Mémoires de la S. M. F.

Bernard Helffer

Construction de paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lissés

Mémoires de la S. M. F., tome 51-52 (1977), p. 63-123
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__51-52__63_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 51-52, 1977, p. 63-123.

CONSTRUCTION DE PARAMETRIXES POUR DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS CARACTERISTIQUES SUR LA REUNION DE DEUX CONES LISSES

par Bernard HELFFER
(Ecole Polytechnique)

INTRODUCTION

On se propose de construire des paramétrixes pour une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur X dont l'ensemble caractéristique est la réunion de deux cônes C^∞. La construction de paramétrixes pour des classes d'opérateurs pseudo-différentiels dont l'ensemble caractéristique est un cône C^∞ Σ a été réalisée dans de nombreux articles ([7] [1],[3], etc ...). Rappelons ici un résultat bien connu [4].

Soit P un opérateur pseudo-différentiel sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ régulier d'ordre m(i.e son symbole admet un développement asymptotique en termes homogènes) dont le symbole principal p vérifie la condition

$$\text{(H)} \qquad \frac{1}{i}\{p,\bar{p}\}x,\xi < 0 \text{ lorsque } p(x,\xi) = 0$$

Alors l'opérateur P admet une paramétrixe à gauche Q qui permet en particulier de démontrer l'hypoellipticité avec perte d'1/2 dérivée.

Rappelons également le résultat suivant qui motive l'étude faite ici.

Soit P_{2m-1} un opérateur pseudo-différentiel régulier d'ordre 2m-1, alors P^2+P_{2m-1} admet (sous l'hypothèse (H) sur P) une paramétrixe à gauche Q donnant l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée (cf.[7].)

On considère ici le problème suivant :

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudo-différentiels réguliers sur X d'ordre 1/2, dont les symboles principaux p_j (j=1,2) vérifient (H) ; Soit A un opérateur régulier d'ordre 0.

On considère

$$P = P_1 . P_2 + A$$

et on se pose la question suivante :

Peut-on construire une paramétrixe pour P donnant l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée ?

On montrera au chapitre V que c'est toujours possible, le fait intéressant étant que l'on peut se passer de faire des hypothèses sur la géométrie de Σ_1 et Σ_2 (où Σ_i (i=1,2) désigne l'ensemble caractéristique de p_i).

Dans les chapitres II, III, IV, on supposera que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses, mais on montrera au chapitre V que l'on peut toujours se ramener au cas où Σ_1 et Σ_2 sont transverses en "ajoutant des variables".

Au chapitre I, on introduit une classe d'opérateurs pseudo différentiels adaptée au problème et qui généralise la classe introduite par L. Boutet de Monvel dans [1].

On montre, au chapitre II, que des hypothèses du type (H) permettent de ramener la construction de paramétrixes à gauche ou à droite à l'étude de l'inversibilité d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. On suppose ici que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses.

Le chapitre III, calqué sur l'article [2], développe la théorie adaptée à l'étude d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Il s'agit pour l'essentiel de montrer que, si on a une famille d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dépendant de manière C^∞ d'un paramètre, alors on peut déduire de l'existence d'un inverse pour toute valeur d'un paramètre, l'existence d'un inverse dépendant de manière C^∞ du paramètre. La réponse positive à cette question est bien entendu liée à la forme particulière des opérateurs considérés.

Au chapitre IV, on fait l'étude de l'inversibilité pour chaque valeur du paramètre ; l'algèbre linéaire symplectique permet de ramener le problème à l'étude de quatre modèles simples.

Au chapitre V on énonce les théorèmes généraux, on montre comment on peut ramener la situation générale au cas transverse et on traite une application à la sous-ellipticité des systèmes. En particulier, on répond positivement à la question suivante :

Soit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & B \\ A & P_2 \end{pmatrix}$$

où P_1 et P_2 sont des opérateurs pseudo-différentiels réguliers d'ordre 1/2 dont le symbole principal vérifie (H) et où A et B sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 régulier.
Alors $\mathcal{P}$ admet-il une paramétrixe à gauche donnant la sous-ellipticité avec perte d'1/2 dérivée ?

Le plan de cet article est le suivant :

CHAPITRE I ETUDE D'UNE CLASSE DE SYMBOLES

§ 1. Définition de la classe $S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$

§ 1.1 Préliminaires

On considère U un cône C^∞ arbitraire de dimension $N+1$, et $\Sigma_i \subset U$ $(i=1,2)$ un sous cône fermé C^∞ de codimension ν_i

On dira que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses si $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est un sous cône fermé C^∞ de U, tel qu'en tout point ρ de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$,

$$T_\rho(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = T_\rho(\Sigma_1) \cap T_\rho(\Sigma_2)$$

On dira que Σ_1 et Σ_2 sont transverses s'ils sont quasitransverses et si $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est de codimension $\nu_1+\nu_2$.

Localement, dire que Σ_1 et Σ_2 sont transverses, c'est dire qu'il existe des fonctions C^∞ sur U homogènes de degré 0, $u_1^1,\dots,u_1^{\nu_1}$; $u_2^1\dots u_2^{\nu_2}$ telles que les formes du_i^j sont indépendantes, et telles que

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 \text{ est définie par } & u_1^1 = 0\ ;\dots; & u_1^{\nu_1} = 0 \\ \Sigma_2 & u_2^1 = 0\ ;\dots; & u_2^{\nu_2} = 0 \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 & u_1^1 = 0\ ;\dots; & u_1^{\nu_1} = 0, u_2^1 = 0,\dots, u_2^{\nu_2} = 0 \end{array}$$

Dire que Σ_1 et Σ_2 sont quasi transverses, c'est dire qu'il existe des fonctions C^∞ sur U homogènes de degré 0, $u_1^1,\dots,u_1^{\nu_1'}$; $w^1,\dots,w^\nu, u_2^1,\dots,u_2^{\nu_2'}$

telles que :

- $\nu = \nu_1 - \nu_1' = \nu_2 - \nu_2'$
- les formes du_i^j, dw^k sont indépendantes

Σ_1 est définie par $u_1^1 = 0,\dots, u_1^{\nu_1'} = 0,\ w^1 = 0,\dots, w^\nu = 0$

Σ_2 est définie par $u_2^1 = 0,\quad , u_2^{\nu_2'} = 0,\ w^1 = 0,\dots, w^\nu = 0$

$\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est définie par $u_1^1 = 0;\dots;u_1^{\nu_1'} = 0;\ u_2^1 = 0,\dots, u_2^{\nu_2'} = 0; w^1 = 0;\dots; w^\nu = 0$

On peut prendre alors localement comme système de coordonnées

$$(u_1,u_2,w,v,r) = (u_1,u_2,w,\hat{v})$$

où

$v^1,\ldots,v^\mu$ sont des fonctions C^∞ homogènes de degré $0(\mu=N-\nu_1-\nu_2+\nu)$

et r est homogène de degré 1 strictement positive.

Dans la notation du second membre $\hat{v}$ est un système de coordonnées d'un cône localement isomorphe à $\mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^+$

Si Σ est un sous-cône C^∞ arbitraire de U de codimension ν, on notera $(d_\Sigma)^2$ la somme d'une fonction strictement positive homogène de degré -1 et d'une fonction homogène de degré 0 s'annulant exactement à l'ordre 2 sur Σ.

Si Σ est défini localement par $u^1=0,\ldots,u^\nu=0$, on pourra prendre

$$d_\Sigma^2 = \sum_{i=1}^{\nu} u^{i^2} + \frac{1}{r}$$

On utilisera constamment la définition suivante :

Soient f et g deux fonctions C^∞ sur U, on dira que :

$$f \lesssim g$$

si, dans tout sous-cône V de U à base compacte, il existe $C>0$ et r_o telle que

$$f \leqslant Cg$$

pour $r>r_o$ dans V.

Enfin, tout ce que nous ferons dans la suite est "local", c'est à dire que pour les applications que nous avons en vue, on peut toujours se restreindre à un voisinage conique.

§ 1.2 Rappels sur la classe de L. Boutet de Monvel [1]

Soit Σ un sous cône C^∞ dans U défini par $u=0$. Si on prend comme coordonnées locales (u,v,r), on pose la :

Définition 1.2.1

Si m, k sont des réels, on désigne par $S^{m,k}(U,\Sigma)$ l'ensemble de toutes les fonctions C^{∞} $a(u,v,r)$ sur U, telles que, pout tout entier $p \in \mathbb{N}$, tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{\nu}$, $\beta \in \mathbb{N}^{N-\nu}$, on ait :

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{p} a\right| \lesssim r^{m-p}\, d_{\Sigma}^{k-|\alpha|}$$

Pour étudier l'invariance par difféomorphisme, L. Boutet de Monvel avait montré l'équivalence avec la définition suivante :

Soit Σ un sous-cône C^{∞} dans U de codimension ν

Définition 1.2.1'

Si m,k sont des réels, on désigne par $S^{m,k}(U,\Sigma)$ l'espace de toutes les fonctions C^{∞} a sur U, telles que, pour tous champs de vecteurs $X^1,..,X^p$, $Y^1,..,Y^q$ à coefficients C^{∞}, homogènes de degré 0, avec les X_j tangents à Σ, l'on ait :

$$|X^1 .. X^p \cdot Y^1 .. Y^q\, a| \lesssim r^m\, d_{\Sigma}^{k-q}$$

L'équivalence locale de ces deux définitions vient du fait que si X est tangent à Σ, il peut s'écrire sous la forme :

$$X = \Sigma\, a_j \cdot \frac{\partial}{\partial u_j} + \Sigma\, b_j \frac{\partial}{\partial v_j} + c \cdot r \frac{\partial}{\partial r}$$

où a_j, b_j, c sont C^{∞} homogènes de degré 0 (donc sont dans $S^{0,0}$) et a_j s'annule sur Σ (donc est dans $S^{0,1}$)

§ 1.3 Le modèle local dans le cas transverse

Soit U le cône $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, on prend comme coordonnées :

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \ni \tilde{u}=(u,r) = (u_1,u_2,v,r) \in \mathbb{R}^{\nu_1} \times \mathbb{R}^{\nu_2} \times \mathbb{R}^{N-\nu_1-\nu_2} \times \mathbb{R}^+$$

