CHRISTIAN MALIVERT

Méthode de descente sur un fermé non convexe

Mémoires de la S. M. F., tome 60 (1979), p. 113-124
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__60__113_0>

Analyse non convexe [*1977. Pau*]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 60, 1979, p. 113-124.

METHODE DE DESCENTE SUR UN FERME NON CONVEXE

Christian MALIVERT

RESUME.- On introduit une classe de fermés suffisamment réguliers d'un espace de Hilbert, que l'on appelle " localement mollement convexes" (l. m. c.). Cette famille contient, en particulier, les sous-variétés fermées de classe $\mathcal{C}^2$ ainsi que les fermés convexes. On donne ensuite une définition nouvelle d'un point critique, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un fermé l. m. c., et on cherche à atteindre ces points par une méthode de descente. Utilisant ensuite la théorie de Lusternik-Schnirelman on précise le nombre de points critiques.

INTRODUCTION

Une façon simple et naturelle d'atteindre un minimum local pour une fonction f définie sur un ensemble X consiste à suivre une courbe sur laquelle f est décroissante. Lorsque X est un espace de Hilbert et f différentiable, de telles trajectoires sont obtenues comme solution de l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = -\text{grad } f(x(t))$$

C'est la méthode de descente suivant la plus grande pente.

Dans ce travail, X est un ensemble fermé d'un espace de Hilbert. Nous allons donc donner un sens à grad $f(x)$ pour $x \in X$ puis chercher à résoudre :

$$\dot{x}(t) = \text{proj}_{T_{x(t)}X} -\text{grad } f(x(t))$$

de façon à obtenir des trajectoires dans X sur lesquelles f décroit le plus rapidement possible.

$T_x X$ est le cône tangent à X en x défini dans §.1. On s'intéresse ensuite aux limites de ces trajectoires et pour prouver un théorème d'existence on remplace les hypothèses usuelles de compacité ou de dimension finie par une condition [C] introduite par R.S. PALAIS et S. SMALE.

Enfin, dans la dernière partie nous montrons que la théorie de Lusternik-Schnirelman s'étend au cas des fermés l. m. c., ce qui permet de relier le nombre de points limite et la structure topologique de X.

1. FERMES LOCALEMENT MOLLEMENT CONVEXES -

Dans la suite du texte, H désigne un espace de Hilbert et B la boule unité fermée. Le cône tangent à une partie X en $a \in X$ est :

$$T_a X = \{\lim_n t_n^{-1}(x_n - a) \mid t_n > 0,\ x_n \in X, \lim_n t_n = 0, \lim_n x_n = x\},$$

le cône normal à X en a étant :

$$N_a X = \{n \in H \mid (v \mid u) \leq 0, \forall u \in T_a X\} = (T_a X)^\circ$$

Nous appelons sous-différentiel en $a \in H$ d'une fonction quelconque $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ finie en a, l'ensemble

$$\partial f(a) = \{y \in H \mid (y, -1) \in N_{(a,f(a))} G^+(f)\}$$

où $G^+(f)$ est l'épigraphe de f dans $H \times \mathbb{R}$:

$$G^+(f) = \{(x, t) \in H \times \mathbb{R} \mid t \geq f(x)\}.$$

Cette notion introduite dans [11] est étudiée en détail dans [12]. On considère maintenant une classe de fonctions pour lesquelles les règles simples de calcul sous-différentiel restent vraies. En particulier la relation suivante est satisfaite :

$$\partial(f + g)(a) = \partial f(a) + \partial g(a)$$

DEFINITION 1.1.

Soit U un ouvert de H. Une fonction $d : U \to \mathbb{R}$ est dite localement mollement convexe (l. m. c.) sur U, si pour tout $a \in H$ il existe un voisinage ouvert V de a dans U, une fonction convexe continue $c : V \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^{1,1}$, $b : V \to \mathbb{R}$ (c'est-à-dire à dérivée localement lipschitzienne) de sorte que :

$$d|_V = b + c$$

Le résultat suivant montre que cette notion se conserve par $\mathscr{C}^2$ difféomorphisme.

