MÉMOIRES DE LA S. M. F.

D. BERTRAND
M. WALDSCHMIDT

Quelques travaux récents en théorie des nombres transcendants

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 2 (1980), p. 107-119
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1980_2_2__107_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
2e série, Mémoire n° 2, 1980, p. 107-119

QUELQUES TRAVAUX RÉCENTS EN THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

par

D. BERTRAND

et

M. WALDSCHMIDT

Ces dernières années, l'étude des problèmes arithmétiques liés aux fonctions abéliennes a fait quelques progrès grâce à la théorie des nombres transcendants. Motivée, entre autres, par des questions de géométrie diophantienne ou d'indépendance algébrique, cette étude s'est particulièrement développée dans le cadre des variétés abéliennes de type C.M. Certains des résultats obtenus s'étendent néanmoins aux variétés abéliennes à multiplications réelles.

De façon plus générale, après les travaux de S. Lang, on peut interpréter de façon naturelle de nombreux problèmes de transcendance en termes de groupes algébriques commutatifs connexes. Ce point de vue conduit à de nouveaux résultats de transcendance sur les intégrales abéliennes. Ainsi M. Laurent vient de démontrer la transcendance des périodes non nulles d'intégrales elliptiques de troisième espèce.

En liaison avec l'étude des courbes de Fermat, M. Laurent a obtenu d'autre part une mesure de transcendance pour les valeurs de la fonction bêta en des points rationnels. Pour les nombres transcendants liés aux courbes elliptiques, E. Reyssat a donné une liste très complète de mesures de transcendance.

Ces inégalités diophantiennes sont utiles pour les problèmes d'indépendance algébrique, domaine qui a connu, grâce à G.V. Choodnovsky, de remarquables progrès depuis quelques années. Un énnoncé p-adique vient d'être démontré par P. Philippon, qui généralise à ce propos un "lemme de zéros" de D.W. Masser. Enfin E. Reyssat a obtenu des résultats d'indépendance algébrique liés aux intégrales elliptiques de troisième espèce.

L'étude des problèmes diophantiens en dimension supérieure requiert de bons lemmes de Schwarz en plusieurs variables. Une contribution importante à ce problème vient d'être fournie par J.C. Moreau.

§1. Variétés abéliennes

a) Problèmes diophantiens

On sait, depuis le mémoire de Siegel de 1929, que l'ensemble des points entiers sur une courbe de genre ≥ 1 est fini. L'une des motivations fondamentales de nombreux travaux sur les nombres transcendants est de rendre cet énoncé effectif. Nous mentionnerons ici seulement une méthode, suggérée par Lang en 1964, et nous nous limiterons aux courbes de genre 1. Cette méthode repose sur une connaissance d'une base du groupe de Mordell-Weil d'une part, et sur une inégalité diophantienne (minoration d'une forme linéaire d'intégrales elliptiques) d'autre part. Une telle inégalité est maintenant disponible dans le cas de multiplication complexe, grâce aux travaux de Masser notamment. Pour pallier la non-effectivité du théorème de Mordell-Weil, on est amené à admettre la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Les détails viennent d'être explicités par H. Groscot [3], qui démontre par exemple l'énoncé suivant :

<u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe une constante</u> $C_\varepsilon > 0$ <u>effectivement calculable ne dépendant que de</u> ε <u>ayant la propriété suivante</u>. <u>Soit</u> $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ <u>tel que la courbe elliptique</u> $y^2 = x^3 + k$ <u>satisfasse la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer</u>. <u>On suppose de plus que cette courbe a pour rang</u> 1, <u>et on note</u> N <u>son conducteur</u>. <u>Si</u> (x,y) <u>est un point entier sur la courbe</u>, <u>alors</u>

$$\max(|x|,|y|) \leq \exp\{C_\varepsilon\, N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\, |k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\} .$$

Le résultat inconditionnel de Stark est

$$\max(|x|,|y|) \leq \exp\{C_\varepsilon\, |k|^{1+\varepsilon}\} .$$

D'autres résultats dans cette direction ont été annoncés par G.V. Choodnovsky (qui admet, en plus, l'hypothèse de Riemann généralisée).