Soit Σ_i (i=1,2) le cône défini par $u_i=0$

On définit d_{Σ_1,Σ_2} par :

$$\frac{1}{d_{\Sigma_1,\Sigma_2}} = \frac{1}{d_{\Sigma_1}} + \frac{1}{d_{\Sigma_2}}$$

Soient m,k_1,k_2,k des nombres réels, on pose la définition

Définition 1.3.1

On désigne par $S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$, l'espace de toutes les fonctions C^∞ $a(\tilde{u})$ sur U, telles que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tous multi-indices $\alpha_1 \in \mathbb{N}^{\nu_1}$, $\alpha_2 \in \mathbb{N}^{\nu_2}$, $\beta \in \mathbb{N}^{N-\nu_1-\nu_2}$, on ait :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{\beta} \left(r.\frac{\partial}{\partial r}\right)^{p} a \right| \lesssim r^m \, d_{\Sigma_1}^{k_1-|\alpha_1|} \, d_{\Sigma_2}^{k_2-|\alpha_2|} \, . \, (d_{\Sigma_1,\Sigma_2})^k$$

L'inégalité

1.3.1. $r^{-1/2} \lesssim d_{\Sigma_i} \lesssim 1 \qquad i = 1,2 \quad , r^{-1/2} \lesssim d_{\Sigma_1,\Sigma_2} \lesssim 1$

entraine l'inclusion

1.3.2. $$S^{m,k_1,k_2,k}(U) \subset S^{m-1/2.k_1- \ -1/2.k_2- \ -1/2.k-}_{1/2,1/2}(U)$$

Rappelons [5] que $S^m_{1/2,1/2}(U)$ est la classe des symboles tels que :

1.3.3. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{\alpha} . \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{p} a \right| \lesssim r^{m+\frac{|\alpha|}{2}}$$

On notera

$$S^{m,k_1,k_2}(U,\Sigma_1,\Sigma_2) \text{ lorsque } k = 0$$

L'introduction d'une telle classe est justifiée par les remarques suivantes :

1.3.4. $S^{m,k_1}(U,\Sigma_1) \subset S^{m,k_1,0}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$

1.3.5. $S^{m,k_2}(U,\Sigma_2) \subset S^{m,0,k_2}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$

1.3.6. Si $p_1 \in S^{m,k_1,k_2,k}$, $p_2 \in S^{m',k_1',k_2',k'}$

$$p_1 p_2 \in S^{m+m',k_1+k_1',k_2+k_2',k+k'}$$

La proposition suivante nous permettra de donner une définition intrinsèque ultérieurement.

Proposition 1.3.2

Soit X un champ de vecteur à coefficients C^∞ homogène de degré 0. Alors

i) Si X est tangent à Σ_2, X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1-1,k_2,k}$$

ii) Si X est tangent à Σ_1, X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2-1,k}$$

iii) Si X est tangent à Σ_1 et Σ_2, X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2,k}$$

iv) Si X est quelconque, X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2,k-1}$$

Démonstration

$$X = \sum_{i=1}^{\nu_1} a_i^1 \frac{\partial}{\partial u_1^i} + \sum_{i=1}^{\nu_2} a_i^2 \frac{\partial}{\partial u_2^i} + \sum_{i=1}^{N-\nu_1-\nu_2} b_i \frac{\partial}{\partial v_i} + c\, r \frac{\partial}{\partial r}$$

où a_i^j, b_i , c sont des fonctions C^∞ homogènes de degré 0, et sont donc dans $S^{o,o,o,o}$

(iv) s'en déduit aisément.

Si X est tangent à Σ_1, alors les fonctions a_i^1 s'annulent sur Σ_1 et il est facile de voir qu'elles sont alors dans $S^{o,1,o,o}$

Le point i) (et ii) s'en déduit.

Si X est tangent à Σ_1 et Σ_2, alors les fonctions a_i^1 s'annulent sur Σ_1 et les fonctions a_i^2 s'annulent sur Σ_2, on vérifie alors aisément (iii).

Ces classes ont bien entendu d'autres propriétés, mais que nous exposerons dans un cas qui généralise la situation précédente, i.e le cas quasi-transverse.

§ 1.4. Le modèle local dans le cas quasi-transverse

Soit U le cône $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$,

On désigne par :

$\tilde{u} = (u,r) = (u_1,u_2,w,v,r) \in \mathbb{R}^{\nu_1'} \times \mathbb{R}^{\nu_2'} \times \mathbb{R}^{\nu} \times \mathbb{R}^{N-\nu_1'-\nu_2'-\nu} \times \mathbb{R}^+$

la variable de U, et soit

$\Sigma_i (i=1,2)$ le sous-cône défini par $u_i=0$, $w=0$

$\Sigma_i (i=1,2)$ est donc de codimension $\nu_i = \nu_i' + \nu$

d_{Σ_i} est défini bien entendu par : $d^2_{\Sigma_i} = |u_i|^2 + |w|^2 + \frac{1}{r}$

d_{Σ_1,Σ_2} est encore défini par : $d^{-1}_{\Sigma_1,\Sigma_2} = d^{-1}_{\Sigma_1} + d^{-1}_{\Sigma_2}$

on pose la définition suivante :

Définition 1.4.1

Si m,k_1,k_2,k désignent des réels ,

on désigne par $S^{m,k_1,k_2,k}$, l'espace de Fréchet de toutes les fonctions C^∞ $a(\tilde{u})$ sur U, telles que pour tout entier p et tout multiindice $\alpha_1 \in \mathbb{N}^{\nu_1'}$, $\alpha_2 \in \mathbb{N}^{\nu_2'}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\nu}$, $\beta \in \mathbb{N}^{N-\nu_1'-\nu_2'-\nu}$, on ait :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{\beta} \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{p} a \right| \lesssim r^m \, d_{\Sigma_1}^{k_1-|\alpha_1|} \, d_{\Sigma_2}^{k_2-|\alpha_2|} \, d_{\Sigma_1,\Sigma_2}^{k-|\alpha|}$$

On notera encore simplement S^{m,k_1,k_2} si $k = 0$.

Lorsque $\nu = 0$, on retombe sur la définition 1.3.1, de sorte que tout ce que nous montrerons dans ce § s'applique au cas précédent.

Les propriétés 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4, 1.3.5 et 1.3.6 sont bien entendu vérifiées.

Donnons un exemple de symbole appartenant à cette classe.

Exemple 1.4.2 :

Soit a dans $S^m_{reg}(U)$ un symbole semirégulier $(a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j/2})$ et soient k_1, k_2 deux entiers positifs, alors a est dans S^{m,k_1,k_2} si et seulement si :

$$a_{m-j/2}(u_1,u_2,w,v,r) = \sum_{\substack{|\beta_1| \leq k_1 \\ |\beta_2| \leq k_2 \\ |\beta_1|+|\beta_2|+|\beta| = (-j+k_1+k_2)^+}} C_{\beta_1,\beta_2,\beta,j}\, u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} w^{\beta} \tag{1.4.1}$$

où $C_{\beta_1,\beta_2,\beta,j}$ est une fonction C^∞ sur U homogène d'ordre $m-j/2$

La condition est vide pour $j > k_1+k_2$

Démonstration

La condition suffisante est facile à vérifier ; montrons que la condition est nécessaire.

Utilisant un développement de Taylor (et raisonnant par j croissants successifs), on doit montrer que :

$$\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial u_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial u_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\beta}}{\partial w^{\beta}} a_{m-j/2} \equiv 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$

dans les cas suivants :

(A) lorsque $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta| + j < k_1 + k_2$

(B) lorsque $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta| + j = k_1 + k_2$

(B 1) $|\beta| + |\beta_2| < k_2 - j$

(B 2) $|\beta| + |\beta_1| < k_1 - j$

Cas A : Il résulte de l'estimation sur $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ que :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial u_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial u_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\beta}}{\partial w^{\beta}} a_{m-j/2} \right| \lesssim r^m . r^{-(\frac{k_1-|\beta_1|}{2})} r^{-(\frac{k_2-|\beta_2|}{2})} r^{\frac{|\beta|}{2}}$$

Le terme de gauche a comme homogénéité m-j/2, celui de droite $m - \dfrac{k_1 + k_2 - |\beta_1| - |\beta_2| - |\beta|}{2}$ d'où le résultat en faisant tendre r vers l'∞ .

Pour la vérification de (B 1) et (B 2), on raisonne en tout point de Σ_1 extérieur à Σ_2 (ou tout point de Σ_2 extérieur à Σ_1), le résultat est alors celui de [1].

Corollaire 1.4.3 :

Pour $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$

$$S^{m,k_1,k_2}(U,\Sigma_1,\Sigma_2) \cap S^m_{reg}(U) \subset S^{m,k_1+k_2}(U,\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

Ce corollaire évident permet de relier la théorie développée ici à celle développée dans [1] [2] ; on en verra bientôt des applications.

Exemple 1.4.4 :

Soit a une fonction C^∞ homogène de degré 0 s'annulant sur Σ_1 et Σ_2 , alors $a \in S^{0,0,0,1}$.

Si a s'annule sur Σ_1

$$a(u_1,u_2,w,v,r) = \sum_{i=1}^{\nu'_1} u_1^i \cdot b_i(u_1,u_2,w,v,r)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu} w^j c_j(u_1,u_2,w,v,r)$$

où les b_i ,c_j sont C^∞ homogènes de degré 0 .

$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j$ s'annule sur Σ_2 . On doit donc se limiter à considérer

$$\sum_{i=1}^{\nu'_1} u_1^i b_i(u_1,u_2,w,v,r)$$

On suppose que :

$$\sum_{i=1}^{\nu'_1} u_1^i b_i(u_1,u_2,w,v,r)$$

est nul sur Σ_2 .

$$b_i(u_1,u_2,w,v,r) = b_i(u_i,0,0,v,r) + \sum_{j=1}^{\nu'_2} u_2^j\, b_{ij}(u_1,u_2,w,v,r)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} b_{ik} \cdot w^k$$

Par conséquent :

$$f = \sum_{i=1}^{\nu'_1} u_1^i\, b_i(u_1,u_2,w,v,r) = \sum_{i=1}^{\nu'_1} u_1^i\, b_i(u_1,0,0,v,r)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\nu'_1} \sum_{j=1}^{\nu'_2} b_{ij}(u_1,u_2,w,v,r) u_1^i u_2^j$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} \tilde{b}_{ik}\, w^k$$

Dire que cette expression s'annule sur Σ_2, c'est dire que

$f(u_1,0,0,v,r) = \sum_{i=1}^{\nu'_1} u_1^i\, b_i(u_1,0,0,v,r)$ est identiquement nul.