PROPOSITION 1.2.

Soit $\Phi : U_0 \to U$ un $\mathscr{C}^2$ difféomorphisme, U_0 et U étant des ouverts de H. Si $d : U \to \mathbb{R}$ est l. m. c. alors $d \circ \Phi : U_0 \to \mathbb{R}$ est l. m. c.

C'est une conséquence du lemme suivant

LEMME 1.3.

Φ étant défini comme ci-dessus, $V \subset U$ étant ouvert, soient $c : V \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $b : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{1,1}$. Il existe $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tels que $c \circ \Phi + \frac{k_1}{2} \|.\|^2$ et $b \circ \Phi + \frac{k_2}{2} \|.\|^2$ soient des fonctions convexes sur $\Phi^{-1}(V)$.

Si d est l. m. c, $\partial d(a) = b'(a) + \partial c(a)$ où ∂c est le sous-différentiel de l'analyse convexe.

La définition suivante est proche d'une notion introduite par J.M. LASRY [6]. Une définition voisine a également été donnée par R. JANIN [5].

DEFINITION 1.4.

Un ensemble localement fermé X de H est dit localement mollement convexe (l. m. c.) si pour tout $x \in X$, $T_x X$ est convexe et si pour tout $a \in X$, il existe un ouvert convexe V contenant a et $d : V \to \mathbb{R}$, l. m. c. satisfaisant les deux *conditions suivantes :*

i) $X \cap V = d^{-1}(]-\infty, o])$

ii) $N_x X \cap B = \partial\, d(x) \cap B$ *pour tout* $x \in V \cap X$

La condition ii) est une condition de régularité qui exclut les fermés trop irréguliers.

A titre d'exemples de fermés l. m. c. citons les deux propositions suivantes

PROPOSITION 1.5.

Un fermé convexe est l. m. c.

Soient X un fermé convexe et $a \in X$, $d(.\,, X)$ la distance à X. Il suffit de prouver ii) et dans ce cas nous allons voir que si $x \in X$:

$$N_x X \cap B = \partial\, d(x, X).$$

D'après J.J. MOREAU [9] nous avons :

LEMME 1.6.

Soit $x \in H$, *tout* $z \in H$ *s'écrit sous la forme* $z = t + n$ *avec* $t \in T_x X$, $n \in N_x X$ *et* $(t \mid n) = 0$.

Nous en déduisons que si $v \in N_x X \cap B$ alors pour tout $z \in H$, $z = t + n$,

$$(v \mid z) = (v \mid t) + (v \mid n) \leqslant \|n\|.$$

D'autre part

$$d(x + z, X) - d(x, X) = d(x + z, X) = d(z, X - x) \geqslant \|n\|$$

car $X - x \subset T_x X$ et $d(z, T_x X) = \|n\|$.

De ces deux inégalités on conclut que $v \in \partial\, d(x, X)$. Inversement $v \in \partial\, d(x, X)$ implique $v \in N_x X$ et de plus

$$(v \mid v) \leqslant d(x + v, X) - d(x, X) \leqslant \|v\|$$

d'où

$$\|v\| \leqslant 1\,. \;\square\,.$$

PROPOSITION 1.7.

Une sous variété, avec ou sans bord, de classe $\mathcal{C}^2$ *de* H *est l. m. c.* .

X étant une telle sous-variété il existe au voisinage de tout $x \in X$ une représentation locale (U, Φ) telle que $V = \Phi(U)$, $Y = \Phi(U \cap X)$ et $d(.\,, Y) : V \to \mathbb{R}$ satisfassent les conditions de la définition 1.4. pour Y. On en déduit le résultat à l'aide de la proposition 2.1. $\square$

2. POINTS CRITIQUES D'UNE FONCTION DEFINIE SUR UN FERME L. M. C.

DEFINITION 2.1.

