisse standard de X

$$0 \to X \to L \xrightarrow{f} L' \to 0 \ ,$$

on déduit un diagramme commutatif de R-groupes lisses

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & L' \arrow[d] \\ \mathcal{L} \arrow[r, "\tilde{f}_K"] & \mathcal{L}' \end{tikzcd} \ ,$$

où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont respectivement les modèles de Néron des K-tores L_K et L'_K . D'où un morphisme de k-groupes quasi-algébriques

$$\underline{\underline{H}}^1(R,X) \to \underline{\underline{H}}^1(K,X) \ ,$$

qui, sur les points à valeurs dans k , donne l'homomorphisme canonique $H^1(R,X) \to H^1(K,X)$. Puisque R est normal, cet homomorphisme est injectif. La proposition en résulte.

§5. L'ISOMORPHISME DE RÉCIPROCITÉ

5.1. L'isomorphisme de Serre.

Rappelons la théorie du corps de classes géométrique de Serre.

Pour toute extension finie K'/K, soit

$$N_{R'/R} : \prod_{R'|R} \mathbb{G}_{m,R'} \to \mathbb{G}_{m,R}$$

le R-morphisme norme. Par [24] (ou [7], appendice), le k-morphisme

$$\underset{\sim}{G}(N_{R'/R}) : \underset{\sim}{U}_{K'} \to \underset{\sim}{U}_K$$

est un épimorphisme de k-groupes affines ; notons $V_{K'}$ son noyau. Si $V^o_{K'}$ est la composante neutre de $V_{K'}$, on en déduit une k-isogénie :

$$0 \to \pi_o(V_{K'}) \to \underset{\sim}{U}_{K'}/V^o_{K'} \to \underset{\sim}{U}_K \to 0 .$$

Soit t' une uniformisante de K'. Si K'/K est galoisienne, de groupe de Galois g, considérons l'homomorphisme :

$$g^{ab} = H^{-2}(g,\mathbb{Z}) \to U_{K'}/V^o_{K'}(k) = H_o(g,U_{K'})$$

qui, à la classe dans g^{ab} d'un élément s de g, associe la classe dans $U_{K'}/V^o_{K'}(k)$ de l'élément $s(t')/t'$ de $U_{K'}$; cet homomorphisme permet d'identifier l'isogénie ci-dessus à la k-suite exacte :

$$(S_{K'}) \qquad 0 \longrightarrow H^{-2}(g,\mathbb{Z}) \longrightarrow \underset{\sim}{U}_{K'}/V^o_{K'} \xrightarrow{N} \underset{\sim}{U}_K \longrightarrow 0$$

où N est déduit de $\underset{\sim}{G}(N_{R'/R})$. Les $S_{K'}$, pour K' parcourant l'ensemble des extensions finies galoisiennes de K, constituent un système projectif filtrant de suites exactes de k-groupes affines, les morphismes de transition étant définis à partir des morphismes de norme. Par passage à la limite projective, on en déduit une suite exacte de k-groupes :

$$\text{(S)} \qquad 0 \to \mathcal{A}_K \to \varprojlim_{K'/K} \underset{\sim}{U}_{K'}/V^o_{K'} \to \underset{\sim}{U}_K \to 0\ ,$$

où $\mathcal{A}_K$ est le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de K. Puisque $\underset{\sim}{U}_K$ est connexe, la donnée de (S) équivaut à la donnée d'un homomorphisme continu :

$$\theta_K : \pi_1(\underset{\sim}{U}_K) \to \mathcal{A}_K\ .$$

Il résulte de la théorie de Serre ([24], ou [7], appendice) que θ_K est un isomorphisme de groupes profinis.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe un entier $n \geqslant 1$, et on suppose que le groupe $\mu_{p^n}(\tilde{K})$, noté M_n, des racines p^n-ièmes de l'unité est contenu dans K (avec la notation $\tilde{K}$ définie en (3.1)).

5.2. <u>Définition ensembliste de l'isomorphisme de réciprocité</u>.

Le cobord $\partial : \mathbb{G}_m(K) = K^* \to H^1(K,\mu_{p^n}) = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathcal{A}_K, M_n)$ de la suite exacte des K-points de la suite de Kummer $0 \to \mu_{p^n} \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{p^n} \mathbb{G}_m \to 0$ est surjectif, de noyau K^{*p^n}. On a : $\partial(a)(s) = s(x)/x$ ($x \in \tilde{K}$, $x^{p^n} = a \in K^*$, $s \in \mathcal{A}_K$).

Le composé ∂' :

$$K^* \xrightarrow{\partial} \mathrm{Hom}_{cont}(\mathcal{A}_K, M_n) \xrightarrow{\theta_K^*} \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underset{\sim}{U}_K), M_n) = \mathrm{Ext}^1_k(\underset{\sim}{U}_K, M_n)$$

est donc un homomorphisme surjectif, dont le noyau est K^{*p^n}.

Si a appartient à K^*, mais non à K^{*p}, alors l'élément $\partial'(a)$ de $\mathrm{Ext}^1_k(\underset{\sim}{U}_K, M_n)$ est la classe d'isomorphisme de la k-isogénie :

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\iota} \underset{\sim}{U}_{K'}/V^o_{K'} \xrightarrow{N} \underset{\sim}{U}_K \longrightarrow 0$$

où $\iota(s(x)/x)$ est, pour tout s de g, la classe de l'élément $s(t')/t'$, pour une uniformisante quelconque t' de K' (avec $K' = K(x)$, $x^{p^n} = a$).

REMARQUE. Si a est dans K^*, mais non dans K^{*p}, on peut caractériser $\partial'(a) \in \mathrm{Ext}^1_k(\underline{U}_K, M_n)$ de la manière suivante : c'est la classe d'isomorphisme d'une k-suite exacte :

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\lambda} H \xrightarrow{\nu} \underline{U}_K \longrightarrow 0$$

telle que, si $x^{p^n} = a$, $K' = K(x)$, il existe un k-morphisme $h : \underline{U}_{K'} \to H$ (nécessairement unique) tel que :

1) $\nu \circ h = N$

2) $h(k)(s(t')/t') = \lambda(s(x)/x)$, pour tout s de g, et pour une uniformisante quelconque t' de K'.

Notons

$$\Phi_n : H^1(K, \mu_{p^n}) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{U}_K, M_n)$$

l'isomorphisme de groupes abéliens déduit de ∂'.

Soit $h \geqslant n$ l'entier défini par : $M_h \subset K^*$, $M_{h+1} \not\subset K^*$. Pour tout $r \geqslant h$, le groupe $U_K^{p^r}$ est donc sans p-torsion, et l'élévation à la puissance p^n-ième donne donc une isogénie radicielle de $\underline{U}_K^{p^r}$ sur $\underline{U}_K^{p^{n+r}}$. Du diagramme commutatif et exact de k-groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{U}_K^{p^r} & \longrightarrow & \underline{U}_K & \longrightarrow & \underline{U}_K/\underline{U}_K^{p^r} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^n} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{U}_K^{p^{n+r}} & \longrightarrow & \underline{U}_K & \longrightarrow & \underline{U}_K/\underline{U}_K^{p^{n+r}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

on déduit la suite exacte de groupes profinis (lorsque $r \geqslant h$)

$$0 \to \pi_1(\underline{U}_K/\underline{U}_K^{p^r}) \to \pi_1(\underline{U}_K/\underline{U}_K^{p^{n+r}}) \to \pi_1(\underline{U}_K)/p^n\pi_1(\underline{U}_K) \to 0 .$$

Le groupe $\mathrm{Ext}^1_k(\underline{U}_K, M_n) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(\underline{U}_K), M_n)$ apparaît donc comme le noyau de l'homomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^1_k(\underline{U}_K/\underline{U}_K^{p^{n+r}}, M_n) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{U}_K/\underline{U}_K^{p^r}, M_n)$$

déduit du diagramme ci-dessus.

Pour tout élément a de K^* qui n'est pas dans K^{*p}, nous allons caractériser l'image de $\partial'(a)$ dans $\mathrm{Ext}^1_k(\underset{\sim}{U}_K/\underset{\sim}{U}_K^{p^{n+r}}, M_n)$ (pour $r \geqslant h$). Pour ceci, nous noterons $\underset{\sim}{H}_o(g, \underset{\sim}{U}_{K'}/\underset{\sim}{U}_{K'}^{p^{n+r}})$ le k-groupe algébrique 0-ième groupe d'homologie du groupe algébrique $\underset{\sim}{U}_{K'}/\underset{\sim}{U}_{K'}^{p^{n+r}}$ sur lequel le groupe de Galois $g = G(K'/K)$ $(K' = K(x)$, $x^{p^n} = a)$ opère de manière naturelle.

LEMME 5.2.1. <u>Soit</u> a <u>un élément de</u> K^* <u>qui n'est pas dans</u> K^{*p}, <u>et soit</u> $K' = K(x)$, $x^{p^n} = a$. <u>Le groupe des composantes connexes du noyau du</u> k-<u>morphisme</u> <u>norme</u> (<u>pour tout</u> $r \geqslant h$) :

$$N : \underset{\sim}{H}_o(g, \underset{\sim}{U}_{K'}/\underset{\sim}{U}_{K'}^{p^{n+r}}) \to \underset{\sim}{U}_K/\underset{\sim}{U}_K^{p^{n+r}}$$

<u>s'identifie canoniquement à</u> M_n. <u>L'image de</u> $\partial'(a)$ <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^1_k(\underset{\sim}{U}_K/\underset{\sim}{U}_K^{p^{n+r}}, M_n)$ <u>est la</u> k-<u>isogénie</u> <u>image par</u> $\mathrm{Ker}\, N \to \pi_o(\mathrm{Ker}\, N)$ <u>de la suite exacte</u> :

$$0 \to \mathrm{Ker}\, N \to \underset{\sim}{H}_o(g, \underset{\sim}{U}_{K'}/\underset{\sim}{U}_{K'}^{p^{n+r}}) \xrightarrow{N} \underset{\sim}{U}_K/\underset{\sim}{U}_K^{p^{n+r}} \to 0 .$$

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer que le composé :

$$M_n \xrightarrow{\sim} H_o(g, U_{K'}) \to H_o(g, U_{K'}/U_{K'}^{p^{n+r}})$$

est injectif pour $r \geqslant h$.

Soit t' une uniformisante de K'. Soit s un élément de $g = G(K'/K)$ tel que $s(t')/t'$ soit dans $(I_{K'}U_{K'})U_{K'}^{p^{n+r}}$, où $I_{K'}$ est le noyau de l'homomorphisme d'augmentation $\mathbb{Z}[g] \to \mathbb{Z}$. Il existe donc $y \in U_{K'}$ tel que $s(t')/t'y^{p^{n+r}}$ soit dans $I_{K'}U_{K'}$. En particulier, la norme $N(y)$ de y est une racine p^{n+r}-ième de l'unité, donc aussi une racine p^h-ième de l'unité. Si z est une racine de l'unité d'ordre p^h, il existe donc i $(0 \leqslant i < p^h)$ tel que : $N(y) = z^i$, $z^{ip^h} = 1$. On en déduit : $N(y^{p^n}) = z^{ip^n} = N(z^i)$. Il existe donc $\sigma \in g$ tel que $y^{p^n} z^{-i} \sigma(t')/t'$ appartienne à $I_{K'}U_{K'}$. D'où

$$y^{p^{n+r}} (z^{-i}\sigma(t')/t')^{p^r} \in I_{K'}U_{K'} .$$

Puisque $r \geqslant n$, l'élément $(\sigma(t')/t')^{p^r}$ est dans $I_{K'}U_{K'}$; de plus $z^{ip^r} = 1$, puisque $r \geqslant h$. D'où $y^{p^{n+r}} \in I_{K'}U_{K'}$. Il en résulte que $s(t')/t'$ est lui-même dans $I_{K'}U_{K'}$, donc que s est l'identité, et $\frac{s(x)}{x} = 1$. D'où le lemme.

5.3. <u>Quasi-algébricité de l'isomorphisme de réciprocité</u>.

Choisissons un isomorphisme de M_n sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathrm{Ext}_k^1(\underset{\sim}{U}_K, M_n)$ apparaît alors comme le groupe des k-points d'un k-groupe quasi-algébrique unipotent, à savoir le noyau de la multiplication par p^n dans le noyau du k-morphisme

$$(\underline{\underline{U}}_K/\underline{\underline{U}}_K^{p^{n+r}})^* \to (\underline{\underline{U}}_K/\underline{\underline{U}}_K^{p^r})^* ,$$

pour $r \geqslant h$ (la structure quasi-algébrique de ce noyau ne dépend pas du choix de r). D'autre part, $H^1(K,\mu_{p^n})$ est le groupe des k-points du k-groupe quasi-algébrique unipotent $\underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$. Il s'agit de montrer que l'isomorphisme

$$\Phi_n : H^1(K,\mu_{p^n}) \to \mathrm{Ext}_k^1(\underset{\sim}{U}_K, M_n)$$

est quasi-algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $\underline{\underline{\Phi}}_n$ de groupes quasi-algébriques tel que $\underline{\underline{\Phi}}_n(k) = \Phi_n$. Nous allons en fait montrer (et cela suffit) que le composé de Φ_n avec l'inclusion de $\mathrm{Ext}_k^1(\underset{\sim}{U}_K, M_n)$ dans $\mathrm{Ext}_k^1(\underset{\sim}{U}_K/\underset{\sim}{U}_K^{p^{n+r}}, M_n)$ $(r \geqslant h)$ est quasi-algébrique sur un ouvert non vide convenable de la composante neutre $\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^n}) = \underline{\underline{U}}_K/\underline{\underline{U}}_K^{p^n}$ de $\underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$.

Soit t une uniformisante de K , et soit A la R-algèbre $R[X, X^{-1}, (1+tX)^{-1}]$, dont on note S le spectre. Les R-points de S sont les unités $u \in U$ telles que $v(u-1) = 1$. Pour tout entier $r \geqslant 1$, le k-schéma $\underset{\sim}{G}_r(S)$ est un ouvert du noyau de la projection $\underset{\sim}{G}_r(\mathbb{G}_{m,R}) \to \mathbb{G}_{m,k}$.

RÉCIPROCITÉ

Notons B la A-algèbre (intègre) $A[Y]/(Y^{p^n}-(1+tX))$. Pour tout homomorphisme de R-algèbres $f : A \to R$, soit $f^*(B)$ la R-algèbre $B \otimes_A R$, et soit $y \in f^*(B)$ l'image canonique de Y .

LEMME 5.3.1. a) <u>Pour tout</u> R-<u>homomorphisme</u> $f : A \to R$, <u>la</u> R-<u>algèbre</u> $f^*(B)$ <u>est l'anneau des entiers de</u> $K' = K(y)$ $(y^{p^n} = 1+tf(X))$, <u>et</u> $y-1$ <u>en est une uniformisante</u>.

b) <u>Soit</u> $\iota : M_n \to \prod_{B|A} \mathbb{G}_{m,B}$ <u>le</u> S-<u>morphisme</u> <u>qui</u>, <u>à</u> $z \in M_n$, <u>associe l'élément inversible</u> $\frac{zY-1}{Y-1}$ <u>de</u> B , <u>et soit</u> $N : \prod_{B|A} \mathbb{G}_{m,B} \to \mathbb{G}_{m,A}$ <u>le</u> S-<u>morphisme</u> <u>norme</u>. <u>Le composé</u> $N \circ \iota$ <u>est le</u> S-<u>morphisme</u> <u>nul</u>.

<u>Preuve</u> : a) La R-algèbre $f^*(B)$ est intègre, son corps des fractions est $K' = K(y)$, $y^{p^n} = 1+tf(X)$. On a :

$$[K':K]v_{K'}(y-1) = v_{K'}(N_{K'/K}(y-1)) = v_{K'}(tf(x)) = [K':K] ,$$

et donc $y-1$ est une uniformisante de K' . Puisque l'anneau des entiers R' de K' est la sous-R-algèbre de K' engendrée par une uniformisante quelconque de K' , en particulier par $y-1$, on a : $f^*(B) = R'$.

b) Dans le corps des fractions de B , on a, pour tout $z \in M_n$:

$$\frac{zY-1}{Y-1} = \frac{z-1}{Y-1}\, Y + 1 = \Big(\frac{z-1}{Y^{p^n}-1}\, Y \sum_{0 \leqslant h < p^n} Y^h\Big) + 1 ,$$

et donc :

$$\frac{zY-1}{Y-1} = 1 + \frac{z-1}{t}\, X^{-1} \sum_{1 \leqslant h \leqslant p^n} Y^h ,$$

qui est un élément de B . Son inverse

$$\frac{Y-1}{zY-1} = 1 + \frac{z^{-1}-1}{t}\, X^{-1} \sum_{1 \leqslant h \leqslant p^n} (zY)^h$$

est aussi un élément de B . De plus, pour tout $z \in M_n$:

$$N(S)\Big(\frac{zY-1}{Y-1}\Big) = \prod_{z' \in M_n} (zz'Y-1)(z'Y-1)^{-1}$$

est égal à 1 . D'où le lemme.

PROPOSITION 5.3.2. _L'isomorphisme_

$$\Phi_n : H^1(K,\mu_{p^n}) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underset{\approx}{U}_K, M_n)$$

est quasi-algébrique.

Preuve : Soit z une racine de l'unité d'ordre p^n , et soit s le S-automorphisme correspondant de $\prod_{B|A} \mathbb{G}_{m,B}$: pour toute A-algèbre Λ , pour tout élément $\beta = \sum_{0 \leqslant i < p^n} \lambda_i \otimes Y^i$ de $(\Lambda \otimes_A B)^*$, on a : $s.\beta = \Sigma\, \lambda_i z^i \otimes Y^i$. Considérons alors le diagramme commutatif de R-schémas :

$$\begin{tikzcd}
& (\prod_{B|A} \mathbb{G}_{m,B}) \times_S (\prod_{B|A} \mathbb{G}_{m,B}) \arrow[r, "(N,0)"] \arrow[d, "(p^{r+n},\, s-\mathrm{id})"] & \mathbb{G}_{m,A} \arrow[d, "p^{r+n}"] \\
M_n \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr] & (\prod_{B|A} \mathbb{G}_{m,B}) \arrow[r, "N"] \arrow[d] & \mathbb{G}_{m,A} \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

(M_n est ici le S-groupe constant $(M_n)_S$, et r est un entier $\geqslant h$).

