MÉMOIRES DE LA S. M. F.

B. ANGENIOL

F. EL ZEIN

Appendice : « La classe fondamentale relative d'un cycle »

Mémoires de la S. M. F., tome 58 (1978), p. 67-93

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1978__58__67_0>

APPENDICE

LA CLASSE FONDAMENTALE RELATIVE D'UN CYCLE

par

B. ANGENIOL et F. EL ZEIN

Universités Paris-Sud et Paris VII

INTRODUCTION

Soient S un schéma et X un schéma localement de type fini et équidim. de dim relative p sur S.

On se propose de répondre aux trois questions suivantes :

- 1. Soit $i : X \to Y$ une immersion fermée dans un schéma Y lisse sur S de dim relative n. Construire un élément $C_{X/S} \in H_X^{n-p}(Y, \Omega_{X/S}^{n-p})$ qui induit en tout point de S à valeur dans un corps K la classe fondamentale C_{X_K}. Grothendieck énonce cette propriété dans le cas absolu, en disant que l'anneau de Chow : "$A^{\bullet}(X)$ est un objet cohomologique initial".

- 2. Soit $h : X \to Y$ un S-morphisme fini et plat, avec Y lisse sur S ; on a un morphisme $\mathrm{Tr}\, h : h_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ qui induit pour tout entier ℓ un morphisme trace $\mathrm{Tr}\, h : h_* h^* \Omega^{\ell}_{Y/S} \to \Omega^{\ell}_{Y/S}$. Existe-t-il un prolongement de la trace à $h_* \Omega^{\ell}_{X/S}$; même pour S le spectre d'un corps, le problème n'est pas trivial.

- 3. Soient $u_1, \ldots, u_p$ des sections de $\mathcal{O}_X$ sur X, qui définissent une sous-variété de $V(u_1, \ldots, u_p)$ dans X, qui soit propre et surjective sur S, et ω une forme dans $\Gamma(X, \Omega^p_{X/S})$, généraliser la définition du Résidu de Grothendieck $\mathrm{Rés}^X_S\begin{bmatrix}\omega \\ u_1, \ldots, u_p\end{bmatrix} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ au cas où X n'est plus nécessairement lisse sur S.

Ces trois questions sont fondamentalement équivalentes et admettent une réponse positive pour X de Tor. dim. finie sur S, et en particulier plat sur S. La propriété de changement de base est vraie dans le cas transversal à X sur S.

Ces trois questions sont liées par la théorie de la dualité qui utilise les complexes dualisants introduits dans [6].

Le complexe dualisant $\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}$ est un objet dans la catégorie dérivée des modules cohérents sur X, c'est-à-dire un complexe de faisceaux admettant des faisceaux de cohomologie cohérents, et définis à quasi-isomorphisme près. Nous introduisons la notions de "propriété de la trace" et nous définissons la classe fondamentale relative $C_{X/S}$ comme un morphisme de $\Omega^p_{X/S}[p]$ dans $\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}$ qui vérifie cette propriété.

D'après une suggestion de P. Deligne, nous utilisons le théorème de Bott sur les Grassmanniennes pour démontrer l'existence de $C_{X/S}$. Nous avons aussi bénéficié des remarques de J.L. Verdier.

§ 1.- PRELIMINAIRES SUR LES GRASSMANNIENNES

Nous considérons dans ce travail des schémas noethériens et des morphismes séparés et de type fini, et nous adoptons dans ce qui suit les notations de Grothendieck ([5] I.9.7, nouvelle édition).

1.1.- Théorème.- *Soient* Z *un schéma,* $\mathcal{E}$ *un faisceau localement libre sur* Z, $G_p(\mathcal{E})$ *la Grassmannienne représentant "le foncteur des quotients localement libres de rang* p *de* $\mathcal{E}$", $\pi : G_p(\mathcal{E}) \to Z$ *la projection canonique et* $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ *le faisceau canonique localement libre de rang* p, *quotient de* $\pi^*\mathcal{E}$. *Alors pour tout* $\mathcal{O}_Z$*-module cohérent* $\mathcal{M}$, *le morphisme canonique :*

$$I_{\mathcal{E}} : \Gamma(Z,\overset{p}{\Lambda}\mathcal{E}) \otimes \Gamma(Z,\mathcal{M}) \to \Gamma(G_p(\mathcal{E}),\pi^*\overset{p}{\Lambda}\mathcal{E}) \otimes \Gamma(G_p(\mathcal{E}),\pi^*\mathcal{M}) \to$$
$$\Gamma(G_p(\mathcal{E}),\overset{p}{\Lambda}\mathcal{K}_{\mathcal{E}} \otimes \pi^*\mathcal{M})$$

induit un isomorphisme $\overset{p}{\Lambda}\mathcal{E} \otimes \mathcal{M} \simeq \pi_*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{K}_{\mathcal{E}} \otimes \pi^*\mathcal{M})$ *sans condition sur la caractéristique si* $\mathcal{M}$ *est localement libre, et en car. zéro sinon.*

Démonstration.- Dans le cas où $\mathcal{M}$ est localement libre, ce théorème est un cas particulier du théorème de Bott d'abord montré dans [1] et dont la démonstration a été simplifiée par Demazure dans [2] et [3] ; une démonstration purement géométrique peut être trouvée dans [8] . On indique seulement comment on étend le théorème au cas où $\mathcal{M}$ est cohérent.

En tout point de Z, il existe un voisinage ouvert V affine et une suite exacte exacte sur V : $\mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to 0$ où $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ sont des faisceaux libres.

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\mathrm{I} \qquad \overset{p}{\Lambda}\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}' \longrightarrow \overset{p}{\Lambda}\mathcal{E}\otimes\mathcal{L} \longrightarrow \overset{p}{\Lambda}\mathcal{E}\otimes\mathcal{M} \to 0$$

$$\mathrm{II} \qquad \pi_*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{L}') \to \pi_*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{L}) \to \pi_*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{M}) \to 0$$

La suite I est évidemment exacte. Il suffit de démontrer que la suite II est exacte, ce qui est vrai si le foncteur π_* est exact pour les faisceaux $\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur V. Or, d'après la formule de projection ([6] ,ch.II, prop.5.6), on a :

$$\mathbb{R}\pi_*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\pi_*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}})\otimes\mathcal{F}$$

Si S est de caractéristique zéro, on a $R^1\pi_*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}) = 0$, ce qui donne le résultat cherché.

1.2.- __Corollaire__.- Avec les notations du théorème, soient F *un fermé dans* $G_p(\mathcal{E})$ *de codim* ≥ 2 *fibre par fibre sur* Z, *l'ouvert* $U = G_p(\mathcal{E}) - F$ *et* $j : U \to G_p(\mathcal{E})$ *l'immersion canonique. Alors, on a un isomorphisme canonique :*

$$I_{\mathcal{E}} : \overset{p}{\Lambda}\mathcal{E}\otimes\mathcal{M} \to (\pi\circ j)_*j^*(\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{M}).$$

__Démonstration__.- Il suffit de démontrer pour tout ouvert affine V de Z, l'isomorphisme :

$$\Gamma(\pi^{-1}(V),\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{M}) \simeq \Gamma((\pi^{-1}V)\cap U,\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{M}).$$

Lorsque $\mathcal{M}$ est localement libre, le faisceau $\mathcal{K} = \overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{M}$ est localement libre sur $G_p(\mathcal{E})$. Considérons la suite exacte :

$$0 \to \underline{\Gamma}_F\mathcal{K} \to \mathcal{K} \to j_*j^*\mathcal{K} \to \underline{H}^1_F(\mathcal{K}) \to 0.$$

On obtient le résultat cherché en appliquant le lemme que l'on démontre plus tard (Cor.II.1).

__*Lemme 1.2*__.- *Avec les notations ci-dessus ,* $\underline{\Gamma}_F\mathcal{K} = 0 = \underline{H}^1_F(\mathcal{K})$.

- Si $\mathcal{M}$ est cohérent, considérons sur V assez petit une suite exacte : $\mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to 0$, où $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ sont des faisceaux libres sur V. On a le diagramme

$$\mathrm{I} \qquad \Gamma(\pi^{-1}V,\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{L}') \to \Gamma(\pi^{-1}V,\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{L}) \to \Gamma(\pi^{-1}V,\overset{p}{\Lambda}\mathcal{H}_{\mathcal{E}}\otimes\pi^*\mathcal{M}) \to 0$$

$$\mathrm{II} \qquad \Gamma((\pi^{-1}V)\cap U, \quad '' \quad) \to \Gamma((\pi^{-1}V)\cap U, \quad '' \quad) \quad \Gamma((\pi^{-1}V)\cap U, \quad '' \quad) \to 0$$

D'après le théorème, la suite I est exacte. Pour obtenir l'exactitude de la suite II, si $j_V : (\pi^{-1}V) \cap U \to \pi^{-1}V$ désigne l'immersion, on se ramène, en utilisant la formule de projection, à démontrer : $R^1(\pi \circ j_V)_*(\overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}_{\mathcal{E}}) = 0$. Or, en utilisant le calcul de la cohomologie de Čech à l'aide d'un recouvrement affine U_i de $\pi^{-1}V$, et en appliquant le lemme, on a :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod_i \Gamma(U_i, \overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}_{\mathcal{E}}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \prod_{i,j} \Gamma(U_{ij}, \overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}_{\mathcal{E}}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \prod_{i,j,k} \Gamma(U_{ijk}, \overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}_{\mathcal{E}}) \arrow[d, "\wr"] \\
 & \prod_i \Gamma(U_i \cap U, '') \arrow[r] & \prod_{i,j} \Gamma(U_{ij} \cap U, '') \arrow[r] & \prod_{i,j,k} \Gamma(U_{ijk} \cap U, '')
\end{tikzcd}
$$

d'où $H^1(\pi^{-1}V \cap U, \overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}_{\mathcal{E}}) = H^1(\pi^{-1}V, \overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}_{\mathcal{E}})$, et tous les deux sont nuls en caractéristique zéro.