b) Matrice des périodes

Soit Ω une matrice des périodes associée à une variété abélienne A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Tout cycle algébrique sur une puissance de A fournit une relation algébrique satisfaite par les coefficients $\{\omega_{ij}\}$ de Ω. Une conjecture de Grothendieck affirme que l'idéal engendré par ces relations est un idéal de définition de $\{\omega_{ij}\}$. Dans cette direction, Choodnovsky [2] a démontré que le degré de transcendance δ du corps engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients de Ω et d'une matrice de pseudopériodes associée à Ω est ≥ 2. Cet énoncé est particulièrement intéressant dans le cas des variétés de type CM, où de bonnes majorations de δ sont connues (voir les exposés de Deligne et de Shimura, et, pour un cas particulier classique, le §4 ci-dessous et la conjecture de Röhrlich).

c) Multiplications réelles

La méthode élaborée par Lang (voir [8]) pour l'étude des variétés abéliennes de type CM peut être généralisée aux cas des variétés abéliennes A à multiplications réelles. Une telle variété est définie par la condition suivante : il existe un plongement d'un corps de nombres totalement réel F, de degré égal à la dimension de A, dans l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_0 A$ de A. Supposons A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et notons D une base de $\mathrm{Lie}\, A(\overline{\mathbb{Q}})$ formée de vecteurs propres pour l'action de F, et $\exp$ l'application exponentielle sur $A(\mathbb{C})$. On peut alors énoncer (voir [1]) :

Théorème 1.1 : *on suppose que* A *est une variété abélienne à multiplications réelles, définie sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, *et simple. Soit* u *un élément de* $\mathrm{Lie}\, A(\mathbb{C})$ *dont l'image par* $\exp$ *appartienne à* $A(\overline{\mathbb{Q}})$. *Si* u *est non nul, chacune de ses composantes dans la base* D *est transcendante.*

Cet énoncé permet d'étudier les intégrales abéliennes de première espèce prises sur une courbe modulaire, et, en particulier, les valeurs de certaines fonctions L automorphes. Bien entendu, il permet également de retrouver la transcendance des nombres $B(a,b)$, quand a et b sont des nombres rationnels non entiers (voir §4).

Signalons enfin que la condition de simplicité peut être supprimée dans les hypothèses du théorème 1.1.

§2. Groupes algébriques

Les principaux résultats classiques de transcendance concernant les fonctions exponentielles, elliptiques ou abéliennes peuvent être énoncés en termes de groupes algébriques commutatifs connexes. Ainsi les théorèmes de Hermite Lindemann et Gel'fond Schneider sur la fonction exponentielle, et de Schneider sur les fonctions elliptiques ainsi que le théorème 1.1. ci-dessus, sont des cas particuliers de l'énoncé suivant

Théorème 2.1 : Soit G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \to G_{\mathbb{C}}$ un homomorphisme analytique dont l'application linéaire tangente à l'origine est injective et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. S'il existe n nombres complexes $t_1, \dots, t_n$, $\mathbb{C}$-linéairement indépendants, tels que $\varphi(t_j) \in G_{\overline{\mathbb{Q}}}$, $(1 \le j \le n)$, alors $\varphi(\mathbb{C}^n)$ est un sous-groupe algébrique fermé de dimension n de $G_{\mathbb{C}}$.

Cet énoncé se trouve dans le livre de Lang sur les nombres transcendants avec l'hypothèse supplémentaire que l'application exponentielle de G peut être représentée par des fonctions méromorphes d'ordre fini, mais J.P. Serre a montré ([8], Appendice II) qu'une telle représentation existe toujours, avec des fonctions d'ordre ≤ 2.

Dans le cas où G est extension d'une courbe elliptique par le groupe multiplicatif, cette représentation fait intervenir, outre la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass associée à la courbe, une fonction méromorphe multiplicativement quasi-périodique :

$$f(u,z) = \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\sigma(u)} e^{z\zeta(u)}$$

qui satisfait

$$f(u,z+\omega) = f(u,z)\ e^{\omega\zeta(u)-\eta u}$$

pour toute période ω .

Du théorème 2.1 avec $n=1$ on déduit alors facilement [8] :

Corollaire 2.2. : Soient $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques, ω une période non nulle de $\wp$, u un nombre complexe dont aucun multiple rationnel n'est période de $\wp$, et β un nombre algébrique. Alors le nombre

$$\exp\{\omega\zeta(u) - \eta u + \beta\omega\}$$

est transcendant.

En particulier on obtient la transcendance du nombre $\zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u$, résultat dû à Choodnovsky [2] (cf. § 5 ci-dessous).