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ *définie sur un sous-ensemble fermé de* H *est dite différentiable sur* X, *si pour tout* $a \in X$ *il existe* $f'(a) \in H$ *vérifiant*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x+a\in X}} \frac{f(a+x)-f(a)-(f'(a)\mid x)}{\|x\|} = 0$$

Un tel $f'(a)$ est appelé dérivée au point a. Naturellement $f'(a)$ n'est pas unique en général. Ce sera cependant le cas si le cône $T_a X$ engendre l'espace H.

Dans le cas général nous pouvons seulement affirmer que la valeur $(f'(a) \mid v)$ pour $v \in T_a X$ est indépendante de la dérivée en a choisie. On déduit de ce résultat et du lemme 1.6. que la projection de $-f'(a)$ sur $T_a X$ est la même pour toutes les dérivées en a. On note donc

$$g(a) = \mathrm{proj}_{T_a X} -f'(a)$$

DEFINITION 2.2.

Une fonction différentiable $f : X \to \mathbb{R}$ est une $\mathcal{C}^{1,1}$ fonction sur un fermé X si pour tout $a \in X$ il existe une fonction lipschitzienne $f' : V \to H$ définie sur un voisinage V de a dans X telle que $f'(y)$ soit une dérivée de f en $y \in V$.

Dans toute la suite $f : X \to \mathbb{R}$ sera une fonction définie sur un fermé l. m. c. de H satisfaisant les deux conditions :

[A] f est $\mathcal{C}^{1,1}$ sur X.

[B] f est bornée inférieurement sur X.

Nous dirons que $x \in X$ est un point critique de f si $g(x) = 0$ où g a été définie précédemment. Le lemme de décomposition 1.6. montre que $x \in X$ est un point critique si et seulement si toute dérivée $f'(x)$ appartient à $-N_x X$.

Notons qu'un minimum local pour f sur X est un point critique alors qu'un maximum local ne l'est pas en général.

En effet, x étant un minimum local nous avons $(f'(x) \mid v) \geq 0$ pour tout $v \in T_x X$ d'où $-f'(x) \in N_x X$; par contre, si on considère $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$ nous voyons que $(1,0)$ est un maximum sur X et pourtant $g(1, 0) = (-2, 0)$.

Dorénavant nous noterons K l'ensemble des points critiques de f sur X.

On introduit maintenant une hypothèse [C] qui redonne la condition classique de PALAIS-SMALE [10] quand X est ouvert ou une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$.

[C] Toute suite (x_n) de X telle que la suite $f(x_n)$ soit bornée et $g(x_n)$ converge vers 0 admet au moins un point adhérent.

Remarquons que $f|_K$ est propre lorsque la condition [C] est satisfaite, et en particulier $f(K)$ est un fermé.

Bien que l'application $g : X \to H$ ne soit pas continue en général, elle possède cependant la propriété suivante :

PROPOSITION 2.1.

La fonction $x \mapsto \|g(x)\|$ *est semi-continue inférieurement sur* X *et* K *est un fermé de* X.

Preuve. Soit V choisi comme dans la définition 1.2. et soit $V_o \subset V$ un voisinage ouvert de $a \in X$. L'application $-f'$ que l'on peut supposer lipschitzienne et bornée sur $V_o \cap X$ admet un prolongement lipschitzien et borné $v : H \to H$ [13, th. 1.31].

Appelons m un réel tel que $\sup\limits_{x \in H} \|v(x)\| \leqslant m$. Utilisant le lemme 1.6. écrivons pour tout $x \in H$

$$v(x) = g_o(x) + n(x)$$

$g_o(x)$ et $n(x)$ étant les projections de $v(x)$ respectivement sur $T_x X$ et $N_x X$.