Soit q un entier fixé assez grand (tel que, pour tout homomorphisme de R-algèbres $f : A \to R$, la projection de $\underline{\underline{H}}^1(R',\mu_{p^{n+r}})$ sur $\underline{\underline{H}}^1(R'/p^qR',\mu_{p^{n+r}})$ soit un isomorphisme) ; il suffit de prendre $q > n+r+1$, d'après la remarque qui suit la proposition 4.2.2. Transformons le diagramme ci-dessus par $\underset{\approx}{G}_q$. Notant $\underset{\approx}{S}_q$ le k-schéma $\underset{\approx}{G}_q(S)$, $\underset{\approx}{B}^*_q$ le $\underset{\approx}{S}_q$-groupe lisse $\underset{\approx}{G}_q(\prod_{B|A} \mathbb{G}_{m,B})$, on obtient le diagramme commutatif de $\underset{\approx}{S}_q$-schémas :

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{\sim}{B}_q^* \times_{\underset{\sim}{S}_q} \underset{\sim}{B}_q^* \arrow[r, "(N_q{,}0)"] \arrow[d, "\underset{\sim}{G}_q(p^{n+r}{,}s-id)"] & \underset{\sim}{G}_q(\mathbb{G}_{m,R}) \otimes_k \underset{\sim}{S}_q \arrow[d, "\underset{\sim}{G}_q(p^{n+r})"] \\
M_n \arrow[r, "\underset{\sim}{G}_q(\iota) = \iota"] \arrow[dr] & \underset{\sim}{B}_q^* \arrow[r, "N_q"'] \arrow[d] & \underset{\sim}{G}_q(\mathbb{G}_{m,R}) \otimes_k \underset{\sim}{S}_q \arrow[dl] \\
 & \underset{\sim}{S}_q &
\end{tikzcd}$$

et l'on a : $N_q \circ \iota = 0$, où $N_q = \underset{\sim}{G}_q(N)$.

Pour tout k-morphisme $\varphi : \mathrm{Spec}\ k \to \underset{\sim}{S}_q$, il existe un R-morphisme $f : \mathrm{Spec}\ R \to S$ tel que $\varphi = \underset{\sim}{G}_q(f)$. On a alors :

$$\varphi^*(N_q) = \underset{\sim}{G}_q(f^*(N)) = \underset{\sim}{G}_q(N_{R'/R}) \ ,$$

où $R' = f^*(B)$. Donc $\varphi^*(N_q)$ est un épimorphisme, pour tout k-morphisme $\varphi : \mathrm{Spec}\ k \to \underset{\sim}{S}_q$. Donc N_q est lui-même un épimorphisme. Il existe un ouvert non vide Ω_1 de $\underset{\sim}{S}_q$ tel que le faisceau (pour la topologie fppf) conoyau de $\underset{\sim}{G}_q(p^{n+r}, s-id)|\Omega_1$ soit représentable par un Ω_1-groupe lisse, affine de type fini H' . On déduit de N_q un morphisme de Ω_1-schémas en groupes

$$\nu_q : H' \to \underset{\sim}{H}^1(R, \mu_{p^{n+r}})_{\Omega_1}$$

tel que, pour tout k-morphisme $\varphi : \mathrm{Spec}\ k \to \Omega_1$, le k-morphisme

$$\varphi^*(\nu_q) : \underset{\sim}{H}_o(g, \underset{\sim}{H}^1(R', \mu_{p^{n+r}})) \to \underset{\sim}{H}^1(R, \mu_{p^{n+r}})$$

soit le morphisme N du lemme 5.2.1.

Soit Γ le Ω_1-groupe noyau de ν_q ; il est fini et plat sur Ω_1 . Soit m_o le plus petit entier tel que $\Gamma^{(p^{m_o})}$ soit étale au point générique de Ω_1 . Il existe alors un ouvert non vide Ω de $\underset{\sim}{S}_q$ tel que $\Gamma^{(p^{m_o})} = \Gamma_{et}$ soit étale sur Ω . Par image directe par F^{m_o} , on obtient donc la suite exacte :

$$0 \to \Gamma_{et} \to H \xrightarrow{\nu_q} \underset{\sim}{H}^1(R,\mu_{p^{n+r}})_\Omega \to 0 .$$

Le Ω-morphisme $M_n \to H'$ déduit de $\underset{\sim}{G}_q(\iota)$ est un morphisme de Ω-groupes, dont le composé avec ν_q est nul ; il se factorise donc par Γ. Le composé $\alpha : M_n \to \Gamma \to \Gamma_{et}$ est tel que, pour tout k-morphisme $\varphi : \mathrm{Spec}\, k \to \underset{\sim}{S}_q$, l'homomorphisme $\varphi^*(\alpha)$ soit un isomorphisme $(\varphi^*(\Gamma_{et}) = \pi_o(\varphi^*(\Gamma)))$. On en déduit que α est un isomorphisme.

On a donc construit une Ω-suite exacte :

$$\text{(H)} \qquad 0 \to M_n \to H \xrightarrow{\nu_q} \underset{\sim}{H}^1(R,\mu_{p^{n+r}})_\Omega \to 0$$

telle que, pour tout k-morphisme $\varphi : \mathrm{Spec}\, k \to \Omega$ provenant de $f : \mathrm{Spec}\, R \to S$, la k-suite exacte $\varphi^*(H)$ représente l'image, dans $\mathrm{Ext}^1_k(\underset{\sim}{H}^1(R,\mu_{p^{n+r}}),M_n)$ de la classe d'isomorphisme de $\partial'(1+tf(X))$. En identifiant M_n à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ par le choix de z, racine de l'unité d'ordre p^n, on a ainsi obtenu un élément (H) de $\underset{\sim}{H}^1(R,\mu_{p^{n+r}})^*(\Omega)$. Son image canonique dans $\underset{\sim}{H}^1(R,\mu_{p^{n+r}})^*(\Omega^{pf}) = \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^{n+r}})^*(\Omega^{pf})$, où Ω^{pf} est le k-schéma parfait associé à Ω, définit donc un k-morphisme quasi-algébrique :

$$\Phi''_n : \Omega^{pf} \to \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^{n+r}})^*$$

dont le composé avec le k-morphisme canonique

$$\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^{n+r}})^* \to \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^r})^*$$

est nul, puisqu'il donne 0 sur toutes les fibres. On a donc un k-morphisme Φ'_n de Ω^{pf} dans le k-groupe quasi-algébrique $\mathrm{Ext}^1_k(\underset{\sim}{U}_K,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, tel que $\Phi'_n(k)$ induise la restriction de Φ_n à $\Omega'_{pf}(k)$, où Ω'^{pf} est l'image de Ω^{pf} dans $\underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$. D'où un k-morphisme $\underline{\underline{\Phi}}_n$ du k-schéma parfait Ω'^{pf} (ouvert non vide de $\underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$) dans le k-groupe quasi-algébrique $\mathrm{Ext}^1_k(\underset{\sim}{U}_K,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, tel que $\underline{\underline{\Phi}}_n(k)$ soit la restriction de Φ_n à $\Omega'^{pf}(k)$.

L'homomorphisme Φ_n , qui est quasi-algébrique sur un ouvert non vide du k-groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(K,\mu_{p^n})$, est alors quasi-algébrique partout. D'où la proposition.

REMARQUE. De l'isomorphisme de la proposition 5.3.2 et du choix d'une racine de l'unité d'ordre p^n , on déduit un isomorphisme de k-groupes quasi-algébriques unipotents connexes :

$$\underline{\underline{\Phi}}_n : \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^n}) \to (\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^n}))^* .$$

Il suffit en effet de remarquer que $\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^n})^*$ est la composante neutre du k-groupe quasi-algébrique $\mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{U}}_K, M_n)$ identifié à $\mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{U}}_K, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

§6. DUALITÉ POUR LES SCHÉMAS EN GROUPES FINIS

6.1. Dualité pour un K-groupe fini.

Etant donné un entier $n > 0$, soit $\mathcal{M}_{(n)}$ la catégorie des K-groupes finis (commutatifs) annulés par n ; nous écrirons $\mathcal{M}_n$ au lieu de $\mathcal{M}_{(p^n)}$. L'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}_{(n)}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, X) \to \mathrm{Ext}^1_K(\mathbb{Z}, X) = H^1(K, X)$$

est un isomorphisme, fonctoriel en les objets X de $\mathcal{M}_{(n)}$.

La valuation $v : K^* \to \mathbb{Z}$ induit un homomorphisme surjectif, encore noté v :

$$v : H^1(K, \mu_n) = K^*/K^{*n} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} .$$

Cet homomorphisme est aussi obtenu à partir de la projection canonique de k-groupes quasi-algébriques :

$$\underline{\underline{v}} : \underline{\underline{H}}^1(K, \mu_n) \to \pi_0(\underline{\underline{H}}^1(K, \mu_n)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} ,$$

par : $v = \underline{\underline{v}}(k)$.

Etant donné un K-groupe fini X, annulé par n, soit $[\xi]$ un élément de $H^1(K, X) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}_{(n)}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, X)$, représenté par la K-suite exacte ξ :

$$0 \to X \to F \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 .$$

La K-suite exacte $\xi' : 0 \to \mu_n \to F' \to X' \to 0$, déduite de ξ par dualité de Cartier, représente l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}_{(n)}}(X', \mu_n)$, noté $[\xi']$. Soit alors

$$\partial_X(\xi) : X'(K) \to \underline{\underline{H}}^1(K, \mu_n)$$

le bord de la suite exacte de k-groupes quasi-algébriques obtenue en prenant les K-points de la suite ξ'.

LEMME 6.1.1. a) <u>L'application</u>

$$v(X) : H^1(K,X) \to \mathrm{Hom}_{Ab}(X'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$
$$[\xi] \to \pi_o(\partial_X(\xi))$$

<u>est un homomorphisme de groupes, fonctoriel en les objets</u> X <u>de</u> $\mathcal{M}_{(n)}$.

b) <u>Les homomorphismes</u> v <u>et</u> $v(\mu_n)$ <u>sont opposés</u>.

c) $v(X)$ <u>est l'opposé de l'homomorphisme que l'on déduit du cup-produit</u> $H^1(K,X) \times X'(K) \to H^1(K,\mu_n)$ <u>par composition avec</u> v .

<u>Preuve</u> : a) Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{M}_{(n)}$. L'image $[\eta]$ de $[\xi] \in H^1(K,X)$ dans $H^1(K,Y)$ est représentée par la deuxième ligne du diagramme commutatif et exact de K-groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & Y & \to & f_*(F) & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & 0 \end{array} .$$

On en déduit aussitôt l'égalité : $\partial_Y(\eta) = \partial_X(\xi)\circ f'(K)$, ce qui donne : $\pi_o(\partial_Y(\eta)) = \pi_o(\partial_X(\xi))\circ f'(K)$. D'où la fonctorialité de $v(X)$, en les objets X de $\mathcal{M}_{(n)}$. De plus : $v(X_1 \times X_2) = v(X_1) \times v(X_2)$. Il est alors formel de voir que $v(X)$ est un homomorphisme de groupes.

b) Etudions le cas particulier où $X = \mu_n$ et où K contient une racine de l'unité d'ordre n . Soit $\lambda \in K^*$ un élément dont la classe modulo K^{*n} soit $[\xi] \in H^1(K,\mu_n) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}_{(n)}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mu_n)$. L'élément λ^{-1} de K^* représente alors $[\xi'] \in H^1(K,\mu_n) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}_{(n)}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mu_n)$, et donc $\partial_X(\xi)(\bar{1})$ est la classe de λ^{-1} modulo K^{*n} (en désignant par $\bar{1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la classe de $1 \in \mathbb{Z}$). Il en résulte l'égalité : $\pi_o(\partial_X(\xi)) = -v(\lambda)$.

c) Soit $w(X)$ l'homomorphisme que l'on déduit du cup-produit, par composition avec v ; il est aussi fonctoriel en les objets X de $\mathcal{M}_{(n)}$. Lorsque $X = \mu_n$, et que K contient une racine de l'unité d'ordre n , les homomorphismes $v(\mu_n)$ et $w(\mu_n)$ sont opposés, par b). Pour un objet quelconque X de $\mathcal{M}_{(n)}$, soit K'/K une extension finie galoisienne qui contient une racine de l'unité d'ordre n et qui trivialise X. Il existe alors un ensemble fini I et un K-épimorphisme $F = \prod_{K'|K} \mu_{n,K'}^I \to X$. La commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^1(K,F) & \longrightarrow & H^1(K,X) \\ {\scriptstyle v(F)+w(F)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v(X)+w(X)} \\ \mathrm{Hom}(F'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \end{array}$$

montre alors, compte tenu de la nullité de $v(F)+w(F)$ et de la surjectivité de $H^1(K,F) \to H^1(K,X)$, que $v(X)+w(X) = 0$. D'où l'assertion c) et l'assertion b) dans le cas général.

PROPOSITION 6.1.2. <u>L'application</u> $v(X)$ <u>est induite par un morphisme de</u> k-<u>groupes quasi-algébriques</u>

$$\underline{\underline{v}}(X) : \underline{\underline{H}}^1(X) \to \mathrm{Hom}_{Ab}(X'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

(autrement dit, $v(X)$ s'annule sur $\underline{\underline{H}}^1(X)^o(k)$).
<u>L'homomorphisme</u> $\pi_o(\underline{\underline{v}}(X))$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : La proposition est vraie lorsque $X=\mu_n$.

Pour un objet quelconque X de $\mathcal{M}_{(n)}$, il existe une K-suite exacte :

$$F_2 \to F_1 \to X \to 0$$

où, pour $i=1,2$, on a : $F_i = \prod_{K_i|K} \mu_n^{I_i}$, avec K_i/K finie galoisienne contenant une racine de l'unité d'ordre n, et I_i un ensemble fini. On en déduit un diagramme commutatif exact de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(K,F_2) & \longrightarrow & H^1(K,F_1) & \longrightarrow & H^1(K,X) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle v(F_2)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v(F_1)} & & \downarrow{\scriptstyle v(X)} & & \\ \mathrm{Hom}(F_2'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F_1'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$.

Les homomorphismes $v(F_i)$ sont quasi-algébriques, puisqu'ils s'identifient aux $v(\mu_n)^{I_i}$ relatifs à K_i (qui sont quasi-algébriques, par le lemme 6.1.1, b)). Il en est donc de même de $v(X)$, qui est donc induit par un morphisme de k-groupes quasi-algébriques $\underline{\underline{v}}(X) : \underline{\underline{H}}^1(X) \to \mathrm{Hom}(X'(K), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. L'exactitude à droite du foncteur π_o montre alors, puisque $\pi_o(\underline{\underline{v}}(F_i))$ est un isomorphisme pour $i = 1,2$, que $\pi_o(\underline{\underline{v}}(X))$ est aussi un isomorphisme.

LEMME 6.1.3. <u>Les homomorphismes composés</u>

$$H^1(K,X) \xrightarrow{\text{can}} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X'(K),K^*) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X'(K),\mathbb{Z})$$

$$H^1(K,X) \xrightarrow{v(X)} \mathrm{Hom}(X'(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{can}} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X'(K),\mathbb{Z})$$

<u>sont opposés</u>.

<u>Preuve</u> : Ces deux homomorphismes composés dépendent fonctoriellement de X. Par le même argument que ci-dessus, on est ramené à montrer le lemme pour $X = \mu_n$. Ces deux homomorphismes s'annulent alors sur U_K/U_K^n. Soit t une uniformisante de K, et soit $\bar{t}$ sa classe dans K^*/K^{*n}. L'image de $\bar{t}$ par le premier composé est la classe d'isomorphisme de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ;$$

dans le deuxième cas, c'est l'image réciproque, par $-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ de celle-ci. D'où le lemme.

Nous allons maintenant étudier le noyau $\underline{\underline{H}}^1(X)^o$ de $\underline{\underline{v}}(X)$, dont le groupe des k-points sera noté $H^1(K,X)^o$, ou $H^1(X)^o$ s'il n'y a pas d'ambiguité. Les éléments $[\xi]$ de $H^1(K,X)^o$ sont caractérisés par le fait que $\partial_X(\xi)$ se factorise à travers $\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)^o$. Ceci équivaut à la bijectivité de la projection :

$$\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) \to \pi_o(\mathrm{Coker}\ \partial_X(\xi)) \ .$$

PROPOSITION 6.1.4. <u>Pour tout objet</u> X <u>de</u> $\mathcal{M}_{(n)}$, <u>soit</u>

$$\Phi(X) \ : \ H^1(K,X)^o \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(X')^o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

<u>l'application qui, à la classe d'isomorphisme de la</u> K-<u>suite exacte</u> ξ:

$$0 \to X \to F \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 \ ,$$

<u>associe la classe d'isomorphisme de la suite exacte de</u> k-<u>groupes quasi-algébriques, troisième ligne du diagramme commutatif à lignes exactes</u> :

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\underline{v}}"'] & \underline{\underline{H}}^1(F') \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{H}}^1(X') \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & \underline{\underline{v}}_*(\underline{\underline{H}}^1(F')) \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(X') \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & \iota^*\underline{\underline{v}}_*(\underline{\underline{H}}^1(F')) \arrow[r] \arrow[u] & \underline{\underline{H}}^1(X')^o \arrow[r] \arrow[u, "\iota"'] & 0
\end{tikzcd} .$$

<u>L'application</u> $\Phi(X)$ <u>est un homomorphisme injectif, fonctoriel en les objets</u> X <u>de</u> $\mathcal{M}_{(n)}$.

<u>En d'autres termes, l'homomorphisme</u> $\Phi(X)$ <u>associe à</u> $[\xi]$ <u>le bord</u>

$$\pi_1(\underline{\underline{H}}^1(X')) \to \pi_o(\mathrm{Coker}\ \partial_X(\xi)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

<u>de la suite exacte d'homotopie appliquée à la</u> k-<u>suite exacte</u>

$$0 \to \mathrm{Coker}\ \partial_X(\xi) \to \underline{\underline{H}}^1(F') \to \underline{\underline{H}}^1(X') \to 0 \ .$$

<u>Preuve</u> : Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{M}_{(n)}$. Soit $[\xi]$ un élément de $H^1(K,X)^o$, et soit $[\eta] = H^1(K,f)([\xi])$ son image dans $H^1(K,Y)^o$. On peut donc représenter $[\xi]$ et $[\eta]$ respectivement par les lignes exactes du diagramme commutatif de K-groupes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & f_*F \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

D'où la commutativité du diagramme de groupes profinis :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\underline{\underline{H}}^1(X')) & \xrightarrow{\Phi(X)(\xi)} & \pi_o(\mathrm{Coker}\ \partial_X(\xi)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \uparrow & & \Uparrow \\ \pi_1(\underline{\underline{H}}^1(Y')) & \xrightarrow[\Phi(Y)(\eta)]{} & \pi_o(\mathrm{Coker}\ \partial_Y(\eta)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array} .$$

Ceci montre la fonctorialité de $\Phi(X)$ en les objets X de $\mathcal{M}_{(n)}$. En outre : $\Phi(X_1 \times X_2) = \Phi(X_1) \times \Phi(X_2)$. Il est alors aisé de voir que $\Phi(X)$ est un homomorphisme de groupes.

Soit $[\xi]$ un élément du noyau de $\Phi(X)$, représenté par une K-suite exacte comme ci-dessus. L'homomorphisme

$$\pi_o(\mathrm{Coker}\ \partial_X(\xi)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(F'))$$

est alors injectif, et donc l'homomorphisme canonique

$$\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(F'))$$

est aussi injectif. Par la proposition 6.1.2, ceci équivaut à l'injectivité de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(F(K),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, ou encore à la surjectivité de

$$F(K) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} .$$

Ceci signifie que le bord $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to H^1(K,X)$ de la suite exacte des points de ξ à valeurs dans K est nul, donc que $[\xi]$ est nul.