C'est à dire que f(et donc a) est dans l'idéal engendré par $(u_1^i\ u_2^j)$ et w^k. Il suffit donc de vérifier la propriété pour $(u_1^i\ u_2^j)$ et pour w^k. Or on a :

$$(u_1^i\ u_2^j) \lesssim d_{\Sigma_1}\, d_{\Sigma_2} \lesssim \frac{1}{\frac{1}{d_{\Sigma_1}} + \frac{1}{d_{\Sigma_2}}} = \frac{d_{\Sigma_1}\, d_{\Sigma_2}}{d_{\Sigma_1} + d_{\Sigma_2}}$$

$$w^k \lesssim \frac{d_{\Sigma_1}\, d_{\Sigma_2}}{d_{\Sigma_1} + d_{\Sigma_2}} \quad \text{car } w^k \lesssim d_{\Sigma_1} \text{ et } w^k \lesssim d_{\Sigma_2}$$

On vérifie facilement les estimations pour les dérivées.
Ceci termine la démonstration du lemme.

On démontre la proposition suivante :

<u>Proposition 1.4.5</u> :

Soit X un champ de vecteur à coefficients C^∞ homogène de degré 0. Alors

i) Si X est tangent à Σ_2, X est continu de

$S^{m,k_1,k_2,k} \to S^{m,k_1-1,k_2,k}$

ii) Si X est tangent à Σ_1, X est continu de

$S^{m,k_1,k_2,k} \to S^{m,k_1,k_2-1,k}$

iii) Si X est tangent à Σ_1 et Σ_2, X est continu de

$S^{m,k_1,k_2,k} \to S^{m,k_1,k_2,k}$

iv) Si X est quelconque, X est continu de

$S^{m,k_1,k_2,k} \to S^{m,k_1,k_2,k-1}$

Le seul point où la démonstration diffère de celle de la proposition 1.3.2 est le point iii) .

<u>Démonstration du point iii)</u>

$$X = \sum_{i=1}^{\nu'_1} a_i^1 \frac{\partial}{\partial u_1^i} + \sum_{i=1}^{\nu'_2} a_i^2 \frac{\partial}{\partial u_2^i} + \sum_{j=1}^{\nu} b_j \frac{\partial}{\partial w^j} + \sum_{k=1}^{N-\nu'_1-\nu'_2-\nu} c_k \frac{\partial}{\partial v_k} + d\, r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Si X est tangent à Σ_1, a_i^1 et b_j doivent s'annuler sur Σ_1, en particulier

$$a_i^1 \in S^{o,1,o,o} \quad , \quad b_j \in S^{o,1,o,o}$$

Si X est tangent à Σ_2, a_i^2 et b_j doivent s'annuler sur Σ_2, en particulier

$$a_i^2 \in S^{o,o,1,o} \quad , \quad b_j \in S^{o,o,1,o}$$

On déduit de l'exemple 1.4.4 que b_j est dans $S^{o,o,o,1}$. La démonstration est alors aisée.

§ 1.5 <u>Définition invariante</u>

On considère un cône C^∞ arbitraire U, et $\Sigma_i \subset U, (i=1,2)$ un sous cône fermé de codimension ν_i.
Il résulte des § 1.4 et 1.5 que, lorsque Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses, on peut prendre la définition suivante qui est clairement inva-

riante par difféomorphisme :

Définition 1.5.1:

m, k_1, k_2, k étant des réels donnés, on désigne par $S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$ l'espace de Fréchet de toutes les fonctions C^∞ sur U telles que :

Pour tous champs de vecteurs C^∞ homogènes de degré 0, $X_1^1,..,X_1^{p_1}$, $X_2^1,..,X_2^{p_2}$, $Y^1,..,Y^q$; $Z^1,..,Z^p$ avec X_1^j tangent à Σ_2 , X_2^j tangent à Σ_1 , Y^j tangent à Σ_1 et Σ_2 , on ait :

$$|X_1^1..X_1^{p_1}\, X_2^1...X_2^{p_2}.\, Y^1..Y^q.\, Z^1..Z^p\, a| \lesssim r^m\, d_{\Sigma_1}^{k_1-p_1}\, d_{\Sigma_2}^{k_2-p_2}\, d_{\Sigma_1,\Sigma_2}^{k-p}$$

Remarque 1.5.2 :

L'hypothèse que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses n'intervient dans la définition que pour montrer que $S^{m,k_1,k_2,k}$ est métrisable. On pourra donc utiliser cette définition avec précaution dans le cas non quasitransverse.

Remarque 1.5.3 :

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T^*X\backslash 0$ le fibré cotangent à X privé de la section nulle. Soient U_1,U_2,U_3 des sous-cônes ouverts de $T^*X\backslash 0$ tels que $U_1 \subset\subset U_2 \subset\subset U_3$ (i.e $U_1 \cap S^*X \subset\subset U_2 \cap S^*X \subset\subset U_3 \cap S^*X$).

Soient Σ_1,Σ_2 des sous-cônes fermés de U_3

Alors si a est dans $S^{m,k_1,k_2,k}(U_2,\Sigma_1\cap U_2,\Sigma_2\cap U_2)$, il existe $\tilde{a}$ dans $S^{m,k_1,k_2,k}(U_3,\Sigma_1,\Sigma_2)$ telle que $\tilde{a}=a$ dans U_1.

Remarque 1.5.4 :

Soit $V\subset\subset U$ alors si $a\in S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$, $a/V \in S^{m,k_1,k_2,k}(V,\Sigma_1\cap V, \Sigma_2\cap V)$.

Proposition 1.5.5 :

On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses. Soit U' un second cône C^∞, $\Phi : U' \to U$ une application C^∞, homogène de degré 1 transverse à Σ_1, Σ_2 et $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ et posons

$$\Sigma_i' = \Phi^{-1}(\Sigma_i)(i=1,2)$$

Alors $a \to a \circ \Phi$ est continue de $S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$ dans $S^{m,k_1,k_2,k}(U',\Sigma_1',\Sigma_2')$.

Démonstration On prend des cartes locales pour U et U' de sorte que Σ_1, Σ_2, Φ sont mis sous forme canonique.

§ 2. ESTIMATIONS POUR CERTAINES INTEGRALES OSCILLANTES

Soit U un cône C^∞, Δ un sous-cône C^∞ fermé, Σ_1 et Σ_2 deux sous-cônes C^∞ fermés de U contenus dans Δ.
On définit $d_{\Sigma_1}, d_{\Sigma_2}, d_\Delta, d_{\Sigma_1,\Sigma_2}$ comme au paragraphe 1, mais on notera pour abréger, d_1, d_2, d_Δ, d_{12}.

Soient m, k_1, k_2, k, l des nombres réels, on pose la

Définition 2.1 :

On désigne par $QS^{m,k_1,k_2,k,l}(U,\Sigma_1,\Sigma_2,\Delta)$ l'ensemble de toutes les fonctions C^∞ a sur U telles que, pour tout champ de vecteur homogène de degré 0 $X^1,\ldots,X^p$; $W^1,\ldots,W^q$; $Y_1^1,\ldots,Y_1^{p_1}$; $Y_2^1,\ldots,Y_2^{p_2}$; $Z^1,\ldots,Z^s$

où X^i est tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ , $i=1,\ldots,p$

W^i est tangent à Δ $i=1,\ldots,q$

Y_1^i est tangent à Σ_2 et Δ , $i=1,\ldots,p_1$

Y_2^i " " à Σ_1 et Δ , $i=1,\ldots,p_2$

Z^i est quelconque

On ait :

$$|X^1..X^p\, W^1..W^q\, Y_1^1..Y_1^{p_1}\, Y_2^1..Y_2^{p_2}\, Z^1..Z^s\, a| \lesssim$$

(2.1) $$\lesssim r^m\, d_1^{k_1}\, d_2^{k_2}\, d_{12}^{k}(r^{1/2} d_\Delta)^{l+p}\, (r^{1/2}\frac{d_\Delta}{d_1})^{p_1}\, (r^{1/2}\frac{d_\Delta}{d_2})^{p_2}\, (r^{1/2}\frac{d_\Delta}{d_{12}})^q . r^{s/2}$$

On écrira $QS^{m,k_1,k_2,k,l}$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

On a $$QS^{m,k_1,k_2,k,l} \subset S_{1/2}^{m-\frac{1}{2}k_1^- - \frac{1}{2}k_2^- - \frac{1}{2}k^- + \frac{1}{2}l^+} \qquad (U)$$

Les résultats suivants sont immédiats à partir de la définition :

(2.2) Si $a \in QS^{m,k_1,k_2,k,l}$, $b \in QS^{m',k_1',k_2',k',l'}$

alors $ab \in QS^{m+m',k_1+k_1',k_2+k_2',k+k',l+l'}$

(2.3) Si X est un champ de vecteur C^∞, homogène de degré 0, et $a \in QS^{m,k_1,k_2,k,l}$ alors

$X a \in QS^{m,k_1,k_2,k,l+1}$ Si X est tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ.

$X a \in QS^{m,k_1-1,k_2,k,l+1}$ Si X est tangent à Σ_2 et Δ.

$X a \in QS^{m,k_1,k_2-1,k,l+1}$ Si X est tangent à Σ_1 et Δ

$X a \in QS^{m,k_1,k_2,k-1,l+1}$ Si X est tangent à Δ

$X a \in QS^{m+1/2,k_1,k_2,k,l}$ Si X est quelconque

(2.4) Si $a \in QS^{m,k_1,k_2,k,l}$ et $a \gtrsim r^m\, d_1^{k_1}\, d_2^{k_2}(r^{1/2} d_\Delta)^l\, d_{12}^k$

alors $a^{-1} \in QS^{-m,-k_1,-k_2,-k,-l}$

(2.5) La classe est invariante par difféomorphisme.

On a les propositions suivantes :

<u>Proposition 2.2</u> :

Soit $\tilde{\Sigma}_1$, $\tilde{\Sigma}_2$ deux cônes C^∞ de U et on suppose que $\tilde{\Sigma}_i$ coupe Δ transversalement le long de $\Sigma_i (i=1,2)$.
On suppose de plus que tout champ tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ peut s'écrire comme la somme d'un champ tangent à $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ et d'un champ nul sur Δ.
Alors

$$S^{m,k_1,k_2,k}(U,\tilde{\Sigma}_1,\tilde{\Sigma}_2) \subset QS^{m,k_1,k_2,k,-k_{1-}-k_{2-}-k_-}(U,\Sigma_1,\Sigma_2,\Delta)$$

Nous ne démontrerons pas cette proposition, mais elle est pratiquement identique à celle de la proposition 2.5.