1.3.- Considérons un schéma S et un S-morphisme $h : Z \to S \times_{\mathbb{Z}} A^n = A^n_S$, où A^n désigne l'espace affine de dim n sur $\mathbb{Z}$. Soient H^p_n le fibré canonique associé au faisceau canonique $\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}^n}$ sur $G^p_n = G_p(\mathbb{Z}^n)$ ($H^p_n = \mathbb{V}(\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}^n})$ avec les notations de ([5] I.9 .4, nouvelle édition), et $\gamma : A^n \times_{\mathbb{Z}} G^p_n \to H^p_n$ la projection canonique. On a le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
G^p_{n,Z} = Z \times G^p_n \arrow[r, "\delta = h \times Id"] \arrow[dr] & S \times A^n \times G^p_n = A^n_{G^p_{n,S}} \arrow[r, "\gamma_S"] \arrow[d] & S \times H^p_n = H^p_{n,S} \arrow[dl] \\
 & S \times G^p_n = G^p_{n,S} &
\end{tikzcd}
$$

Le faisceau $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Z \otimes \check{\Omega}^1_{A^n_S/S}$ est libre de rang n sur $\mathcal{O}_Z$, d'où la grassmannienne :

$\pi : G_p(\mathcal{E}) \to Z$ est isomorphe à $G^p_{n,Z} \to Z$. Alors on a les isomorphismes :

$$\pi^* \mathcal{E} \simeq \delta^* \check{\Omega}^1_{A^n_{G^p_{n,S}}/G^p_{n,S}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\mathcal{E}} \simeq \Gamma_h^* \check{\Omega}^1_{H^p_{n,S}/G^p_{n,S}} \quad \text{où} \quad \Gamma_h = \gamma_S \circ \delta .$$

La projection $\pi^* \mathcal{E} \to \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ s'identifiant au dual de la différentielle de γ_S. Nous utiliserons souvent la propriété (P') suivante de h :

(P') Le morphisme $\Gamma_h : Z \times G^p_n \to H^p_{n,S}$ *est quasi-fini sur un ouvert de complémentaire* F *de codim* ≥ 2 *fibre par fibre sur* Z.

<u>*Lemme 1.3.*</u>*- Soit* $g : Z \to S$ *un morphisme équidimensionnel de dim relative* p.

i) *Soient* $h : Z \to A^n_S$ *et* $f : Z \to A^{n+1}_S$ *des* S*-morphismes tels que* $p_1 \circ f = h$ *où* p_1 *désigne la projection de* A^{n+1}_S *sur les* n *premières coordonnées.*

Si $p \leq n-1$ *et si* h *vérifie* (P'), *alors* f *vérifie* (P') *aussi.*

ii) Soit $V \to A^p_S$ *un* S-*morphisme quasi-fini d'un ouvert* V *dans* Z; *alors on peut en déduire un* S-*morphisme quasi-fini* $h : V \to A^n_S$ *avec* $p \leq n-1$, *vérifiant* (P').

iii) Tout point z *de* Z *admet un voisinage ouvert* V *tel qu'il existe une* S-*immersion fermée* $i : V \to A^n_S$ *avec* $p \leq n-1$, *vérifiant la propriété* (P').

Démonstration i) - Soient F^n (resp. F^{n+1}) le fermé où $\Gamma_h : G^p_{n,Z} \to H^p_{n,S}$ (resp. $\Gamma_f : G^p_{n+1,Z} \to H^p_{n+1,S}$) est non quasi-fini.

1.- Réduction au cas où S est un corps algébriquement clos

Soit un point $u \in Z \times G^p_{n+1}$ d'image z dans Z et s dans S ; le morphisme Γ_f est quasi-fini en u si et seulement si, après le changement de base $k(s) \to S$, le morphisme $\Gamma_{f,s}$ qui s'en déduit l'est aussi.

Soient k une clôture algébrique de $k(s)$, $\overline{Z} = Z \times_S k$ et $\overline{F}^{n+1} = F^{n+1} \times_S k$; la fibre F^{n+1}_z est l'image de $U_{\overline{z}}\, \overline{F}^{n+1}_{\overline{z}}$ pour $\overline{z}$ au-dessus de z en nombre fini, ce qui nous ramène au cas où $S = \mathrm{spec}.k$; de plus, on peut supposer alors que le point z est fermé dans Z, et en considérant des translations convenables dans A^n et A^{n+1}, on se ramène au cas où $h(z) = 0$ et $f(z) = 0$.

2.- $G^p_{n+1,k} = k \times_{\mathbb{Z}} G^p_{n+1}$

La variété $\mathrm{Hom}_k(k^{n+1},k^p)/\mathrm{Aut}(k^p)$ contient les différentes grassmanniennes $G^q_{n+1,k}$ pour $q \in [0,p]$ comme des sous-variétés localement fermées, et on a : $G^p_{n+1,k} \simeq \mathrm{Hom}^s_k(k^{n+1},k^p)/\mathrm{Aut}(k^p)$, où l'indice s indique que l'on considère les morphismes surjectifs seulement.

Soient $(e_i)_{i\in[1,n+1]}$ la base canonique de k^{n+1}, et des indices $i_1 <\ldots< i_p$ dans $[1,n+1]$; les classes des morphismes $\varphi : k^{n+1} \to k^p$ tels que $[\varphi(e_{i_j})]^p_{j=1}$ engendrent k^p forment un ouvert $G^{n+1}_{i_1\ldots i_p}$ dans $G^p_{n+1,k}$, isomorphe à $k^{(n+1-p)p}$, et si $\pi : \mathrm{Hom}^s(k^{n+1},k^p) \to G^p_{n+1,k}$ désigne la projection canonique, l'ouvert $U^{n+1}_{i_1\ldots i_p} = \pi^{-1} G^{n+1}_{i_1\ldots i_p}$ est fibré sur $G^{n+1}_{i_1\ldots i_p}$ et le choix d'un morphisme φ tel que $\varphi(e_{i_j}) = e_j$ dans k^p détermine une section de ce fibré : $U^{n+1}_{i_1\ldots i_p} \simeq \mathrm{Aut}(k^p)\times G^{n+1}_{i_1\ldots i_p}$. Dans la suite, on identifie un élément de $G^{n+1}_{i_1\ldots i_p}$ à son image par cette section.

La démonstration du lemme étant facile pour les courbes sur S, (en dim relative 1), on va chercher à s'approcher de ce cas.

3.- <u>Codim $(F_z^n, G_{n,k}^p) \geq 2$ implique Codim $(F_z^{n+1} \cap G^{n+1}_{i_1\ldots i_p}, G^{n+1}_{i_1\ldots i_p}) \geq 2$ pour z fermé dans Z</u>

Les éléments $\varphi \in G^p_{n+1,k}$ nuls sur e_{n+1} s'identifient aux éléments de $G^p_{n,k}$; alors $F_z^{n+1} \cap G^p_{n,k} = F_z^n$ est de codim ≥ 2 dans $G^p_{n+1,k}$, ce qui permet de négliger les éléments φ tels que $\varphi(e_{n+1}) = 0$, et de supposer $i_p = n+1$. On représente un élément $\varphi \in G^{n+1}_{i_1\ldots i_{p-1},n+1}$ par une matrice M à coefficients α_j^i telle que $\alpha_j^i = 1$ pour $i = i_j$, la colonne i_j étant nulle ailleurs, L_p désigne la dernière ligne et C_{n+1} la dernière colonne.

$$
\begin{array}{c} \\ M'' \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ L_p \left\{ \begin{array}{c} \\ \end{array}\right. \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} i_1 & & i_{p-1} & & n+1 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc}
1 & & 0 & \cdot & 0 \\
0 & \alpha_j^i & 0 & \cdot & 0 \\
0 & & 1 & \cdot & 0 \\
\hline
0 & \alpha_p^i & 0 & \cdot & 1
\end{array}\right) M \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{M'} \quad \underbrace{\quad}_{C_{n+1}}
\end{array}
$$

Si on désigne par $H_{i_1\ldots i_{p-1}}$ les morphismes $\varphi : k^n \to k^p$ tels que $\varphi(e_{i_j}) = e_j$ pour $j \in [1,p-1]$, on identifie dans la suite $G_{i_1\ldots i_{p-1},n+1}$ à $H_{i_1\ldots i_{p-1}}$ en associant à toute matrice M la matrice $M' = M - C_{n+1}$. On définit le morphisme $\pi' : H_{i_1\ldots i_{p-1}} \to G^n_{i_1\ldots i_{p-1}} \subset G^{p-1}_{n,k}$ en associant à M' la matrice $M' - L_p$.

$$
\begin{tikzcd}
G_{i_1\ldots i_{p-1},n+1} \simeq H_{i_1\ldots i_{p-1}} \arrow[rr, "\sim", "T_z"'] \arrow[dr, "\pi'"'] & & k^{n+1-p} \times G^n_{i_1\ldots i_{p-1}} \arrow[dl] \\
& G^n_{i_1\ldots i_{p-1}} &
\end{tikzcd}
$$

<u>Les matrices dans $H_{i_1\ldots i_{p-1}}$ non quasi-finies en z forment une sous-variété T_z de codim ≥ 2 :</u>

En effet, les matrices de $H_{i_1\ldots i_{p-1}}$ de rang p forment un ouvert V dont le complémentaire B est un sous-espace vectoriel de codim $n+1-p \geq 2$ obtenu en annulant la dernière ligne. Soit $\sigma : V \to G^p_{n,k}$ la projection canonique modulo $\mathrm{Aut}(k^p)$ les fibres de σ sont vides ou isomorphes à $k^{p-1} \times k^*$ et $T_z \cap V = \sigma^{-1}(F_z^n)$ est de codim ≥ 2.

<u>Détermination de la fibre</u> $F_z^{n+1} \cap (\pi'^{-1}(M'')-B)$ <u>pour</u> $M'' \in G^n_{i_1 \dots i_{p-1}}$

Une matrice M" découpe sur Z une courbe $C_{M''} = \bigcup_\ell C_\ell$, $\ell \in L$ en nombre fini, admettant les courbes C_ℓ pour composantes irréductibles au voisinage de z, définie par l'équation $M''(h(x)) = 0$ pour $x \in Z$ (on a supposé $h(z) = f(z) = 0$), car il existe $M' \in H_{i_1 \dots i_{p-1}}$ tel que $M' \circ h$ soit quasi-fini en z et que $\pi'(M') = M''$.