Lorsque $x \in V_o \cap X$, g_o est l'application g précédemment définie. Puisque $n(x) = \mathrm{proj}_{N_x X}\, v(x)$ et que $0 \in N_x X$ nous avons $\|n(x) - v(x)\| \leqslant m$ d'où $\|n(x)\| \leqslant 2\,m$ et par suite

$$n(x) \in [0, 2\,m]\ \partial\, d(x)$$

d'après la condition ii) de la définition 1.2.

Ainsi $n(x)$ est aussi la projection de $v(x)$ sur le convexe fermé $[0, 2\,m]\ \partial\, d(x)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, notons :

$$V' = \{y \in H \;/\; \|y - v(a)\| > \|g_o(a)\| - \varepsilon\}$$

C'est un ouvert faible de H contenant $[0, 2\,m]\ \partial\, d(a)$, puisque $d = b + c$ avec b de classe $\mathscr{C}^{1,1}$ et c convexe.

La multiplication $x \mapsto \partial\, d(x)$ étant semi-continue supérieurement relativement à la topologie faible sur l'espace d'arrivée, et à valeurs faiblement compactes, on en déduit que $x \mapsto [0, 2\,m]\ \partial\, d(x)$ est faiblement s. c. s. Nous pouvons donc trouver un voisinage $V_1 \subset V_o$ de a tel que pour tout $x \in V_1$:

$$[0, 2\,m]\ \partial\, d(x) \subset V'\ ,$$

Par suite pour $x \in V_1$

$$\|v(a) - n(x)\| > \|g_o(a)\| - \varepsilon$$

et pour tout V_2 tel que $\|v(x) - v(a)\| < \varepsilon$ si $x \in V_2$, avec $V_2 \subset V_1$, nous avons $\|g_o(x)\| = \|v(x) - n(x)\| > \|g_o(a)\| - \varepsilon - \|v(x) - v(y)\| > \|g_o(x)\| - 2\,\varepsilon$

3. UNE METHODE DE DESCENTE -

Nous dirons qu'une fonction absolument continue $x : [0,T) \to H$ est solution de

$$\text{(e)} \qquad \dot{x}(t) = g(x(t)),\ x(0) = x_o \in X$$

si pour tout $t \in [0, T)$, $x(t) \in X$ et si (e) est vérifiée p. p.. Notons que $g(x)$ n'est défini que si $x \in X$.

Le lemme suivant permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution.

LEMME 3.1.

Soient v, m, d *définis dans la proposition 2.1. et*

$$(e') \qquad \dot{x}(t) \in v(x(t)) -2\, m\, \partial\, d(x(t)), \quad x(0) = x_o .$$

Alors toute solution de (e) est solution de (e') et toute solution de (e') laissant X *invariant est solution de (e).*

Soit $x : [0, T) \to X$ une solution de (e'); posons

$$j(t) = v(x(t)) -2\, m\, b'(x(t)) .$$

Alors x vérifie

$$\dot{x}(t) \in -2\, m\, \partial\, c(x(t)) + j(t) \qquad x(0) = x_o .$$

Puisque v et b' sont lipschitziennes, j est à variation bornée sur $[0, T']$ pour tout T' fini de $[0, T]$ et d'après la proposition 3.3. de H. BREZIS [3], x est dérivable à droite sur $[0, T[$ et

$$\dot{x}(t) = [j(t) -2\, m\, \partial\, c(x(t))]_o \quad \text{où} \quad [A]_o = \text{proj}_A\, 0 .$$

Nous en déduisons que

$$\dot{x}(t) = [v(x(t)) -2\, m\, \partial\, d(x(t))]_o$$

et d'après la condition ii) de la définition 1.2.

$$\dot{x}(t) = [v(x(t)) -N_{x(t)}\, X]_o$$

Pour simplifier l'écriture, notons provisoirement $\dot{x}$, v, $N_x\, X$, $T_x\, X$ au lieu de $\dot{x}(t)$, $v(x(t))$, $N_{x(t)}X$, $T_{x(t)}\, X$.