<u>Remarque 2.3</u> :

Lorsque $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ sont quasitransverses, et que $\tilde{\Sigma}_1$, $\tilde{\Sigma}_2$, $\tilde{\Sigma}_1 \cap \tilde{\Sigma}_2$ sont transverses à Δ le long respectivement de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Alors on peut écrire en coordonnées locales au voisinage de Δ tout champ tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ comme la somme d'un champ tangent à $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ et d'un champ nul sur Δ.

On a le lemme suivant :

<u>Lemme 2.4</u> :

Soit $U = \Delta \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un cône défini par $(\lambda u, z, \lambda\zeta) = \lambda(u,z,\zeta)$
Soit Φ une application C^∞ homogène de degré 1 de U sur Δ, induisant l'identité lorsqu'elle est restreinte à Δ.

Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous - cônes de Δ , alors tout champ homogène de degré 0 tangent à Σ_1 et Δ (resp. Σ_2 et Δ, resp. Σ_1, Σ_2 et Δ) s'écrit localement au voisinage de Δ comme la somme d'un champ tangent à $\Phi^{-1}(\Sigma_1)$ (resp. $\Phi^{-1}(\Sigma_2)$, resp. $\Phi^{-1}(\Sigma_1)$ et $\Phi^{-1}(\Sigma_2)$) et d'un champ nul sur Δ.

Démonstration

Soit Φ l'application de U dans U définie par :

$$\Phi(u,z,\zeta) = (\Phi,z,\zeta)$$

C'est un difféomorphisme dans un voisinage conique de Δ, qui conserve Δ. Grâce à ce difféomorphisme, on se ramène à démontrer le lemme dans le cas où Φ est la projection de U sur Δ.

Tout champ tangent à Δ s'écrit comme la somme d'un champ constant en

(z,ζ) : $\sum_{i=1}^{N} a_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$ et d'un champ nul sur Δ.

Si $\Sigma\, a_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$ est tangent à Σ_1(resp. Σ_2, resp. Σ_1 et Σ_2) il est encore tangent à $\Phi^{-1}(\Sigma_1)$ (resp. $\Phi^{-1}(\Sigma_2)$, resp. $\Phi^{-1}(\Sigma_1)$ et $\Phi^{-1}(\Sigma_2)$ qui s'identifie à $\Sigma_1\times \mathbb{R}^p\times \mathbb{R}^q$ (resp. $\Sigma_2\times \mathbb{R}^p\times \mathbb{R}^q$, resp. $\Sigma_1\times \mathbb{R}^p\times \mathbb{R}^q$ et $\Sigma_2\times \mathbb{R}^p\times \mathbb{R}^q$).
Ceci montre le lemme dans le cas où Φ est la projection.

Proposition 2.5 :

Sous les hypothèses du lemme 2.4 , si $a\in S^{m,k_1,k_2,k}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2)$ alors $a_o\,\Phi \in QS^{m,k_1,k_2,k,\ -k_1-\ -k_2-\ -k_-}(U,\Sigma_1,\Sigma_2,\Delta)$ où Δ est identifié à Δ est $\Delta\times\{0\}$ dans U.

Démonstration

Comme précèdemment, on se ramène localement au voisinage de Δ (mais c'est seulement là qu'on a à démontrer quelquechose) au cas où Φ est une projection de U sur Δ.

Soit d_{Σ_i} la distance à Σ_i dans U (en abrégé d_i)

$\tilde{d}_{\Sigma_i}$ la distance à Σ_i dans Δ (ou la distance à $\Phi^{-1}(\Sigma_i)$ dans U)

(en abrégé $\tilde{d}_i$)

On définit de même

d_{Σ_1,Σ_2} , $\tilde{d}_{\Sigma_1,\Sigma_2}$ en abrégé d_{12}, $\tilde{d}_{12}$.

On a

(2.6) $$d_i \sim \tilde{d}_i + d_\Delta \qquad i = 1,2$$

(2.7) $$1 \lesssim \frac{d_i}{\tilde{d}_i} \lesssim 1 + \frac{d_\Delta}{\tilde{d}_i} \lesssim (r^{1/2}\, d_\Delta)$$

Si $a \in S^{m,k_1,k_2,k}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2)$; $a\circ\Phi = a$ ne dépend pas de (z,ζ)

$$|a| \lesssim r^m\, \tilde{d}_1^{k_1}.\tilde{d}_2^{k_2}.\ \tilde{d}_{12}^{k}$$

On veut en déduire que

(2.8) $$|a| \lesssim r^m\, d_1^{k_1}\, d_2^{k_2}\, (d_{12})^k\, (r^{1/2} d_\Delta)^{-(k_1-)-(k_2-)-(k-)}$$

Ceci résulte de (2.6) , (2.7) et de l'inégalité

(2.9) $$1 \lesssim \frac{d_{12}}{\tilde{d}_{12}} \lesssim (r^{1/2}\, d_\Delta)$$

On considère maintenant l'action d'un champ de vecteur homogène de degré 0: Soit un champ tangent à Σ_2 et Δ, alors on l'écrit comme la somme $Y_1 = Y_1' + Y_1''$ d'un champ constant (en z, ζ) à $\tilde{\Sigma}_2 = \Sigma_2 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et d'un champ nul sur Δ.
Alors si $a \in S^{m,k_1,k_2,k}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2)$ (considéré comme symbole sur U)

$$Y_1\, a \in S^{m,k_1-1,k_2,k}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2) + J_\Delta\ .\ S^{m,k_1,k_2,k-1}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

On identifie les fonctions C^∞ sur U indépendantes de (z,ζ) avec les fonctions sur Δ.
J_Δ est l'idéal des fonctions C^∞ homogènes de degré 0 sur U qui s'annulent sur Δ.
J_Δ^0 désigne par convention l'espace des fonctions C^∞ sur U homogènes de degré 0.
Si $Y_1^1,\dots,Y_1^{p_1}$ sont des champs tangents à Σ_2 et Δ, on en déduit que
$$Y_1^1 \dots Y_1^{p_1}\, a \in \sum_{l_1=0}^{p_1} (J_\Delta)^{l_1}\, S^{m,k_1-p_1+l_1,k_2,k-l_1}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

De même, on a :

$$Y_2^1 \dots Y_2^{p_2} a \in \sum_{l_2=0}^{p_2} (J_\Delta)^{l_2} S^{m,k_1,k_2-p_2+l_2,k-l_2}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

Si X est tangent à Σ_1,Σ_2 et Δ, alors

$$X a \in S^{m,k_1,k_2,k} + (J_\Delta) S^{m,k_1,k_2,k-1}$$

de sorte que si $X^1 \dots X^p$ désignent des champs de vecteurs C^∞ tangents à Σ_1,Σ_2 et Δ.

alors

$$X^1 \dots X^p a \in \sum_{l=0}^{p} (J_\Delta)^l S^{m,k_1,k_2,k-l}$$

Si W^i est tangent à Δ (homogène de degré 0)

$$W^1 \dots W^q a \in J_\Delta^o . S^{m,k_1,k_2,k-q}$$

On en déduit que :

$$W^1 \dots W^q X^1 \dots X^p \; Y_1^1 \dots Y_1^{p_1} Y_2^1 \dots Y_2^{p_2} a \in$$

$$\sum_{l=0}^{p} \sum_{l_1=0}^{p_1} \sum_{l_2=0}^{p_2} (J_\Delta)^{l_1+l_2+l} S^{m,k_1-p_1+l_1,k_2-p_2+l_2,k-l_1-l_2-l-q}$$

car les champs tangents à Δ, respectent J_Δ^j.

Enfin si Z^i est quelconque :

$$Z^1 \dots Z^s W^1 \dots W^q X^1 \dots X^p Y^1 \dots Y_2^{p_2} a \in \sum_{i=0}^{s} \sum_{l=0}^{p} \sum_{l_1=0}^{p_1} \sum_{l_2=0}^{p_2} (J_\Delta)^{(l_1+l_2+l-i)_+} \times$$

$$\times S^{m,k_1-p_1+l_1,k_2-p_2+l_2,k-l_1-l_2-l-q+i-s}$$

On a donc à considérer

$$r^m (d_\Delta)^{(l_1+l_2+l-i)_+} \tilde{d}_1^{k_1-p_1+l_1} \tilde{d}_2^{k_2-p_2+l_2} \tilde{d}_{12}^{k-l_1-l_2-l-q+i-s}$$

qu'on majore, en utilisant (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), par :

$$|Z^1..Z^s.\ W^1..W^q, X^1..X^p\ Y_1^1..Y_2^{p_2}\ a| \lesssim \tag{2.10}$$

$$\lesssim r^m\ d_1^{k_1}\ d_2^{k_2} (d_{12})^k\ (r^{1/2} d_\Delta)^{-(k_1)-(k_2-)-(k-)} . (r^{1/2} d_\Delta)^{p_1+p_2+p+q} \times$$

$$\times\ (d_{12})^{-q}\ (d_1)^{-p_1}\ (d_2)^{-p_2}\ r^{s/2}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.5.

On garde les mêmes notations mais on suppose que $p=q=n$.

Soit a dans $QS^{m,k_1,k_2,k,l}(U,\Sigma_1,\Sigma_2,\Delta)$ un symbole nul pour $\frac{1}{r}|\zeta|+z \geq C$ (où C est >0). Comme auparavant, r est une fonction C^∞ strictement positive sur Δ qu'on identifie à une fonction sur U (indépendante de z,ζ).