Bien entendu, l'homomorphisme $\Phi(X)$ est égal à $\Phi(X_{(p)})$, si $X_{(p)}$ est la composante p-primaire de X . Soit p^m l'ordre de cette composante p-primaire. Nous montrerons que $\Phi(X)$ est un isomorphisme quasi-algébrique, et, pour cela, nous commençons par reconnaître $\Phi(\mu_{p^m})$ lorsque K contient le groupe M_m des racines p^m-ièmes de l'unité.

PROPOSITION 6.1.5. <u>Supposons que</u> K <u>contienne le groupe</u> M_m <u>des racines</u> p^m<u>-ièmes de l'unité, et soit</u> $w : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mu_{p^m}$ <u>un</u> K-<u>isomorphisme. Le composé</u>

$$\begin{array}{c} H^1(K,\mu_{p^m})^o \xrightarrow{\Phi(\mu_{p^m})} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^o,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \xrightarrow{w(K)_*} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^o,M_m) \\ \Big\downarrow \underline{\underline{H}}^1(w)^* \\ \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^m})^o,M_m) \end{array}$$

<u>est induit par l'isomorphisme</u> Φ_m <u>défini en</u> 5.2 .

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer que ces deux homomorphismes coïncident sur l'ensemble des éléments d'ordre p^m de $H^1(K,\mu_{p^m})^o = H^1(R,\mu_{p^m})$.

Soit donc λ un élément de U_K qui n'est pas dans U_K^p . Sa classe dans $H^1(K,\mu_{p^n})^o$ est représentée par la K-suite exacte :

$$0 \to \mu_{p^m} \to F \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to 0 ,$$

l'opération du groupe de Galois $G(\tilde{K}/K)$ sur $F(\tilde{K}) = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\times\mu_{p^m}(\tilde{K})$ étant donnée par :

$$\sigma.(i,\zeta) = (i,\zeta(\frac{\sigma(x)}{x})^i) ,$$

où $x^{p^m} = \lambda$, $(i,\zeta) \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\times\mu_{p^m}(\tilde{K})$.

L'opération de $G(\tilde{K}/K)$ sur $F'(\tilde{K}) = (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\times\mu_{p^m}(\tilde{K})$ est alors donnée par :

$$\sigma.(i,\zeta) = (i,\zeta(\frac{\sigma(x)}{x})^{-i}) .$$

Soit z la racine de 1 d'ordre p^m définie par : $z = w(K)(\bar{1})$ ($\bar{1} \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ est la classe de $1 \in \mathbb{Z}$), et soit s le générateur du groupe de Galois $G(K'/K)$ de l'extension K'/K (où $K' = K(x)$, $x^{p^m} = \lambda$) défini par : $s(x) = zx$. On considère alors le diagramme commutatif exact de K-tores :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V_{K'} & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,K} \times V_{K'} & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,K} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_o} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle p^m} & & \\
0 & \longrightarrow & V_{K'} & \longrightarrow & \prod_{K'|K} \mathbb{G}_{m,K'} & \xrightarrow{N_{K'/K}} & \mathbb{G}_{m,K} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont canoniques, et où, pour toute K-algèbre Λ , $\varphi(\Lambda)$ et $\varphi_o(\Lambda)$ sont définis par :

$$\varphi(\Lambda) \ : \ \Lambda^* \times V_{K'}(\Lambda) \to (K' \otimes_K \Lambda)^*$$
$$(a,\alpha) \mapsto (1 \otimes a)(\frac{s(\alpha)}{\alpha})^{-1}$$

(si $\alpha = \sum_{0 \leqslant i < p^m} x^i \otimes \alpha_i \in (K' \otimes_K \Lambda)^*$, on a : $s(\alpha) = \sum_{0 \leqslant i < p^m} x^i \otimes \alpha_i z^i)$, et

$$\varphi_o(\Lambda) \ : \ V_{K'}(\Lambda) \to V_{K'}(\Lambda)$$
$$\alpha \mapsto (\frac{s(\alpha)}{\alpha})^{-1} \ .$$

Le noyau de φ_o est μ_{p^m} . En effet, si $\alpha = \sum_{0 \leqslant i < p^m} x^i \otimes \alpha_i \in (\mathrm{Ker}\ \varphi_o)(\Lambda)$, on a : $\sum_{0 \leqslant i < p^m} x^i \otimes \alpha_i (z^i - 1) = 0$, et donc $\alpha_i = 0$ pour $i \neq 0$; d'où : $\alpha = 1 \otimes \alpha_o$, $N_{K'/K}(\Lambda)(\alpha) = 1$, d'où $\alpha_o^{p^m} = 1$. Donc $\mathrm{Ker}\ \varphi_o \subset \mu_{p^m}$, et, comme il contient évidemment μ_{p^m} , il lui est égal. Il en résulte en particulier que φ_o est une isogénie de tores. Décrivons le noyau de φ , qui est extension de μ_{p^m} par μ_{p^m} . On a :

$$(\mathrm{Ker}\ \varphi)(\widetilde{K}) = \{ (a,\alpha) \in \widetilde{K}^* \times (K' \otimes_K \widetilde{K})^* \ ; \ N_{K' \otimes_K \widetilde{K}/\widetilde{K}}(\alpha) = 1 \ , \ 1 \otimes a = \frac{s(\alpha)}{\alpha} \} \ .$$

Si $(a,\alpha) \in (\mathrm{Ker}\ \varphi)(\widetilde{K})$, on a, en particulier : $N_{K' \otimes_K \widetilde{K}/\widetilde{K}}(1 \otimes a) = 1$, d'où $a^{p^m} = 1$, et il existe donc i , $0 \leqslant i < p^m$, tel que $a = z^i$. Alors : $s(\alpha) = (1 \otimes z^i)\alpha$, et il existe donc $\alpha_i \in \widetilde{K}^*$ tel que : $\alpha = x^i \otimes \alpha_i$. Puisque $N_{K' \otimes_K \widetilde{K}/\widetilde{K}}(\alpha) = 1$, on a : $\lambda^i \alpha_i^{p^m} = 1$ dans $\widetilde{K}$, et il existe donc j , $0 \leqslant j < p^m$ tel que $\alpha_i = z^j x^{-i}$. De plus, tout élément de la forme $(z^i , x^i \otimes z^j x^{-i})$ est dans $(\mathrm{Ker}\ \varphi)(\widetilde{K})$. Donc :

$$(\mathrm{Ker}\ \varphi)(\widetilde{K}) = \{ (z^i , x^i \otimes z^j x^{-i}) \in \widetilde{K}^* \times V_{K'}(\widetilde{K}) \ , \ 0 \leqslant i , j < p^m \} \ ,$$

où $G(\widetilde{K}/K)$ opère par : $\sigma.(z^i, x^i \otimes z^j x^{-i}) = (z^i, x^i \otimes z^j \sigma(x)^{-i})$.

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} f : F'(\widetilde{K}) = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mu_{p^m}(\widetilde{K}) &\to (\mathrm{Ker}\ \varphi)(\widetilde{K}) \\ (i,\zeta) &\mapsto (z^i, x^i \otimes \zeta x^{-i}) \ . \end{aligned}$$

C'est un isomorphisme de groupes abéliens. De plus :

$$\begin{aligned} f(\sigma.(i,\zeta)) &= f(i, \zeta(\frac{\sigma(x)}{x})^{-i}) = (z^i, x^i \otimes \zeta(\frac{\sigma(x)}{x})^{-i} x^{-i}) \\ &= (z^i, x^i \otimes \zeta\sigma(x)^{-i}) = \sigma.f(i,\zeta) \ . \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a un diagramme commutatif exact de K-groupes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mu_{p^m} & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_{p^m} & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\ \varphi & \longrightarrow & \mu_{p^m} & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

D'où un diagramme commutatif, à lignes exactes, de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow V_{K'}(K) & \longrightarrow & K'^* & \xrightarrow{N_{K'/K}(K)} & K^* & \longrightarrow & 0 \\ \partial \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(K,\mu_{p^m}) & \longrightarrow & H^1(K,\mathrm{Ker}\ \varphi) & \longrightarrow & H^1(K,\mu_{p^m}) & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \uparrow & & \uparrow H^1(K,w) & & \\ H^1(K,\mu_{p^m}) & \longrightarrow & H^1(K,F') & \longrightarrow & H^1(K,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

Soit T une uniformisante de K' . Calculons $\partial(\frac{s(T)}{T})$.

Soit $\alpha \in V_{K'}(\widetilde{K})$ tel que $\frac{s(T)}{T} \otimes 1 = (\frac{s(\alpha)}{\alpha})^{-1}$. Il existe donc $\mu \in \widetilde{K}^*$ tel que $\alpha = T^{-1} \otimes \mu$. Puisque $N_{K' \otimes_K \widetilde{K}/\widetilde{K}}(\alpha) = 1$, on a : $N_{K'/K}(T^{-1})\mu^{p^m} = 1$ dans $\widetilde{K}$. Soit alors $T' \in \widetilde{K}^*$ tel que $T'^{p^m} = N_{K'/K}(T)$. Il existe donc i , $0 \leqslant i < p^m$, tel que $\mu = z^i T'$, et donc : $\alpha = T^{-1} \otimes z^i T'$. Alors $\partial(\frac{s(T)}{T})$ est la classe du 1-cocycle :

$$\sigma \mapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = \frac{T^{-1} \otimes z^i \sigma(T')}{T^{-1} \otimes z^i T'} = \frac{\sigma(T')}{T'} \ .$$

Puisque $[\xi]$ est d'ordre p^m, l'injection $\mu_{p^m}(K) \to F(K)$ est un isomorphisme, et la projection $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(F')) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^m}))$ est un isomorphisme. La suite de k-groupes quasi-algébriques

$$\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^m}) \to \underline{\underline{H}}^1(F')^o \to \underline{\underline{H}}^1(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^o \to 0$$

est alors exacte. On obtient donc un diagramme commutatif exact de k-groupes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & M_m & \longrightarrow & \underline{\underline{U}}_{K'}/V^o_{K'} & \longrightarrow & \underline{\underline{U}}_K & \longrightarrow 0 \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle w(K)^{-1}} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \underline{\underline{H}}^1(w)\circ \mathrm{can}} & \\
0 \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \longrightarrow & v_*(\underline{\underline{H}}^1(F')^o) & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^o & \longrightarrow 0 \quad .
\end{array}$$

D'où la proposition.

THÉORÈME 6.1.6. <u>L'homomorphisme</u> $\Phi(X)$ (6.1.4) <u>est induit par un isomorphisme de</u> k-<u>groupes</u> <u>quasi-algébriques unipotents connexes</u> :

$$\underline{\underline{\Phi}}(X) : \underline{\underline{H}}^1(X)^o \to [\underline{\underline{H}}^1(X')^o]^* .$$

<u>Preuve</u> : Soit K'/K une extension finie galoisienne contenant une racine d'ordre p^m de l'unité, et trivialisant X (X étant annulé par p^m). On en déduit un diagramme commutatif de groupes abéliens, où toutes les flèches, sauf peut-être celle du bas, sont induites par des k-morphismes quasi-algébriques :

$$\begin{array}{ccc}
H^1(K',X)^o & \xrightarrow{\Phi'(X)} & \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(K',X')^o,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}^*} \\
H^1(K,X)^o & \xrightarrow[\Phi(X)]{} & \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(K,X')^o,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})
\end{array}$$

où Φ' est à K' ce que Φ est à K. La flèche horizontale du haut est un isomorphisme quasi-algébrique, d'après la proposition 6.1.5 et la proposition 5.3.2. Les flèches verticales sont surjectives (par le corollaire 3 de la proposition 2.2.1) et quasi-algébriques. Il en résulte que la flèche horizontale du bas $\Phi(X)$ est aussi surjective et quasi-algébrique. Comme elle est, en outre, injective, on en déduit le théorème.

6.2. Point de vue des catégories dérivées, pour les K-groupes finis annulés par une puissance donnée de p.

Dans ce paragraphe, nous fixons un entier $n > 0$. On rappelle que $\mathcal{M}_n$ est la catégorie (abélienne) des K-groupes finis annulés par p^n. On note $\mathcal{L}_o$ (resp. $\mathcal{L}_1$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_n$ dont les objets L vérifient $L(K) = 0$ (resp. $L(K) = L'(K) = 0$).

LEMME 6.2.1. Tout objet de $\mathcal{M}_n$ est quotient d'un objet de $\mathcal{L}_o$.

Preuve : a) Montrons d'abord que, pour toute extension finie K'/K, il existe un K'-épimorphisme $F_1 \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{K'}$, où F_1 est un K'-groupe fini annulé par p^n et tel que $F_1(K') = 0$.

En effet, soit F un K'-groupe fini annulé par p^n, mais non par p^{n-1}, tel que $F(K') = 0$ (un tel K'-groupe existe, par exemple le noyau de l'épimorphisme norme $N_{K''/K'} : \prod_{K''|K'} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{K''} \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{K'}$, où K''/K est une extension finie de degré $[K'':K']$ premier à p). Soit alors $\xi \in H^1(K',F)$ un élément d'ordre p^n, qui est représenté par une K'-suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow F_1 \xrightarrow{u} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow 0 ,$$

où $p^nF_1 = 0$; alors ξ est l'image, par l'homomorphisme cobord

$$\partial : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H^1(K',F) ,$$

de l'élément $\bar{1} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Puisque ξ est d'ordre p^n, l'injection $F(K') \to F_1(K')$ est un isomorphisme, et donc $F_1(K')$ est aussi nul.

b) Soit X un objet quelconque de $\mathcal{M}_n$, et soit K'/K une extension finie telle que $X_{K'}$ soit constant. Il existe alors un entier $r > 0$ et un épimorphisme d'objets de $\mathcal{M}_n$:

$$\prod_{K'|K} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^r \to X .$$

Composant cet épimorphisme avec l'épimorphisme

$$\prod_{K'|K} u^r : L = \prod_{K'|K} F_1^r \to \prod_{K'|K} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^r$$

(où u est le K'-épimorphisme défini dans a)), on obtient un épimorphisme $L \to X$ d'objets de $\mathcal{M}_n$, où $L(K) = F_1^r(K') = 0$. D'où le lemme.

LEMME 6.2.2. <u>Tout objet</u> X <u>de</u> $\mathcal{L}_o$ <u>admet une résolution</u>

$$0 \to X \to Y_o \to Y_1 \to 0 ,$$

<u>où</u> Y_o <u>et</u> Y_1 <u>sont des objets de</u> $\mathcal{L}_1$.

<u>Preuve</u> : a) Montrons d'abord que, pour toute extension finie K'/K, il existe un K'-groupe fini F, annulé par p^n, mais non par p^{n-1}, tel que $F(K') = F'(K') = 0$.

Soit L un K'-groupe fini tel que $p^nL = 0$, $p^{n-1}L \neq 0$, et tel que $L(K') = 0$. En appliquant le lemme 6.2.1 à L' (en remplaçant K par K'), on voit qu'il existe une suite exacte de K'-groupes annulés par p^n :

$$0 \to L \to F_1 \to F_2 \to 0 ,$$

telle que $F_1'(K') = F_2'(K') = 0$. Choisissons un F_1 contenant L, tel que $F_1'(K') = 0$ et $p^nF_1 = 0$, et dont l'ordre soit minimum. Si $F_1(K')$ est le plus grand sous-K'-groupe constant de F_1, on en déduit un diagramme commutatif et exact de K'-groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & F_1(K') & = & F_1(K') & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & F_1/F_1(K') & \longrightarrow & F_2/F_1(K') & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Le K'-groupe $F_1/F_1(K')$ contient L, est annulé par p^n, et son dual de Cartier (sous-K'-groupe de F'_1) n'a pas d'autre K'-point que 0. Vu la minimalité de F_1, on en déduit que la projection $F_1 \to F_1/F_1(K')$ est un isomorphisme, donc que $F_1(K') = 0$. Le K'-groupe $F = F_1$ satisfait aux conditions requises.

b) Soit X un objet (non nul) de $\mathcal{L}_o$, et soit K'/K une extension finie telle que $X'_{K'}$ soit constant. Il existe alors un entier $k > 0$, et k couples (n_i, r_i) d'entiers > 0 (avec $n_i \leqslant n$), et un K'-isomorphisme :

$$X'_{K'} \simeq (\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z})^{r_1} \times \ldots \times (\mathbb{Z}/p^{n_k}\mathbb{Z})^{r_k} .$$

Pour chaque j $(1 \leqslant j \leqslant k)$, on choisit un K'-groupe F_j fini, annulé par p^{n_j} mais non par $p^{n_j - 1}$, tel que $F_j(K') = F'_j(K') = 0$, et l'on considère une K'-suite exacte

$$0 \to F_j \to G_j \to \mathbb{Z}/p^{n_j}\mathbb{Z} \to 0$$

représentant un élément d'ordre p^{n_j} de $H^1(K', F_j)$. En particulier, on a : $G_j(K') = 0$. On en déduit la K'-suite exacte produit :

$$0 \to F_1^{r_1} \times \ldots \times F_k^{r_k} \to G_1^{r_1} \times \ldots \times G_k^{r_k} \to X'_{K'} \to 0 ,$$

et donc, par dualité de Cartier, une K'-suite exacte :

$$0 \to X_{K'} \to Y \to Z \to 0 ,$$

telle que $Z(K') = Z'(K') = Y'(K') = 0$. Par restriction de Weil de K' à K , on en déduit la K-suite exacte

$$0 \to \prod_{K'|K} X_{K'} \to \prod_{K'|K} Y \to \prod_{K'|K} Z \to 0$$

dont l'image

$$0 \to X \to Y_o \to Y_1 = \prod_{K'|K} Z \to 0$$

par l'épimorphisme norme $\prod_{K'|K} X_{K'} \to X$ vérifie :

$Y'_o(K) \subset (\prod_{K'|K} Y)'(K) = (\prod_{K'|K} Y')(K) = Y'(K') = 0$, $Y_1(K) = Z(K') = 0$,

et enfin $Y'_1(K) = Z'(K') = 0$. D'où le lemme.

Pour toute catégorie abélienne A , nous notons $K^b(A)$ la catégorie triangulée des complexes à homotopie près, formés d'objets de A , et qui sont bornés ; la catégorie dérivée correspondante est désignée par $D^b(A)$, et le foncteur de localisation $K^b(A) \to D^b(A)$ est noté Q .

Nous noterons aussi $K^b(\mathcal{L}_o)$ [resp. $K^b(\mathcal{L}_1)$] la sous-catégorie triangulée de $K^b(\mathcal{M}_n)$ dont les objets sont formés d'objets de $\mathcal{L}_o$ (resp. de $\mathcal{L}_1$).