Nous avons

$$\dot{x} = [v -N_x\, X]_o = -[N_x\, X -v]_o$$

et par translation

$$v -\dot{x} = \text{proj}_{N_x X}\, v$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi

$$\dot{x} = \text{proj}_{T_x X}\, v$$

c'est-à-dire

$$\dot{x}(t) = g(x(t)).$$

Inversement si x est une solution de (e) nous avons

$$\dot{x}(t) = [v(x(t)) -N_{x(t)}X]_o = [v(x(t)) -2\, m\, \partial\, d(x(t))]_o$$

d'où

$$\dot{x}(t) \in v(x(t)) -2\, m\, \partial\, d(x(t)). \quad \square$$

THEOREME 3.2.

Sous les hypothèses [A] et [B] déjà introduites, (e) possède une solution unique $x(t, x_o)$ *définie sur* $[0, +\infty[$ *quel que soit* $x_o \in X$.

Soit

$$(e') \qquad \dot{x}(t) \in -2\, m\, \partial\, c(x(t)) + B(x(t)) \qquad x(0) = y$$

où $B(x) = v(x) - 2\, m\, b'(x)$.

L'application B étant lipschitzienne, il résulte de la proposition 3.12 de H. BREZIS [3] que pour tout $T \in \mathbb{R}$ et tout y dans un voisinage V de x_o, que nous pouvons supposer fermé, (e') possède une solution unique définie sur $[0, T]$ issue de y.

Notons $x(t, y)$ cette solution et $U(t, s)\, y = x(t - s, y)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t$.

Nous définissons ainsi une évolution de type ω au sens de R.H. MARTIN [8], ce qui signifie que les conditions suivantes sont satisfaites.

(U_1) $U(t, t)\, y = y$ pour tout $y \in V$ et $t \geqslant 0$

(U_2) $U(t, s)\, U(s, r)\, y = U(t, r)\, y$ pour tout $y \in V$ et $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t$

(U_3) Pour tout $y \in V$ l'application $(t, s) \to U(t, s)\, y$ est continue de $\Delta = \{(t, s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ dans H

(U_4) $|U(t, s)\, y - U(t, s)\, z| \leqslant |y - z|\, e^{\omega(t-s)}$ pour tout $y, z \in V$ et $0 \leqslant s \leqslant t$.

Par une méthode semblable à celle employée par R.H. MARTIN [8] nous obtenons

LEMME 3.3.

Soient C est un fermé d'un espace de Banach H contenu dans un fermé V et U une évolution de type ω. Si de plus il existe un ouvert V_o de H tel que pour tout $y \in V_o \cap C$

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{d(U(t+h, t)\, y\, ;\, C)}{h} = 0$$

Alors pour tout $y \in V_o \cap C$, il existe $T > 0$ tel que $U(t, s)\, y \in C$ pour tout $t \in [s, s + T]$.

Les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées en prenant $C = X \cap V$ et par conséquent il existe $T > 0$ tel que la solution $x(t, x_o)$ de (e') satisfasse $x(t) \in X$ pour $t \in [0, T]$.

D'après le lemme 3.1., $x(t, x_o)$ est donc l'unique solution de (e) définie sur $[0, T]$.

Montrons maintenant que la solution maximale de (e) est définie sur $[0, +\infty[$.

Sinon, soit $x : [0, T[\to X$ cette solution maximale avec T fini.

Posons $h(t) = f(x(t)$, d'où

$$h'(t) = ((\dot{x}\, t)) \mid x(t)) = -\|g(x(t))\|^2 \,.$$

Pour tout $s \in [0, T[$ h est absolument continue sur $[0, s]$ donc

$$h(s) - h(0) = \int_0^s h'(t)\, dt = -\int_0^s \|g(x(t)\|^2\, dt \,.$$

D'après l'hypothèse [B]

$$\int_0^s \|g(x(t))\|^2\, dt \leqslant M < \infty \,.$$

Si maintenant $0 < t_1 < t_2 < T$ nous avons :

$$\|x(t_2)-x(t_1)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|g(x(t))\|\,dt \leqslant (t_2-t_1)^{1/2}\left(\int_{t_1}^{t_2}\|g(x(t))\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\leqslant (t_2-t_1)^{1/2} M^{1/2}$$

H étant un espace complet nous prouvons ainsi l'existence de

$$x_T = \lim_{t\to T} x(t)\,.$$

Puisque X est fermé $x_T \in X$.