Nous posons

$$I(a) = \iint e^{i\,z.\zeta}\ .\ a(u,z,\zeta)\ dz.d\zeta \tag{2.11}$$

alors

Proposition 2.6 :

Avec les notations ci-dessus, nous avons

$$I(a) \in S^{m,k_1,k_2,k}(\Delta,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

Démonstration

Soit $X_1^1,..,X_1^{p_1},X_2^1,..,X_2^{p_2},Y^1,..Y^q,Z^1,..Z^p$ des champs de vecteurs homogènes de degré 0 sur Δ, tels que :

$$X_1^i (\text{resp. } X_2^i \text{ resp. } Y^i) \text{ est tangent à } \Sigma_2 (\text{resp.} \Sigma_1, \text{ resp.} \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2)$$

Alors

$$X_1^1 \ldots\ldots Z^p\ I(a) = I(X_1^1 \ldots\ldots Z^p a)$$

et

$$X_1^1 \ldots\ldots Z^p\ a \in QS^{m,k_1-p_1,k_2-p_2,k-p,l+p_1+p_2+q+p}$$

En effet ramené sur U, X_1^i est tangent à Σ_2 et Δ

X_2^i est tangent à Σ_1 et Δ

Y^i est tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ

Z^j est tangent à Δ

Il est donc suffisant de montrer que

$$|I(a)| \lesssim r^m \, d_{\Sigma_1}^{k_1} \, d_{\Sigma_2}^{k_2} \, (d_{\Sigma_1,\Sigma_2})^k \qquad (d_{\Sigma_i} \text{ est la distance à } \Sigma_i \text{ dans } \Delta)$$

Soit $d^U_{\Sigma_i}$, $d^U_{\Sigma_1,\Sigma_2}$ les fonctions associées à Σ_i sur Δ, identifiées avec une fonction sur U indépendante de (z,ζ); il résulte de la proposition 2.5 que :

$$c \overset{\text{def}}{\equiv} (d^U_{\Sigma_1})^{-k_1} \, (d^U_{\Sigma_2})^{-k_2} \, (d^U_{\Sigma_1,\Sigma_2})^{-k} \, r^{-m} \in QS^{-m,-k_1,-k_2,-k,k_1^++k_2^++k^+}$$

Par conséquent

$$b = c.a$$

est dans $QS^{o,o,o,o,1+k_1^++k_2^++k^+}$

et il suffit de montrer que si b est dans la classe ci-dessus, alors $I(b) \lesssim 1$.

Choisissons $N \geq \mathrm{Sup}\left(\dfrac{1+k_1^++k_2^++k^+,0}{2}\right)$, alors

$$b = (1 + r|z|^2 + \tfrac{1}{r}|\zeta|^2)^{-N} a$$

est dans $QS^{o,o,o,-2N+1+k_1^++k_2^++k^+} \subset S^o_{1/2}(U)$

Or, en intégrant par partie, on a :

$$I(a) = I((1 - r\Delta_\zeta - \tfrac{1}{r}\Delta_z)^N \, b)$$

Lorsque b est dans $S^o_{1/2}(U)$, on sait que I(b) est majoré (cf. lemme 2.8 de [1]).

Ce qui démontre la proposition.

CHAPITRE II OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS

§ 1. La classe $OPS^{m,k_1,k_2,k}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, U le cône $T^*X\setminus\{0\} = X\times\{\mathbb{R}^n\setminus 0\}$ et Σ_1, Σ_2 deux sous-cônes C^∞ fermés de U qu'on supposera, pour simplifier quasi-transverses.

Soit $a = a(x,\xi)$ une fonction C^∞ sur $X\times\mathbb{R}^n$ telle que $a\in S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$ dans U .

Alors,on définit l'opérateur pseudodifférentiel $a(x,D)$ par :

$$a(x,D)\, f = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\, a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)d\xi$$

pour f dans $C_o^\infty(X)$.

On désignera par $OPS^{m,k_1,k_2,k}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$ l'ensemble de tous les opérateurs de la forme $a(x,D) + \mathcal{R}$ où a est comme ci-dessus et $\mathcal{R}$ est un opérateur à noyau C^∞.

Si V est un sous-cône ouvert de $T^*X\setminus\{0\}$, $OPS^{m,k_1,k_2,k}(V,\Sigma_1,\Sigma_2)$ est l'ensemble des opérateurs de la forme $a(x,D)+\mathcal{R}$ où $a(x,\xi)$ est dans $S^{m,k_1,k_2,k}(V,\Sigma_1,\Sigma_2)$, et $\mathcal{R}$ envoie toute distribution à support compact en une distribution dont le spectre singulier (Wave Front) est disjoint de V.

Proposition 1.1 :

Soient a et b des fonctions C^∞ sur $X\times\mathbb{R}^n$, $a\in S^{m,k_1,k_2,k}$, $b\in S^{m',k'_1,k'_2,k'}$ et supposons $b(x,\xi) = 0$ pour $x\notin K$, où K est un compact dans X.

Alors nous avons $a(x,D)\circ b(x,D) \in OPS^{m+m',k_1+k'_1,k_2+k'_2,k+k'}$

Démonstration :

Si nous posons $c(x,D) = a(x,D)\circ b(x,D)$ nous avons :

$$c(x,\xi) = e^{-ix,\xi}\, a(x,D).\, b(x,D)\, e^{ix.\xi}$$

$$= (2\pi)^{-n} \iint e^{iz.\zeta}\, a(x,\xi+\zeta).\, b(x-z,\xi)\, dz.d\zeta$$

$$= I(c_1)$$

La démonstration résultera de la proposition (2.6) si l'on montre que

$$c_1(x,\xi,z,\zeta) = a(x,\xi+\zeta).\, b(x-z,\xi)$$

est dans $QS^{m+m',k_1+k_1',k_2+k_2',k+k',-k_1--k_1'--k_2--k_2'--k--k'_-}$ dans un domaine où $|\zeta+\xi| \tilde{\sim} \xi$ (une troncature permet de se ramener à ce cas).

Montrons par exemple que :

$$a(x,\xi+\zeta) \in QS^{m,k_1,k_2,k,-k_1--k_2--k_-}$$

si $a \in S^{m,k_1,k_2}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$

L'application Φ

$$(x,\xi,z,\zeta) \to (x,\ \xi+\zeta)$$

de $U\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n\times \mathbb{R}^n$

vérifie les hypothèses du lemme 2.4 (chap. I) dans le domaine où on s'est placé. La proposition 2.5 (chap. I) donne le résultat.

On montre de même que : $b(x-z,\xi)$ est dans $QS^{m',k_1',k_2',k',\ -k_1'--k_2'--k'_-}$
d'où le résultat de la proposition 1.1.

<u>Proposition 1.2 :</u>

Soit $A \in OPS^{m,k_1,k_2,k}_{.}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$, alors A^*est dans $OPS^{m,k_1,k_2,k}_{.}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$

<u>Démonstration:</u>

Si $a(x,\xi)$ est le symbole de a, le symbole de A^*est donné par :

$$a^*(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \iint e^{iz.\zeta}\, \bar{a}(x-z,\xi+\zeta)dz.d\zeta$$

Utilisant la proposition 2.5 chap. I, on montre que $\bar{a}(x-z,\xi+\zeta)$ est dans $QS^{m,k_1,k_2,k,\ -k_1-\ -k_2-\ -k-}$, dans un voisinage conique de $\zeta = 0, z = 0$

La proposition résulte alors de la proposition 2.6 chapitre I.

Changement de fonction de phase, changement de coordonnées

Soit $\varphi(x,\theta)$ une fonction de phase sur $X\times \mathbb{R}^n$. Soit $\overset{\vee}{\Sigma}_i (i=1,2)$ deux sous-cônes fermés C^∞ quasitransverses de $U = X\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, et soit $a\in S^{m,k_1,k_2,k}(U,\overset{\vee}{\Sigma}_1,\ \overset{\vee}{\Sigma}_2)$.

On suppose que a s'annule pour θ petit et pour $x\notin K$ où K est un sous-ensemble compact de X.

De plus, $(x,\theta)\to(x,d_x\ \varphi(x,\theta))$ est un difféomorphisme d'un ouvert conique voisinage de sup a sur un ouvert conique dans $T^*X\setminus\{0\}$.

Finalement, soit $\chi(x)\in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec $\chi = 1$, si $|x|<\varepsilon$, $\chi = 0$ si $|x|>2\varepsilon$ (ε suffisamment petit).

On considère :

$$A\ f = \iint e^{i(\varphi(x,\theta) - \varphi(y,\theta))}\ \chi(x-y)\ a(x,\theta)\ f(y)\ dy\, d\theta$$

On a la proposition :

Proposition 1.3 :

Soit Σ_i l'image de $\overset{\vee}{\Sigma}_i$ par l'application $(x,\theta)\to(x,d_x\ \varphi(x,\theta))$
Alors (si ε est assez petit) , on a $A\in OPS^{m,k_1,k_2,k}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$

Démonstration :

On a $A = b(x,D)$ avec

$$b(x,\xi) = e^{-ix\xi}\ A.e^{ix\xi} = \iint e^{i(\varphi(x,\theta) - \varphi(y,\theta) - <x-y,\xi>)}\ \chi(x-y)\ a(x,\theta)dy\ d\theta$$

Ecrivons : $\varphi(x,\theta) - \varphi(y,\theta) = <x-y,\eta>$

avec

$$\eta(x,y,\theta) = \int_0^1 \varphi_x'((1-t)x+ty,\theta)\ dt$$

Alors si ε est suffisamment petit, l'application $(x,y,\theta) \to (x,y,\eta)$ est un isomorphisme d'un voisinage conique V dans $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

Soit $(x,y,\eta) \to (x,y,\theta(x,y,\eta)$ l'application inverse, et on pose

$$J(x,y,\eta) = \left|\frac{D\theta}{D\eta}\right|$$

On a :

$$b(x,\xi) \sim \iint e^{i<x-y,\eta-\xi>} \chi(x-y)\ a(x,\theta(x,y,\eta))\ J(x,y,\eta)\ dy\ d\eta$$

Par une troncature, on se ramène au cas où $|\eta-\xi| < \frac{1}{2}|\xi|$, de sorte que

$$b(x,\xi) \sim \iint e^{i<x-y,\eta-\xi>}\ b_1(x,y,\xi,\eta)\ dy\ d\eta$$

avec $b_1(x,y,\xi,\eta) = \chi_1(\xi,\eta)\ \chi(x-y)\ a(x,\theta(x,y,\eta))\ J(x,y,\eta)$

où χ_1 est dans S^o, égal à 1 si $|\xi| > 3\,(|\xi-\eta|+1)$ et 0 si $|\xi| < 2(|\xi-\eta|+1)$

On étend b_1 à $X\times \mathbb{R}^n\times \mathbb{R}^n\times \mathbb{R}^n$ (prolongement par 0) et on réécrit cette intégrale en posant :

$$c(x,z,\xi,\zeta) = b_1(x,x-z,\xi,\xi+\zeta)$$

d'où

$$b(x,\xi) \sim \iint e^{iz\ \zeta}\ c(x,z,\xi,\zeta)\ dz\ d\zeta = I(c)$$

Le seul point délicat est de montrer que

$$a(x,\theta(x,x-z,\xi+\zeta))$$

est dans

$$QS^{m,k_1,k_2,k,-\bar{k}_1-\bar{k}_2-\bar{k}}$$

dans la zone où $|\xi+\zeta| \sim |\xi|$

Soit Φ l'application $(x,\xi,z,\zeta) \to (x,\theta(x,x-z,\xi+\zeta))$

Pour $z = 0$
$\zeta = 0$

$$\Phi = (x,\xi,0,0) \to (x,\theta(x,x,\xi))$$

Avec ces notations :

$$a(x,\theta(x,x-z,\xi+\zeta)) = a \circ \Phi$$

qu'on écrit sous la forme

$$a \circ \Phi = a \circ \tilde{\Phi}^{-1} \circ \tilde{\Phi} \circ \Phi$$

où $\tilde{\Phi}$ est l'application : $(x,\theta) \to (x, d_x\varphi(x,\theta))$

$a \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ est dans $S^{m,k_1,k_2,k}(V,\Sigma_1,\Sigma_2)$, car $\tilde{\Phi}$ est un difféomorphisme sur le support de a.