§3. Intégrales elliptiques de troisième espèce

Le corollaire 2.2 peut être formulé sous la forme suivante. Soit w une période non nulle d'une forme différentielle elliptique de troisième espèce définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et dont les résidus sont rationnels. Alors e^w est soit une racine de l'unité, soit un nombre transcendant. La transcendance du nombre w lui-même vient d'être démontrée par M. Laurent [4] (cf. le troisième problème du livre de Schneider sur les nombres transcendants). Avec les hypothèses du corollaire 2.2, l'énoncé précis de Laurent est le suivant.

Théorème 3.1 : Les 4 nombres $1, \omega, \eta, \eta u - \omega\zeta(u)$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. De plus, dans le cas de multiplication complexe, les 5 nombres $1, \omega, \eta, \eta u - \omega\zeta(u)$ et $2i\pi$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

La démonstration de Laurent repose pour une bonne part sur les idées de D.W. Masser, qui avait résolu le problème de l'indépendance linéaire de périodes d'intégrales elliptiques de première ou de deuxième espèce en démontrant que les 6 nombres $1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$ engendrent un espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de dimension 6 quand il n'y a pas de multiplication complexe, et 4 dans le cas de multiplication complexe.

Une autre difficulté qui intervient dans la démonstration du théorème 3.1 est la nécessité d'expliciter les relations de multiplication exprimant $f(u,nz)/f(u,z)^n$ comme fonction rationnelle de $\wp(z)$, $\wp'(z)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$. Ces estimations ont été faites par E. Reyssat qui a obtenu une mesure de transcendance pour le nombre du corollaire 2.2.

Enfin Laurent a besoin d'un "lemme de zéros" pour lequel il a adapté des arguments de Masser, ce qui lui permet de démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.2 : Soit $P \in \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,x_3]$ un polynôme non nul de degré $\leq L$. Sous les hypothèses du corollaire 2.2, on définit

$$g(z) = az + b\zeta(z)$$

où a,b sont deux nombres complexes non tous deux nuls, et

$$f(z) = \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\,\sigma(u)} \exp\left(\frac{\eta u}{\omega} z\right)$$

Alors pour tout $R > 0$ le nombre de zéros dans le disque $|z| \leq R$ de la fonction

$$P(g(\omega z), \wp(\omega z), f(\omega z), e^{2i\pi z})$$

est majoré par $c(LR^2 + R^8)$, où c ne dépend que de $\wp$, u, ω, a et b.

§4. Mesures de transcendance

Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique de genre g dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soient S la surface de Riemann de $\mathcal{C}$, $(C_j)_{1\leq j\leq g}$ une base de son homologie en dimension 1, et $(\xi_h)_{1\leq h\leq g}$ une base définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de l'espace des formes différentielles de première espèce sur S . Pour $1\le j\le 2g$, on pose $\omega_j = (\omega_{1,j}, \dots, \omega_{g,j}) \in \mathbb{C}^g$ où

$$\omega_{h,j} = \int_{C_j} \xi_h \ , \ (1\le h\le g) \quad .$$

Soit $A = \mathbb{C}^g/\Omega$ la jacobienne de $\mathcal{C}$, où $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_{2g}$. En appliquant le théorème 2.1 à un homomorphisme analytique $\mathbb{C}^g \to \mathbb{C} \times A_{\mathbb{C}}$ de la forme

$$(z_1,\dots,z_g) \longmapsto (z_h \ , \Theta(z_1,\dots,z_g))$$

avec $1\le h\le g$, et où Θ est une représentation normalisée de l'exponentielle de A , on en déduit que pour $1\le h\le g$, l'un des nombres $\omega_{h,1},\dots,\omega_{h,2g}$ est transcendant.

Quand on applique ce résultat à une courbe de Fermat $x^N+y^N = 1$, on obtient la transcendance des nombres $B(a,b)$, quand a,b sont des nombres rationnels non entiers.

Ces résultats de Schneider peuvent être rendus effectifs : au lieu de montrer seulement que $P(B(a,b)) \neq 0$ quand $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme non nul, on peut minorer $|P(B(a,b))|$ en fonction de la hauteur et du degré de P. Il revient au même de minorer $|B(a,b) - \beta|$ quand β est un nombre algébrique. Le résultat suivant est dû à M. Laurent.