On peut donc trouver un prolongement de x, ce qui contredit la maximalité.

PROPOSITION 3.4.

Si $x(\cdot, x_0) : [0, \infty[\to X$ est la solution maximale de (e), alors pour tout $T > 0$ l'application $x : [0, T] \times X \to X$ est continue.

Pour tout $t_0 \geqslant 0$ il existe $h > 0$ tel que pour tout $t \in [0, h]$, $t \mapsto x(t + t_0, x_0)$ est la solution de

$$\text{(e')} \quad \dot{x}(t) \in -2\,m\,\partial\, c(x(t)) + B(x(t)) \qquad x(0) = x(t_0, x_0)$$
$$B(x) = v(x) - 2\,m\,b'(x).$$

Nous déduisons de la proposition 3.12 et du lemme 3.1. de H. BREZIS [2] l'existence de $K > 0$ satisfaisant

$$|x(t, x_1) - x(t, x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2| \quad \text{pour} \quad t \in [t_0, t_0 + h]$$

et x_1, x_2 dans un voisinage de $x(t_0, x_0)$.

La compacité de $[0, T]$ permet d'établir la même inégalité pour $t \in [0,T]$ et x_1, x_2 dans un voisinage de x_0.

Ainsi pour x_1 dans ce voisinage et t_1, $t_2 \in [0, T]$

$$|x(t_1, x_1) - x(t_0, x_0)| \leqslant |x(t_1, x_1) - x(t_1, x_0)| + |x(t_1, x_0) - x(t_0, x_0)|$$
$$\leqslant K\,|x_1 - x_0| + |t_1 - t_0|^{1/2} M^{1/2}$$

4. POINT LIMITE ET CARACTERISATION de K.

On dira que $a \in H$ est un point limite d'une trajectoire s'il existe $x_0 \in X$ et une suite croissante (t_n) de limite $+\infty$ de telle sorte que

$$a = \lim_n x(t_n, x_0)$$

Si (x_n) est une suite de X telle que $(f(x_n))$ soit une suite bornée et $\lim_n g(x_n) = 0$ alors l'hypothèse [C] entraîne l'existence d'une sous-suite convergente (x_{n_k}). On déduit alors de la proposition 2.1. que $g(\lim_k x_{n_k}) = 0$, c'est-à-dire $\lim_k x_{n_k} \in K$.

Le résultat suivant donne une caractérisation de l'ensemble critique K.

THEOREME 4.1.

$a \in X$ appartient à K si et seulement si c'est un point limite.

Preuve- La nécessité est évidente puisque pour tout $a \in K$ l'application constante $x(t) = a$ pour tout $t \in [0, \infty[$ fournit une trajectoire issue de a dont a est point limite.

Soit maintenant $a = \lim_n x(t_n)$ un point limite supposé tel que $g(a) \neq 0$. D'après la proposition 2.1., il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in B(a, r)$:

$$\|g(y)\| \geq \frac{\|g(a)\|}{2}$$

Puisque x est uniformément continue, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$x([t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon]) \subset B(a, r)$$

quel que soit $n > N$.

Sans perte de généralité nous pouvons supposer $t_{n+1} - t_n \geq 2\varepsilon$ puisque (t_n) est croissante de limite $+\infty$. Ainsi

$$\infty > \int_0^\infty \|g(x(t))\|^2 \, dt \geq \sum_{n=N}^{\infty} \int_{t_n-\varepsilon}^{t_n+\varepsilon} \|g(x(t))\|^2 \, dt \geq \sum_{n=N}^{\infty} 2\varepsilon \frac{\|g(a)\|^2}{2}$$

L'hypothèse $g(a) \neq 0$ entraîne la divergence de la série de droite d'où une contradiction.