$\tilde{\Phi} \circ \Phi$ opère de $V \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans V, et induit l'identitié sur V, sur

$$\tilde{\Phi}(x,\theta(x,x,\xi)) = (x,\xi)$$

On peut alors appliquer la proposition (2.5) du chapitre I pour montrer que

$a(x,\theta(x,x-z,\xi+\zeta)).\,\chi_1(\xi,\xi+\zeta)$ est dans $QS^{m,k_1,k_2,k,-k_1^-\,-k_2^-\,-k^-}$

La proposition en résulte.

On déduit de cette proposition l'invariance par difféomorphisme . Il suffit en effet de prendre une phase de la forme $\langle \Psi(x), \theta \rangle$ où Ψ est un difféomorphisme.
La classe d'opérateurs pseudodifférentiels $OPS^{m,k_1,k_2,k}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$ peut donc être définie lorsque X est une variété C^∞.

Enfin on pourrait montrer par les mêmes méthodes (cf.[1]), la proposition suivante :

<u>Proposition 1.4 :</u>

Soient X et Y deux variétés C^∞, $\Phi : T^*X\backslash 0 \to T^*Y\backslash 0$ Une transformation canonique homogène de degré 1 et F (resp. G) un opérateur intégral de Fourier à support propre associé à Φ (resp. Φ^{-1}). On supose que Σ_1 et Σ_2 sont deux sous-cônes C^∞ fermés de $T^*X\backslash 0$ quasi-transverses, alors si $A \in OPS^{m,k_1,k_2,k}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$, $F \circ A \circ G$ est dans $OPS^{m',k_1,k_2,k}(Y,\Phi\Sigma_1,\Phi\Sigma_2)$ avec $m' = m + \deg F + \deg G$

§ 2 Opérateurs d'Hermite et construction de paramétrixes

On garde les notations précédentes et on pose :

(2.1) $$\widetilde{\mathcal{H}}^m(U,\Sigma_1,\Sigma_2) \overset{\text{Déf}}{\equiv} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} S^{m-j,-j,-j}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

Cette définition sera justifiée par la proposition (2.1) mais il nous faut auparavant démontrer des résultats préliminaires.

Proposition 2.1 : Approximation successive

On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses. Alors :

i) Soit $a_j \in S^{m-j,k_1,k_2}$ $(j = 0,..,\infty)$ alors il existe $a \in S^{m,k_1,k_2}$ tel que pour tout N, $a - \sum_{j<N} a_j \in S^{m-N,k_1,k_2}$

On notera $a \sim \sum a_j$. Deux tels symboles diffèrent par un élément de $S^{-\infty}(U)$

ii) Soit $a_j \in S^{m-j,k_1-j,k_2-j}$ $(j=0,..,\infty)$, alors il existe $a \in S^{m,k_1,k_2}$ tel que pour tout N, $a - \sum_{j<N} a_j \in S^{m-N,k_1-N,k_2-N}$

On écrira $a \sim \sum a_j$. Deux tels symboles diffèrent par un élément de $\widetilde{\mathcal{H}}^{m-\frac{k_1+k_2}{2}}$

Démonstration

Elle est la même que celle de la proposition 1.11 de [1] si on remarque que $S^o(U) \subset S^{o,o,o}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$, que S^{m,k_1,k_2} est un espace de Fréchet (ici intervient l'hypothèse quasitransverse), et qu'on a le lemme suivant (analogue au lemme 3.12 de [1])

Lemme 2.2 :

Soit $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi=0$ si $|t|<1/2$, $\chi=1$ si $|t|>1$

i) Soit $\varphi^1_\lambda = \chi(r/\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\varphi^1_\lambda \in S^{o,o,o}$ et $1-\varphi^1_\lambda \in S^{-\infty}$; $\lambda\,\varphi^1_\lambda$ est borné dans $S^{1,o,o}$

ii) On suppose que Σ_i est définie localement par $u^1_i(x,\xi)= 0;..;$

$\overset{\vee}{u}{}_i^i(x,\xi) = 0$ (où les u_j^i sont homogènes de degré 0), on pose

$$\varphi_\lambda^2 = \chi(r/\lambda)\,\chi\left(\frac{r \sum\limits_{i=1,2} \sum\limits_{j=1}^{\nu_i} |u_i^j|^2}{\lambda}\right)$$

Alors $\varphi_\lambda^2 \in S^{o,o,o}$, $1 - \varphi_\lambda^2 \in \widetilde{\mathcal{H}}^o$, $\lambda\varphi_\lambda^2$ est borné dans $S^{2,2,2}$

Proposition 2.3 :

Si Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses

$\widetilde{\mathcal{H}}^m(U,\Sigma_1,\Sigma_2) = \mathcal{H}^m(U,\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$, où $\mathcal{H}^m(U,\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = \bigcap\limits_{j\in \mathbb{N}} S^{m-j,-2j}(U,\Sigma_1\cap\Sigma_2)$

La classe $\mathcal{H}^m$ a été introduite dans [1]

Démonstration: On prend des coordonnées locales adaptées (cf § 1.4 chap. I)

On a

$$(2.2)\qquad \begin{cases} r^{1/2}\, d_i \gtrsim 1 \qquad r^{1/2}\, d_{12} \gtrsim 1 \\ (r\, d_1\, d_2) \lesssim (r\, d^2_{\Sigma_1\cap\Sigma_2}) \lesssim (r\, d_1\, d_2)^2 \end{cases}$$

Montrons que $\widetilde{\mathcal{H}}^m(U,\Sigma_1,\Sigma_2) \subset \mathcal{H}^m(U,\Sigma_1\cap\Sigma_2)$ (l'autre inclusion est facile)

Soit alors $a \in \widetilde{\mathcal{H}}^m(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$, utilisant 2.2, on déduit facilement que :

$$a \lesssim r^m (r\, d_1\, d_2)^{-j} \lesssim r^m (r\, d^2_{\Sigma_1\cap\Sigma_2})^{-j/2}$$

pour tout j.

Il nous faut montrer que :

$$(2.3)\qquad \left|\left(r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\alpha_1} \left(r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right)^{\alpha_2} \left(r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{\alpha} \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{p} a\right|$$

$$\lesssim r^m\,(r\, d^2_{\Sigma_1\cap\Sigma_2})^{-j/2 - \frac{|\alpha_1|}{2} - \frac{|\alpha_2|}{2} - \frac{|\beta|}{2}}$$

pour tout j.

On se ramène aisément au cas $p=0$, $|\alpha|=0$, Par hypothèse

$$|(r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial u_1})^{\alpha_1}(r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial u_2})^{\alpha_2}(r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial w})^{\beta} a|$$

$$\lesssim r^m (r\, d_1\, d_2)^{-j'} (r^{1/2} d_1)^{-|\alpha_1|}(r^{1/2} d_2)^{-|\alpha_2|} (r^{1/2} d_{12})^{-|\beta|}$$

pour tout j'.

La proposition résulte alors du fait que pour tout j, il existe j' tel que

$$(2.4) \quad (r\, d_1\, d_2)^{-j'} (r^{1/2} d_1)^{-|\alpha_1|}\, r^{1/2} d_2)^{-|\alpha_2|} (r^{1/2} d_{12})^{-|\beta|} \lesssim$$

$$\lesssim (r\, d^2_{\Sigma_1\cap\,\Sigma_2})^{-\frac{j+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta|}{2}}$$

En effet (2.4) est équivalent à :

$$(r\, d^2_{\Sigma_1\cap\Sigma_2})^{\frac{j+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta|}{2}} \lesssim (r\, d_1\, d_2)^{j'} (r^{1/2} d_1)^{|\alpha_1|} (r^{1/2} d_2)^{|\alpha_2|} (r^{1/2} d_{12})^{|\beta|}$$

qui est toujours vérifiée pour j' assez grand grâce à 2.2.

<u>Proposition 2.4</u> : On suppose Σ_1 et Σ_2 quasitransverses.
Soit $P \in OPS^{m,k_1,k_2}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$. Alors P a une paramétrixe à droite Q dans $OPS^{-m,-k_1,-k_2}$ si et seulement si :

i) Il existe Q_1 dans $OPS^{-m,-k_1,-k_2}$ tel que :

$$PQ_1 = I \qquad \text{modulo} \qquad OPS^{-1/2,-1/2,-1/2}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

ii) Pour tout A dans $OP\mathcal{K}^{o}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$, il existe B dans $OP\mathcal{K}^{-m+\frac{k_1+k_2}{2}}$ tel que

$$PB = A \text{ modulo } OP\mathcal{K}^{-1/2}$$

<u>Démonstration</u>

Elle est analogue à celle de la pnoposition 6.1 de [1], compte tenu des propositions 2.1 et 2.3.