Soit $\mathcal{Q}_n$ la catégorie abélienne des k-groupes quasi-algébriques unipotents annulés par p^n .

Soit :

$$\underline{\underline{H}}^1 : \mathcal{M}_n \to \mathcal{Q}_n$$

le foncteur qui, à un objet X de $\mathcal{M}_n$, associe le k-groupe quasi-algébrique unipotent $\underline{\underline{H}}^1(X)$ défini par le lemme 4.3.1. C'est un foncteur additif, qui se prolonge de manière unique en un ∂-foncteur (au sens de [12]) de catégories triangulées, noté encore :

$$\underline{\underline{H}}^1 : K^b(\mathcal{M}_n) \to K^b(\mathcal{Q}_n) .$$

PROPOSITION 6.2.3. *Le* ∂-*foncteur*

$$\underline{\underline{H}}^1 : K^b(\mathcal{M}_n) \to K^b(\mathcal{D}_n)$$

admet un dérivé gauche $(L\underline{\underline{H}}^1, \xi)$ *, où* ξ *est un morphisme du foncteur composé*

$$K^b(\mathcal{M}_n) \xrightarrow{Q} D^b(\mathcal{M}_n) \xrightarrow{L\underline{\underline{H}}^1} D^b(\mathcal{D}_n)$$

dans le foncteur composé

$$K^b(\mathcal{M}_n) \xrightarrow{\underline{\underline{H}}^1} K^b(\mathcal{D}_n) \xrightarrow{Q} D^b(\mathcal{D}_n) .$$

Pour tout objet $X^\cdot$ *de* $K^b(\mathcal{L}_o)$ *, le morphisme* $\xi(X^\cdot)$ *est un isomorphisme de* $D^b(\mathcal{D}_n)$.

Preuve : Pour tout objet $X^\cdot$ de $K^b(\mathcal{M}_n)$, il existe, par le lemme 6.2.1, un objet $L^\cdot$ de $K^b(\mathcal{L}_o)$ et un quasi-isomorphisme $L^\cdot \to X^\cdot$. De plus, si $L^\cdot$ est un objet acyclique de $K^b(\mathcal{L}_o)$, le complexe $\underline{\underline{H}}^1(L^\cdot)$ est aussi acyclique (ceci résultant de la remarque qui suit la proposition 4.3.2). Il résulte alors du théorème 5.1 de [12] (p. 53), que $\underline{\underline{H}}^1$ admet un dérivé gauche $(L\underline{\underline{H}}^1, \xi)$, où ξ vérifie les conditions de l'énoncé.

REMARQUES. Notons $\mathcal{M}$ la catégorie (abélienne) des K-groupes de type multiplicatif, et $(Pf/k)^\sim$ la catégorie (abélienne) des faisceaux en groupes abéliens sur le site étale des k-schémas parfaits.

1. Soit $\mathcal{M}^c$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ dont les objets sont connexes, c'est-à-dire sont des K-tores. Si $\underline{\underline{H}}^o : \mathcal{M}^c \to (Pf/k)^\sim$ est le foncteur qui, à un tore T , associe le faisceau que définit la réalisation de Greenberg parfaite du R-modèle de Néron de T , alors $\underline{\underline{H}}^o$ se prolonge de manière unique en un foncteur additif $\underline{\underline{H}}^o : \mathcal{M} \to (Pf/k)^\sim$ [on pose, en effet : $\underline{\underline{H}}^o(X) = \text{Ker}\ \underline{\underline{u}}(K)$, où $u : T_o \to T_1$ est un épimorphisme quelconque de K-tores dont X est le noyau]. Ce foncteur additif se prolonge lui-même, de manière unique, en un ∂-foncteur de

catégories triangulées :

$$\underline{\underline{H}}^{o} : K^{b}(\mathcal{M}) \to K^{b}((Pf/k)^{\sim}) .$$

Puisque tout objet de $K^{b}(\mathcal{M})$ admet un quasi-isomorphisme dans un objet de $K^{b}(\mathcal{M}^{c})$, et que $\underline{\underline{H}}^{o}$ transforme tout complexe acyclique de tores en un complexe acyclique, le foncteur $\underline{\underline{H}}^{o}$ admet un dérivé droit $(R\underline{\underline{H}}^{o},\varphi)$, où φ est un morphisme du foncteur composé

$$K^{b}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\underline{\underline{H}}^{o}} K^{b}((Pf/k)^{\sim}) \xrightarrow{Q} D^{b}((Pf/k)^{\sim})$$

dans le foncteur composé

$$K^{b}(\mathcal{M}) \xrightarrow{Q} D^{b}(\mathcal{M}) \xrightarrow{R\underline{\underline{H}}^{o}} D^{b}((Pf/k)^{\sim}) ,$$

ceci résultant encore du théorème 5.1 de [12] (p. 53).

2. Notons $\iota : D^{b}(\mathcal{D}_n) \to D^{b}((Pf/k)^{\sim})$ le foncteur canonique (n étant fixé).

Soient X un objet de $\mathcal{M}_n$, et $0 \to X \to T_o \xrightarrow{u} T_1 \to 0$ une K-résolution de X par des tores. Choisissons un entier $m > 0$ tel que le sous-groupe (fini) de p-torsion de $T_o(K)$ soit égal au groupe des K-points du noyau $(T_o)_{p^m}$ de la multiplication par p^m dans T_o . Notons alors $X^{(m)}$ l'objet de $\mathcal{M}_{m+n}$ obtenu par le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (T_o)_{p^m} & \longrightarrow & X^{(m)} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (T_o)_{p^m} & \longrightarrow & T_o & \xrightarrow{p^m} & T_o & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

Vu le choix de m , l'homomorphisme injectif

$$(T_o)_{p^m}(K) \to X^{(m)}(K)$$

est un isomorphisme. Du diagramme commutatif et exact suivant d'objets de $\mathcal{M}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (T_o)_{p^m} & \longrightarrow & T_o & \xrightarrow{p^m} & T_o & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow u & & \\
0 & \longrightarrow & X^{(m)} & \longrightarrow & T_o & \xrightarrow[u\circ p^m]{} & T_1 & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

on déduit donc, dans $K^b((Pf/k)^{\sim})$ un morphisme de complexes concentrés en degrés 0 et 1 :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\underline{T}}_o(K) & \longrightarrow & \underline{\underline{T}}_1(K) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\underline{H}}^1((T_o)_{p^m}) & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(X^{(m)})
\end{array}$$

qui, vu le choix de m , est un quasi-isomorphisme.

D'autre part, soit $0 \to X_{-1} \to X_o \to X \to 0$ une résolution de X par des objets de $\mathcal{L}_o$. Il existe un complexe (concentré en degrés -1 et 0) $Y_{-1} \to Y_o$ d'objets de $\mathcal{M}_{m+n}$ tels que $Y_o(K) = Y_{-1}(K) = 0$, et, dans $K^b(\mathcal{M}_{m+n})$, des quasi-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
Y_{-1} & \longrightarrow & Y_o \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_{-1} & \longrightarrow & X_o
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
Y_{-1} & \longrightarrow & Y_o \\
\downarrow & & \downarrow \\
(T_o)_{p^m} & \longrightarrow & X^{(m)}
\end{array} .$$

On en déduit, dans $K^b(\mathcal{D}_{m+n})$, et donc aussi dans $K^b((Pf/k)^{\sim})$, des quasi-isomorphismes de complexes concentrés en degrés -1 et 0 :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\underline{H}}^1(Y_{-1}) & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(Y_o) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\underline{H}}^1(X_{-1}) & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(X_o)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\underline{\underline{H}}^1(Y_{-1}) & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(Y_o) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\underline{H}}^1((T_o)_{p^m}) & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(X^{(m)})
\end{array} .$$

On en déduit, dans $D^b((Pf/k)^{\sim})$, un isomorphisme (fonctoriel en les objets X de $\mathcal{M}_n$) :

$$R\underline{\underline{H}}^o(X) \xrightarrow{\sim} (\iota \circ L\underline{\underline{H}}^1(-1))(X) .$$

Notations. On note

$$C : D^b(\mathcal{M}_n) \to D^b(\mathcal{M}_n^o)$$

la dualité de Cartier, et

$$\mathcal{S} : D^b(\mathcal{D}_n) \to D^b(\mathcal{D}_n^o)$$

la dualité de Serre.

Si $X^\cdot$ est un objet de $K^b(\mathcal{L}_1)$ (c'est-à-dire tel que $X_i(K) = X_i^!(K) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ou, ce qui revient au même, tels que les groupes quasi-algébriques $\underline{\underline{H}}^1(X_i)$ et $\underline{\underline{H}}^1(X_i^!)$ soient tous connexes), on note

$$\underline{\underline{\Phi}}(X^\cdot) : \underline{\underline{H}}^1(X^\cdot) \to \underline{\underline{H}}^1(X'^\cdot)^*$$

l'isomorphisme, dans $K^b(\mathcal{D}_n)$, donné par :

$$\underline{\underline{\Phi}}(X^\cdot)_i = \underline{\underline{\Phi}}(X_i) : \underline{\underline{H}}^1(X_i) \to \underline{\underline{H}}^1(X_i^!)^* ,$$

où $\underline{\underline{\Phi}}(X_i)$ est défini (pour tout $i \in \mathbb{Z}$) par la proposition 6.1.6.

PROPOSITION 6.2.4. <u>Il existe un unique isomorphisme de foncteurs (ces foncteurs ayant</u> $D^b(\mathcal{M}_n)$ <u>pour source, et</u> $D^b(\mathcal{D}_n)$ <u>pour but</u>)

$$\Theta : L\underline{\underline{H}}^1 \to \mathcal{S} \circ L\underline{\underline{H}}^1 \circ C$$

<u>tel que, pour tout objet</u> $X^\cdot$ <u>de</u> $K^b(\mathcal{L}_1)$, <u>l'on ait</u> :

$$\Theta(Q(X^\cdot)) = [\mathcal{S}(\xi(X'^\cdot)] \circ Q(\underline{\underline{\Phi}}(X^\cdot)) \circ \xi(X^\cdot) .$$

<u>Preuve</u> : Pour tout objet $X^\cdot$ de $K^b(\mathcal{L}_1)$, considérons le composé :

$$L\underline{\underline{H}}^1(Q(X^\cdot)) \xrightarrow{\xi(X^\cdot)} Q(\underline{\underline{H}}^1(X^\cdot)) \xrightarrow{Q(\Phi(X^\cdot))} Q(\underline{\underline{H}}^1(X'^\cdot)^*) \xrightarrow{\mathcal{S}(\xi(X'^\cdot))} \mathcal{S} \circ L\underline{\underline{H}}^1 \circ C(Q(X^\cdot)).$$

On a ainsi défini un morphisme du foncteur restriction de $L\underline{\underline{H}}^1 \circ Q$ à $K^b(\mathcal{L}_1)$ dans le foncteur restriction de $\mathcal{S} \circ L\underline{\underline{H}}^1 \circ Q$ à $K^b(\mathcal{L}_1)$ (ces deux foncteurs ayant pour but $D^b(\mathcal{D}_n)$). Autrement dit, si $\iota : K^b(\mathcal{L}_1)_{q\text{-iso}} \to D^b(\mathcal{M}_n)$ est le foncteur canonique, on a ainsi défini un morphisme de foncteurs :

$$L\underline{\underline{H}}^1 \circ \iota \to \mathcal{f} \circ L\underline{\underline{H}}^1 \circ C \circ \iota = \mathcal{f} \circ L\underline{\underline{H}}^1 \circ \iota \circ C .$$

Par les lemmes 6.2.1 et 6.2.2, le foncteur ι est une équivalence de catégories. En utilisant un foncteur quasi-inverse de ι , on obtient le résultat.

Nous allons maintenant décrire l'effet de $\Theta(X)$ (pour les objets X de $\mathcal{M}_n$, identifiés à leurs images canoniques dans $D^b(\mathcal{M}_n)$) sur les i-èmes groupes de cohomologie du complexe $L\underline{\underline{H}}^1(X)$.

On note $\Theta_i(X)$ l'isomorphisme (quasi-algébrique) induit par $\Theta(X)$ sur le i-ème groupe de cohomologie de $L\underline{\underline{H}}^1(X)$, pour un objet X de $\mathcal{M}_n$.

Remarquons d'abord que :
$$\begin{cases} H^i(L\underline{\underline{H}}^1(X)) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0 , -1 \\ H^{-1}(L\underline{\underline{H}}^1(X)) = X(K) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X) \\ H^o(L\underline{\underline{H}}^1(X))(k) = H^1(X) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, T(X)) \end{cases}$$

où T est le foncteur translation.

On note encore $\underline{\underline{v}} \in \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^n}), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ l'image du k-morphisme $\underline{\underline{v}} : \underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^n}) \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ par le composé :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_n}(\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^n}), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^n}), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^n}), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

où la première flèche est canonique, et où la deuxième est la composition avec $\xi(\mu_{p^n})$.

PROPOSITION 6.2.5. Soit X un objet de $\mathcal{M}_n$. L'homomorphisme $\Theta_o(X)$ s'identifie au composé suivant :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, T(X)) \xrightarrow{C} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(X', T(\mu_{p^n})) \xrightarrow{L\underline{\underline{H}}^1} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(X'), T(L\underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^n}))) \\ \Big\downarrow T(\underline{\underline{v}})_* \\ \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(X'), T(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) . \end{array}$$

En outre, $\Theta_{-1}(X)$ s'identifie à l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_n}(\underline{\underline{H}}^1(X'),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

qui, à f, associe $\underline{\underline{v}}\circ\underline{\underline{H}}^1(f')$.

Preuve : a) Pour un objet X de $\mathcal{L}_1$, le morphisme $\Theta_o(X) : \underline{\underline{H}}^1(X) \to \underline{\underline{H}}^1(X')^*$ est égal à $\underline{\underline{\Phi}}(X)$. Il associe donc, à la classe de la suite exacte $0 \to X \to F \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to 0$ formée d'objets de $\mathcal{M}_n$, l'image dans $\mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(X'),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ de la suite exacte d'objets de $\mathcal{D}_n$

$$0 \to \underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^n}) \to \underline{\underline{H}}^1(F') \to \underline{\underline{H}}^1(X') \to 0 .$$

Et l'on voit que le composé considéré est égal à $\Theta_o(X)$.

b) Si X est un objet de $\mathcal{L}_o$, soit $0 \to X \to Y_o \to Y_1 \to 0$ une résolution de X par des objets de $\mathcal{L}_1$. Vu la nullité de $Y_1(K)$ et l'exactitude à droite de $\underline{\underline{H}}^1$ sur $\mathcal{M}_n$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},T(.))$ transforme cette suite exacte en suite exacte. Il en est de même du foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(.'),T(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$, puisque $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(Y_1'))$ et $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(X'),T^2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ sont nuls (en effet, W_n est injectif dans $\mathcal{D}_n$, et $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est le noyau de l'endomorphisme F-id de W_n). Les flèches

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},T(.)) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(.'),T(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$$

considérées dans l'énoncé, avec respectivement $. = X, Y_o, Y_1$, forment alors les colonnes d'un diagramme commutatif dont les lignes sont des suites exactes courtes. Les deux flèches verticales de droite coïncident avec $\Theta_o(Y_o)$ et $\Theta_o(Y_1)$ respectivement. La flèche verticale de gauche coïncide donc avec $\Theta_o(X)$.

c) Si X est un objet quelconque de $\mathcal{M}_n$, soit $0 \to Y_{-1} \to Y_o \to X \to 0$ une résolution de X par des objets de $\mathcal{L}_o$. On obtient, dans $\mathcal{D}_n$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},T(Y_{-1})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},T(Y_o)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(Y'_{-1}),T(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(Y'_o),T(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))
\end{array} .$$

Par passage aux conoyaux [resp. aux noyaux] des flèches horizontales, on obtient, compte tenu de la nullité de $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},Y_o)$, de $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},T^2(Y_{-1}))$ et de $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(Y'_{-1}),T^2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$, la flèche de l'énoncé

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},T(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(L\underline{\underline{H}}^1(X'),T(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$$

[resp. $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_n)}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_n)}(\underline{\underline{H}}^1(X'),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$] .

La proposition résulte alors de b).

6.3. <u>Dualité pour un p-groupe fini et plat sur</u> R .

PROPOSITION 6.3.1. <u>Soit X un p-groupe fini et plat sur</u> R . <u>La restriction à $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ de l'isomorphisme quasi-algébrique</u> (6.1.6)

$$\underline{\underline{\Phi}}(X) : \underline{\underline{H}}^1(X)^o \to [H^1(X')^o]^*$$

<u>se factorise par une immersion fermée</u>

$$\underline{\underline{\Phi}}_R(X) : \underline{\underline{H}}^1(R,X) \to [\underline{\underline{H}}^1(X')^o/\underline{\underline{H}}^1(R,X')]^* .$$

<u>Preuve</u> : Tout élément $[\xi]$ de $H^1(R,X)$ peut être représenté par une R-suite exacte ξ (rappelons que c'est au sens fppf) :

$$0 \to X \to F \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to 0 ,$$

où p^m annule X et F. Par dualité de Cartier, on obtient une R-suite exacte ξ', $0 \to \mu_{p^m} \to F' \to X' \to 0$

d'où un diagramme commutatif exact de k-groupes quasi-algébriques :

$$\begin{array}{ccccccc}
X'(R) & \xrightarrow{\partial_X(\xi)} & \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^m}) & \to & \underline{\underline{H}}^1(R,F') & \to & \underline{\underline{H}}^1(R,X') \to 0 \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X'(K) & \xrightarrow{\partial_X(\xi_K)} & \underline{\underline{H}}^1(\mu_{p^m}) & \to & \underline{\underline{H}}^1(F') & \to & \underline{\underline{H}}^1(X') \to 0
\end{array} .$$

On en déduit un diagramme commutatif de groupes profinis :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\underline{\underline{H}}^1(R,X')) & \to & \pi_o(\mathrm{Coker}\ \partial_X(\xi)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_1(\underline{\underline{H}}^1(X')) & \to & \pi_o(\mathrm{Coker}\ \partial_X(\xi_K))
\end{array} .$$

Or Coker $\partial_X(\xi)$ est un quotient du k-groupe connexe $\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_{p^m})$, donc est connexe. Alors $\underline{\underline{\Phi}}_X(\xi_K)$ s'annule sur $\pi_1(\underline{\underline{H}}^1(R,X'))$. Ceci montre que le composé :

$$\underline{\underline{H}}^1(R,X) \to \underline{\underline{H}}^1(X)^o \xrightarrow{\underline{\underline{\Phi}}(X)} [\underline{\underline{H}}^1(X')^o]^* \to [\underline{\underline{H}}^1(R,X')]^*$$

est nul, d'où la proposition.