Supposons qu'il existe $M \in F_z^{n+1} \subset G_{i_1 \dots i_{p-1}, n+1}$ tel que $M \circ f$ s'annule sur C_ℓ, et vérifie $\pi'(M - C_{n+1}) = M''$. Si $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$, on a :

$$M \circ f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M'' \circ h(x) = 0 \\ L_p \circ f(x) = \sum\limits_{i<n+1} \alpha_p^i f_i(x) + f_{n+1}(x) = 0 \end{cases}$$

Si $\tilde{M}$ à coefficients $\tilde{\alpha}_j^i$ et d'image M", s'annule aussi sur C_ℓ, on a :

$$\sum_{i<n+1} \tilde{\alpha}_p^i f_i(x) + f_{n+1}(x) = \sum_{i<n+1} \alpha_p^i f_i(x) + f_{n+1}(x) = 0 \text{ sur } C_\ell ,$$

d'où : $\sum\limits_{i<n+1} (\tilde{\alpha}_p^i - \alpha_p^i)\, f_i(x) = 0$ sur C_ℓ, c'est-à-dire la matrice $\binom{M''}{L'_p}$ où L'_p désigne la ligne $(\dots, \tilde{\alpha}_p^i - \alpha_p^i, \dots)$ se trouve dans la fibre de T_z en M" ; donc en tout point de $G^n_{i_1 \dots i_{p-1}}$, la dim de la fibre de $F_z^{n+1} - B$ est égale à celle de la fibre de T_z ; on en déduit que $F_z^{n+1} - B$ et F_z^{n+1} sont de codim ≥ 2.

ii) Soit $u : V \to A_S^p$ un S-morphisme quasi-fini de composantes (u_i), $i \in [1,p]$. On considère le S-morphisme $h : V \to A_S^{p+1}$ de composantes $h_i = u_i$ pour $i \in [1,p]$, et $h_{p+1} = u_1^2$, c'est le morphisme cherché : en effet, on se ramène comme précédemment au cas où S = spec(k) avec k algébriquement clos, et avec les considérations précédentes sur les grassmanniennes, il faut étudier les systèmes d'équations :

(1) $\qquad \alpha_1^1 u_1 + u_2 = 0 \dots \alpha_1^1 u_1 + u_{i+1} = 0 \dots \alpha_p^1 u_1 + u_1^2 = 0$

(2) $\qquad \alpha_1^i u_i + u_1 = 0 \dots \alpha_{i-1}^i u_i + u_{i-1} = 0 \dots \alpha_i^i u_i + u_{i+1} = 0 \dots \alpha_p^i u_i + u_1^2 = 0$

Dans les systèmes (1), le nombre de solutions au voisinage de z est fini. Dans les systèmes (2) ceux qui sont non quasi-finis en z vérifient les conditions : $\alpha_1^i = 0$ et $\alpha_p^i = 0$ et sont donc de codim ≥ 2.

iii) Le morphisme $Z \to S$ étant équidimensionnel, tout point z de Z admet un voisinage ouvert V et un S-morphisme $u : V \to A_S^p$ quasi-fini ([5] ch. IV, prop.13.3.1). On peut supposer de plus qu'il existe une immersion fermée $j : V \to A_S^m$.
D'après ii), il existe un S-morphisme $h : V \to A_S^r$ vérifiant (P'), et d'après i) le morphisme $V \to A_S^{r+m}$ de composantes h et j vérifie (P') aussi, et c'est une immer-

sion fermée.

§ II.- LA PROPRIETE DE LA TRACE

On énonce dans ce paragraphe la propriété remarquable de la classe fondamentale qui la caractérise et la lie à la trace d'un morphisme fini, au niveau des différentielles.

II.1.- Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas ; on trouve dans ([6]) la construction du complexe dualisant relatif $\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}$ dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_X$-modules lorsque X et S admettent des complexes résiduels $K^{\bullet}_X$ et $K^{\bullet}_S$, ou lorsque f est compactifiable (voir [6] Appendice par P. Deligne).

On considère dans la suite un morphisme $f : X \to S$ équidimensionnel, de dim relative p.

Lemme II.1.- Soit le morphisme $f : X \to S$ *ci-dessus ; on a :* $\underline{H}^i(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}) = 0$ *pour* $i < -p$ *et si* $\mathcal{W}_{X/S} = \underline{H}^{-p}(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})$, *on a pour tout* $\mathcal{O}_X$*-module* $\mathcal{M}$ *:*

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{M},\mathcal{W}_{X/S}) = \mathrm{Ext}_X^{-p}(\mathcal{M},\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}) = \Gamma(X,\underline{\mathrm{Ext}}_X^{-p}(\mathcal{M},\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})).$$

En effet, on peut recouvrir tout schéma équidimensionnel sur S par des ouverts V admettant un morphisme $\varphi : V \to A^p_S$ quasi-fini. On considère une factorisation de φ en une immersion ouverte j et un morphisme fini $g : V \xrightarrow{j} T \xrightarrow{g} A^p_S$ (Main Theorem de Zariski) ; alors, si $\mathcal{J}$ désigne une résolution injective de $\Omega^p_{A^p_S/S}[p]$, le complexe $\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}$ est la restriction à V de $\mathcal{D}^{\bullet}_{T/S} \simeq g^{-1}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{A^p_S}(g_*\mathcal{O}_T,\mathcal{J}) \otimes_{g^{-1}g_*\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_T$, qui est nul en degré $< -p$.

Corollaire II.1.- Supposons X *lisse sur* S, *et considérons un sous-schéma fermé* Z *de* X, *de codim* ≥ 2 *fibre par fibre sur* S; *alors pour tout faisceau localement libre* $\mathcal{K}$ *sur* X, *on a :* $\underline{\Gamma}_Z(X,\mathcal{K}) = \underline{H}^1_Z(X,\mathcal{K}) = 0$.

Démonstration.- On a : $\underline{\Gamma}_Z(X,\mathcal{K}) = \lim\limits_{\to n} \underline{\mathrm{Ext}}^0_X(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n_Z,\mathcal{K})$ et $\underline{H}^1_Z(X,\mathcal{K}) = \lim\limits_{\to n} \underline{\mathrm{Ext}}^1_X(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n_X,\mathcal{K})$; il suffit donc de démontrer : $\underline{H}^{-p}(\mathcal{D}^{\bullet}_{Z_n/S}) = \underline{H}^{-p+1}(\mathcal{D}^{\bullet}_{Z_n/S}) = 0$, où Z_n désigne le schéma : $(Z,\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n_Z)$; ce qui se déduit du lemme précédent car Z est localement un sous-schéma d'un schéma équidimensionnel de dim relative p-2 sur S.

Notation.- Soient $g : Y \to S$ *un morphisme lisse de dim relative* p *et* $h : X \to Y$ *un morphisme fini. On désigne par* T_h *l'isomorphisme canonique de dualité :*

$$T_h : \underline{\mathrm{Ext}}^{\circ}(\Omega^p_{X/S}[p], \mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}) \simeq \overrightarrow{h}^{*}\underline{\mathrm{Hom}}_Y(h_*\Omega^p_{X/S}, \Omega^p_{Y/S}),$$

où $\overrightarrow{h}^{*}$ *désigne le foncteur* $\mathcal{O}_X \otimes_{h^{-1}h_*\mathcal{O}_X} h^{-1}(.)$.

Définition de la trace d'un morphisme de Tor. dim. finie.

Proposition II.1.- Soient A *un anneau et* B *une algèbre finie et de Tor. dim finie sur* A. *Il existe un morphisme trace de* A*-modules* $\mathrm{Tr} : B \to A$, *défini de la manière suivante : si* $P^{\bullet}$ *est une résolution projective finie de* B *sur* A, *on fait correspondre à tout élément* b *de* B *un morphisme* $b_{\bullet} : P^{\bullet} \to P^{\bullet}$ *qui induit la multiplication par* b *dans* B *et on pose :* $\mathrm{Tr}\ b = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}\ b_i$. *La trace ainsi définie commute aux changements de base cohomologiquement transversaux au morphisme* $A \to B$, *elle est stable par composition : pour un morphisme* $B \to C$ *fini et de Tor dim finie, on a :* $\mathrm{Tr}_{C/A} = \mathrm{Tr}_{B/A} \circ \mathrm{Tr}_{C/B}$, *et elle coïncide avec la trace usuelle dans le cas plat (voir par ex. [7] ch.5, § 3).*

II.2.- PROPOSITION . *Soient des schémas* X *équidimensionnels sur* S *et* Y *lisse sur* S, *de dimensions relatives* p, *un* S*-morphisme* $h : X \to Y$ *quasi-fini et de Tor dim finie* $\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S}$ *le complexe dualisant relatif et* $\mathcal{W}_{X/S} = \underline{H}^{-p}(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})$. *Alors, il existe un élément unique, la classe fondamentale de* h *:*

$$C_h \in \mathrm{Hom}(h^*\Omega^p_{Y/S}, \mathcal{W}_{X/S}) = E = \mathrm{Ext}^{\circ}(h^*\Omega^p_{Y/S}[p], \mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})$$

vérifiant la propriété (P) *suivante :*

(P) *Pour tout diagramme* $\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$ *tel que* h' *soit fini,* X' *et* Y' *étales sur* X *et* Y *resp., si* C_h^* *désigne l'image réciproque de* C_h *dans* $E' = \mathrm{Ext}^{\circ}(h'^*\Omega^p_{Y'/S}[p], \mathcal{D}^{\bullet}_{X'/S})$ *et* $\mathrm{Tr}\ h' : h'_*h'^*\Omega^p_{Y'/S} \to \Omega^p_{Y'/S}$, *la trace de* h' *déduite de la définition dans II.1, on a l'égalité :* $T_{h'}(C_h^*) = \mathrm{Tr}\ h'$.

Démonstration 1.- La propriété (P) est vraie si h est fini

En effet, C_h est alors définie par la condition $T_h(C_h) = \mathrm{Tr}\ h$. Considérons le produit fibré $X'' = X \times_Y Y'$ muni des projections p_1 et p_2 sur X et Y'. Les morphismes π' et f' permettent de construire un morphisme $p : X' \to X''$ qui est étale car

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, "f'"] \arrow[ddr, "\pi'"'] & & \\ & X'' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y' \arrow[d, "\pi"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

p_1 l'est (obtenu par changement de base de π) et $p_1 \circ p$ l'est aussi, de même p est fini car p_2 l'est (obtenu par changement de base de f) et $p_2 \circ p = f'$ l'est aussi.

On se ramène à vérifier la propriété (P) dans les deux cas suivants :

i) Le cas du diagramme
$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[dr] & Y' \arrow[dr] & \\ & X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$
qui est facile.

ii) Le cas du diagramme
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p"'] & & Y' \\ & X'' \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd}$$
avec p fini et étale.

On peut supposer les schémas affines, et on voit qu'il faut vérifier pour tout $a' \in \Gamma\mathcal{O}_{X'}$ et $\omega \in \Gamma\Omega^p_{Y'/S}$: $\mathrm{Tr}\, f'(C^*_{p_2}(a'\omega)) = (\mathrm{Tr}\, f'(a'))\omega$.

Or, $\mathrm{Tr}\, f'(C^*_{p_2}(a'\omega)) = \mathrm{Tr}\, p_2 \circ \mathrm{Tr}\, p(C^*_{p_2}(a'\omega)) = \mathrm{Tr}\, p_2[(\mathrm{Tr}\, p(a'))C^*_{p_2}(\omega)] =$

$$((\mathrm{Tr}\, p_2 \circ \mathrm{Tr}\, p)(a'))\omega.$$

II.2.- Unicité.- On a $\mathrm{Ext}^{-p}(h^*\Omega^p_{Y/S}, \mathcal{D}^{\cdot}_{X/S}) \simeq \Gamma\ \underline{\mathrm{Ext}}^{-p}(h^*\Omega^p_{Y/S}, \mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})$; la construction de l'élément C_h est donc locale sur X.

Pour tout point x dans X, on peut construire un diagramme comme dans (P) avec X' surjectif sur un voisinage de x ([5] ch.IV, cor.18.2.3).

Pour démontrer l'unicité, il suffit donc de démontrer l'injectivité du morphisme : $E \to E' = \mathrm{Ext}^{-p}(h'^*\Omega^p_{Y'/S}, \mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S})$ dans le cas où X et X' sont affines et $\pi' : X' \to X$ est surjectif, mais alors E' est isomorphe à $\Gamma\mathcal{O}_{X'} \otimes E$ avec $\Gamma\mathcal{O}_{X'}$ fidèlement plat sur $\Gamma\mathcal{O}_X$.