Dans les applications, i) sera vérifié de la manière suivante :

Exemple de base 2.5

Soit P_1 dans $OPS^{m_1,k_1}(X,\Sigma_1)$, P_2 dans $OPS^{m_2,k_2}(X,\Sigma_2)$ et on suppose que P_i (i=1,2) admet une paramétrixe à droite dans $OPS^{-m_i,-k_i}(X,\Sigma_i)$ (i=1,2)
Alors pour tout Q dans $OPS^{m_1+m_2-1/2,k_1-1/2,k_2-1/2}$, P_1P_2+Q vérifie la condition i) .

Dans les applications, ii) sera étudiée de la manière suivante. On suppose que P dans OPS^{m,k_1,k_2} est un opérateur pseudodifférentiel régulier. Dans ce cas, (Corollaire 1.4.3 chap. I) il est dans $OPS^{m,k_1+k_2}(X,\Sigma_1\cap\Sigma_2)$

L'étude de ii) dans ce cas est faite dans [1] [2] et nous rappelons les résultats qui seront utiles ici.

2.6 Rappels (cf [1],[2]

Soit Σ un sous-cône C^∞ de $T^*X\backslash 0$ de codimension ν. On choisit dans un voisinage conique d'un point de Σ, un système de coordonnées (u,v) tel que $u(x,\xi)$ est homogène de degré 0, v est homogène de degré 1, et tel que u = 0 définisse Σ.

On pose $\mathcal{N}^{m,k}(X,\Sigma) = OPS^{m,k}(X,\Sigma)\cap OPS^m_{reg}(X)$

Soit maintenant $P\in\mathcal{N}^{m,k}(X,\Sigma)$ et B dans $OP\mathcal{K}^{m'}(X,\Sigma)$ de symbole total $p(x,\xi)$, $b(x,\xi)$, alors il existe un opérateur P_Σ différentiel unique

$$P_{\Sigma(v)} = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta}(v)\, u^\alpha D_u^\beta$$

tel que si a désigne le symbole de $P\circ Q = A$

$$a - P_\Sigma \,.\, b \quad \text{soit dans} \quad \mathcal{K}^{m+m'-k/2-1/2}$$

L'étude de PB = A, pour A dans $OP\mathcal{K}^o$, P dans $\mathcal{N}^{m,k}$, se ramène donc à l'étude de

$$P_\Sigma(v)\ b = a$$

où $a\in\mathcal{K}^o$, b est cherché dans $\mathcal{K}^{-m+k/2}$.

Il est alors montré dans [2] que cette étude se ramène à l'étude de l'inversibilité de $P_{\Sigma(\frac{v}{|v|})}$ dans $C^{\infty}(\Sigma \cap S^{*}X, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))$ au voisinage dans $S^{*}X$ de tout point de $\Sigma \cap S^{*}X$.

Dans le cas que nous étudions ici, l'étude de ii) se ramène donc à l'étude de l'inversibilité à droite de $P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}(v)$ dans

$C^{\infty}((\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \cap S^{*}X; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu'_1+\nu'_2+\nu}))$

où $P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ est de la forme :

$$P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k_1+k_2} a_{\alpha\beta}(v)\, u^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{\beta}$$

avec $u = (u_1^1, .., u_1^{\nu'_1}, u_2^1, .., u_2^{\nu'_2}, w^1, .., w^{\nu})$

L'objet de l'article [2] était de montrer que l'étude de ce problème se ramenait, sous certaines hypothèses (non vérifiées ici) à l'étude de l'inversibilité dans $\mathcal{S}$ pour v fixé. L'objet du chapitre III sera de faire une étude analogue pour le cas présenté dans l'introduction.

§ 3 Le cas de j souscônes $\Sigma_1, .., \Sigma_j$

Dans ce §, nous ne prétendons pas à la rigueur, mais présenterons brièvement certaines extensions possibles de la théorie.

Soit U un cône C^{∞} arbitraire, $\Sigma_1, ..., \Sigma_j$ j sous-cônes fermés C^{∞} de U.

Soit $(i_1, .., i_q)$ la donnée de q entiers de $[1, .., j]$ tels que $i_1 < i_2 < .. < i_q$

On désignera par $(i_1, .., i_q)^{o}$ le complémentaire de $(i_1, .., i_q)$ dans $[1, .., j]$.

On pose

$$d_i = d_{\Sigma_i}$$

$$d_{i_1, i_2} = \frac{1}{\frac{1}{d_{i_1}} + \frac{1}{d_{i_2}}}$$

$$d_{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{\sum\limits_{i=i_1,\dots,i_q} \frac{1}{d_i}} \qquad d_\emptyset = 1$$

$X_{i_1 \cdots i_q}$ désigne un champ de vecteur homogène de degré 0, tangent à Σ_j pour tous les i dans $(i_1,\dots,i_q)^o$

En particulier

$X_{1,\dots,j}$ désigne un champ de vecteur quelconque

$X_\emptyset$ est un champ tangent à tous les Σ_i

$X_{i_1 \cdots i_q}^{l_{i_1 \cdots i_q}}$ désigne le composé de $l_{i_1 \cdots i_q}$ champs de vecteurs tangents à Σ_i pour tous les i dans $(i_1,\dots,i_q)^o$.

On pose alors la définition suivante

Définition 3.1 :

A chaque q- plet $(i_1,\dots,i_q)$, on associe un réel $k_{i_1,\dots,i_q}$.

On désigne par $S^{m,k_{i_1,\dots,i_q}}(U,\Sigma_1,\dots,\Sigma_j)$ la classe des fonctions C^∞ sur U telles que :

$$\left| \left(\prod_{i_1<i_2<\dots<i_q} X_{i_1 \cdots i_q}^{l_{i_1 \cdots i_q}} \right) a \right| \lesssim r^m \prod_{i_1<\dots<i_q} d_{i_1 \cdots i_q}^{\,k_{i_1 \cdots i_q} - l_{i_1 \cdots i_q}}$$

Cette classe a probablement toutes les bonnes propriétés, elle a été construite pour être invariante par changement de coordonnées et pour contenir des classes relatives à un nombre inférieur de sous-cônes Σ_i.

Citons seulement un lemme relatif au cas j=3 et qui correspond à la vérification du point i) de la proposition 2.4

Ce lemme suggère comment passer du cas j au cas j+1 dans l'étude de l'hypoellipticité.

Lemme 3.2

Soit $P_i (i=1,2,3)$ un opérateur dans $OPS^{1/2,1}(X,\Sigma_i)$ et on suppose que :

i) P_i admet une paramétrixe à droite Q_i dans $OPS^{-1/2,-1}(X,\Sigma_i)$

ii) P_iP_j+B admet pour tout B dans OPS^o, $i\neq j$, une paramétrixe à droite dans $OPS^{-1,-1,-1}(X,\Sigma_i,\Sigma_j)$

Alors $\mathcal{P} = P_1P_2P_3 + \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$ où (λ,μ,ν) sont dans OPS^o_{reg} admet un inverse Q dans $OPS^{-3/2,-1,-1,-1,0,0,0,0}(X,\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3)$ tel que

$$\mathcal{P}Q = I + \mathcal{R} \quad \text{avec } \mathcal{R} \text{ dans } OPS^{-3/2,-1,-1,-1,0,0,0,0}$$

Nous ne démontrerons pas ce lemme ici, mais remarquons que :

- La condition (ii) est plus ou moins, si i) est vérifiée, la conclusion de notre article
- Dans le cas où $\bigcap_j OPS^{-3/2\cdot j,-j/2,-j/2,-j/2} = OP\mathcal{K}^o(X,\Sigma_1\cap\Sigma_2\cap\Sigma_3)$

l'étude de l'hypoellipticité pour $\mathcal{P}$ se ramène à une étude d'inversibilité dans $\mathcal{S}$. On a ramené l'étude à un problème sur l'intersection.

CHAPITRE III ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX.

Ce chapitre suit étroitement l'article [2] dont nous reprendrons pour l'essentiel les notations :

§ 1 Introduction

On garde les notations du § 1 du chapitre I. On pose $\tilde{v}=(v,r)$. Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses.

Alors si P est dans $OPS^{m,k_1,k_2}(X,\Sigma_1,\Sigma_2) \cap OPS^m_{reg}(X)$, on peut écrire que

$$P = \sum_{\substack{|\beta_1| \leq k_1 \\ |\beta_2| \leq k_2 \\ |\beta_1|+|\beta_2|+|\beta| \leq k_1+k_2}} A_{\beta_1,\beta_2,\beta}(u_1,u_2,w,\tilde{v})\; U_1^{\beta_1} U_2^{\beta_2} W^{\beta} + B$$

où $A_{\beta_1,\beta_2,\beta} \in OPS^{m+\frac{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta|}{2} - \frac{k_1+k_2}{2}}$

U_i^j (resp W^j) est un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0 de symbole u_i^j (resp w^j)

$$U_i^{\beta_i} = (U_i^1)^{\beta_i^1} \circ \cdots \circ (U_i^{\nu'_j})^{\beta_i^{\nu'_j}} \qquad i = 1,2$$

B est dans $OPS^{m - \frac{k_1+k_2}{2} - 1/2}$

$$\text{Alors } \tilde{L}_i \overset{\text{Def}}{\equiv} U_{i(\Sigma_1\cap\Sigma_2)} = u_i + \sum_{j=1,2} d_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \beta_i \cdot \frac{\partial}{\partial w}$$

$$M \equiv W_{(\Sigma_1\cap\Sigma_2)} = w + \sum_{j=1,2} \tilde{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \tilde{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial w}$$

On en déduit que :

$$P_{\Sigma_1\cap\Sigma_2} = \sum_{\substack{|\beta_1| \leq k_1 \\ |\beta_2| \leq k_2 \\ |\beta_1|+|\beta_2|+|\beta| \leq k_1+k_2}} A_{\beta_1,\beta_2,\beta}(\tilde{v}) .\ \tilde{L}_1^{\beta_1} \tilde{L}_2^{\beta_2} M^{\beta}$$

où $A_{\beta_1,\beta_2,\beta}$ est dans $C^{\infty}(\Sigma_1\cap\Sigma_2)$ et est homogène de degré $m + \frac{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta|}{2} - \frac{k_1+k_2}{2}$.