Théorème 4.1 : *Soient* r,s,N *trois entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble. On suppose que ni* r, *ni* s *n'est divisible par* N. *Il existe un nombre* $C > 0$ *effectivement calculable en fonction de* r,s,N, *tel que pour tout nombre algébrique* β *de hauteur* $\le B$ *(avec* $B \ge 16$) *et de degré* $\le D$ *on ait*

$$\left|B\left(\frac{r}{N},\frac{s}{N}\right)-\beta\right| \ge \exp\left\{-C\, D^n\, (\log H)\, (\log\log H)^n\right\}$$

où $\log H = \log B + D \log D$ *et* $n = \max\{1,\varphi(N)/2\}$.

Pour les nombres transcendants liés aux courbes elliptiques, E. Reyssat a donné une liste très complète de mesures de transcendance [7]. Ainsi le nombre ω/π a un type de transcendance $< 2+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$, et si α est un nombre algébrique non nul, $\wp(\alpha)$ n'est pas un U-nombre.

Enfin une version effective du théorème de Schneider sur la transcendance de l'invariant modulaire $j(\tau)$ (pour τ algébrique non imaginaire quadratique) a été obtenue récemment par D. Brownawell et D.W. Masser.

§5. Indépendance algébrique

L'étude de l'indépendance algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques a été beaucoup développée depuis le travail de Brownawell et Kubota en 1975. Les progrès les plus remarquables sont dus à G.V. Choodnovsky [2], dont voici deux résultats.

Théorème 5.1 : Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants g_2, g_3 algébriques.

a) Soient ω une période de $\wp$, et u un point algébrique de $\wp$ (i.e. une période de $\wp$, ou bien un point où $\wp$ prend une valeur algébrique). On suppose u et ω linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Alors les deux nombres

$$\zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u \ , \ \frac{\eta}{\omega}$$

sont algébriquement indépendants.

b) Si u_1, u_2 sont deux points algébriques de $\wp$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, deux des nombres

$$u_1, u_2 \ , \ \zeta(u_1) \ , \ \zeta(u_2)$$

sont algébriquement indépendants.

Un résultat similaire au théorème 5.1.b., mais plus faible, a été obtenu par P. Philippon [6] dans le cas ultramétrique : soit p un nombre premier, $\wp_p$ une fonction elliptique de Weil-Lutz d'invariants g_2, g_3 algébriques, et ζ_p la primitive impaire de $-\wp_p$ (ces fonctions sont définies sur un idéal $\mathcal{B}_p$ du complété de la clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$). Si u_1, u_2, u_3 sont des éléments de $\mathcal{B}_p$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, où la fonction $\wp_p$ prend des valeurs algébriques, alors, deux des nombres

$$u_1, u_2, u_3,\ \zeta_p(u_1),\ \zeta_p(u_2),\ \zeta_p(u_3)$$

sont algébriquement indépendants.

En l'abscence d'un bon "lemme de zéros" p-adique, Philippon est amené à utiliser le résultat d'analyse complexe suivant, qu'il démontre en généralisant un argument de Masser.

Proposition 5.2 : Soient Λ un réseau de Riemann de $\mathbb{C}^n$, $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions abéliennes par rapport à Λ, $g_1, \ldots, g_{2n}$ $2n$ fonctions pseudo-périodiques par rapport à Λ, et θ une fonction théta associée à Λ, telle que $\theta f_1, \ldots, \theta f_n$, $\theta g_1, \ldots, \theta g_{2n}$ soient entières. Soit d'autre part P un élément de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{2n}]$ de degrés en $X_1, \ldots, X_n$ (resp. $Y_1, \ldots, Y_{2n}$) majorés par L_X (resp. L_Y). Alors, la fonction entière

$$\Phi(z) = (\theta(z))^{n(L_X+2L_Y)}\, P(f_1(z), \ldots, f_n(z)\ ,\ g_1(z), \ldots, g_{2n}(z))$$

est identiquement nulle, ou vérifie, pour tout nombre réel $R \geq 0$:

$$\Theta(\Phi, R) \leq c(L_X+L_Y)\ (L_Y^2+R^2)\ ;$$

dans cette inégalité, c désigne un nombre réel indépendant de P et de R, et $\Theta(\Phi, R)$ est la masse moyenne de la fonction Φ sur la boule de rayon R.

