MÉMOIRES DE LA S. M. F.

Y. AMICE

Limites uniformes de polynômes dans un corps valué complet non archimédien

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 11-16
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__11_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 11 à 16

LIMITES UNIFORMES DE POLYNOMES DANS UN CORPS VALUE COMPLET NON ARCHIMEDIEN

par

Yvette AMICE

-:-:-:-

Introduction

Cet exposé n'a pas pour objet de fournir des résultats nouveaux ou des démonstrations. Il est surtout destiné à ceux des arithméticiens qui ne sont pas spécialistes d'analyse ultramétrique et tend à leur indiquer de quelle sorte d'outils on dispose dans cette analyse.

Bien que le titre en soit "limites uniformes de polynômes", il y sera aussi question de limites uniformes de fractions rationnelles, ce qui est inévitable dès que l'on parle de fonctions analytiques.

Soit K un corps valué complet non archimédien de caractéristique 0, A son anneau de valuation, $\mathfrak{M}$ l'idéal de valuation, $k = A/\mathfrak{M}$ le corps résiduel, p la caractéristique de k, $|K^*|$ le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$ image de K^* par la valeur absolue. Nous noterons C_p le complété de la clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques : c'est l'analogue p-adique de $\mathbb{C}$ en ce sens que c'est le plus petit corps complet et algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}_p$.

Soit B une partie de K, f une fonction bornée sur B et à valeurs dans K, nous noterons $\|f\|_B = \sup_{x \in B} |f(x)|$ la norme de f pour la convergence uniforme sur B.

1. - Limites uniformes sur le disque unité

L'anneau de valuation A est aussi le disque unité $\{x \in K \mid |x| \leq 1\}$.

Nous noterons $\hat{K[X]}_A$ le complété de l'anneau $K[X]$ des polynômes pour la convergence uniforme sur A.

PROPOSITION 1.1. - (théorème de Weierstrass) Dieudonné [4] et Mahler [12].
<u>Si</u> K <u>est localement compact</u>, $\hat{K[X]}_A$ <u>est l'anneau</u> $\mathcal{C}(A,K)$ <u>des fonctions continues sur</u> A <u>et à valeurs dans</u> K.

PROPOSITION 1.2. - Schöbe [15], Krasner [9], Schnirelmann [14].
<u>Si</u> K <u>n'est pas localement compact</u>, $\hat{K[X]}_A$ <u>est l'anneau des fonctions analytiques strictes sur</u> A, <u>ou encore l'anneau des séries entières restreintes</u> $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, <u>où</u> $a_n \to 0$, <u>avec la norme</u> $\operatorname{Sup}_n |a_n|$.

On peut développer ces résultats en cherchant à construire explicitement des suites de polynômes approchant les fonctions continues ou analytiques, ou en déterminant des bases normales des espaces $\widehat{K[X]}_A$, ou en étudiant des limites uniformes de fractions rationnelles, ou en remplaçant A par d'autres parties de K .

Nous indiquons ci-dessous certaines réponses à ces questions obtenues par différents auteurs.

2. - Espaces de fonctions continues

Rappelons d'abord que si E est un espace de Banach sur K , une base normale de E est une famille $(e_i)_{i\in I}$ telle que tout $x \in E$ admette une représentation

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i \quad \text{avec} \quad x_i \to 0 \quad \text{et} \quad \|x\| = \sup_{i\in I} |x_i| .$$

La donnée d'une base normale fournit donc une famille canonique d'approximations pour un élément x : les sommes finies $\Sigma x_i e_i$. En particulier si les e_i sont des polynômes, et E un espace de fonctions continues (ou analytiques) on obtient ainsi des approximations polynômiales explicites pour les fonctions continues (ou analytiques).

PROPOSITION 2.1. - Mahler [12] - Les polynômes $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ sont une base normale de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ des fonctions continues sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques et à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$.

PROPOSITION 2.2 - Amice [1] - Soit M un compact régulier de K , (u_n) une suite à valeurs dans M , alors les polynômes $Q_n(x) = \frac{(x-u_o)\dots(x-u_{n-1})}{(u_n-u_o)\dots(u_n-u_{n-1})}$ sont une base normale de l'espace $\mathcal{C}(M,K)$ à la condition nécessaire et suffisante que la suite (u_n) soit très bien répartie.

La notion de compact régulier est assez simple : ce sont les compacts tels qu'une suite de recouvrement par des boules de rayon décroissant les fasse apparaître comme limite projectives d'ensembles finis isomorphes à des produits. La notion de suite très bien répartie, purement ensembliste, s'exprime par des conditions simples en termes de valuations. En particulier, la suite des entiers naturels est très bien répartie dans le compact régulier $\mathbb{Z}_p$ (cf. proposition 2.1).