II.3.- Existence.- Il existe un ouvert V dense dans Y tel que la restriction de h à $h^{-1}V$ soit finie ; d'après ce qui précède au N°1, on peut construire $C_h/h^{-1}V$ sur $h^{-1}V$. On va prolonger ce morphisme à X par un raisonnement par récurrence d'après le lemme suivant :

Lemme II.1.- Soient U *un ouvert dans* X *et* C_{h_U} *un morphisme vérifiant* (P) *sur* U*; alors, on peut prolonger* C_{h_U} *sur un ouvert dans* X *contenant tous les points génériques de* F = X - U.

Démonstration.- Soient $(x_j)_{j\in J}$ les points génériques de F, une partition $J = \coprod_{i\in I} J_i$ en sous-ensembles finis J_i telle que $h(x_j) = y_i$ pour tout indice $j \in J_i$. D'après ([5] ch. IV, p.181, cor. 18.2.3), il existe un schéma, $Y' \xrightarrow{\pi} Y$, Y' étale sur Y, tel que $\pi^{-1}(y_i) = y'_i$ avec $k(y'_i) = k(y_i)$ pour tout $i \in I$ (la fibre en y_i se réduit à un point d'extension résiduelle triviale) et tel que le produit fibré $X \times_Y Y'$ contienne un sous-schéma ouvert et fermé X' vérifiant $X'_{y'_i} \simeq X_{y_i}$.

On a donc construit un diagramme : $\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h'} & Y' \\ {\scriptstyle\pi'}\searrow & & \searrow{\scriptstyle\pi} \\ & X \xrightarrow{h} Y & \end{array}$ tel que si $F' = \pi'^{-1}(F)$, alors F' admet des points génériques $(x'_j)_{j\in J}$ avec $\pi'(x'_j) = x_j$ et $k(x'_j) = k(x_j)$, c'est-à-dire les voisinages infinitésimaux de D' dans X' au voisinage des x'_j sont isomorphes aux voisinages infinitésimaux de F dans X au voisinage des x_j.

Le problème étant local, on peut supposer $\Omega^1_{Y/S}$ libre sur $\mathcal{O}_Y$, alors le morphisme C_{h_U} s'identifie à une section $\underline{H}^{-p}(\mathcal{D}^{\cdot}_{U/S})$ que l'on cherche à prolonger. De même on peut supposer X' et X affines et π' surjectif.

Considérons les suites exactes où $\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S} = \pi'^{*}\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S}$:

$$0 \to R^{-p}\Gamma_{F'}(X',\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S}) \xrightarrow{i'} \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\!\smile \\ C_{h'}}}{R^{-p}\Gamma}(X',\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S}) \xrightarrow{q'} R^{-p}\Gamma(X'-F',\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S'}) \xrightarrow{\delta'} R^{-p+1}\Gamma_{F'}(X',\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S})$$

$$0 \to R^{-p}\Gamma_F(X,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S}) \xrightarrow{i} \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\!\smile \\ C_{h_o}}}{R^{-p}\Gamma(X,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})} \xrightarrow{q} \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\!\smile \\ C_{h_U}}}{R^{-p}\Gamma(X-F,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})} \xrightarrow{\delta} R^{-p+1}\Gamma_F(X,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})$$

Comme au N°2, les morphismes verticaux sont injectifs car $\Gamma\mathcal{O}_{X'}$ est fidèlement plat sur $\Gamma\mathcal{O}_X$.

On note par x^* l'image d'un élément x par un morphisme vertical. Le morphisme h' étant fini, on définit une section $C_{h'} \in R^{-p}\Gamma(X',\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S})$ telle que $q'(C_{h'}) = C^*_{h/U}$, d'où $\delta'(C^*_{h/U}) = \delta' \circ q'(C_{h'}) = 0$ et enfin $\delta(C_{h/U}) = 0$.
Soit $C_{h_o} \in R^{-p}\Gamma(X,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})$ tel que : $q(C_{h_o}) = C_{h/U}$; on a : $q'(C_{h'} - C^*_{h_o}) = 0$.
Soit $v' \in R^{-p}\Gamma_{F'}(X',\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S})$ tel que $i'(v') = C_{h'} - C^*_{h_o}$. On cherche à trouver $v \in R^{-p}\Gamma_F(X,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})$ tel que $v' = v^*$, ce qui permet de corriger C_{h_o} en $C_h = C_{h_o} + v$, avec $C^*_h = C^*_{h_o} + v' = C_{h'}$. D'après la construction de X', on a :
$\underline{\mathrm{Ext}}^{-p}_X(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n_F,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})_{x_j} \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^{-p}_{X'}(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^n_{F'},\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S})_{x'_j}$ pour tout $j \in J$, où les idéaux $\mathcal{J}_F$ et $\mathcal{J}_{F'}$ définissent les fermés F et F'. On en déduit :
$\underline{H}^{-p}(\mathbb{R}\,\underline{\Gamma}_F\,\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})_{x_j} \simeq \underline{H}^{-p}(\mathbb{R}\,\underline{\Gamma}_{F'}\,\mathcal{D}^{\cdot}_{X'/S})_{x'_j}$, ce qui permet de descendre v' au voisinage de tout point x_j, c'est-à-dire qu'il existe un fermé F_o dans F ne contenant aucun point x_j et $v \in R^{-p}\Gamma_{F-F_o}(X-F_o,\mathcal{D}^{\cdot}_{(X-F_o)/S})$ tel que $v^* = v'$ sur $X'-\pi'^{-1}(F_o)$.

<u>La section</u> $C_h = C_{h_o} + v$ <u>vérifie la propriété (P) sur</u> $X - F_o$:

En effet soit un diagramme (I)
$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "h''"] \arrow[d] & Y'' \arrow[d] \\ X-F_o \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$
avec h'' fini.

Soient $V' = X' - \pi'^{-1}(F_o)$ et $V = X - F_o$, et considérons le diagramme (II) :

$$\text{(II)}\qquad \begin{tikzcd} & X'' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y'' \arrow[dd] \\ V'\times_V X'' \arrow[ur] \arrow[rr, "\ell''"] \arrow[dd] & & Y'\times_Y Y'' \arrow[ur] \arrow[dd] & \\ & V \arrow[rr] & & Y \\ V' \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Le morphisme ℓ'' : $V' \times_V X'' \to Y' \times_Y Y''$ est fini car c'est le composé d'une immersion fermée $V' \times_V X'' \hookrightarrow V' \times_Y X'' \to Y' \times_Y Y''$ et d'un morphisme fini ; de même ℓ'' est de Tor. dim. fini. La propriété (P) est vraie pour $V' \times_V V'' \to V$ comme on le voit en passant par V' et d'après l'unicité, elle est vraie aussi pour X'' sur V.

<u>Les propriétés de la classe</u> C_h

<u>Propriété 1</u>.- <u>Changement de base</u> : Avec les notations de la proposition, soit $r : S_1 \to S$ *un morphisme cohomologiquement transversal à* $X \to S$ *et tel que* $X_1 = S_1 \times_S X$ *soit équidimensionnel sur* S_1. *Alors si* $h_1 : X_1 \to Y_1$ *se déduit de* h *par le changement de base* r, *la classe* C_{h_1} *est l'image réciproque de la classe* C_h.

<u>Démonstration</u>.- Il suffit de montrer que l'image réciproque de C_h vérifie la propriété (P) pour les diagrammes D_1 obtenus par changement de base des diagrammes (D),

$$(D_1)\qquad \begin{tikzcd} & & & X' \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X'_1 \arrow[r, "h'_1"] \arrow[d] & Y'_1 \arrow[d] & & X \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r, "h_1"'] \arrow[urrr] \arrow[dr] & Y_1 \arrow[urrr] \arrow[d] & & & S \\ & S_1 \arrow[urrr, "r"'] & & & \end{tikzcd}\qquad (D)$$

car on sait que C_{h_1} existe et est unique et on peut recouvrir X_1 par des schémas du type $X_1 \times_X X'$ où X' est dans (D). Alors, on se ramène à démontrer la propriété pour $C_{h_1'}$ et $C_{h'}$, et finalement à vérifier la compatibilité des traces de h' et de h_1' (II.1).

Propriété 2.- Composition. Avec les notations de la proposition, soit $h_1 : Y \to Y_1$ *un morphisme quasi-fini dans un schéma* Y_1 *lisse de dim relative* p *sur* S, *alors* $C_{h_1 \circ h} : (h_1 \circ h)^* \Omega^p_{Y_1/S} \to \mathcal{W}_{X/S}$ *est le composé de* C_h *avec le morphisme* $h_1^* : h^*(h_1^* \Omega^p_{Y_1/S}) \to h^* \Omega^p_{Y/S}$.

Démonstration.- Remarquer que h_1 est nécessairement de Tor. dim. finie. Comme précédemment on peut trouver des diagrammes du type :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & Y' \arrow[r, "h'_1"] \arrow[d] & Y'_1 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, "h_1"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

où h' et h_1' sont finis, et où les schémas X' et Y_1' recouvrent X et Y_1, et il suffit de vérifier la propriété (P) pour le composé $C_h \circ h_1^*$ pour de tels diagrammes seulement. On se ramène à démontrer : $C_{h'} \circ h_1'^* = C_{h_1' \circ h'}$, et finalement à démontrer : $\mathrm{Tr}(h_1' \circ h') = \mathrm{Tr}\, h_1' \circ \mathrm{Tr}\, h'$ (II.1).

II.3. DEFINITION.

Soient $X \to S$ *un morphisme équidimensionnel de dim relative* p *et de Tor. dim finie, un élément* $\varphi \in \mathrm{Ext}^0(\Omega^p_{X/S}[p], \mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})$ *, et un* S*-morphisme quasi-fini* $h : U \to Y$ *d'un ouvert* U *de* X *dans un schéma* Y *lisse sur* S *et de dim relative* p. *On dit que* φ *vérifie la propriété de la trace pour* h *(ou relativement à* h*) si le composé de* φ/U *avec le morphisme* $h^*\Omega^p_{Y/S} \to \Omega^p_{U/S}$ *est égal à la classe* C_h *définie dans la proposition précédente. On dit que* φ *vérifie la propriété de la trace si, pour tout ouvert* U, *tout* S*-morphisme* $h : U \to Y$ *quasi-fini dans* Y *lisse sur* S *vérifie la propriété de la trace relativement à* φ.

Unicité de la classe fondamentale.-

Proposition II.3.1.- Soit $f : X \to S$ *un morphisme équidimensionnel de dim relative* p, *et de Tor. dim finie. Il existe au plus un élément unique* $C_{X/S} \in \mathrm{Ext}^0(\Omega^p_{X/S}[p], \mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})$ *qui vérifie la propriété de la trace ; on l'appelle, quand il existe, la classe fondamentale de* X *sur* S.