Par suite $g(a) = 0$ et $a \in K$. □

THEOREME 4.2.

Sous l'hypothèse [C], K est non vide et pour tout $x_0 \in X$, $x(t, x_0)$ admet un point adhérent appartenant à K.

Preuve- Nous avons vu que

$$\int_0^\infty \|g(x(t))\|^2 \, dt < \infty .$$

Il existe donc une suite croissante (t_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_n g(x(t_n)) = 0$.

D'après [B] $(f(x(t_n)))$ est une suite bornée et l'hypothèse [C] montre l'existence d'une sous-suite convergente de (x_n). Sa limite est un point limite à notre sens, c'est-à-dire un point de K. □

THEOREME 4.3.

L'infimum de f sur X est atteint si la condition [C] est satisfaite.

Preuve- Soit $\alpha = \inf_{x \in X} f(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in X$ tel que

$$\alpha \leq f(x_n) \leq \alpha + \frac{1}{n}$$

La trajectoire $x(t, x_n)$ admet un point limite $q_n \in X$ satisfaisant

$$\alpha \leq f(q_n) \leq \alpha + \frac{1}{n}$$

Puisque $q_n \in K$ l'hypothèse [C] entraîne l'existence d'une sous-suite (q_{n_k}) convergeant vers $q \in X$ et nécessairement $\alpha = f(q)$. □

5. UNE APPLICATION de la THEORIE de LUSTERNIK-SCHNIRELMAN au CAS d'un FERME l.m.c.

DEFINITION 5.1.

Soit A *un sous-ensemble d'un espace topologique* X. *Cat(A, X), la catégorie de* A *par rapport à* X, *est définie comme suit :*

Cat(A, X) = 1 si A *est contractile sur* X *en un point de* X

Cat(A, X) = κ *si* κ *est le plus petit entier tel que* A *puisse être recouvert par* κ *fermés de catégorie 1 par rapport à* X.

Cat(A, X) = + ∞ sinon.

Notons

$$K_c = \{x \in K \mid f(x) = c\}$$

$$f^c = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$$

$$m_k = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \mathrm{cat}(f^c, X) \geq k\}$$

Prenons X, $f : X \to \mathbb{R}$, $x : [0, \infty[\times X \to X$ définis comme dans la section précédente, les hypothèses [A] [B] [C] étant satisfaites.

THEOREME 5.2.

Pour tout $c \in f(X)$ *et tout voisinage* U *de* K_c *dans* X, *on peut trouver* $\eta > 0$ *tel que* $(f^{c+\eta} \setminus U)$ *puisse être déformé en un sous-ensemble de* $f^{c-\eta}$.

Soit

$$U_\eta = \{p \in X \ / \ |f(p) - c| < \eta \text{ et } f(p) - f(x(1, p)) < 2\eta\}$$

c'est un ouvert contenant K_c .

Montrons d'abord que pour tout voisinage U de K_c dans X on peut trouver η tel que $U_\eta \subset U$.

Sinon pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $p_n \in U_{1/n} - U$.

Puisque

$$f(p_n) - f(x(1, p_n)) = \int_0^1 \|g(x(t), p_n)\|^2 dt < \frac{2}{n}$$

il existe $t_n \in [0, 1]$ vérifiant

$$\|g(x(t_n), p_n)\| < \frac{2}{n}$$

De plus

$$c - \frac{3}{n} \leq f(p_n) - \frac{2}{n} \leq f(x(1, p_n)) \leq f(x(t_n, p_n)) \leq f(p_n) \leq c + \frac{1}{n}$$