PROPOSITION 2.3. - F. Bertrandias [3] et Levron [11] - Soit M un compact de K , une suite de polynômes Q_n est une base normale de $\mathcal{C}(M,K)$ à la condition nécessaire et suffisante qu'elle soit une suite de polynômes de Tchebyscheff pour M .

PROPOSITION 2.4. - Van der Put [13] - Soit X un espace topologique compact totalement discontinu, alors X est métrisable à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe $f \in \mathcal{C}(X,K)$ tel que l'anneau $K[f]$ soit dense dans $\mathcal{C}(X,K)$.

PROPOSITION 2.5. - Van der Put [13] - Soit X un compact de K^n, alors $\mathcal{C}(X,K)$ a une base normale constituée de polynômes.

La représentation d'une fonction continue à l'aide d'une série sur une base normale peut fournir des indications sur le module de continuité de cette fonction (cf. aussi 3.3.1 et 3.3.2).

PROPOSITION 2.6. - Fresnel [2] et Helsmoortel [6] - Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$ une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$, alors

a) s'il existe $K > 0$ tel que $|a_n| \leq \frac{K}{n}$, alors $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$,

b) s'il existe un entier $u \geq 0$ tel que $\{|x-y| \leq |p|^k \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |p|^{k-u}\}$, alors pour $n \geq k+u$ on a $|a_n| \leq |p|^k$.

3. - Espaces de fonctions analytiques

Nous avons vu en 1.2. que si K n'est pas localement compact, les fonctions qui sont limite uniforme de polynômes sur un disque fermé sont les fonctions analytiques strictes sur ce disque.

L'anneau de ces fonctions est une algèbre de Banach, à norme multiplicative, principale, et dont les idéaux sont engendrés par des polynômes.

3.1. - Fonctions analytiques sur un disque ouvert

Une fonction analytique sur un disque ouvert D est une fonction dont la restriction a tout disque fermé contenu dans D y est strictement analytique. Les anneaux ainsi obtenus sont munis de la topologie limite inductive naturelle. Ils ne sont pas toujours principaux : pour que les idéaux maximaux soient principaux il faut et il suffit que le corps K soit maximalement complet (Lazard [10]).

Une étude systématique de ses anneaux se trouve dans [10].

3.2. - Prolongement analytique de Krasner [9]

L'absence de connexes non triviaux rend la théorie du prolongement analytique sur un corps non archimédien très différente de celle des fonctions analytiques complexes.

Krasner définit des ensembles qu'il appelle quasi-connexes : un élément analytique sur un quasi-connexe y est une limite uniforme de fractions rationnelles. Une fonction analytique sur une famille enchaînée de quasi-connexes est obtenue par recollement d'éléments analytiques.

Cette théorie du prolongement dit "uniforme" permet d'obtenir un théorème d'unicité du prolongement. A partir de là, Krasner construit une théorie du prolongement multiforme fondée, à peu de choses près, sur le recollement des clôtures algébriques des anneaux d'éléments analytiques. Un exposé détaillé de cette théorie se trouve dans [9].

Nous citerons deux résultats sur les fonctions analytiques au sens de Krasner : l'un sur la structure des anneaux de telles fonctions, l'autre sur un critère de rationalité généralisant un théorème de Polya et Carlson.

PROPOSITION 3.2.1. - Gruson [5] - Soit $\mathcal{D} = B - \bigcup_{i\in I} b_i$ où B est un disque fermé, $b_i \subseteq B$ des disques ouverts, tels que $\mathcal{D}$ satisfasse à la condition (G) ci-dessous. Désignant par $H_o(\mathcal{D})$ (resp. $H_o(B)$, $H_o(b'_i)$) l'espace des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}$ (resp. B, $b'_i = \complement b_i$) et nulles à l'infini (si $\mathcal{D}$, resp. B, contient le point à l'infini)

$$H_o(\mathcal{D}) = H_o(B) \bigoplus_{i\in I} H_o(b_i) .$$

De plus l'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}$ est noethérienne à la condition nécessaire et suffisante que ses idéaux soient polynômiaux.

(G) quel que soit le disque fermé $b \subseteq B$ tel que $b \not\subseteq \mathcal{D}$, l'ensemble des disques b' non circonférenciés, contenus dans b et de même rayon, qui rencontrent $\mathcal{D}$, est infini.