Démonstration.- Le problème étant local sur X, on peut supposer que X et S sont affines et qu'il existe un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & A_S^n \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr, "h"'] & & A_S^p \end{tikzcd}$$

où q est la projection sur les p premiers facteurs, i est une immersion fermée et $h = q \circ i$ est quasi-fini.

Par définition on doit avoir : $C_{X/S} \circ h^* = C_h$, où $h^* : h^*\Omega^p_{A^p_S/S} \to \Omega^p_{X/S}$, ce qui détermine la valeur de $C_{X/S}$ sur l'image de h^* ; or, dans la situation ci-dessus pour tout point $x \in X$ d'image s, il y a "assez" de S-morphismes linéaires $\varphi : A^n_S \to A^p_S$ tels que $\varphi \circ i$ soit quasi-fini en x et que les $\varphi^*\Omega^p_{A^p_S/S}$ engendrent $\Omega^p_{A^p_S/S}$ au voisinage de x, et par conséquent les $(\varphi \circ i)^*\Omega^p_{A^p_S/S}$ engendrent $\Omega^p_{X/S}$ au voisinage de x. Plus exactement, soient $\mathcal{O}_{S,s} = A$ et $\pi_s : \mathrm{Hom}_A(A^n, A^p) \to \mathrm{Hom}_{k(s)}(k^n(s), k^p(s)) = M_s$; alors il existe un ouvert partout dense dans M_s tel que les éléments dans l'image réciproque par π_s soient quasi-finis en x.

Enfin, on voudrait mentionner la proposition suivante :

<u>*Proposition II.3.2.*</u>- *Soit* U *un ouvert dense dans* X *fibre par fibre sur* S; *alors :*

i) *Le morphisme restriction* $\Gamma(X, \omega_{X/S}) \to \Gamma(U, \omega_{X/S})$ *est injectif.*

ii) *Une classe fondamentale* $C_{U/S}$ *sur* U, *se prolonge en une classe fondamentale* $C_{X/S}$ *sur* X.

<u>Démonstration</u>.- Le problème est local sur X, donc on peut supposer qu'il existe un morphisme quasi-fini $h : X \to Y$ dans Y lisse sur S de dim relative p. Soit $F = X - U$ l'adhérence F' de h(F) a une dimension de moins que Y ; il existe donc un sous-schéma fermé S' dans S de dim. strictement plus petite que celle de S tel que les fibres de F' sur S - S' soient de dim. $\leq p-1$; alors pour tout sous-schéma W dans Y de support dans F', on a : $\underline{H}^i(\mathcal{D}^{\cdot}_{W_{S-S'}}) = 0$ pour $i < -p+1$, d'où

$$\underline{H}^0_{F'_{S-S'}}(\Omega^p_{Y_{S-S'}/S-S'}) = 0 = \underline{H}^0_{F'_{S-S'}}(\mathcal{O}_{Y_{S-S'}}).$$

i) Il suffit d'appliquer la proposition 4 du chapitre IV de [4] pour voir que $\Gamma(X_{S-S'}, \omega_{X/S}) \to \Gamma(U_{S-S'}, \omega_{X/S})$ est injectif, puis on reprend le même raisonnement pour le fermé F_o complémentaire de l'ouvert $U \cup X_{S-S'}$, et qui est concentré sur S'. On établit i) par récurrence.

ii) Soit $h^* : h^*\Omega^p_{Y/S} \to \Omega^p_{X/S}$, pour toute forme $\omega \in \Gamma(X, h^*\Omega^p_{Y/S})$, on a : $C_{U/S}(h^*\omega) = C_h(\omega)/U$, donc $C_{U/S}(h^*\omega)$ se prolonge de manière unique d'après i) en $C_h(\omega)$; or, en tout point $x \in X - U$, il existe assez de morphismes quasi-finis

φ définis au voisinage de x dans A^p_S pour que les $\varphi^*\Omega^p_{A^p_S/S}$ engendrent $\Omega^p_{X/S}$ en x.

Remarque.- Si, par exemple, $f : X \to S$ est plat et de Gorenstein sur l'ouvert U de la proposition, alors on peut vérifier que si $i : X \to A^n_S$ est une immersion fermée, les démonstrations que nous utilisons donnent l'existence de la classe $C_{X/S}$, vérifiant la propriété de la trace pour les projections linéaires : $A^n_S \to A^p_S$ quasi-finies sur X, sans hypothèse sur la caractéristique.

III.- EXISTENCE DE LA CLASSE FONDAMENTALE

Considérons un morphisme $g : Z \to S$ équidimensionnel de dim relative p, et de Tor. dim finie ; on se propose de démontrer l'existence d'une classe fondamentale $C_{Z/S} : \Omega^p_{Z/S}[p] \to \mathcal{D}^{\bullet}_{Z/S}$ vérifiant la propriété de la trace, cette dernière condition permet de définir pour tout ouvert U de Z la valeur de $C_{U/S} = (C_{Z/S})/U$ sur l'image dans $\Omega^p_{U/S}$ de tous les sous-modules de la forme $h^*\Omega^p_{Y/S}$ où $h : U \to Y$ est quasi-fini et Y lisse sur S, et il reste à établir la compatibilité entre toutes ces définitions partielles. La vérification directe de cette compatibilité, en explicitant l'isomorphisme résidu pour comparer les valeurs de $C_{U/S}$ dans deux projections quasi-finies distinctes, est un calcul fastidieux, presque impossible. C'est pourquoi on va utiliser une méthode globale. L'idée consiste à appliquer le théorème I.1.

III.1.- THEOREME.- Soit $g : Z \to S$ un morphisme équidimensionnel de dim relative p et de Tor. dim finie. Il existe une classe fondamentale unique :

$$C_{Z/S} : \Omega^p_{Z/S}[p] \to \mathcal{D}^{\bullet}_{Z/S}$$

vérifiant la propriété de la trace.

Démonstration.- Le problème est local; en effet, si on définit $C_{V/S}$ pour V parcourant un recouvrement ouvert de Z, les différentes classes $C_{V/S}$ se recollent en une seule d'après l'unicité.

On va appliquer le corollaire I.1, en considérant une immersion fermée $i : V \to A^n_S$ construite dans le lemme I.3,iii), et le faisceau $\mathcal{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_V(\mathcal{O}_V, \mathcal{W}_{V/S})$, où $\mathcal{W}_{V/S} = \underline{H}^{-p}(\mathcal{D}^{\bullet}_{V/S})$. On trouve avec les mêmes notations :

$$I : \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_V \otimes \Omega^p_{A^n_S/S}, \mathcal{W}_{V/S})}_{\underline{E}} \simeq (\pi \circ j)_* j^* \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma_i^*\Omega^p_{H^p_{n,S}/G^p_{n,S}}, \pi^*\mathcal{W}_{V/S})}_{\underline{L}}$$

où $\Gamma_i : G^p_{n,V} \to H^p_{n,S}$ est déduit de i, et j désigne l'immersion de l'ouvert U où Γ_i est quasi-fini dans $G^p_{n,V}$.

Le faisceau $\pi^*\mathcal{W}_{V/S}$ est isomorphe à $\mathcal{W}_{G^p_{n,V}/G^p_{n,S}}$; le morphisme i est de Tor. dim finie (on écrit i comme composé d'un morphisme de Tor. dim finie et d'une section d'un morphisme lisse : $V \to A^n_V \to A^n_S$, où $A^n_V = V \underset{S}{\times} A^n_S$) ; donc le morphisme Γ_i l'est aussi ; d'après la proposition II.2, on construit une section C_{Γ_i} de $\underline{L}$ qui vérifie la propriété P de cette proposition. L'isomorphisme I ci-dessus fait correspondre à C_{Γ_i} une section $C^o_{V/S}$ de $\underline{E}$. Il reste à vérifier la propriété de la trace :

1.- <u>Cas des S-morphismes linéaires</u> : $\varphi : A^n_S \to A^p_S$ <u>tels que</u> $\varphi \circ i$ <u>soit quasi-fini</u>

$$\begin{tikzcd}
 & G^p_{n,V} \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & H^p_{n,S} \arrow[d] \\
V \arrow[ur] \arrow[r, "\varphi\circ i"] \arrow[dr] & A^p_S \arrow[ur] \arrow[d] & G^p_{n,S} \\
 & S \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Il est facile de voir que le S-morphisme $\varphi \circ i : V \to A^p_S$ se déduit du morphisme Γ_i par le changement de base $S \to G^p_{n,S}$ correspondant à la section définie par φ.
Par définition de la classe $C^o_{V/S}$, et en utilisant les notations du diagramme (D), dans I.3, la classe C_{Γ_i} est égale au composé :

$$\Gamma_i^*\Omega^p_{H^p_{n,S}/G^p_{n,S}} \xrightarrow{\gamma^*_S} \delta^*\Omega^p_{G^p_{n,V}/G^p_{n,S}} \xrightarrow{\pi^* C^o_{V/S}} \mathcal{W}_{G^p_{n,V}/G^p_{n,S}}$$

Le changement de base est cohomologiquement transversal au morphisme $G^p_{n,V} \to G^p_{n,S}$, donc il est permis,d'après la propriété 1 dans II.2, de conclure que $C_{\varphi\circ i}$ se déduit de C_{Γ_i} par le changement de base $A^p_S \to H^p_{n,S}$.

<u>*Lemme III.1.1.*</u>- *Soit* $\varphi : A^n_S \to Y$ *un* S-*morphisme dans* Y *lisse de dim relative* p *sur* S *tel que* $\varphi \circ i$ *soit quasi-fini et vérifie la propriété de la trace pour* $C^o_{V/S}$ *alors pour tout* S-*morphisme* $\varphi' : Y \to Y'$ *quasi-fini dans* Y' *lisse sur* S *de dim relative* p *, le composé* $\varphi' \circ \varphi$ *vérifie la propriété de la trace pour* $C^o_{V/S}$.

<u>Démonstration</u>.- Remarquer que φ ' est nécessairement plat. Considérons les morphismes :

$$i^* \circ \varphi^* \circ \varphi'^* \Omega^p_{Y'/S} \xrightarrow{\varphi'^*} i^* \circ \varphi^* \Omega^p_{Y/S} \xrightarrow{\varphi^*} i^* \Omega^p_{A^n_S/S} \xrightarrow{C^o_{V/S}} \mathcal{W}_{V/S}$$

Par hypothèse, on suppose $C^o_{V/S} \circ \varphi^* = C_{\varphi\circ i}$; pour démontrer :
$C^o_{V/S} \circ (\varphi' \circ \varphi)^* = C_{\varphi'\circ\varphi\circ i}$, il suffit donc d'établir $C_{\varphi'\circ\varphi\circ i} = C_{\varphi\circ i} \circ \varphi'^*$; c'est la propriété 2 dans II.2.