THÉORÈME 6.3.2. <u>Le morphisme de</u> k-<u>groupes</u> <u>quasi-algébriques</u> :

$$\underline{\underline{\Phi}}_R(X) \ :\ \underline{\underline{H}}^1(R,X) \to [\underline{\underline{H}}^1(X')^o/\underline{\underline{H}}^1(R,X')]^*$$

<u>est un isomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : Soit d (resp. d') un élément de R qui engendre la différente absolue de X (resp. de X'). Par [15], l'idéal $dd'R$ peut aussi être engendré par l'ordre $|X|$ de X. D'où l'égalité :

$$v(d) + v(d') = v(|X|) .$$

Par les propositions 4.2.2 et 4.4.2, cette égalité se traduit par l'égalité :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(R,X) + \dim_k \underline{\underline{H}}^1(R,X') = \dim_k \underline{\underline{H}}^1(X) = \dim_k \underline{\underline{H}}^1(X') .$$

Les k-groupes quasi-algébriques connexes $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ et le dual de Serre de $\underline{\underline{H}}^1(X')^o/\underline{\underline{H}}^1(R,X')$ ont donc même dimension. L'immersion fermée $\underline{\underline{\Phi}}_R(X)$ est donc un isomorphisme.

Notons que ce théorème est un analogue, dans le cas géométrique, d'un théorème obtenu par B. Mazur dans le cas p-adique (cf. [13], 1.6 (iii)).

§7. CONSÉQUENCES : DUALITÉ POUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES A BONNE RÉDUCTION, ET DUALITÉ POUR LES TORES

7.1. *Dualité pour les variétés abéliennes à bonne réduction.*

PROPOSITION 7.1.1. *Soit* A *un* R-*schéma abélien de dimension* d , *et soit* A' *le* R-*schéma abélien dual de* A . *Pour tout entier* $n \geqslant 1$, *soit* A_n *le noyau de la multiplication par* n *dans* A . *La dimension du* k-*groupe quasi-algébrique* $\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n$, *conoyau du morphisme canonique* $\underline{\underline{H}}^1(R,A_n) \to \underline{\underline{H}}^1(A_n)$, *est* $v(n^d)$, *et le groupe de ses* k-*points est* $H^1(K,A)_n$. *Il y a des isomorphismes canoniques* :

$$1)\ \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A'_n(K),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$2)\ [\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n]^o \xrightarrow{\sim} (\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))^* ,$$

où $\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K)$ *est le* k-*groupe quasi-algébrique conoyau de la multiplication par* n *dans le groupe proalgébrique* $\underline{\underline{A}}'(K)$ *des* K-*points de* A'.

Preuve : De la R-suite exacte

$$0 \to A_n \to A \xrightarrow{n} A \to 0 ,$$

on déduit l'égalité de $\underline{\underline{H}}^1(R,A_n)$ avec le conoyau de la multiplication par $n = \underline{\underline{G}}(n)$ dans le groupe proalgébrique $\underline{\underline{A}}(R) = \underline{\underline{G}}(A)$ (4.1), qui est aussi égal à $\underline{\underline{A}}(K)$. D'où une immersion fermée de k-groupes quasi-algébriques

$$\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K) \to \underline{\underline{H}}^1(A_n) .$$

Le groupe des k-points de son conoyau $\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n$, est le conoyau de

$$A(K)/nA(K) \to H^1(K,A_n) ,$$

et donc est égal au noyau $H^1(K,A)_n$ de la multiplication par n dans $H^1(K,A)$. L'ordre de A_n est n^{2d} . La multiplication par n dans A induit la multiplication par n dans le R-module libre ω_A de rang d : la différente absolue de A_n est donc engendrée par n^d. On en déduit l'égalité :

$$\dim_k \underline{\underline{H}}^1(K,A)_n = v(n^{2d}) - v(n^d) = v(n^d) .$$

Le premier isomorphisme de l'énoncé provient de celui de la proposition 6.1.2, puisque, $\underline{\underline{H}}^1(R,A_n)$ étant connexe, la projection canonique

$$\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(A_n)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n)$$

est un isomorphisme.

Le deuxième isomorphisme est déduit, par passage aux conoyaux, du diagramme commutatif de k-groupes quasi-algébriques, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(R,A_n) & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(A_n)^o & \longrightarrow & [\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n]^o & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle \underline{\underline{\Phi}}_R(A_n)}\downarrow & & {\scriptstyle \underline{\underline{\Phi}}(A_n)}\downarrow & & & & \\
0 & \to & ([\underline{\underline{H}}^1(K,A')_n]^o)^* & \to & [\underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o]^* & \to & (\underline{\underline{H}}^1(R,A'_n))^* & \to & 0
\end{array}$$

où $\underline{\underline{\Phi}}(A_n)$ et $\underline{\underline{\Phi}}_R(A_n)$ sont les isomorphismes respectivement décrits dans les théorèmes 6.1.6 et 6.3.2.

Au §8, nous établirons un théorème de dualité plus précis, et plus général, puisqu'il vaudra pour les K-variétés abéliennes quelconques.

7.2. <u>Dualité pour les tores</u>.

Soit T un tore sur K , et soit $M = \underline{\mathrm{Hom}}_K(T,\mathbb{G}_m)$ le K-groupe de ses caractères. Pour tout entier $n > 1$, on note T_n le noyau de la multiplication par n dans T , et T'_n le dual de Cartier de T_n , qui est donc le conoyau de la multiplication par n dans M . Soit $T^{(d)}$ le tore sur K , plus grand quotient déployé de T : son groupe des caractères est le K-groupe constant $H^o(K,M) = M^{(d)} \simeq \mathbb{Z}^r$, où r est le rang déployé de T . Le quotient $M(\widetilde{K})/H^o(K,M)$ est sans torsion, et donc le noyau de l'épimorphisme $T \to T^{(d)}$ est un tore T_1 sur K , dont le rang déployé est nul. Il résulte alors de [17] que le groupe des composantes connexes de la fibre spéciale du R-modèle de Néron de T_1 est un groupe fini, tandis que le groupe des composantes connexes de la fibre spéciale du modèle de Néron de $T^{(d)}$ est libre de rang égal au rang déployé de T .

On note $\mathcal{T}$ le R-modèle de Néron de T , et $\mathcal{G}_m$ celui de $\mathbb{G}_m$. Notons que $\mathcal{G}_m$, ainsi que $\mathcal{T}$ en général, est localement de type fini, mais non de type fini. On notera $\underline{\underline{K}}^*$ le k-groupe $\underline{\underline{\mathbb{G}}}_m(K)$.

PROPOSITION 7.2.1. <u>L'accouplement</u>

$$H^o(K,M) \times T(K) \to \mathbb{Z}$$
$$(\chi\ ,\ x) \mapsto v(\chi(K)(x))$$

<u>définit un isomorphisme</u> :

$$v(T)\ :\ H^o(K,M) \to \mathrm{Hom}(\pi_o(\mathcal{T}_k),\mathbb{Z})\ .$$

<u>Preuve</u> : L'homomorphisme composé $v(T)$:

$$\begin{array}{l} H^o(K,M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_K(T,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T},\mathcal{G}_m) \to \mathrm{Hom}_k(\underline{\underline{T}}(K),\underline{\underline{K}}^*) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow v \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Hom}_k(\underline{\underline{T}}(K),\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_k(\pi_o(\underline{\underline{T}}(K),\mathbb{Z}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \mathrm{Hom}_k(\pi_o(\mathcal{T}_k),\mathbb{Z}) \end{array}$$

donne l'accouplement

$$H^o(K,M) \times T(K) \to \mathbb{Z}$$

décrit dans l'énoncé. L'homomorphisme $v(T)$ est fonctoriel en T . Le carré suivant, où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques, est donc commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^o(K,M^{(d)}) & \xrightarrow{v(T^{(d)})} & \mathrm{Hom}(\pi_o(\mathscr{C}_k^{(d)}),\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^o(K,M) & \xrightarrow[v(T)]{} & \mathrm{Hom}(\pi_o(\mathscr{C}_k),\mathbb{Z}) \end{array}$$

Pour montrer la proposition, il suffit donc de montrer que $v(T^{(d)})$ est un isomorphisme, et même, puisque $v(T)$ commute aux produits, que $v(\mathbb{G}_m)$ en est un. Or :

$$v(\mathbb{G}_m) : \mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}(\pi_o(\underline{\underline{K}}^*),\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

associe, à $n \in \mathbb{Z}$, l'homomorphisme : $v(\lambda) \to v(\lambda^n)$ $(\lambda \in K^*)$; c'est donc l'identité de $\mathbb{Z}$. D'où la proposition, puisque la projection canonique :

$$\pi_o(\underline{\underline{T}}(K)) \to \pi_o(\mathscr{C}_k)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 7.2.2. <u>Il y a un isomorphisme canonique</u>, <u>fonctoriel en</u> T , <u>de groupes abéliens finis</u> :

$$H^1(K,M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\pi_o(\mathscr{C}_k),\mathbb{Z}) .$$

<u>Preuve</u> : Lorsque T est déployé, il n'y a rien à démontrer, puisque les groupes $H^1(K,M)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\pi_o(\mathscr{C}_k),\mathbb{Z})$ sont alors tous deux nuls.

Dans le cas général, soit K'/K une extension finie galoisienne qui déploie T . Le K-groupe quotient du monomorphisme canonique

$$M \to \prod_{K'|K} M_{K'}$$

est sans torsion, et donc est le groupe des caractères M' d'un tore T'. On a donc deux suites exactes de K-groupes, duales de Cartier l'une de l'autre :

$$0 \to M \to \prod_{K'|K} M_{K'} \to M' \to 0$$

$$0 \to T' \to \prod_{K'|K} T_{K'} \to T \to 0 .$$

De la deuxième suite et de la proposition 2.2.1, on déduit la suite exacte de k-groupes parfaits, à composante neutre proalgébrique :

$$0 \to \underline{\underline{T}}'(K) \to \underline{\underline{T}}(K') \to \underline{\underline{T}}(K) \to 0 .$$

La proposition 7.2.1 nous donne alors un diagramme commutatif de groupes abéliens de type fini, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{o}(K,M) \arrow[r] \arrow[d] & H^{o}(K',M) \arrow[r] \arrow[d] & H^{o}(K,M') \arrow[r] \arrow[d] & H^{1}(K,M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_k(\underline{\underline{T}}(K),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_k(\underline{\underline{T}}(K'),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_k(\underline{\underline{T}}'(K),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{T}}(K),\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Les zéros de droite proviennent de la nullité de $H^1(K',M)$ et de $\mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{T}}(K'),\mathbb{Z})$, le K'-tore $T_{K'}$ étant déployé. Les flèches verticales de ce diagramme sont des isomorphismes. On en déduit un isomorphisme des derniers termes des deux lignes.

Or l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_k(\mathscr{C}_k,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{T}}(K),\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme, ainsi que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\pi_o(\mathscr{C}_k),\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_k(\mathscr{C}_k,\mathbb{Z}) .$$

Il est facile de voir que l'isomorphisme ci-dessus est canonique et fonctoriel en T . En effet, il associe, à un élément de $H^1(K,M)$ représenté par la K-suite exacte $\xi : 0 \to M \to M_2 \to \mathbb{Z} \to 0$, l'image directe par $v : \underline{\underline{K}}^* \to \mathbb{Z}$ de la k-suite exacte

$$0 \to \underline{\underline{K}}^* \to \underline{\underline{T}}_2(K) \to \underline{\underline{T}}(K) \to 0$$

obtenue en appliquant $\underline{\underline{G}}$ au complexe des modèles de Néron des termes de la duale de Cartier de ξ .

Désignons par $\underline{\underline{T}}(K)^o_n$ le noyau de la multiplication par n dans le k-groupe proalgébrique $\underline{\underline{T}}(K)^o$, composante neutre de $\underline{\underline{T}}(K)$; c'est le k-groupe constant noyau de la multiplication par n dans le groupe des R-points de la composante neutre $\mathcal{C}^{o}$ du modèle de Néron $\mathcal{C}$ de T .

PROPOSITION 7.2.3. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un k-groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^2(K,M)_n$ dont le groupe des k-points est le noyau $H^2(K,M)_n$ de la multiplication par n dans $H^2(K,M)$. Il y a un isomorphisme canonique de groupes abéliens finis :

$$\pi_o(\underline{\underline{H}}^2(K,M)_n) \to \mathrm{Hom}_k(\underline{\underline{T}}(K)_n^o, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

Preuve : La suite exacte

$$0 \to M \xrightarrow{n} M \to M/nM \to 0$$

définit un homomorphisme $H^1(K,M) \to H^1(K,M/nM)$. Puisque $H^1(K,M)$ est fini, c'est la même chose qu'un morphisme de k-groupes quasi-algébriques :

$$H^1(K,M) \to \underline{\underline{H}}^1(M/nM) ,$$

où $H^1(K,M)$ est un k-groupe constant. Le groupe des points du conoyau $\underline{\underline{H}}^2(K,M)_n$ de ce k-morphisme est $H^2(K,M)_n$.

Le diagramme suivant de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccc} H^1(K,M) & \longrightarrow & \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(M/nM)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}_k^1(\underline{\underline{T}}(K),\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Ext}_k^1(T_n(K),\mathbb{Z}) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont définies respectivement par les propositions 7.2.2 et 6.1.3, et où les flèches horizontales sont canoniques, est commutatif. Il définit donc un homomorphisme du conoyau $\pi_o(\underline{\underline{H}}^2(K,M)_n)$ de la première flèche horizontale dans le conoyau de la flèche du bas. Or, ce dernier conoyau est $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(C,\mathbb{Z})$, où C est le noyau de $T_n(K) \to \pi_o(\underline{\underline{T}}(K))$, c'est-à-dire $\underline{\underline{T}}(K)_n^o$. D'où la proposition, puisque les deux flèches verticales de ce diagramme sont des isomorphismes.

PROPOSITION 7.2.4. <u>Il y a un isomorphisme canonique de groupes abéliens, fonctoriel en</u> T :

$$\Psi(T) : H^2(K,M) \to \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{T}}(K)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

<u>Preuve</u> : Soit $[\xi]$ un élément de $H^1(K,M/nM)$, représenté par la K-suite exacte ξ :

$$0 \to M/nM \to F \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 ,$$

où $nF = 0$. Soit K'/K une extension finie galoisienne trivialisant ξ . On en déduit une suite exacte de k-groupes quasi-algébriques, scindée :

$$0 \to \underline{\underline{H}}^1(K',\mu_n) \to \underline{\underline{H}}^1(K',F') \to \underline{\underline{H}}^1(K',T_n) \to 0 .$$

Les flèches de cette suite sont des g-morphismes, g étant le groupe de Galois $G(K'/K)$. Par image réciproque par le k-morphisme canonique $\underline{\underline{T}}(K') \to \underline{\underline{H}}^1(K',T_n)$, on obtient une k-suite exacte η , où les flèches sont aussi des g-morphismes :

$$0 \to \underline{\underline{H}}^1(K',\mu_n) \to P \to \underline{\underline{T}}(K') \to 0 .$$

En appliquant le foncteur $\underline{\underline{H}}_o(g,.)$ à η , on obtient, compte tenu de la nullité de $H^{-2}(g,T(K'))$, la k-suite exacte $\underline{\underline{H}}_o(g,\eta)$:

$$0 \to \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \to \underline{\underline{H}}_o(g,P) \to \underline{\underline{T}}(K) \to 0 .$$

Soit alors

$$\Psi'_n([\xi]) : \pi_1(\underline{\underline{T}}(K)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

le bord de la suite exacte d'homotopie appliquée à $H_o(g,\eta)$. Ceci définit une application

$$\Psi'_n : H^1(K,M/nM) \to \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{T}}(K)), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

qui est fonctorielle en T , et qui commute aux produits finis ; c'est donc un homomorphisme de groupes.

Si $[\xi]$ provient de $H^1(K,M)$, il existe un diagramme commutatif exact de K-groupes :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "n"'] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M/nM \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

On en déduit un diagramme commutatif exact de k-groupes parfaits, les morphismes étant compatibles avec les opérations de g :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{\underline{K}}'^{*} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{T}}_1(K') \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{T}}(K') \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(K',\mu_n) \arrow[r] & P \arrow[r] & \underline{\underline{T}}(K') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

D'où, par application de $\underline{\underline{H}}_o(g,.)$, le diagramme commutatif exact de k-groupes parfaits, à composante neutre proalgébrique :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{\underline{K}}^{*} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{T}}^1(K) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{T}}(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \arrow[r] & \underline{\underline{H}}_o(g,P) \arrow[r] & \underline{\underline{T}}(K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

L'homomorphisme $\Psi_n'([\xi])$ est alors le composé :

$$\pi_1(\underline{\underline{T}}(K)) \to \mathbb{Z} = \pi_o(\underline{\underline{K}}^*) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) .$$

Il est nul puisque l'homomorphisme continu $\pi_1(\underline{\underline{T}}(K)) \to \mathbb{Z}$ est nul. On en déduit que Ψ_n' se factorise à travers $H^2(K,M)_n$.

D'où un homomorphisme, fonctoriel en T :

$$\Psi_n(T) : H^2(K,M)_n \to \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{T}}(K)),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) .$$

Par passage à la limite inductive sur les n , on trouve un homomorphisme $\Psi(T) : H^2(K,M) \to \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{T}}(K)),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

a) Considérons d'abord le cas où $T = \mathbb{G}_m$, c'est-à-dire $M = \mathbb{Z}$. Alors $H^2(K,\mathbb{Z})_n = H^1(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ pour tout $n \geqslant 1$, puisque $H^1(K,\mathbb{Z}) = 0$. Si $\Psi_n(\mathbb{G}_m)([\xi]) = 0$, on a, dans les notations ci-dessus, une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \pi_o(\underline{\underline{H}}_o(g,P)) \to \pi_o(\underline{\underline{K}}^*) = \mathbb{Z} \to 0 ,$$

qui est donc scindée. La projection $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K',\mu_n)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n))$ (déduite de la norme) étant l'identité de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il en résulte que la suite exacte

$$0 \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K',\mu_n)) \to \pi_o(P) \to \pi_o(\underline{\underline{K}}'^*) = \mathbb{Z} \to 0 ,$$

qui est scindée comme suite exacte de groupes abéliens, est scindée comme suite exacte de g-modules. Il en est alors de même de la suite exacte de g-modules

$$0 \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K',\mu_n)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K',F')) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K',\mu_n)) \to 0 .$$

Par application de $\underline{\underline{H}}_o(g,.)$, on en déduit que la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(F')) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) \to 0$$

est scindée, donc, par la proposition 6.1.2, que la suite :

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to F(K) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

est exacte. Donc $[\xi]$ est nul, et $\Psi_n(\mathbb{G}_m)$ est injectif pour tout $n \geqslant 1$.