PROPOSITION 3.2.2. - F. Bertrandias [3] - <u>Soit</u> $f(X) = \sum_{n\geq 0} u_n X^{-n}$ <u>où</u> $u_n \in \mathbb{Q}$, $|u_n|_p \leq 1$ <u>pour tout</u> n, <u>sauf pour un nombre fini de</u> p. <u>Si</u>

a) f <u>est prolongeable analytiquement dans le complémentaire</u> D <u>d'un ouvert simplement connexe</u> A <u>de</u> $\mathbb{C}$,

b) f <u>est prolongeable au sens de Krasner dans le complémentaire</u> D_p <u>d'un quasi-connexe</u> A_p <u>de</u> C_p,

c) $\tau(A) \prod_p \tau(A_p) < 1$ <u>où</u> τ <u>désigne le diamètre transfini,</u>

<u>alors</u> f <u>est une fraction rationnelle.</u>

3.3. - Fonctions localement analytiques

On dit évidemment qu'une fonction f est localement analytique sur une partie B de K si tout point de B possède un voisinage dans lequel f est strictement analytique.

Nous noterons $\mathcal{S}(B,K,\rho)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur B, à valeurs dans K, et dont la série de Taylor en chaque point a un rayon de convergence au moins égal à ρ (où ρ est un semi-réel, c'est-à-dire un couple $(r,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \times \{0,-\}$; le rayon semi-réel d'un disque fermé (resp. ouvert) de rayon réel r est alors $(r,0)$ (resp. $(r,-)$).

PROPOSITION 3.3.1. - Hily [7] - Soit A la boule unité de C_p, alors l'ensemble des exponentielles a^x où $|a-1| < p^{-1/p-1}$ est un système total dans $\mathcal{S}(A,C_p, 1^-)$.

PROPOSITION 3.3.2. - Amice [1] - Soit M un compact régulier de K, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite très bien répartie dans M, $P_n(x) = (x-u_o)\dots(x-u_{n-1})$, et, pour $f \in \mathcal{C}(M,K)$

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n Q_n \quad \text{où} \quad Q_n(x) = P_n(x) / P_n(u_n)$$

la représentation de f sur la base normale Q_n. Alors pour tout ρ, il existe une suite de constantes $\lambda_{n,\rho}$, explicites en fonction de M, telles que

$$f \in \mathcal{S}(M,K,\rho) \Leftrightarrow |b_n \lambda_{n,\rho}| \to 0 \ .$$

3.4. - Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions strictement analytiques sur un polydisque de rayon $(1,\dots,1)$ s'identifient encore aux séries entières restreintes.

Le prolongement analytique peut être étudié à l'aide des espaces analytiques rigides de Tate [16] (cf. aussi [8]). On obtient ainsi une bonne théorie des variétés analytiques, mais qui ne coïncide pas avec la théorie de Krasner dans le cas d'une variable.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Yvette. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. Fr., t. 92, 1964, pp. 117-160.

[2] AMICE Yvette et FRESNEL Jean. - Fonction Zêta p-adique des corps de nombres abéliens (à paraître).

[3] BERTRANDIAS Françoise. - Diamètre transfini dans un corps valué. Séminaire de théorie des nombres (Delange, Pisot) - Paris, 1963-64.

[4] DIEUDONNE Jean. - Sur les fonctions continues p-adiques. Bull. Soc. Math. Ser. 9, 68 (1944) pp. 79-95.

[5] GRUSON Laurent. - Alègres de Banach ultramétriques. Journées Poitou-Aquitaine de la S.M.F., Poitiers, 1966.

[6] HELSMOORTEL Eve. - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, n° 12, 1970, pp. 546-548.

[7] HILY Jacques. - Algèbres de fonctions localement analytiques. Thèse, Nancy, 1969.

[8] HOUZEL Christian. - Espaces analytiques rigides selon J. Tate. Journées Poitou-Aquitaine de la S.M.F., Poitiers, 1964.

[9] KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque international du C.N.R.S., n° 143, Clermont-Ferrand, 1964.

[10] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. Pub. Math. I.H.E.S., n° 14.

[11] LEVRON François. - Etude de bases topologiques polynômiales des fonctions continues définies sur un compact d'un corps valué, non archimédien, complet et à valeurs dans ce même corps. Thèse 3e cycle, Bordeaux, 1969.

[12] MAHLER Kurt. - An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable. Journ. f. die Reine u. Ang. Math., 1958.

[13] VAN DER PUT Marius. - Algèbres de fonctions continues p-adiques. Proc. Ned. Akad. v. Wet. 71, 1968, pp. 401-420.

[14] SCHNIREIMANN L. - Sur les fonctions dans les corps normés et algébriquement fermés. Bull. Acad. Sc. U.R.S.S. Cl. Sc. Math. sene math. (1938) pp. 487-498.

[15] SCHÖBE W. - Betrage zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern. Diss. Univ. Münster (1930).

[16] TATE John. - Rigid analytic spaces - private papers.

-:-:-:-

E. N. S. J. F.
48, boulevard Jourdan
75 - PARIS (14e) (France)