3. Lemme III.1.2.- *Soient* $(\ell_i)_{i\in I}$ *une famille finie de* S-*morphismes linéaires :* $A^n_S \to A_S$ *telle que chaque* ℓ_i *puisse constituer une composante d'un* S-*morphisme linéaire :* $A^n_S \to A^p_S$ *quasi-fini sur* V. *Pour toutes familles* $m_i \in \mathbb{N}$ *pour* $i \in I$ *et* $\lambda^j_i \in \Gamma(S,\mathcal{O}_S)$ *pour* $i \in I$ *et* $j \in [1,p]$, *les* λ^j_i *étant presque partout nuls, si le morphisme* $\varphi : A^n_S \to A^p_S$ *de composantes* $\varphi_j = \sum_i \lambda^j_i \ell_i^{m_i}$ *est quasi-fini sur* V, *alors il vérifie la propriété de la trace pour* $C^o_{V/S}$.

Démonstration.- On démontre ce lemme par récurrence sur l'ensemble d'indices I. Supposons le lemme vrai pour une partie I' dans I, et démontrons-le pour $I' \cup i_o$, avec $i_o \in I-I'$.
Considérons les morphismes : $V \xrightarrow{i} A^n_S \xrightarrow{h_1} A^n_S \times_S A^{|I'|}_S \xrightarrow{h_2} A^{n+|I'|}_S \times_S A_S$, où

$|I'|$ = nombre d'éléments de I', h_1 a pour composantes l'identité sur A^n_S et $\prod_{i\in I'} \ell_i^{m_i}$, h_2 a pour composantes l'identité sur $A^{n+|I'|}_S$ et $\ell_{i_o}^{m_{i_o}} \circ p_1$: $A^{n+|I'|}_S \to A^n_S \to A_S$.

$$M = \begin{array}{c c c c} & n & |I'| & 1 \\ & \left(\begin{matrix} \ell_1 & 0 & 0 \\ \ell_{p-1} & & \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) & & p \end{array}$$

Soient $\ell_1,\ldots,\ell_{p-1}$, des S-formes linéaires sur A^n_S telles que le morphisme $(\ell_1,\ldots,\ell_{p-1},\ell_{i_o})$ soit quasi-fini sur V. La matrice M : $A^{n+|I'|+1}_S \to A^p_S$ ci-contre induit $(\ell_1,\ldots,\ell_{p-1},\ell_{i_o}^{m_{i_o}})$ sur V ; elle est donc quasi-finie sur V.

D'après le lemme I.3, les morphismes $h_1 \circ i$ et $h_2 \circ h_1 \circ i$ vérifient la propriété P' sur V puisque i la vérifie aussi ; on peut donc définir des sections $C^1_{V/S} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_V \otimes \Omega^p_{A^{n+|I'|}_S/S}, \mathcal{W}_{V/S})$ et $C^2_{V/S} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_V \otimes \Omega^p_{A^{n+|I'|+1}_S/S}, \mathcal{W}_{V/S})$ comme on a défini $C^o_{V/S}$. Il suffit de démontrer que $C^2_{V/S}$ est le composé de $C^o_{V/S}$ avec $(h_2 \circ h_1)^* : \mathcal{O}_V \otimes \Omega^p_{A^{n+|I'|+1}_S/S} \to \mathcal{O}_V \otimes \Omega^p_{A^n_S/S}$. On va le voir par récurrence, supposons donc : $C^1_{V/S} = C^o_{V/S} \circ h_1^*$.

Soit z un point de V d'image s dans S ; les matrices M' à coefficients dans $\mathcal{O}_{S,s}$ quasi-finies sur V en z forment l'image réciproque dans $\mathcal{O}_{S,s}^{(n+|I'|+1)p}$ d'un voisinage ouvert de l'image de M dans $k(s)^{(n+|I'|+1)p}$; on s'intéresse aux matrices M' de la forme

$$M' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{n+|I'|} & \overbrace{\quad}^{1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha_j^i & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, p-1 \\ \\ \}\, 1 \end{array} \end{array}$$

dont les coefficients α_j^i varient dans $\mathcal{O}_{S,s}^{(n+|I'|)(p-1)}$ (le cas des courbes étant facile, on suppose $p > 1$). Les lignes M_i' pour $i \in [1,p]$ de M' induisent sur V des formes linéaires ℓ_i' pour $i \in [1,p-1]$ et $\ell_{i_o}^{m_{i_o}}$ à l'indice p. D'après ce qui précède, le morphisme correspondant à M' vérifie donc la propriété de la trace pour $C_{V/S}^1$ d'où pour toute forme $\omega \in \Omega^p_{A_S^p/S}$ et tout élément $a \in \mathcal{O}_{V,z}$:

$$\mathrm{Tr}(M'/V)(a\ C_{V/S}^2(M'^*\omega)) = [\mathrm{Tr}(M'/V)(a)]\omega = \tilde{\mathrm{T}}\mathrm{r}(M'/V)[a\ C_{V/S}^1((M'/A_S^{n+|I'|})^*\omega)] \ ;$$

d'où on déduit pour $\omega = dY_1 \wedge\ldots\wedge dY_p$ sur A_S^p de coordonnées Y_i :

$$C_{V/S}^2(dM_1' \wedge\ldots\wedge dM_p') = C_{V/S}^1(h_2^*(dM_1' \wedge\ldots\wedge dM_p')).$$

Si on note (T_i) pour $i \in [1,n+|I'|+1]$ les coordonnées de $A_S^{n+|I'|+1}$, on voit facilement en considérant les S-morphismes linéaires de $A_S^{n+|I'|}$ sur A_S^p, quasi-finis sur V, que $C_{V/S}^2(dT_{i_1} \wedge\ldots\wedge dT_{i_p}) = C_{V/S}^1(dT_{i_1} \wedge\ldots\wedge dT_{i_p})$ pour $i_j \in [1,n+|I'|]$. Dans l'égalité ci-dessus pour la matrice M', on a $dM_p' = dT_{n+|I'|+1}$, et en écrivant cette égalité pour un nombre de matrices M' fini mais assez grand avec un choix convenable des M' on obtient :

$$C_{V/S}^2(\psi) = C_{V/S}^1(h_2^*(\psi)) \text{ pour } \psi = dT_{i_1} \wedge\ldots\wedge dT_{i_{p-1}} \wedge dT_{n+|I'|+1}$$

avec $i_1,\ldots,i_{p-1} \in [1,n+|I'|]$.

4.- Pour déduire de ce qui précède la propriété de la trace pour $C_{V/S}^o$ relativement à tout morphisme $\varphi : A_S^n \to A_S^p$ défini par la donnée de p polynômes tel que $\varphi \circ i$ soit quasi-fini sur V, il suffit d'appliquer le lemme suivant en caractéristique zéro :

Lemme III.1.3.- Soit z *un point de* V *d'image* s *dans* S *tel que* car(k(s)) = 0 . *Il existe une famille de p-uplets* $\underline{\ell}^\sigma = (\ell_1^\sigma,\dots,\ell_p^\sigma)$ *de formes linéaires sur* A^n *où* $A = \mathcal{O}_{S,s}$, *indexée par* σ *dans un ensemble fini* Σ, *tel que* $\underline{\ell}^\sigma$ *soit quasi-fini sur* V *en* z, *et tel que pour toute famille de polynômes* $\underline{\varphi} = (\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ *sur* $A^n_{S,s}$, *il existe des multientiers* (d_σ) *et des constantes* λ_σ *dans* A *vérifiant* $\underline{\varphi} = \Sigma\, \lambda_\sigma (\underline{\ell}^\sigma)^{d_\sigma}$.

Démonstration.- Par linéarité, on peut suppoer que les φ_j sont des monômes de degré d en $t_1,\dots,t_n$. Le A-module M_d des p-uplets de monômes de degré d est libre de rang : $p\binom{n+d-1}{d} = N$.

Posons $\ell_j^\sigma = \sum_{i=1}^n \alpha^i_{\sigma,j}\, t_i$, où $\alpha^i_{\sigma,j} \in A$. Alors, on note $m = (m_1,\dots,m_n)$, $|m| = \Sigma\, m_i$

$\binom{|m|}{m} = \frac{|m|\,!}{\Pi_1^n\, m_i!}$, $(\underline{t})^m = \Pi_1^n\, t_i^{m_i}$ et $(\alpha_{\sigma,j})^m = \Pi_1^n (\alpha^i_{\sigma,j})^{m_i}$, on a :

$$(\ell_j^\sigma)^d = \sum_{|m|=d} \binom{d}{m} (\alpha_{\sigma,j})^m (\underline{t})^m .$$

Les p-uplets $(\underline{t})^m_j = (0,\dots,(\underline{t})^m,\dots,0)$ non nuls en composante j, pour $|m| = d$ et $j \in [1,p]$ forment une base du A-module M_d, et la famille $(\underline{\ell}^\sigma)^d = ((\ell_1^\sigma)^d,\dots,(\ell_p^\sigma)^d)$ forme une base de M_d si le déterminant de ses coefficients dans la base $(\underline{t}^m)_j$ est inversible, ce déterminant est égal à :

$$D = \prod_{|m|=d} \binom{d}{m}^p \begin{vmatrix} & \vdots & \\ \dots & (\alpha_{\sigma,j})^m & \dots \\ & \vdots & \end{vmatrix} .$$

Soit $M_{i,s}$ l'espace vectoriel sur k(s), corps résiduel de A en s de caractéristique zéro, formé des p-uplets de formes linéaires $\underline{\ell}_s = (\ell_{1,s},\dots,\ell_{p,s})$ à coefficients dans k(s). Les formes $\underline{\ell}_s$ quasi-finies sur V_s en z forment un ouvert W dense dans $M_{1,s}$ de dim np.

Soit W' l'ouvert de $M^N_{1,s}$ formé par les familles $(\underline{\ell}^\sigma_s)_{\sigma\in[1,N]}$ ayant un déterminant D_s non nul dans k(s). Les ouverts W' et $W^N \cap W'$ sont denses dans $M^N_{1,s}$. Alors, toute famille $(\underline{\ell}^\sigma)$ pour $\sigma \in [1,N]$ de p-uplets de formes linéaires à coefficients dans A, induisant $(\underline{\ell}^\sigma_s)$ dans $W' \cap W^N$, forme une base du A-module M_d constituée de morphismes quasi-finis sur V en z.

5.- Actuellement, on sait que $C^o_{V/S}$ vérifie la propriété de la trace pour tout morphisme $\varphi : A^n_S \to A^p_S$ tel que $\varphi \circ i$ soit quasi-fini sur V. On va voir que $C^o_{V/S}$ se factorise en un morphisme : $C_{V/S} : \Omega^p_{V/S} \to \omega_{V/S}$ se composant avec la projection

$\mathcal{O}_V \otimes \Omega^p_{A^n_S/S} \to \Omega^p_{V/S}$. Il suffit de démontrer que $C^o_{V/S}$ s'annule sur le sous-module de $\mathcal{O}_V \otimes \Omega^p_{A^n_S/S}$ engendré par l'image de : $(d\mathcal{J}_V) \otimes \Omega^{p-1}_{A^n_S/S}$ où $\mathcal{J}_V$ désigne l'idéal de V dans A^n_S.