D'autre part, la commutativité de :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \to & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) & \to & \underline{\underline{H}}_o(g,P) & \longrightarrow & \underline{\underline{K}}^* \longrightarrow 0 \\
 & & & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\
\mu_n(K) = H^{-2}(g,H^1(K',\mu_n)) & \to & & & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) & \to & \underline{\underline{H}}^1(F') & \to & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \to 0
\end{array}$$

montre que, lorsque $[\xi]$ est dans $H^1(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^o$, l'élément $\Psi_n(\mathbb{G}_m)([\xi])$ de $\mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{K}}^*),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est l'image canonique de l'élément $\Phi(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})([\xi])$ de $\mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. La restriction de

Ψ_n à $H^1(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^o$ se factorise donc par l'isomorphisme $\Phi(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. On en déduit que l'homomorphisme injectif $\Psi_n(\mathbb{G}_m)$ induit un homomorphisme injectif :

$$\Psi_{1,o} : \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to \mathrm{Hom}(C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \ ,$$

où C est le noyau, fini, de l'homomorphisme continu :

$$\pi_1(\underline{\underline{U}}_K)/\pi_1(\underline{\underline{U}}_K)^n = \pi_1(\underline{\underline{K}}^*)/\pi_1(\underline{\underline{K}}^*)^n \to \pi_1(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) = \pi_1(\underline{\underline{U}}_K/\underline{\underline{U}}_K^n) \ .$$

Soit $\bar{\underline{\underline{U}}}_K$ le revêtement universel du k-groupe proalgébrique $\underline{\underline{U}}_K$.

Du diagramme commutatif de k-groupes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi_1(\underline{\underline{U}}_K) & \to & \bar{\underline{\underline{U}}}_K & \to & \underline{\underline{U}}_K & \to & 0 \\ & & \downarrow n & & \downarrow n & & \downarrow n & & \\ 0 & \to & \pi_1(\underline{\underline{U}}_K) & \to & \bar{\underline{\underline{U}}}_K & \to & \underline{\underline{U}}_K & \to & 0 \end{array} ,$$

on déduit, compte tenu de l'exactitude du foncteur revêtement universel, la suite exacte de groupes profinis :

$$0 \to \mu_n(K) \to \pi_1(\underline{\underline{U}}_K)/\pi_1(\underline{\underline{U}}_K)^n \to \pi_1(\underline{\underline{U}}_K/\underline{\underline{U}}_K^n) \to 0 \ .$$

Le groupe C est donc égal à $\mu_n(K)$. Par la proposition 6.1.2, les groupes $\mu_n(K)$ et $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ ont même ordre. Il en résulte que $\Psi_{n,o}$ est un isomorphisme ; il en est de même de $\Psi_n(\mathbb{G}_m)$. Donc

$$\Psi(\mathbb{G}_m) : H^2(K,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{K}}^*),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

b) Passons maintenant au cas général.

Soit K_1'/K une extension finie galoisienne qui déploie le quotient de l'immersion canonique $T \to \prod_{K_1'|K} T_{K_1'}$. On a donc une suite exacte de K-tores :

$$0 \to T \to \prod_{K_1'|K} \mathbb{G}_m^{r_1} \to \prod_{K_2'|K} \mathbb{G}_m^{r_2} \ ,$$

dont la duale de Cartier est :

$$\prod_{K_2'|K} \mathbb{Z}^{r_2} \to \prod_{K_1'|K} \mathbb{Z}^{r_1} \to M \to 0 .$$

Vu l'exactitude à gauche du foncteur π_1 et la nullité de $H^3(K,N)$ lorsque N est le K-groupe des caractères d'un tore, on a le diagramme commutatif exact :

$$\begin{tikzcd}
H^2(K_2',\mathbb{Z}^{r_2}) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi(\prod_{K_2'|K} \mathbb{G}_m^{r_2})"'] & H^2(K_1',\mathbb{Z}^{r_1}) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi(\prod_{K_1'|K} \mathbb{G}_m^{r_1})"] & H^2(K,M) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi(T)"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{K}}_2'^{*})^{r_2},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{K}}_1'^{*})^{r_1},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{T}}(K)),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Par a), les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes. Il en est donc de même de $\Psi(T)$.

§8. DUALITÉ POUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Soit A une K-variété abélienne, et soit A' la K-variété abélienne duale. Le but de ce § est de montrer que, à isomorphisme près, les K-torseurs sous A sont classifiés par les classes des k-isogénies dont le noyau est cyclique et dont le but est la composante neutre de la réalisation de Greenberg parfaite du modèle de Néron de A'. Nous montrerons en outre que les groupes des composantes connexes des fibres spéciales des modèles de Néron de A et A' sont en dualité parfaite.

Pour établir ces résultats, nous utiliserons essentiellement les méthodes de rigidification du §2, et les résultats du §6.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par A_n (resp. A'_n) le noyau de la multiplication par n dans A (resp. dans A').

8.1. Les k-groupes $\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n$.

PROPOSITION 8.1.1. *Pour tout entier* $n \geq 1$, *la suite exacte de K-groupes*

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A \xrightarrow{n} A \longrightarrow 0$$

définit canoniquement une suite exacte de k-groupes proalgébriques :

$$0 \longrightarrow A_n(K) \longrightarrow \underline{\underline{A}}(K) \xrightarrow{n} \underline{\underline{A}}(K) \xrightarrow{\delta_n} \underline{\underline{H}}^1(A_n) .$$

Le conoyau $\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n$ *de* δ_n *est un groupe quasi-algébrique de dimension* $v(n^d)$, *où* d *est la dimension de* A ; *le groupe de ses k-points est* $H^1(K,A)_n$.

Preuve : Soit $0 \longrightarrow A_n \longrightarrow T \xrightarrow{f} T' \longrightarrow 0$ une K-résolution de A_n par des tores. On en déduit un diagramme commutatif exact de K-groupes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & 0 \\
 & T' \arrow[r, equal] \arrow[d] & T' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif exact de k-groupes parfaits à composante neutre proalgébrique :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \underline{\underline{A}}_n(K) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{A}}(K) \arrow[r, "n"] \arrow[d] & \underline{\underline{A}}(K) \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \underline{\underline{T}}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{D}}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{A}}(K) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\underline{T}}'(K) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \underline{\underline{T}}'(K) \arrow[r] & 0 & \\
 & \underline{\underline{H}}^1(A_n) \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent définit donc un k-morphisme

$$\delta_n : \underline{\underline{A}}(K) \to \underline{\underline{H}}^1(A_n)$$

qui, sur les points à valeurs dans k , donne le cobord habituel. La dimension du conoyau $\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n$ de δ_n est égale à :

$$\dim_k(\underline{\underline{H}}^1(A_n)) - \dim_k(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K)) .$$

Par une méthode analogue à celle qu'on a utilisée dans la preuve du théorème 4.2.2 , on voit que la dimension de $\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K)$ est égale à la longueur du R-module conoyau de $\omega_{\mathfrak{a}} \xrightarrow{n} \omega_{\mathfrak{a}}$, où $\omega_{\mathfrak{a}}$ est le R-module des différentielles invariantes de $\mathfrak{a}$. Cette dimension est donc égale à $v(n^d)$ si d est la dimension de A . On en déduit la proposition, compte tenu de la proposition 4.3.3.

8.2. Flèches de dualité.

PROPOSITION 8.2.1. Soit $\mathcal{G}_k$ (resp. $\mathcal{G}'_k$) la fibre spéciale du R-modèle de Néron $\mathcal{G}$ de A (resp. $\mathcal{G}'$ de A'). Il y a un homomorphisme canonique de groupes finis :

$$\varphi_o : \pi_o(\mathcal{G}'_k) \to \mathrm{Hom}(\pi_o(\mathcal{G}_k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

Preuve : Notons $i : \mathrm{Spec}\, k \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, R$, $j : \mathrm{Spec}\, K \to \mathrm{Spec}\, R$ les immersions canoniques. Pour tout R-schéma T , on écrit i_T et j_T au lieu de $i \times_{\mathrm{Spec}\, R} T$ et $j \times_{\mathrm{Spec}\, R} T$ respectivement.

Soit $\mathcal{S}$ le site des R-schémas lisses, muni de la topologie étale. Considérons le préfaisceau :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m) : \mathcal{S} \to \mathrm{Ab}^o$$

défini, pour tout R-schéma lisse T par : $\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)(T) = \mathrm{Ext}^1_T(\mathcal{G}_T, (\mathbb{G}_m)_T)$. La nullité de $R^1(j_T)_*((\mathbb{G}_m)_{T_K})$ pour tout objet T de $\mathcal{S}$ ([9], exp. IX) et le fait que $(\mathbb{G}_m)_T$ [resp. $\mathcal{G}_T$] représente, dans la catégorie des T-schémas lisses, le foncteur $(j_T)_*(\mathbb{G}_m)_{T_K}$ [resp. $(j_T)_*(A_{T_K})$] permettent d'affirmer que l'homomorphisme canonique :

$$\mathrm{Ext}^1_T(\mathcal{G}_T, (\mathbb{G}_m)_T) \to \mathrm{Ext}^1_{T_K}(A_{T_K}, (\mathbb{G}_m)_{T_K})$$

est un isomorphisme pour tout objet T de $\mathcal{S}$. Il en résulte que le foncteur $\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)$ est représentable par le modèle de Néron $\mathcal{G}'$ de A' .

D'autre part, considérons le préfaisceau

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G}, i_*(\mathbb{Z})) : \mathcal{S} \to \mathrm{Ab}^o$$
$$T \mapsto \mathrm{Ext}^1_T(\mathcal{G}_T, i_*(\mathbb{Z})_T) = \mathrm{Ext}^1_T(\mathcal{G}_T, (i_T)_*(\mathbb{Z})) .$$

Pour tout objet T de $\mathcal{S}$, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_T(\mathcal{G}_T,(i_T)_*(\mathbb{Z})) \to \mathrm{Ext}^1_{T_k}(\mathcal{G}_{T_k},\mathbb{Z}_{T_k}) = (\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(\mathcal{G}_k,\mathbb{Z}))(T_k)$$

est un isomorphisme, compte tenu de la nullité de $R^1(i_T)_*(\mathbb{Z})$ ([9], exp. IX). D'où l'égalité :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G},i_*(\mathbb{Z})) = i_*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(\mathcal{G},\mathbb{Z})) .$$

Or, $\mathcal{G}_k$ étant de type fini, on a : $\underline{\mathrm{Hom}}_k(\mathcal{G}_k,\mathbb{Q}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(\mathcal{G}_k,\mathbb{Q}) = 0$. D'où l'égalité

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(\mathcal{G}_k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(\mathcal{G},\mathbb{Z}) ,$$

et donc aussi : $\underline{\mathrm{Hom}}_k(\pi_0(\mathcal{G}_k),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(\mathcal{G},\mathbb{Z})$.

En particulier, $\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G},i_*(\mathbb{Z}))$ est représentable par le R-groupe, concentré en k , $i_*(\underline{\mathrm{Hom}}_k(\mathcal{G}_k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$.

Appliquons maintenant le foncteur $\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G},.)$ à la suite exacte de faisceaux (représentables) sur $\mathcal{S}$:

$$0 \to \mathbb{G}_m \to \mathcal{G}_m \to i_*(\mathbb{Z}) \to 0 .$$

On trouve donc un morphisme de R-schémas en groupes :

$$\varphi : \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G},\mathcal{G}_m) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G},i_*(\mathbb{Z}))$$

dont le noyau B contient la composante neutre $\mathcal{G}'^0$ de $\mathcal{G}'$. On montrera (8.3.3) que, $B=\mathcal{G}'^0$. Le R-groupe B représente le préfaisceau $\mathcal{S} \to Ab^0$ qui, à tout objet T de $\mathcal{S}$, associe le groupe $\mathrm{Ext}^1_T(\mathcal{G}_T,\mathbb{G}_{m,T})$.

On déduit de φ un homomorphisme de groupes abéliens $\pi_0(\varphi_k)=\varphi_0$, autrement dit un homomorphisme :

$$\varphi_0 : \pi_0(\mathcal{G}'_k) \to \mathrm{Hom}(\pi_0(\mathcal{G}_k),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

Cet homomorphisme φ_0 n'est autre que celui considéré dans ([11], exp. IX, 1.2.1), comme on peut le vérifier.

LEMME 8.2.2. Soit X un K-groupe fini. Toute K-suite exacte

$$0 \to A \to E \to X \to 0$$

définit canoniquement une suite exacte de k-*groupes proalgébriques* :

$$0 \to \underline{\underline{H}}^1(X') = \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(X,G_m) \to \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,G_m) \to \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(A,G_m) = \underline{\underline{A}}'(K) \to 0$$

donnant, sur les k-*points, la suite exacte de groupes abéliens* :

$$0 \to H^1(K,X') \to \mathrm{Ext}^1_K(E,G_m) \to A'(K) \to 0 \ .$$

L'application

$$\mathrm{Ext}^1_K(X,A) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K),\underline{\underline{H}}^1(X'))$$

ainsi définie est un homomorphisme de groupes, fonctoriel en X *et* A.

Preuve : Les propositions 2.2.1, 2.3.1 et 2.3.2 montrent que, si X est annulé par n, on a un diagramme commutatif de K-groupes, où les lignes sont des complexes :

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc} \underline{\mathrm{Mor}}_K(X,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Mor}}_K(E_n,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Mor}}_K(A_n,\mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Z}^2_K(X,\mathbb{G}_m)_{sym} & \to & \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(E,\mathbb{G}_m)_{E_n} & \to & \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,\mathbb{G}_m)_{A_n} \end{array} .$$

Chacun des K-groupes écrits est une extension d'une variété abélienne par un tore, et donc admet un R-modèle de Néron. En prenant la réalisation de Greenberg parfaite de ces modèles de Néron, on trouve un diagramme commutatif de k-groupes à composante neutre proalgébrique. Par passage aux conoyaux des flèches verticales ainsi obtenues, on trouve un complexe de k-groupes parfaits à composante neutre proalgébrique :

$$0 \to \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(X,\mathbb{G}_m) = \underline{\underline{H}}^1(X') \to \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,\mathbb{G}_m) \to \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(A,\mathbb{G}_m) = \underline{\underline{A}}'(K) \to 0 \ .$$

Ce complexe induit, sur les k-points, la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_K(X,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1_K(E,G_m) \to \mathrm{Ext}^1_K(A,G_m) \to 0$$

obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_K(\cdot,\mathbb{G}_m)$ à la suite exacte dont on est parti ; en effet, on a : $\mathrm{Hom}_K(A,G_m) = 0$, et aussi $\mathrm{Ext}^2_K(X,G_m) = H^2(K,X') = 0$. Le complexe ci-dessus est donc lui-même une suite exacte et, en fait, une suite exacte de k-groupes proalgébriques, puisque le groupe des composantes connexes de chacun des termes est fini. De plus, cette suite exacte dépend fonctoriellement de X et de A , puisqu'il en est déjà ainsi du diagramme (*). D'où une application, fonctorielle en X et A :

$$\mathrm{Ext}^1_K(X,A) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K),\underline{\underline{H}}^1(X'))\ .$$

La commutation aux produits résulte de la propriété analogue pour le diagramme (*). Alors cette application est un homomorphisme de groupes, fonctoriel en X et A .

PROPOSITION 8.2.3. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$, <u>l'homomorphisme composé</u> :

$$H^1(K,A_n) = \mathrm{Ext}^1_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},A) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K),\underline{\underline{H}}^1(\mu_n)) \xrightarrow{v_*\circ\mathrm{can}} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

<u>définit un homomorphisme</u>

$$\Psi_n : H^1(K,A)_n \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\ .$$

<u>On en déduit un homomorphisme</u>

$$\Psi : H^1(K,A) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\ .$$

<u>Preuve</u> : L'homomorphisme composé considéré associe, à la classe de la suite α exacte $0 \to A \to E \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$, la suite exacte de k-groupes proalgébriques qui est l'image réciproque, par l'immersion canonique $\underline{\underline{A}}'(K)^o \to \underline{\underline{A}}'(K)$, de la deuxième ligne du diagramme commutatif exact :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\underline{v}}"'] & \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{A}}'(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & \underline{\underline{v}}_*(\underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,G_m)) \arrow[r] & \underline{\underline{A}}'(K) \arrow[r] & 0 ,
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est définie par le lemme 8.2.2.

On va montrer que cet homomorphisme s'annule sur le noyau $A(K)/nA(K)$ de $H^1(K,A_n) \to H^1(K,A)_n$, c'est-à-dire sur $\mathcal{A}(R)/n\mathcal{A}(R) = \mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathcal{A})$. Supposons que α provienne, par changement de base, d'une R-suite exacte

$$0 \to \mathcal{A} \to E \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 .$$

Notons Y l'un des trois R-groupes $\mathcal{A}$, E ou $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_R$.

1) Le préfaisceau

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(Y,i_*(\mathbb{Z})) \ : \ \mathcal{S} &\to \mathrm{Ab}^o \\ T &\mapsto \mathrm{Ext}^1_T(Y_T,i_*(\mathbb{Z})_T) \end{aligned}$$

est représentable par $i_* \ \underline{\mathrm{Hom}}_k(\pi_o(Y_k),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

En effet, pour tout objet T de $\mathcal{S}$, l'homomorphisme canonique :

$$\mathrm{Ext}^1_T(Y_T,i_*(\mathbb{Z})_T) \to \mathrm{Ext}^1_{T_k}(Y_{T_k},\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme, fonctoriel en T , ce qui signifie que :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(Y,i_*(\mathbb{Z})) \simeq i_*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(Y_k,\mathbb{Z})) \ .$$

Puisque $\underline{\mathrm{Hom}}_k(Y_k,\mathbb{Q}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(Y_k,\mathbb{Q}) = 0$, on en déduit la propriété annoncée.

2) Soit $Y_{K,n}$ le noyau de la multiplication par n dans Y_K . Il y a un morphisme canonique de R-groupes :

$$\rho_Y \ : \ j_*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(Y_K,\mathbb{G}_m)_{Y_{K,n}}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(Y,i_*(\mathbb{Z}))$$

de telle sorte que

$$j_*(\underline{\mathrm{Mor}}_K(Y_{K,n},\mathbb{G}_m)) \xrightarrow{j_*(d)} j_*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_K(Y_K,\mathbb{G}_m)_{Y_{K,n}}) \xrightarrow{\rho_Y} \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(Y,i_*(\mathbb{Z}))$$

donne un complexe sur les R-points.

En effet, pour tout objet T de $\mathcal{S}$, soit

$$\rho'_Y(T) \ : \ \mathrm{Ext}^1_{T_K}(Y_{T_K},\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1_T(Y,i_*(\mathbb{Z}))$$

l'homomorphisme composé :

$\mathrm{Ext}^1_{T_K}(Y_{T_K},\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1_T((j_T)_*(Y_{T_K}),(j_T)_*(\mathbb{G}_m)) = \mathrm{Ext}^1_T((j_T)_*(Y_{T_K}),(\mathbb{G}_m)_T) \to$
$\mathrm{Ext}^1_T(Y_T,i_*(\mathbb{Z})_T)$,

où les deux flèches sont canoniques. Par composition de $\rho'_Y(T)$ avec

$$q(T_K) : \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(Y_K,\mathbb{G}_m)_{Y_{K,n}}(T_K) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(Y_K,\mathbb{G}_m)(T_K) ,$$

on obtient un homomorphisme $\rho_Y(T)$, fonctoriel en T . L'homomorphisme $\rho_Y(R)$ se factorise par le conoyau de $d(K) = j_*(d)(R)$, et donc $(\rho_Y \circ j_*(d))(R) = 0$.