L'hypothèse [C] permet donc de trouver (n_k) et $q \in K_c$ satisfaisant

$$q = \lim_k x(t_{n_k}, p_{n_k})$$

D'autre part, de l'inégalité

$$|x(0, p_{n_k}) - x(t_{n_k}, p_{n_k})| \leq \int_0^{t_{n_k}} \|g(x(t, p_{n_k}))\| \, dt$$

$$\leq (t_{n_k})^{1/2} \left(\int_0^{t_{n_k}} \|g(x(t, p_{n_k}))\|^2 \, dt\right)^{1/2}$$

nous déduisons

$$|p_{n_k} - x(t_{n_k}, p_{n_k})| \leq \left(\frac{t}{n_k}\right)^{1/2}$$

Ainsi $\lim_k p_{n_k} = q$ avec $q \in K_c$ d'où une contradiction avec $p_{n_k} \notin U$.

Pour conclure cette preuve choisissons $\eta > 0$ tel que $U_\eta \subset U$ et $p \in (f^{c+\eta} \setminus U)$ et montrons que $f(x(1, p)) \in f^{c-\eta}$.

Si $f(p) < c - \eta$ alors $f(x(1, p)) \leq f(p) < c - \eta$

Si $f(p) \geq c - \eta$ alors puisque $p \notin U_\eta$, $f(p) - f(x(1, p)) \geq 2\eta$ d'où $f(x(1, p)) \leq f(p) - 2\eta \leq c + \eta - 2\eta = c - \eta$

THEOREME 5.3.

Supposons que tout point de X ait un voisinage contractile dans X.

Alors le nombre de points de K est supérieur ou égal à cat X, si cat X est fini, et K est infini si cat $X = +\infty$.

Si f est bornée sur K et s'il existe un plus grand entier k_o pour lequel m_k est fini, alors $k_o =$ cat X.

Si pour un nombre réel r, il existe un entier s tel que $r = m_s = m_{s+1}$ alors $K \cap f^{-1}(r)$ est infini.

Il suffit d'appliquer le théorème 2 de BROWDER [2], les hypothèses étant satisfaites.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMBROSETTI A.- *Teoria di Lusternik-Schnirelman su varieta con bordo negli su spazia di Hilbert.*- Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.- 45.- 1971 p. 337-353.

[2] BROWDER F.E.- *Non linear Eigenvalue Problems and Group Invariance* dans *Functional Analysis and Related Fields.*- F.E. BROWDER ed. Springer-Verlag.- 1970.

[3] BREZIS H.- *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.*- North Holland Math. Studies.- North Holland 1973.

[4] HENRY C.- Jour. Math. Anal and Appl. 41.- 1973.- p. 179-186.

[5] JANIN R.- *Sur la dualité et la sensibilité dans les problèmes de programmation mathématique.*- Thèse, Paris 1974.

[6] LASRY J.M.- Communication personnelle

[7] MALIVERT C.- *Optimisation sur une variété anguleuse ou un fermé non convexe.* Thèse de 3ème cycle Pau 1977.

[8] MARTIN R.H.- *Invariant Sets for Evolution Systems.*- Int. Conf. on diff. equations.- H.A. Antosiewicz ed. Acad. Press. New-York p. 510-536.

[9] MOREAU J.J.- *Décomposition orthogonale d'un espace Hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires*.- C.R.A.S. Paris 255, p. 238-240, 1962.

[10] PALAIS R.S.- *Critical Point Theory and The Minimax Principle*.- Proc. Symp. Pure Math Berkeley.- 15 - 1968 - p. 185-212.- Amer. Math. Soc. 1970.

[11] PENOT J.P.- C.R.A.S. 278, Série A, p. 553 1974

[12] PENOT J.P.- Jour. Funct. Anal. 27 (2).- p. 248-276.- 1978

[13] SCHWARTZ J.T.- *Nonlinear funct. Analysis*.- New-York University.- Courant Institute of Math. Sci. 1965.

UNIVERSITE DE LIMOGES
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
123, rue Albert Thomas
87060 - LIMOGES-CEDEX