Soient z un point dans V, un élément f dans $\mathcal{J}_V$ et une matrice $M : A^n_S \to A^p_S$ de lignes $(M_1,\dots,M_p)$, quasi-finie sur V en z. Le morphisme $\tilde{M}$ sur A^n_S de composantes $(M_1,\dots,M_{p-1},M_p+f)$ induit le même morphisme que M sur V. On en déduit que pour toute forme ω dans $\Omega^p_{A^p_S/S}$ et $a \in \Gamma(V,\mathcal{O}_V)$:

$$\mathrm{Tr}\; M/V(a\; C^o_{V/S}(M^*\omega)) = \mathrm{Tr}\; \tilde{M}/V(a\; C^o_{V/S}(\tilde{M}^*\omega)) = [\mathrm{Tr}\; M/V(a)]\omega .$$

D'où $C^o_{V/S}(dM_1 \wedge\dots\wedge dM_p) = C^o_{V/S}(dM_1 \wedge\dots\wedge (dM_p + df))$, soit $C^o_{V/S}(dM_1 \wedge\dots\wedge dM_{p-1} \wedge df) = 0$. Ceci reste vrai quand on fait varier les coefficients des lignes $M_1,\dots,M_{p-1}$ d'une manière continue, donc si $T_1,\dots,T_n$ désignent des variables, on a :

$$C^o_{V/S}(dT_{i_1} \wedge\dots\wedge dT_{i_{p-1}} \wedge df) = 0.$$

6.- La classe fondamentale $C_{V/S}$ vérifie la propriété de la trace pour tout morphisme φ quasi-fini sur V dans une variété Y lisse de dim relative p sur S. Il faut démontrer que $C_\varphi : \varphi^*\Omega^p_{Y/S} \to \omega_{V/S}$ est égal au composé de $C_{V/S}$ avec $\varphi^* : \varphi^*\Omega^p_{Y/S} \to \Omega^p_{V/S}$. Ce problème est local donc on peut supposer l'existence d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& A^m_S \arrow[dr] & \\
V \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \arrow[r] & A^p_S
\end{tikzcd}$$

où j est une immersion fermée vérifiant (P') et ψ étale.

Comme $\psi \circ \varphi$ est induit par un morphisme : $A^m_S \to A^p_S$, la classe $C_{V/S}$ vérifie la propriété de la trace pour $\psi \circ \varphi$, donc aussi pour φ puisque $\psi^* : \psi^*\Omega^p_{A^p_S/S} \to \Omega^p_{Y/S}$ est surjectif.

IV.- <u>RESIDUS ET HYPERHOMOLOGIE DE DE RHAM</u>

1.- <u>Equivalence avec la définition du Résidu</u>

Considérons un morphisme équidimensionnel $f : X \to S$ de dim relative p ; on va voir que la connaissance de la classe fondamentale $C_{X/S}$ nous permet de généraliser la définition du Résidu de Grothendieck ([5] p.195) au cas où f n'est pas nécessairement lisse, et réciproquement la connaissance du Résidu pour f permet de définir la classe $C_{X/S}$.

1.- Soit $F. = F_o \supset F_1 \supset \ldots \supset F_p$ une suite décroissante de fermés dans X. On dit que la suite F. est maximale et pure si elle vérifie les conditions suivantes :

i) $F_o = X$;

ii) F_p est propre et surjectif sur S ;

iii) Pour tout $i \in [1,p]$, codim (F_i, F_{i-1}) est pure et égale à 1, c'est-à-dire pour toute composante irréductible Z' de F_{i-1} contenant Z, on a : codim $(Z,Z') = 1$.

Définition.- Soient $F^o, F^1, \ldots, F^p$ *une famille de fermés dans* X *telle que la suite de fermés* $F_i = \bigcap_{j=0}^{i} F^j$ *soit maximale et pure pour* $i \in [0,p]$, *dans* X *équidim. sur* S *de dim relative* p. *Supposons qu'il existe une classe fondamentale* $C_{X/S} : \Omega^p_{X/S} \to \mathcal{W}_{X/S}$ *, et considérant l'immersion*

$$j_i : F_{i+1} - \Big(\big(\bigcup_{j>i+1} F^j\big) \cap F_{i+1}\Big) = V_{i+1} \to F_i - \Big(\big(\bigcup_{j>i+1} F^j\big) \cap F_i\Big) = W_i$$

telle que : $V_i = W_i - V_{i+1}$ *, on peut définir un morphisme de connexion :*

$$\delta_i : \underline{\mathbb{H}}^{-p+i}_{V_i}(\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S}) \to \underline{\mathbb{H}}^{-p+i+1}_{V_{i+1}}(\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S})$$

Alors, on appelle Résidu le composé des morphismes suivants

$$\text{Rés}_{F.} : \Gamma(V_o, \Omega^p_{X/S}) \xrightarrow{C_{V_o/S}} \Gamma(V_o, \mathcal{W}_{X/S}) \xrightarrow{\delta_o} \cdots \xrightarrow{\delta_i} \cdots \xrightarrow{\delta_{p-1}}$$

$$\Gamma(F_p, \mathbb{H}^o_{F_p}(\mathcal{D}^{\cdot}_{X/S}) \xrightarrow{\operatorname{Tr} F_p/S} \Gamma(S, \mathcal{O}_S).$$

Le cas d'une intersection complète.-

C'est le cas où l'on considère une suite régulière de sections $u_1, \ldots, u_p$ de $\mathcal{O}_X$ sur X telle que $V(u_1, \ldots, u_p)$ soit propre et surjectif sur S. On pose alors $F^o = X$ et $F^j = V(u_j)$, et on définit pour toute forme $\omega \in \Gamma\Omega^p_{X/S}$ un symbole Résidu $\text{Rés}\begin{bmatrix} \omega \\ u_1 \ldots u_p \end{bmatrix} = \text{Rés}^f_{F.}\left(\frac{\omega}{u_1 \ldots u_p}\right)$ dans $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On retrouve au moins au signe près le symbole Résidu de Grothendieck lorsque X est lisse sur S.

Remarque.- Plus généralement, on peut associer à toute suite de fermés F. maximale et pure dans X sur S un morphisme Résidu de la manière suivante : soient U_o un ouvert partout dense dans X, et des ouverts U_i de F_i associés à U par récurrence: si on connaît U_i, alors $U_{i+1} = \tilde{U}_i \cap F_{i+1}$, où $\tilde{U}_i = \complement_{F_i}((F_i - U_i) \cap (F_i - F_{i+1}))$. Soient l'immersion de U_{i+1} dans $U_i \cup U_{i+1}$ et les morphismes r_i de restriction et δ_i de connexion :

$$\Gamma(U_i, \underline{\mathbb{H}}^{-p+i}_{U_i}(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})) \xrightarrow{r_i} \Gamma(U_i - U_{i+1}, \underline{\mathbb{H}}^{-p+i}_{U_i - U_{i+1}}(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})) \xrightarrow{\delta_i} \Gamma(U_{i+1}, \underline{\mathbb{H}}^{-p+i+1}_{U_{i+1}}(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})).$$

Soient V un ouvert partout dense dans S tel que $F_p \times_S V$ soit inclus dans U_o et r_p la restriction de U_p à $F_p \times_S V$ dans $\underline{\mathbb{H}}^o_{U_p}(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})$. Alors on définit le Résidu comme le composé des morphismes suivants :

$$\text{Rés}^{U_o}_{F_{\bullet}} : \Gamma(U_o, \Omega^p_{X/S}) \xrightarrow{C_{X/S}} \Gamma(U_o, \omega_{X/S}) \xrightarrow{\delta_o \circ r_o} \cdots \xrightarrow{\delta_i \circ r_i} \cdots \xrightarrow{\delta_{p-1} \circ r_{p-1}}$$

$$\Gamma(U_p, \underline{\mathbb{H}}^o_{U_p}(\mathcal{D}^{\bullet}_{X/S})) \xrightarrow{\text{Tr } F_p/S \circ r_p} \Gamma(V, \mathcal{O}_S)$$

2.- Soient $f : Y \to S$ un morphisme lisse de dim relative p et $h : X \to Y$ un morphisme fini et surjectif. Le graphe $h' : X \to S \times_S Y$ de h est une immersion régulière, et si on suppose $\Omega^1_{Y/S}$ libre, engendré par une base $du_1, \ldots, du_p$, les éléments $v_i = p_1^* h^*(u_i) - p_2^*(u_i)$ définissent $h'(X)$ dans un voisinage ouvert U dans $X \times_S Y$.

Le morphisme p_2 se déduit de X sur S par le changement de base lisse Y sur S. On va définir le morphisme $\text{Tr } h : h_* \Omega^p_{X/S} \to \Omega^p_{Y/S}$.

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, shift left, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[ur, shift left, "h'"] \arrow[rr, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

<u>Définition</u>.- Avec les notations précédentes, supposons défini le symbole Résidu du morphisme p_2/U *pour la suite régulière* (v_i) *pour* $i \in [1,p]$. *On définit* Tr h *pour une forme* $\omega \in \Gamma(X, \Omega^p_{X/S})$ *par la formule :*

$$\text{Tr } h(\omega) = \text{Rés}_{U/X} \begin{bmatrix} p_1^* \omega \\ v_1, \ldots, v_p \end{bmatrix} du_1 \wedge \ldots \wedge d_{up}$$

Lorsque X est lisse sur S, d'où p_2 est lisse sur X, cette formule est compatible avec les définitions du Résidu et de la trace.

Soit maintenant une famille de morphismes équidimensionnels stable par changement de base lisse (par exemple les morphismes équidimensionnels et de Tor. dim finie). Si on sait définir les symboles Résidu pour les morphismes de cette famille, on en déduit d'après la définition ci-dessus et les techniques du § II, la construction de la classe fondamentale relative.

2.- L'hyperhomologie de De Rham

On considère dans la suite un morphisme $f : X \to S$ plat, de variétés algébriques sur un coprs k de caractéristique zéro. Alors, on dispose d'une représentation canonique du complexe dualisant relatif $K^{\bullet}_{X/S} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(f^* K^{\bullet}_S, K^{\bullet}_X)$ composé de faisceaux flasques.

On va construire des groupes $\mathbb{H}_{\bullet,Z}(X/S)$ qui méritent le nom d'hyperhomologie de De Rham relative à support dans un fermé Z de X, et où la classe fondamentale $C_{X/S}$ s'envoie d'une manière canonique.

1.- Le complexe double

On considère le $\mathcal{O}_X$-modume bigradué : $K^{\bullet,*}_{X/S}$: $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^*_{X/S}, K^{\bullet}_{X/S})$. Soit Y plat sur S, on définit pour tout S-morphisme $h : X \to Y$ propre, le morphisme $\mathrm{Tr}\, h : h_* K^{\bullet,*}_{X/S} \to K^{\bullet,*}_{Y/S}$, par composition avec le morphisme canonique: $\Omega^*_{Y/S} \to h_* \Omega^*_{X/S}$, du morphisme trace : $h_* K^{\bullet}_{X/S} \to K^{\bullet}_{Y/S}$.