3) Il y a un diagramme commutatif exact de k-groupes proalgébriques :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \underline{\underline{A}}'(K) & \to & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \underline{\underline{V}}(\mu_n)} & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \underline{\underline{G}}(\varphi)} & & \\
0 & \to & \underline{\mathrm{Hom}}_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & \underline{\mathrm{Hom}}_k(\pi_0(E_k),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Hom}_k(\pi_0(\mathcal{G}_k),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & 0 .
\end{array}$$

En effet, la suite exacte $0 \to \mathcal{G}_k \to E_k \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ donne une suite exacte de groupes finis étales sur k :

$$0 \to \pi_0(\mathcal{G}_k) \to \pi_0(E_k) \to \pi_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 .$$

D'autre part, transformons par $\underline{\underline{G}}$ le diagramme commutatif suivant de R-groupes, où les lignes sont des complexes :

$$\begin{array}{ccccc}
j_*\ \underline{\mathrm{Mor}}_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & j_*\ \underline{\mathrm{Mor}}_K(E_{K,n},\mathbb{G}_m) & \to & j_*\ \underline{\mathrm{Mor}}_K(A_n,\mathbb{G}_m) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
j_*\ \underline{Z}^2_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)_{sym} & \to & j_*\ \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(E_K,\mathbb{G}_m)_{E_n} & \to & j_*\ \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A,G_m)_{A_n} \\
\big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_E} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{G}}} \\
\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},i_*(\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(E,i_*(\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(\mathcal{G},i_*(\mathbb{Z}))
\end{array} .$$

On obtient un diagramme commutatif analogue de k-groupes proalgébriques, où les lignes et aussi les colonnes sont des complexes. Par passage aux conoyaux des flèches verticales du haut, on déduit la propriété annoncée, vu que $\rho_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(R)$ et $\rho_{\mathfrak{G}}(R)$ donnent respectivement $\underline{\underline{v}}(\mu_n)$ et $\underline{\underline{G}}(\varphi)$.

4) Achevons maintenant la preuve de la proposition. Par 3), il y a un diagramme commutatif exact de k-groupes proalgébriques (en effet $\underline{\underline{v}}(\mu_n)$ est surjectif) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_n) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \underline{\underline{G}}(B) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E,G_m) & \to & \underline{\underline{A}}'(K) & \to & 0 \end{array}$$

(la première ligne est la ligne exacte des noyaux des flèches verticales du diagramme écrit dans 3), le R-groupe B étant défini p. 99). Puisque le sous-R-groupe B de $\mathfrak{G}'$ contient $\mathfrak{G}'^{\circ}$, l'inclusion

$$\pi_1(\underline{\underline{G}}(B)) \to \pi_1(\underline{\underline{A}}'(K))$$

est l'identité. Comme $\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_n)$ est connexe, l'homomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie

$$\pi_1(\underline{\underline{G}}(B)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(R,\mu_n))$$

est nul. On en déduit que l'homomorphisme

$$\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)) \to \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(\mu_n))$$

déduit du lemme 8.2.2 est nul. D'où la proposition.

8.3. <u>Dualité pour les variétés abéliennes</u>.

Soit $\underline{\underline{A}}'(K)^{\circ}/n\underline{\underline{A}}'(K)^{\circ}$ le conoyau de la multiplication par n dans $\underline{\underline{A}}'(K)^{\circ}$, et soit $\underline{\underline{A}}'(K)^{\circ}_n$ son noyau $(\underline{\underline{A}}'(K)^{\circ}_n = \underline{\underline{A}}'_n(K) \cap \underline{\underline{A}}'(K)^{\circ})$. Le k-groupe $\underline{\underline{A}}'(K)^{\circ}/n\underline{\underline{A}}'(K)^{\circ}$ est quasi-algébrique unipotent connexe.

PROPOSITION 8.3.1. <u>Pour tout entier</u> $n > 1$, <u>l'homomorphisme</u> Ψ_n (8.2.3) <u>induit un homomorphisme</u>

$$\Psi_n^o : H^1(K,A)_n^o \to \mathrm{Ext}_k^1(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) .$$

<u>Cet homomorphisme est induit par une isogénie de</u> k-<u>groupes quasi-algébriques</u> (en fait, un isomorphisme : prop. 8.3.3, cor. 2) :

$$\underline{\underline{\Psi}}_n^o : \underline{\underline{H}}^1(K,A)_n^o \to [\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o]^* .$$

<u>Preuve</u> : Soit $[\xi]$ un élément de $H^1(K,A_n)$, représenté indifféremment par l'une ou l'autre des deux K-suites exactes, lignes du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & E_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

On en déduit un diagramme commutatif de K-groupes, où les lignes sont des complexes :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Mor}}_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Mor}}_K(E_n,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Mor}}_K(A_n,\mathbb{G}_m) \arrow[d] \\ \underline{Z}_K^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)_{sym} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Ext}}_K^1(E,\mathbb{G}_m)_{E_n} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Ext}}_K^1(A,\mathbb{G}_m)_{A_n} \arrow[d] \\ \underline{Z}_K^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)_{sym} \arrow[r] & \underline{Z}_K^2(E_n,\mathbb{G}_m)_{sym} \arrow[r] & \underline{Z}_K^2(A_n,\mathbb{G}_m)_{sym} . \end{tikzcd}$$

Les composés verticaux sont, par 2.2.1, les conoyaux des K-morphismes $X' \to \underline{\mathrm{Mor}}_K(X,\mathbb{G}_m)$ (avec $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, E_n ou A_n respectivement). En prenant les k-groupes proalgébriques des K-points pour le diagramme ci-dessus, puis en prenant les conoyaux des k-morphismes verticaux ainsi obtenus, on trouve un diagramme commutatif exact de k-groupes proalgébriques :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}_K^1(E,G_m) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{A}}'(K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(E_n') \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(A_n') \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

La deuxième ligne est celle que l'on obtient en appliquant $\underline{\underline{H}}^1$ à la K-suite exacte $0 \to \mu_n \to E'_n \to A'_n \to 0$. La troisième flèche verticale est le k-morphisme bord

$$\delta'_n : \underline{\underline{A}}'(K) \to \underline{\underline{H}}^1(A'_n)$$

de la proposition 8.1.1, où A est remplacé par A'.

Lorsque $[\xi]$ est dans $H^1(K,A_n)^o$, son image canonique dans $H^1(K,A)_n$ est donc transformée par Ψ_n en :

$$[\delta'^*_n \circ \Phi(A_n)]([\xi]) ,$$

où $\delta'^*_n : \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est donné par $\delta'_n : \underline{\underline{A}}'(K)^o \to \underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o$. Or δ'_n se factorise à travers $\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o$ de la manière suivante :

$$\underline{\underline{A}}'(K)^o \xrightarrow{pr_n} \underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o \xrightarrow{\Delta'_n} \underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o .$$

Le composé

$$H^1(K,A_n)^o \xrightarrow{\Phi(A_n)} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta'^*_n} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Ext}^1_k(n\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

est donc nul. Puisque $n\underline{\underline{A}}'(K)^o$ est connexe, la suite

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{pr^*_n} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_k(n\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

est exacte. La restriction de Ψ_n à $H^1(K,A)^o_n$ se factorise donc par :

$$\Psi^o_n : H^1(K,A)^o_n \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) ,$$

de telle sorte que commute le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
H^1(K,A_n)^o & \longrightarrow & H^1(K,A)^o_n \\
\Phi(A_n) \downarrow & & \downarrow \Psi^o_n \\
\mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\Delta'^*_n]{} & \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .
\end{array}$$

Or, le noyau de Δ'_n est fini ; l'homomorphisme Δ'^*_n est donc surjectif. Il en est donc de même de Ψ^o_n. D'autre part, Δ'^*_n et $\Phi(A_n)$ sont quasi-algébriques, ainsi que la projection $H^1(K,A_n)^o \to H^1(K,A)^o_n$: le morphisme Ψ^o_n est donc aussi quasi-algébrique. De plus, les groupes quasi-algébriques unipotents connexes $\underline{\underline{H}}^1(K,A)^o_n$ et $\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o$ ont même dimension, par la proposition 8.1.1. Le noyau du morphisme quasi-algébrique

$$\underline{\underline{\Psi}}^o_n : \underline{\underline{H}}^1(K,A)^o_n \to [\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o]^*$$

est donc fini. D'où la proposition.

COROLLAIRE. <u>Pour tout entier</u> $n > 1$, <u>soit</u> $\bar{\delta}_n$ (resp. $\bar{\delta}'_n$) <u>l'immersion canonique de</u> $(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K))^o$ <u>dans</u> $\underline{\underline{H}}^1(A_n)^o$ (resp. de $(\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))^o$ dans $\underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o$) . <u>On a une suite exacte de</u> k-<u>groupes quasi-algébriques unipotents connexes</u> :

$$0 \to (\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K))^o \xrightarrow{\bar{\delta}_n} \underline{\underline{H}}^1(A_n)^o \xrightarrow{\bar{\delta}'^*_n \circ \Phi(A_n)} [(\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))^o]^* \to 0 .$$

<u>Preuve</u> : Le k-morphisme composé

$$\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o \xrightarrow{\text{can}} (\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))^o \xrightarrow{\bar{\delta}'_n} \underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o$$

est égal à Δ'_n . Il en résulte que le composé

$$\underline{\underline{H}}^1(A_n)^o \xrightarrow{\bar{\delta}'^*_n \circ \Phi(A_n)} [(\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))^o]^* \xrightarrow{\text{can}^*} [\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o]^*$$

s'identifie à $\Delta'^*_n \circ \Phi(A_n)$, ou encore au composé

$$\underline{\underline{H}}^1(A_n)^o \xrightarrow{\text{can}} \underline{\underline{H}}^1(K,A)^o_n \xrightarrow{\underline{\underline{\Psi}}^o_n} [\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o]^* .$$

Or, ce dernier, composé lui-même avec $\bar{\delta}_n$, donne zéro, puisque $\text{can} \circ \bar{\delta}_n = 0$. On en déduit que l'on a :

$$\text{can}^* \circ \bar{\delta}'^*_n \circ \Phi(A_n) \circ \bar{\delta}_n = 0 .$$

Or le noyau de can^* est fini, et $(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K))^o$ est connexe : le morphisme quasi-algébrique $\bar{\delta}'^*_n \circ \Phi(A_n) \circ \bar{\delta}_n$ est donc nul. Le k-morphisme $\bar{\delta}_n$ se factorise donc par une immersion fermée de $(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K))^o$ dans le noyau de $\bar{\delta}'^*_n \circ \Phi(A_n)$. Puisque $\Phi(A_n)$ est un isomorphisme, ce noyau est isomorphe au noyau de $\bar{\delta}'^*_n$, c'est-à-dire au dual de Serre du conoyau de $\bar{\delta}'_n$; comme tel, il est connexe. Puisque sa dimension est égale à celle de $\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K)$, l'immersion fermée ci-dessus est un isomorphisme. D'où le corollaire.

Pour étudier l'homomorphisme (défini en (8.2.1))

$$\varphi_o : \pi_o(\mathbb{G}'_k) \to \mathrm{Hom}(\pi_o(\mathbb{G}_k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) ,$$

nous utiliserons le corollaire ci-dessus et le lemme suivant :

LEMME 8.3.2. <u>Pour tout entier</u> $n > 1$, <u>notons encore</u> δ'_n <u>la restriction du</u> k-<u>morphisme</u> $\delta'_n : \underline{\underline{A}}'(K) \to \underline{\underline{H}}^1(A'_n)$ <u>à</u> $\underline{\underline{G}}(B)$. <u>Le composé</u>

$$\underline{\underline{G}}(B) \xrightarrow{\delta'_n} (\underline{\underline{H}}^1(A'_n))^o \xrightarrow{\Phi(A'_n)} [\underline{\underline{H}}^1(A_n)^o]^* \xrightarrow{\bar{\delta}^*_n} [(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K)^o]^*$$

<u>est nul</u> (B a été défini p. 99).

<u>Preuve</u> : Soit $[\xi]$ un élément de $B(R) = \underline{\underline{G}}(B)(k) = \mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{G}, \mathbb{G}_m)$ représenté par la R-suite exacte ξ :

$$0 \to \mathbb{G}_m \to D \to \mathbb{G} \to 0 .$$

Les noyaux de la multiplication par n dans les termes de ξ_K forment une K-suite exacte ξ_1

$$0 \to \mu_n \to D_{K,n} \to A_n \to 0 ,$$

qui représente $\delta'_n([\xi])$. On en déduit un diagramme commutatif de k-groupes, exact :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \underline{\underline{K}}^* \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{D}}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{A}}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n"] & 0 \\
A_n(K) \arrow[rr, "\partial(\xi_1)"] & & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(D_{K,n}) \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(A_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

et aussi un diagramme commutatif exact de k-groupes :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{A}}(K)_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underline{\underline{H}}^1(R,\mu_n) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{G}}(D)/n\underline{\underline{G}}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
A_n(K) \arrow[r, "\partial(\xi_1)"] & \underline{\underline{H}}^1(\mu_n) \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(D_{K,n}) \arrow[r] & \underline{\underline{H}}^1(A_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Sur ce dernier diagramme, on lit les propriétés suivantes :

1) $\pi_o(\partial(\xi_1)) = 0$, ce qui équivaut à : $[\xi_1] \in H^1(K,A_n)^o$.

2) $\bar{\delta}_n^* \circ \Phi(A_n')([\xi_1]) = 0$.

D'où le lemme.

THÉORÈME 8.3.3. L'homomorphisme

$$\varphi_o : \pi_o(\mathcal{G}_k') \to \mathrm{Hom}(\pi_o(\mathcal{G}_k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme (conjecturé dans [11], IX 1.2.1).

Preuve : a) Montrons que $\underline{\underline{G}}(B)$ est connexe.

Par le lemme 8.3.2, le composé

$$\underline{\underline{G}}(B) \xrightarrow{\delta_n'} \underline{\underline{H}}^1(A_n')^o \xrightarrow{\bar{\delta}_n^* \circ \Phi(A_n')} [(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K))^o]^*$$

est nul. Par le corollaire de la proposition 8.3.1, où l'on échange A et A', il existe un unique k-morphisme

$$\underline{\underline{G}}(B) \to (\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))^o$$

dont le composé avec $\bar{\delta}_n'$ soit δ_n' . Ce k-morphisme est donc induit par la projection canonique de $\underline{\underline{A}}'(K)$ sur $\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K)$, et, par suite, le composé

$$\underline{\underline{G}}(B) \hookrightarrow \underline{\underline{A}}'(K) \to \underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K) \to \pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))$$

est nul, pour tout $n \geq 1$, et, en particulier pour les n qui annulent $\pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)) = \pi_o(\mathcal{A}'_k)$. Pour ces entiers n, la projection canonique

$$\pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)) \to \pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))$$

est un isomorphisme. La nullité du composé

$$\underline{\underline{G}}(B) \hookrightarrow \underline{\underline{A}}'(K) \to \pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)) \to \pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))$$

implique la nullité du composé

$$\underline{\underline{G}}(B) \hookrightarrow \underline{\underline{A}}'(K) \to \pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)) ,$$

autrement dit l'inclusion de $\underline{\underline{G}}(B)$ dans $\underline{\underline{A}}'(K)^o$. Puisque, d'autre part, l'inclusion opposée a lieu, on a bien l'égalité :

$$\underline{\underline{G}}(B) = \underline{\underline{A}}'(K)^o .$$

b) Montrons que φ_o est un isomorphisme.

D'après la définition de B (preuve de la proposition 8.2.1) et l'égalité $\underline{\underline{G}}(B) = \underline{\underline{A}}'(K)^o$, on voit que φ_o est injectif. En particulier, l'ordre du groupe fini $\pi_o(\mathcal{A}'_k)$ divise l'ordre de $\mathrm{Hom}(\pi_o(\mathcal{A}_k),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, c'est-à-dire celui de $\pi_o(\mathcal{A}_k)$. En échangeant les rôles de A et A', on obtient l'égalité des ordres de $\pi_o(\mathcal{A}_k)$ et de $\pi_o(\mathcal{A}'_k)$. Ainsi φ_o est un homomorphisme injectif, dont la source et le but sont des groupes finis de même ordre : c'est donc un isomorphisme.

COROLLAIRE 1. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$, <u>l'isomorphisme</u>

$$\pi_o(\underline{\underline{v}}(A_n)) : \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(A_n)) \to \mathrm{Hom}(A'_n(K),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

<u>de la proposition</u> 6.1.2 <u>induit un isomorphisme</u>

$$\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n) \to \mathrm{Hom}(\underline{\underline{A}}'(K)^o_n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer la commutativité, au signe près, du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_o(\underline{\underline{A}}'(K)) & \xrightarrow{\pi_o(\delta'_n)} & \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(A'_n)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_o} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\pi_o(\underline{\underline{v}}(A'_n))} \\
\mathrm{Hom}(\pi_o(\underline{\underline{A}}(K)),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\text{can}]{} & \mathrm{Hom}(A_n(K),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{array} \quad .$$

Or ceci résulte du lemme 6.1.3 et de la définition de φ_o qui, à l'image dans $\pi_o(\underline{\underline{A}}'(K))$ de l'élément $[\xi]$ de $A'(K)$, associe la classe d'isomorphisme de la suite exacte, deuxième ligne du diagramme commutatif de k-groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \underline{\underline{K}}^* & \longrightarrow & \underline{\underline{D}}(K) & \longrightarrow & \underline{\underline{A}}(K) & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\underline{\underline{v}}} & & \Big\downarrow & & \Big\| & & \\
0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \underline{\underline{v}}_*(\underline{\underline{D}}(K)) & \to & \underline{\underline{A}}(K) & \to & 0
\end{array} \quad .$$

COROLLAIRE 2. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$, <u>le morphisme quasi-algébrique</u> $\underline{\underline{\Psi}}_n^o$ (8.3.1) <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : Par la proposition 8.3.1, nous savons déjà que c'est une isogénie. Etudions son noyau à partir du diagramme commutatif exact de k-groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(A_n)^o & \longrightarrow & \underline{\underline{H}}^1(K,A)_n^o & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi(A_n)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\underline{\underline{\Psi}}_n^o} & & \\
0 & \to & \Gamma & \to & [\underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o]^* & \xrightarrow[\Delta'^*_n]{} & [\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o]^* & \to & 0
\end{array} \quad .$$

Ce noyau s'identifie ainsi au conoyau de l'homomorphisme

$$\pi_o(\Phi) : \pi_o(C) \to \pi_o(\Gamma) \ ,$$

qui est injectif. Or, on a une suite exacte :

$$0 \to \pi_o(C) \to \pi_o(\underline{\underline{A}}(K)/n\underline{\underline{A}}(K)) \xrightarrow{\pi_o(\bar{\delta}_n)} \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(A_n))$$

et, d'autre part, le groupe $\mathrm{Hom}(\pi_o(\Gamma),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le noyau de $\Delta'_n : (\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o) \to \underline{\underline{H}}^1(A'_n)^o$, autrement dit, le noyau du k-morphisme

$$\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o \to (\underline{\underline{A}}'(K)/n\underline{\underline{A}}'(K))^o$$

ou encore le conoyau de l'homomorphisme canonique

$$A'_n(K) \to \pi_o(\underline{\underline{A}}'(K))_n \ .$$

Il résulte alors de 6.1.2 et 8.3.3 que les groupes $\pi_o(C)$ et $\pi_o(\Gamma)$ ont même ordre, donc que $\pi_o(\Phi)$ est un isomorphisme. Le morphisme $\underline{\underline{\Psi}}^o_n$ est alors aussi un isomorphisme.