Enfin, E. Reyssat vient d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 5.3 : Soient $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques, et ζ la fonction zêta associée à $\wp$. Soient ω, ω' deux périodes de $\wp$ linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$; on note $\tau = \omega'/\omega$, et η la quasi-période de ζ associée à ω. Soient u, v deux nombres complexes dont aucun multiple rationnel n'est période de $\wp$, et dont la différence n'est pas période de $\wp$. On définit enfin la fonction

$$f_{u,\omega}(z) = \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\ \sigma(u)}\ e^{zu\eta/\omega}$$

Alors :

a) parmi les cinq nombres

$$\wp(u)\ ,\ \wp(v)\ ,\ \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u\ ,\ e^{i\pi u/\omega}\ ,\ f_{u,\omega}(v)\ ,$$

deux au moins sont algébriquement indépendants

b) parmi les dix nombres

$$\frac{\pi}{\omega}\ ,\ \frac{\eta}{\omega}\ ,\ \wp(u)\ ,\ \wp(v)\ ,\ \zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u\ ,\ \zeta(v)-\frac{\eta}{\omega}v\ ,\ e^{i\pi\tau}\ ,\ e^{i\pi u/\omega}\ ,\ e^{i\pi v/\omega}\ ,\ f_{u,\omega}(v),$$

trois au moins sont algébriquement indépendants.

En considérant la fonction $s(z) = \sigma(z)\ e^{-z^2\eta/2\omega}$, il en déduit en particulier :

Corollaire 5.4 : Sous les hypothèses du théorème, et si $\wp(u)$ est algébrique alors

a) Deux des trois nombres

$$e^{i\pi u/\omega}\ ,\ s(u)\ ,\ s'(u)$$

sont algébriquement indépendants.

b) Trois des six nombres

$$\frac{\pi}{\omega}\ ,\ \frac{\eta}{\omega}\ ,\ e^{i\pi\tau}\ ,\ e^{i\pi u/\omega}\ ,\ s(u)\ ,\ s'(u)$$

sont algébriquement indépendants.

§6. Plusieurs variables

Après une suggestion de Nagata et un mémoire de Bombieri en 1970, il est apparu important d'étudier les degrés des hypersurfaces algébriques ayant des singularités données.

Si S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$ et t un entier positif, on note $\omega_t(S)$ le plus petit des degrés des hypersurfaces algébriques ayant en chaque point de S une singularité d'ordre $\geq t$. Ce nombre $\omega_t(S)$ permet de généraliser à plusieurs variables des énoncés en une variable faisant intervenir le nombre $t \operatorname{card} S$ (cf. [8]). En voici un exemple, dû à J.C. Moreau [5].

Théorème 6.1 : *Soient S un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, et t un entier positif ; il existe un nombre réel $r_o = r_o(S,t)$ tel que si f est une fonction entière ayant en chaque point de S un zéro d'ordre $\geq t$, on ait pour $R \geq r > r_o$:*

$$\operatorname{Log} |f|_r \leq \operatorname{Log} |f|_R - \omega_t(S) \operatorname{Log} \frac{R}{e^n r} .$$

En utilisant un résultat de [8], J.C. Moreau [5] en déduit qu'on peut remplacer $r_o(S,t)$ par $r_1(S,\varepsilon)$ (indépendant de t, avec $\varepsilon>0$ arbitraire), pourvu que l'on remplace $\omega_t(S)$ par $\omega_t(S) - t\varepsilon$.

Ces nombres $\omega_t(S)$ interviennent dans la construction, due à Nagata, d'un contre exemple au quatorzième problème de Hilbert.

Références

[1] BERTRAND (Daniel).- Sur les périodes de formes modulaires ; C. r. Acad. Sci., Paris, t. 288, 1979, pp. 531-534.

[2] CHOODNOVSKY (Gregory V.).- Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions ; Proc. I.C.M., Helsinki (1978).

[3] GROSCOT (Herbert).- Points entiers sur les courbes elliptiques ; Thèse de troisième cycle (Paris VI), 1979.

TRAVAUX RÉCENTS

[4] LAURENT (Michel).- Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques ; J. für reine u. angew. Math., à paraitre.

[5] MOREAU (Jean-Charles).- Lemmes de Schwarz à plusieurs variables ; Séminaire d'Analyse (P. LELONG, H. SKODA), 1978-79, Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1980.

[6] PHILIPPON (Patrice).- Indépendance algébrique de valeurs de fonctions elliptiques p-adiques, Preprint Ecole Polytechnique M436.0979, 1979.

[7] REYSSAT (Eric).- Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle ; Bull. Soc. Math. France, à paraitre .

[8] WALDSCHMIDT (Michel).- Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque (S.M.F.) 69-70 (1979).

D. Bertrand
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex

M. Waldschmidt
Université P. et M. Curie
Mathématiques, T.45-46
75230 Paris Cedex 05