Proposition.- *Avec les notations ci-dessus, on peut munir* $K^{\bullet,*}_{X/S}$ *d'une structure de complexe double telle que pour tout S-morphisme propre* $h : X \to Y$ *le morphisme* $\mathrm{Tr}\, h$ *commute aux différentielles partielles.*

Démonstration.- Il est facile de déduire la différentielle δ' sur $K^{\bullet,*}_{X/S}$ de δ sur $K^{\bullet}_{X/S}$. On va construire la différentielle d' à partir de d sur $\Omega^*_{X/S}$, ce qui est moins immédiat car d n'est pas $\mathcal{O}_X$-linéaire. On a besoin du lemme :

Lemme.- *Soient* $\gamma \in \Gamma K^{\bullet,*}_X$ *et* $\omega \in \Gamma\Omega^v_X$. *Si* $\gamma \in \mathrm{Hom}_X(\Omega^p_X, K^q_X)$, *on définit* $\omega \wedge \gamma \in \mathrm{Hom}_X(\Omega^{p-v}_X, K^q_X)$ *par la formule :*

$$(\omega \wedge \gamma)(\omega') = \gamma(\omega' \wedge \omega) \quad \text{pour} \quad \omega' \in \Gamma\Omega^{p-v}_X$$

Alors on a :

$$d'_X(\omega \wedge \gamma) = (d\omega) \wedge \gamma + (-1)^v \omega \wedge d'_X \gamma .$$

Démonstration du lemme.- La différentielle absolue d'_X a été définie dans ([4] § I.3.1). On se ramène facilement au cas : X lisse, en considérant localement sur X une immersion dans une variété lisse. Alors, on trouve ce lemme dans ([4] § I.3.1).

Considérons l'isomorphisme : $\underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^i_{X/S}, K^j_{X/S}) \simeq \Sigma_\ell\, \underline{\mathrm{Hom}}(f^* K^\ell_S, \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^i_{X/S}, K^{\ell+j}_X))$, on se ramène à démontrer que dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^{i}_{X/S},K^{r}_{X}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^{i}_{X},K^{r}_{X}) \\
\Big\downarrow \underline{d}' & & \Big\downarrow d'_X \\
\underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^{i-1}_{X/S},K^{r}_{X}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^{i-1}_{X},K^{r}_{X})
\end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont injectifs, la différentielle d'_X induit $\underline{d}'$. Il faut voir que si $\eta \in \Gamma\underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^{i}_{X},K^{r}_{X})$ est nul sur $\mathrm{Im}(\Omega^{i-1}_{X} \otimes f^*\Omega^1_S)$ dans Ω^i_X, alors $d'_X(\eta)$ est nul sur $\mathrm{Im}(\Omega^{i-2}_{X} \otimes f^*\Omega^1_S)$ dans Ω^{i-1}_X .

Soient U un ouvert de X, $\alpha \in \Gamma(U,\Omega^{i-2}_X)$ et $ds \in \Gamma(U,\Omega^1_S)$, on a : $\eta_1 = \alpha \wedge ds \wedge \eta \in \mathrm{Hom}(\Omega^1_U,K^r_U)$ est nul; en effet, pour toute forme ω dans $\Gamma(U,\Omega^1_X)$: $\eta'(\omega) = \eta(\omega \wedge \alpha \wedge ds) = 0$, car $\omega \wedge \alpha \wedge ds \in \mathrm{Im}(\Gamma(U,\Omega^{i-1}_X \otimes f^*\Omega^1_S)$; de même $d\alpha \wedge ds \wedge \eta = 0$.

En appliquant le lemme, on trouve : $\alpha \wedge ds \wedge d'\eta = (-1)^{i-1}d'(\alpha \wedge ds \wedge \eta) - d\alpha \wedge ds \wedge \eta = 0$. De même en appliquant le lemme pour ω section de $\mathcal{O}_S$, on voit que $\underline{d}'$ est $f^{-1}\mathcal{O}_S$-linéaire, et induit donc la différentielle d' que l'on cherche.

D'autre part, la propriété de Tr h de commuter aux différentielles se déduit de la même manière du cas absolu ([4] I.3.1.2.).

<u>Définition</u>.- Soit Z *une sous-variété fermée de la variété* X *plate sur* S. *On appelle Hyperhomologie de De Rham de* X *sur* S *à support dans* Z, *et on note* $\mathbb{H}_{\cdot,Z}(X/S)$ *le groupe gradué égal à la cohomologie à support dans* Z *du complexe simple* $\overline{K^{\cdot,*}_{X/S}}$ *associé à* $K^{\cdot,*}_{X/S}$: $\mathbb{H}_{i,Z}(X/S) = H^{-i}(\Gamma_Z(X,\overline{K^{\cdot,*}_{X/S}}))$, *où* $i \in \mathbb{Z}$.

<u>Proposition</u>.- Soit f : X → S *un morphisme plat de dim relative p.*

i) *La classe fondamentale* $c_{X/S} : \Omega^p_{X/S} \to \omega_{X/S}$ *est annulée par les différentielles* δ' *et* d' *de* $K^{\cdot,*}_{X/S}$.

ii) *Soit* h : X→ Y *un morphisme fini dans une variété* Y *lisse sur* S, *de dim relative* p; *alors il existe un morphisme canonique* Tr h : $h_*\Omega^*_{X/S} \to \Omega^*_{Y/S}$ *qui est :*

1) *"Compatible" avec la trace de toute projection finie* h' : X → Y' *dans* Y' *lisse, de dim relative* p *sur* S.

2) *Compatible avec tout changement de base (cohom. transversal à* f *puisque* f *est plat).*

3) *La trace* Tr h *commute aux différentielles.*

On va utiliser le lemme suivant :

<u>Lemme</u>.- *Il y a équivalence entre* $d'C_{X/S} = 0$ *et le fait que* Tr h *commute aux différentielles.*

<u>Démonstration du lemme</u>.- L'isomorphisme de dualité T_h (II.1) associe à $C_{X/S}$ le morphisme Tr h en degré p. Pour toute forme ω de degré i sur X, on définit Tr $h(\omega)$ par la formule :

Pour toute forme φ de degré p-i sur Y, $(\mathrm{Tr}\ h\ \omega) \wedge \varphi = \mathrm{Tr}\ h(\omega \wedge h^*\varphi)$.

Soit maintenant une forme $\omega \in \Gamma\Omega^{p-1}_{X/S}$, on a une formule analogue à celle du lemme du N°1 précédent :

$$d'(\omega \wedge C_{X/S}) = d\omega \wedge C_{X/S} + (-1)^{p-1}\omega \wedge d'C_{X/S} \ ;$$

d'où, en utilisant la commutativité de Tr h à d', et en remarquant que pour une forme φ sur X, on a : $\mathrm{Tr}\ h\ \varphi = \mathrm{Tr}\ h(\varphi \wedge C_{X/S})$, reliant la trace d'une forme et celle d'un symbole, on trouve :

$$d\ \mathrm{Tr}\ h\ \omega - \mathrm{Tr}\ h(d\omega) = d'\mathrm{Tr}\ h(\omega \wedge C_{X/S}) - \mathrm{Tr}\ h(d\omega \wedge C_{X/S}) =$$

$$\mathrm{Tr}\ h(d'(\omega \wedge C_{X/S}) - d\omega \wedge C_{X/S}) = \mathrm{Tr}\ h((-1)^{p-1}\omega \wedge d'C_{X/S}).$$

Remarquer que si Tr h commute à d : $\Omega^{p-1}_{X/S} \to \Omega^p_{X/S}$, elle commute alors à d en tout degré.

<u>Démonstration de la proposition</u>.- i) Il est évident que la différentielle δ' annule $C_{X/S}$ dans $K^{-p,p}_{X/S}$, mais il est plus difficile de voir que $d'C_{X/S} = 0$. Pour tout morphisme fini $h : U \to Y$ d'un ouvert U de X dans Y lisse sur S, on a $\mathrm{Tr}\ h(C_{U/S}) \in \Gamma\,\underline{\mathrm{Hom}}_Y(\Omega^p_{Y/S},\Omega^p_{Y/S}) \simeq \Gamma\mathcal{O}_Y$ est égal à Tr h(1), d'où :

$$\mathrm{Tr}\ h(d'C_{X/S}) = d'_{Y/S}(\mathrm{Tr}\ h(1)) = 0.$$

On peut en déduire alors que $d'C_{X/S} = 0$; on le voit par exemple tout de suite quand on explicite le calcul pour un changement de projection finie (voir Thèse d'Angéniol, à paraître); si on veut éviter ce calcul, on ne connaît pas de démonstration facile.

ii) Cette partie se déduit du lemme et de i). Par la compatibilité avec la trace de toute projection finie h', on veut dire que Tr h et Tr h' correspondent par la dualité à la même classe $C_{X/S}$.

La compatibilité avec tout changement de base se déduit de cette même propriété de la trace au niveau des anneaux.

Définition. - *1) Soit* $f : X \to S$ *un morphisme plat de dim relative* p. *On appelle classe fondamentale de* X *sur* S *dans l'Hyperhomologie de De Rham et on note aussi* $c_{X/S}$ *l'image de* $c_{X/S} \in \Gamma K^{\cdot,*}_{X/S}$ *dans* $\mathbb{H}_{2p}(X/S)$.

2) S'il existe une immersion fermée i *de* X *dans* Y *lisse de dim relative* n *sur* S. *La classe fondamentale dans l'hypercohomologie de De Rham de* Y *sur* S *est l'image de* $c_{X/S}$ *par les morphismes :*

$$\mathbb{H}_{2p}(X/S) \xrightarrow{\text{Tr } i} \mathbb{H}_{2p,X}(Y/S) \xrightarrow{\text{Dualité}} \mathbb{H}_X^{2n-2p}(Y/S)$$

*
* *

B I B L I O G R A P H I E

[1] BOTT (R) : Homogeneous vector bundles. Annals of Math. Vol. 66, N°2, 1957 p.203-248

[2] DEMAZURE (M) : Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott, Inventiones Math. 5, p.349-356, 1968

[3] " " A very simple proof of Bott's theorem, Inventiones Math. 33, p.271-272, 1976

[4] EL ZEIN (F) : Article précédent, dans ce mémoire.

[5] GROTHENDIECK (A) : Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. I.H.E.S.

[6] HARTSHORNE (R) : Residues and Duality, Springer-Verlag, Heidelberg, Lecture Notes in Math. 20 , 1966

[7] MUMFORD (D) : Geometric Invariant Theory, Ergebnisse, Springer-Verlag Heidelberg, band 34, 1965

[8] TJURIN : The Geometry of moduli of vector bundles, Russian Math Surveys, 29, 6, 1974, p. 57-88

***

Bernard ANGENIOL
Université Paris-Sud
Math. Bât. 425
91405 ORSAY

Fouad EL ZEIN
Université Paris VII
Math. Tour 45-55
75221 PARIS 5