Par la proposition 8.3.1, nous savons que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^1(K,A)^o_n & \xrightarrow[\sim]{\Psi^o_n} & \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(K,A)_n & \xrightarrow{\Psi_n} & \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{array} \ .$$

Soit Q le conoyau de la deuxième flèche verticale. Pour montrer que Ψ_n est un isomorphisme, il suffit alors de montrer que l'homomorphisme

$$(\Psi_n)_o : \pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n) \to Q$$

défini par le diagramme ci-dessus est un isomorphisme. Il nous faut donc évaluer Q , ce qui va faire l'objet du

LEMME 8.3.4. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$, <u>on a une suite exacte de groupes abéliens</u> :

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(\underline{\underline{A}}'(K)^o_n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0.$$

<u>Preuve</u> : Soit $\overline{\underline{\underline{A}}'(K)}$ le revêtement universel du groupe proalgébrique $\underline{\underline{A}}'(K)$. On a donc un diagramme commutatif exact de k-groupes proalgébriques :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)) & \to & \overline{\underline{\underline{A}}'(K)} & \to & \underline{\underline{A}}'(K)^o & \to & 0 \\
 & & \downarrow n & & \downarrow n & & \downarrow n & & \\
0 & \to & \pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)) & \to & \overline{\underline{\underline{A}}'(K)} & \to & \underline{\underline{A}}'(K)^o & \to & 0
\end{array} .$$

Par le lemme du serpent et l'exactitude du foncteur revêtement universel, on en déduit une suite exacte de groupes profinis :

$$0 \to \underline{\underline{A}}'(K)^o_n \to \pi_1(\underline{\underline{A}}'(K))/n\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)) \to \pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)^o/n\underline{\underline{A}}'(K)^o) \to 0 .$$

On obtient le lemme en appliquant $\mathrm{Hom}_{cont}(.,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ à cette suite exacte.

Nous allons montrer que $(\Psi_n)_o$ n'est autre, au signe près, que l'isomorphisme du corollaire 1 de la proposition 8.3.3.

Faisons d'abord une remarque. Considérons une suite exacte η de k-groupes proalgébriques :

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \Gamma \to \underline{\underline{A}}'(K)^o \to 0 .$$

Soit $u : \underline{\underline{A}}'(K)^o \to \Gamma$ l'unique k-morphisme tel que $\underline{\underline{A}}'(K)^o \xrightarrow{u} \Gamma \longrightarrow \underline{\underline{A}}'(K)^o$ soit la multiplication par n. Alors $\gamma([\eta]) \in \mathrm{Hom}(\underline{\underline{A}}'(K)^o_n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est l'unique homomorphisme de $\underline{\underline{A}}'(K)^o_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel qu'il existe un diagramme commutatif exact de groupes proalgébriques :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \underline{\underline{A}}'(K)^o_n & \to & \underline{\underline{A}}'(K)^o & \to & n\underline{\underline{A}}'(K)^o & \to & 0 \\
 & & \downarrow \gamma([\eta]) & & \downarrow u & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \underline{\underline{A}}'(K)^o & \to & 0
\end{array} .$$

LEMME 8.3.5. *Soit* $n > 1$ *un entier, et soit* $[\xi]$ *un élément de* $H^1(K,A_n)$, *représenté indifféremment par l'une ou l'autre des deux lignes du diagramme commutatif exact de* K-*groupes* :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_n & \to & E_n & \to & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_K & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & A & \to & E & \xrightarrow{\rho} & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_K & \to & 0 \end{array} .$$

Notons $h : E \to A$ *le* K-*morphisme défini par* $x \mapsto nx$, *et soit*

$$\partial([\xi]) \ : \ A'_n(K) \to \mathrm{Ext}^1_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},G_m)$$

le bord de la suite exacte obtenue en appliquant $\mathrm{Hom}_K(\cdot,\mathbb{G}_m)$ *à la première ligne du diagramme ci-dessus. Les homomorphismes composés* :

$$A'_n(K) \xrightarrow{\mathrm{can}} A'(K) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Ext}^1_K(E,\mathbb{G}_m)$$

$$A'_n(K) \xrightarrow{-\partial([\xi])} \mathrm{Ext}^1_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\rho^*} \mathrm{Ext}^1_K(E,\mathbb{G}_m)$$

sont égaux.

Preuve : Soit c un élément de $E_n(\widetilde{K})$ tel que $\rho(\widetilde{K})(c) = \bar{1}$. Alors $[\xi]$ est la classe, dans $H^1(K,A_n) = H^1(G(\widetilde{K}/K),A_n(\widetilde{K}))$ du 1-cocycle continu

$$\begin{aligned} a : G(\widetilde{K}/K) &\to A_n(\widetilde{K}) \\ \sigma &\mapsto \sigma.c-c \ . \end{aligned}$$

Si $f : \Gamma \to \Gamma'$ est un morphisme de K-groupes, on note $\widetilde{f}$ l'homomorphisme $f(\widetilde{K}) : \Gamma(\widetilde{K}) \to \Gamma'(\widetilde{K})$.

Soit $f : A_n \to \mathbb{G}_m$ un élément de $A'_n(K)$. Alors

$$\widetilde{f}\circ a \ : \ G(\widetilde{K}/K) \to \widetilde{K}^*$$

est un 1-cocycle continu. La nullité de $H^1(K,\mathbb{G}_m)$ implique l'existence d'un élément $\gamma \in \widetilde{K}^*$ tel que :

$$(\forall \sigma \in G(\widetilde{K}/K)) \qquad \widetilde{f}(a(\sigma)) = \sigma.\gamma/\gamma \ .$$

Puisque $na(\sigma) = 0$, on a : $\sigma.\gamma^n = \gamma^n$, $\forall \sigma \in G(\widetilde{K}/K)$. Choisissons un tel γ dans $\widetilde{K}^*$, et soit λ l'élément γ^n de K^* .

a) <u>Calcul de</u> $\partial(\xi)(f)$.

L'élément $\partial(\xi)(f)$ de $\mathrm{Ext}^1_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ est la classe d'isomorphisme de la deuxième ligne du diagramme commutatif exact de K-groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & E_n & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_K & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{u'} & C & \xrightarrow{\rho'} & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_K & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Notons $*$ la multiplication dans $C(\widetilde{K})$. Soit $x = \widetilde{f}'(c) * \widetilde{u}'(\gamma^{-1})$. Cet élément x de $C(\widetilde{K})$ vérifie les conditions suivantes :

1) $\widetilde{\rho}'(x) = \bar{1}$

2) $\sigma(x) = \sigma(\widetilde{f}'(c)) * \sigma(\widetilde{u}'(\gamma^{-1})) = \widetilde{f}'(\sigma.c) * \widetilde{u}'(\sigma.\gamma^{-1})$

$= \widetilde{f}'(\sigma.c-c) * \widetilde{f}'(c) * \widetilde{u}'(\sigma.\gamma^{-1}/\gamma^{-1}) * \widetilde{u}'(\gamma^{-1})$

$= x * \widetilde{f}'(\sigma.c-c) * \widetilde{u}'\widetilde{f}(-a(\sigma))$

$= x * \widetilde{f}'(\sigma.c-c-a(\sigma)) = x$,

et donc x est un élément de $C(K)$.

3) $\underbrace{x*x*\dots*x}_{n \text{ fois}} = \widetilde{u}'(\gamma^{-n}) = \widetilde{u}'(\lambda^{-1})$.

Ceci signifie que $\partial([\xi])(f)$ est, dans K^*/K^{*n} , la classe de λ^{-1} .

b) <u>Calcul de</u> $h^* \circ \mathrm{can}(f)$.

Soit $u : A \to E$ l'immersion donnée. Le composé $A \xrightarrow{u} E \xrightarrow{h} A$ est la multiplication par n dans A , et donc, si $\iota'_n : A'_n \to A'$ est l'immersion canonique, le composé

$$A'_n(K) \xrightarrow{\iota'_n(K)} A'(K) = \mathrm{Ext}^1_K(A, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Ext}^1_K(E, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Ext}^1_K(A, \mathbb{G}_m)$$

est nul. Donc $h^* \circ \iota'_n(K)$ se factorise de manière unique par ρ^* . L'élément $h^* \circ \iota'_n(K)(f)$ est représenté par la dernière ligne du diagramme commutatif de K-groupes, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "n"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r, "\iota''"] & V \arrow[r, "g"'] \arrow[u] & E \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

De plus, il existe $u' \in \mathrm{Hom}_K(A,V)$, unique puisque $\mathrm{Hom}_K(A,\mathbb{G}_m) = 0$, tel que $g \circ u' = u$. On a pour tout élément z de $A(\widetilde{K})$:

$$\widetilde{u}'(z) = (\widetilde{f}'(z),\widetilde{u}(z)) \in V(\widetilde{K}) = D(\widetilde{K}) \times_{A(\widetilde{K})} E(\widetilde{K}) \ .$$

Notons θ l'élément de $\mathrm{Ext}^1_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)$ défini par : $\rho^*(\theta) = h^* \circ \iota'_n(K)(f)$. Alors θ peut être représenté par la dernière ligne du diagramme commutatif exact de K-groupes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho'"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & C' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Posons $y = (\widetilde{\iota}'(\gamma),c) \in D(\widetilde{K}) \times_{A(\widetilde{K})} E(\widetilde{K})$. Alors y vérifie les conditions suivantes :

1) $\widetilde{g}(y) = c$, et donc $\widetilde{g}'(\widetilde{\rho}'(y)) = \bar{1}$.

2) $\sigma(y) = (\widetilde{\iota}'(\frac{\sigma.\gamma}{\gamma}),\sigma.c-c) * y$ (en notant $*$ l'opération dans $V(\widetilde{K})$)

$$\begin{aligned}
&= (\widetilde{\iota}'\widetilde{f}(a(\sigma)),\widetilde{u}\widetilde{\iota}_n(a(\sigma))) * y \\
&= (\widetilde{f}'\widetilde{\iota}_n(a(\sigma)),\widetilde{u}\widetilde{\iota}_n(a(\sigma))) * y \\
&= \widetilde{u}'(\widetilde{\iota}_n(a(\sigma))) * y \ .
\end{aligned}$$

D'où : $\sigma.\tilde{\rho}'(y) = \tilde{\rho}'(\sigma.y) = \tilde{\rho}'(y)$, et donc $\tilde{\rho}'(y)$ appartient à $C'(K)$.

3) $\underbrace{y*y*\ldots*y}_{n\ \text{fois}} = (\tilde{\iota}'(\gamma^n), nc) = (\iota'(\gamma^n), 0) = \iota''(\lambda)$.

Il en résulte que θ est, dans K^*/K^{*n} , la classe de λ .

En comparant les calculs de a) et b), on obtient le lemme.

COROLLAIRE. *Pour tout entier* $n > 1$, *l'homomorphisme* $(\Psi_n)_o$ *est un isomorphisme*.

Preuve : Soit $[\xi']$ un élément de $H^1(K,A)_n$, image d'un élément de $H^1(K,A_n)$ représenté par une suite exacte ξ :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} E \xrightarrow{\rho} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_K \longrightarrow 0 .$$

Soit $h : E \to A$ le K-morphisme donné par : $x \to nx$. On en déduit un morphisme de k-groupes proalgébriques

$$\underline{\underline{h}}^* : \underline{\underline{A}}'(K) \to \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E, \mathbb{G}_m)$$

tel que le composé $\underline{\underline{u}}^*.\underline{\underline{h}}^*$ soit égal à l'endomorphisme n de $\underline{\underline{A}}'(K)$. On en déduit que le diagramme suivant de k-groupes proalgébriques, à lignes exactes, est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n(K) \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "-\partial(\xi)"'] & \underline{\underline{A}}'(K) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\underline{h}}^*"] & n\underline{\underline{A}}'(K) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\mathrm{can}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\underline{\underline{\rho}}^*"'] & \underline{\underline{\mathrm{Ext}}}^1_K(E, \mathbb{G}_m) \arrow[r] & \underline{\underline{A}}'(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Par la remarque qui précède le lemme 8.3.5, la restriction de $-\pi_o(\partial(\xi))$ à $\underline{\underline{A}}'(K)^o_n$ est égale à $\gamma(\Psi_n([\xi']))$, c'est-à-dire au transformé par $(\Psi_n)_o$ de l'image de $[\xi']$ dans $\pi_o(\underline{\underline{H}}^1(K,A)_n)$. Ceci montre que $(\Psi_n)_o$ est l'opposé de l'isomorphisme du corollaire 1 de la proposition 8.3.3.

THÉORÈME 8.3.6. *Il y a un isomorphisme canonique de groupes abéliens, fonctoriel en* A :

$$\Psi : H^1(K,A) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

<u>Preuve</u> : Il résulte du corollaire 2 du théorème 8.3.3 et du corollaire 1 du lemme 8.3.5 que

$$\Psi_n : H^1(K,A)_n \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout entier $n > 1$. On en déduit que

$$\varinjlim_n \Psi_n = \Psi : H^1(K,A) \to \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K)^o, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{A}}'(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est aussi un isomorphisme. Il est fonctoriel en A par construction même.

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> K'/K <u>une extension finie galoisienne, et soit</u> g <u>son groupe de Galois</u>. <u>L'isomorphisme</u> Ψ <u>induit un isomorphisme de groupes abéliens, compatible à la restriction et à la corestriction</u> :

$$\Psi_{K'/K} : H^1(g, A(K')) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\hat{H}^o(g, \pi_1(\underline{\underline{A}}'(K'))), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

<u>Preuve</u> : La fonctorialité en A de l'isomorphisme Ψ , appliquée à l'immersion canonique de A dans la restriction de Weil, de K' à K , de $A_{K'}$, donne un diagramme commutatif où les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H^1(K,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ {\scriptstyle \mathrm{Res}_{K'/K}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \check{N}_{K'/K}} \\ H^1(K',A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K')), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array} .$$

Par passage aux noyaux des flèches verticales, on obtient le corollaire, puisque $\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K'))^g = \pi_1(\underline{\underline{A}}'(K))$.

COROLLAIRE 2. <u>Le groupe des normes universelles</u>

$$\bigcap_{K'/K} N_{K'/K}(\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K'))$$

(pour K'/K parcourant l'ensemble des extensions finies galoisiennes) <u>est nul</u>.

<u>Preuve</u> : On a l'égalité : $\Psi = \varinjlim_{K'/K} \Psi_{K'/K}$.

Il en résulte que l'homomorphisme naturel :

$$\varinjlim_{K'/K} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\hat{H}^0(g,\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K'))),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Ceci signifie que la projection canonique

$$\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K)) \to \varprojlim_{K'/K} \hat{H}^0(g,\pi_1(\underline{\underline{A}}'(K')))$$

est un isomorphisme de groupes profinis. Son noyau, qui est le groupe des normes universelles de l'énoncé, est donc nul.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER.- Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). Lecture Notes in Mathematics, n° 269, Springer-Verlag (1972).

[2] L. BÉGUERI.- Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, Série A (1975), p. 1617-1620.

[3] L. BÉGUERI.- Dualité pour les variétés abéliennes sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, Série A (1976), p. 111-114.

[4] N. BOURBAKI.- Algèbre Commutative. Chap. III, §4 (1961), Hermann.

[5] L. BREEN.- Sur l'annulation de certains Ext^i . Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t. 5 (1975), p. 339-352.

[6] P. DELIGNE.- Cohomologie étale (SGA 4½). Lecture Notes in Mathematics n° 569, Springer-Verlag (1977).

[7] M. DEMAZURE et P. GABRIEL.- Groupes algébriques. Masson et Cie (1970).

[8] M. GREENBERG.- Schemata over local rings. Annals of Math., 73 (1961), p. 624-648.

[9] A. GROTHENDIECK.- Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture Notes in Mathematics n° 224, Springer-Verlag (1971).

[10] A. GROTHENDIECK, I. BUCUR, C. HOUZEL, L. ILLUSIE, J.-P. JOUANOLOU et J.-P. SERRE.- Cohomologie ℓ-adique et fonctions L (SGA 5). Lecture Notes in Mathematics n° 589, Springer-Verlag (1977).

[11] A. GROTHENDIECK, M. RAYNAUD, D.S. RIM.- Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7). Lecture Notes in Mathematics n° 288, Springer-Verlag (1972).

[12] R. HARTSHORNE.- Residues and duality. Lecture Notes in Mathematics n° 20. Springer-Verlag (1966).

[13] B. MAZUR.- Local flat duality. Amer. J. Math., 92 (1970), p. 343-361.

[14] B. MAZUR et L. ROBERTS.- Local Euler Characteristics. Inv. Math., 9 (1970), p. 201-234.

[15] J.S. MILNE.- Duality in the flat cohomology of a surface. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t. 9 (1976), p. 171-202.

[16] A. NÉRON.- Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. Publ. Math. I.H.E.S. (1964), n° 21.

[17] M. RAYNAUD.- Modèles de Néron. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, Série A (1966), p. 345-349.

[18] M. RAYNAUD.- Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes (d'après Ogg, Shafarevitch et Grothendieck). Séminaire Bourbaki 64/65, exposé n° 286, W.A. Benjamin INC (1966).

[19] M. RAYNAUD.- Schémas en groupes de type (p,p,...,p). Bull. Soc. Math. Fr., t. 102 (1974), p. 241-280.

[20] M. RAYNAUD.- Spécialisation du foncteur de Picard. Publ. I.H.E.S., n° 38 (1970).

[21] J.-P. SERRE.- Groupes proalgébriques. Publ. Math. I.H.E.S., n° 7 (1960).

[22] J.-P. SERRE.- Groupes algébriques et corps de classes. Hermann (1959).

[23] J.-P. SERRE.- Corps locaux. Hermann (1962).

[24] J.-P. SERRE.- Corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. Bull. Soc. Math. Fr., t. 89 (1961), p. 105-154.

[25] J.-P. SERRE.- Cohomologie galoisienne. Lecture Notes in Mathematics, n° 5, Springer-Verlag (1973).

[26] O.N. VVEDENSKII.- Dokl. Acad. Nauk. U.R.S.S, 219, n° 6 (1974).

L. BÉGUERI
Université de Paris-Sud
Département de Mathématique
Bâtiment 425
91405 ORSAY