Si E désigne l'espace vectoriel : $\mathbb{R}^{\nu'_1+\nu'_2+\nu} \ni (u_1,u_2,w)$

Les symboles complets de $\tilde{L}_i^j$, W^j peuvent être considérés comme définissant les plans de $(E\times E^*)^*$ suivants :

$\mathcal{L}_i (i=1,2)$ est engendré par les formes linéaires $\sigma(\tilde{L}_i^j)$ $(u_i,\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{w})$ $j=1,\ldots,\nu'_i$

et par les formes $\sigma(M^j)(w,\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{w})$ $j=1,\ldots,\nu$

où $(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{w})$ désignent les variables duales de (u_1,u_2,w)

$\mathcal{M}$ est engendré par les formes $\sigma(M^j)(w,\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{w})$ $j=1,\ldots,\nu$

$\tilde{\mathcal{L}}_i$ est engendré par les formes linéaires $\sigma(\tilde{L}_i^j)$, $j=1,\ldots,\nu'_i$

On a $\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2 = \mathcal{M}$

Ici $\sigma(\tilde{L}_i^j)$ est le symbole complet de $\tilde{L}_i^j$

$\sigma(M)$ " " " " " M

§ 2 Une classe d'opérateurs pseudodifférentiels

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. E^* le dual de E. Soient (x,ξ) les coordonnées de $E\times E^*$.

Soient $\mu,\nu'_1,\nu'_2,\nu,\nu_1,\nu_2$ des entiers positifs ou nuls vérifiant :

$$\mu = \nu'_1 + \nu'_2 + \nu$$

$$\nu_i = \nu'_i + \nu \qquad (i = 1,2)$$

On utilise la décomposition suivante :

$$\mathbb{R}^{\mu} = \mathbb{R}^{\nu'_1} \times \mathbb{R}^{\nu'_2} \times \mathbb{R}^{\nu} \ni (\tau_1, \tau_2, \tau')$$

Définition 2.1

On désigne par $S^{m_1,m_2,m'}(\mathbb{R}^{\mu})$ l'ensemble des symboles sur $\mathbb{R}^{\mu}$ qui vérifient :

$$\forall\, \alpha_i \in \mathbb{N}^{\nu'_i},\ \forall\, \alpha' \in \mathbb{N}^{\nu},$$

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \tau_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial \tau_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial \tau'^{\alpha'}}\, a(\tau_1, \tau_2, \tau') \right| \leq (1+|\tau_1|+|\tau'|)^{m_1-|\alpha_1|} (1+|\tau_2|+|\tau'|)^{m_2-|\alpha_2|}$$

$$\left(\frac{1}{1+|\tau_1|+|\tau'|} + \frac{1}{1+|\tau_2|+|\tau'|}\right)^{m'+|\alpha'|}$$

On notera $S^{m_1,m_2}(\mathbb{R}^{\mu})$ si $m' = 0$

On a les propriétés suivantes :

2.2 $$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} S^{m_1-j, m_2-j}(\mathbb{R}^{\mu}) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mu})$$

2.3. Si $a \in S^{m_1,m_2,m'}$; $b \in S^{\tilde{m}_1,\tilde{m}_2,\tilde{m}'}$, $ab \in S^{m_1+\tilde{m}_1,\, m_2+\tilde{m}_2,\, m'+\tilde{m}'}$

2.4 Si on fait un changement de variable linéaire inversible du type suivant

$$\tilde{\tau}_1 = \Sigma \alpha_1^i \tau_1^i + \Sigma\, \beta_1^i\, \tau'^i = \alpha_1 . \tau_1 + \beta_1 . \tau'$$

$$\tilde{\tau}_2 = \Sigma \alpha_2^i \tau_2^i + \Sigma\, \beta_2^i\, \tau'^i = \alpha_2 . \tau_2 + \beta_2 . \tau'$$

$$\tilde{\tau}' = \Sigma \alpha_3^i \tau'^i = \alpha_3 . \tau'$$

La classe est conservée.

Soit $\mathcal{L}_i (i=1,2)$ un ν_i-plan dans $(E \times E^*)^*$. On suppose que $\mathcal{M} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ est de dimension ν

On choisit alors un supplémentaire $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ dans $\mathcal{L}_i$ par rapport à $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \oplus \widetilde{\mathcal{L}}_i = \mathcal{L}_i$$

On pose

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \widetilde{\mathcal{L}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

On peut identifier par le choix d'une base $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{L}_i, \widetilde{\mathcal{L}}_i, \mathcal{L}$) à la donnée d'une application linéaire $M(x,\xi)$(resp. $L_i(x,\xi), \widetilde{L}_i(x,\xi), L(x,\xi)$) de $E \times E^*$ dans $\mathbb{R}^\nu$ (resp. $\mathbb{R}^{\nu_i}$, $\mathbb{R}^{\nu'_i}$, $\mathbb{R}^{\nu'_1+\nu'_2+\nu}$) .

Rappelons (cf.[2]) la définition :

Définition 2.2 :

Soit $S^m(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions f sur $\mathbb{R}^N \ni \tau$, telles que $(1+|\tilde{\tau}|)^{-m+|\alpha|} D^\alpha f$ soit bornée, soit $\mathcal{L}$ un N-plan de $(E \times E^*)$ qu'on identifie à L une application linéaire de $E \times E^*$ dans $\mathbb{R}^N$; on désigne par $OPS^m_{\mathcal{L}}$ la classe des opérateurs de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$ telle qu'il existe a dans $S^m(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$A.f = (2\pi)^{-n} \int e^{i\,x.\xi} \, a(L(x,\xi)) \, \hat{f}(\xi) \, d\xi \quad \text{pour } f \in \mathcal{S}(E)$$

Définition 2.3 :

On dira que A appartient à $OPS^{m_1,m_2,m'}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}(E)$ s'il existe $a \in S^{m_1,m_2,m'}(\mathbb{R}^\mu)$ telle que A est défini pour f dans $\mathcal{S}(E)$ par :

$$A\,f = (2\pi)^{-n} \int e^{i\,x.\xi} \, a(\widetilde{L}_1(x,\xi), \widetilde{L}_2(x,\xi), \mathcal{M}(x,\xi)) \, \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

Remarque: La classe ne dépend pas des supplémentaires choisis de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$,et des bases choisies, ce qui justifie la notation (ceci est du à 2.4)
Il est montré dans [2] que A est continu de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$ et que si a est dans $OPS^{o,o}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}$, il se prolonge en un opérateur continu de $L^2(E)$ dans $L^2(E)$.

On sait comment agit le groupe métaplectique (cf [2]) et on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 2.4 :

Soit P dans $OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1,m_2,m'}$, Q dans $OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{\tilde{m}_1,\tilde{m}_2,\tilde{m}'}$ alors

$P_o Q \in OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1+\tilde{m}_1,m_2+\tilde{m}_2,m'+\tilde{m}'}(E)$

P^* est dans $OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1,m_2,m'}(E)$

On renvoie à [2] pour une démonstration analogue .

§ 3 Paramétrixes dans la classe $OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1,m_2}(E)$ (On suppose $m' = 0$)

On dira dans ce § qu'un opérateur est régularisant s'il est défini par un symbole dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mu})$

Remarquons que :

$$\bigcap_j OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1-j,m_2-j} = \bigcap_j OPS_{\mathcal{L}}^{m_1+m_2-j}(E) = OPS_{\mathcal{L}}^{-\infty}(E)$$

Autrement dit

$$\bigcap_j OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1-j,m_2-j}$$

est régularisant

Notons qu'un opérateur régularisant n'opère pas nécessairement de $\mathcal{S}'(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$. Ce n'est vrai que lorsque $\mathcal{L} = (E\times E^*)$.
La proposition suivante sera utile.

Proposition 3.1

Soit P dans $OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1,m_2}(E)$; on suppose qu'il admet un "inverse" à droite Q dans $OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{-m_1,-m_2}$ tel que

$$P\circ Q = I + \mathcal{R}$$

avec $\mathcal{R}$ dans $OPS^{-1,-1}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}$

Alors P admet un inverse à droite $\widetilde{Q}$ dans $OPS^{-m_1,-m_2}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}$ tel que

$$P \circ \widetilde{Q} = I + \widetilde{\mathcal{R}}$$

où $\widetilde{\mathcal{R}}$ est régularisant. On dira alors que $\widetilde{Q}$ est une paramétrixe à droite et que P est elliptique à droite.

L'énoncé de la proposition ainsi que la démonstration (facile) est à rapprocher des propositions (2.4) et (2.1) du chapitre II.

Proposition 3.2 :

Soit P un opérateur elliptique à droite, alors s'il est inversible à droite dans $\mathcal{S}$(E), il admet un inverse à droite dans $OPS^{-m_1,-m_2}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}$

Démonstration

De par la propositon précédente, P admet une paramétrixe à droite Q telle que :

$$P.Q = I + \mathcal{R} \qquad \text{où } \mathcal{R} \text{ est régularisant.}$$

Par ailleurs, il existe B continu de $\mathcal{S}$(E) dans $\mathcal{S}$(E) tel que :

$$P.B = I$$

Alors $Q - B\mathcal{R}$ est l'inverse cherché. Il est effet montré dans [2] Th.3.1 que si $\mathcal{R}$ est régularisant, $\mathcal{B}\mathcal{R}$ est régularisant .

On a la proposition "duale".

Proposition 3.3

Soit P un opérateur elliptique à gauche dans $OPS^{m_1,m_2}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}$, alors s'il est inversible à gauche dans $\mathcal{S}'$(E), il admet un inverse à gauche dans $OPS^{-m_1,-m_2}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}$.

Pour terminer ce §, donnons un exemple d'opérateur elliptique à gauche.

Exemple 3.4:

Soit $P_1 \in OPS_{\mathcal{L}_1}^{m_1}(E)$, $P_2 \in OPS_{\mathcal{L}_2}^{m_2}(E)$ et on suppose qu'il existe

$$Q_1 \in OPS_{\mathcal{L}_1}^{-m_1}(E) \ , \ Q_2 \in OPS_{\mathcal{L}_2}^{-m_2}(E)$$

tels que

$$Q_1 P_1 = I \ , \qquad Q_2 P_2 = I$$

Soit $\mathcal{P} = P_1 P_2 + A$ avec $A \in OPS_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}^{m_1-1,m_2-1}(E)$

Alors $\mathcal{P}$ est elliptique à gauche

§ 4 Dépendance d'un paramètre

On conseille vivement au lecteur de consulter le § 4 de [2]
On suppose maintenant que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ dépendent de manière C^∞ d'un paramètre λ de Σ.Mais $\dim \mathcal{L}_1(\lambda) = \nu_1 = cte$ $\dim \mathcal{L}_2(\lambda) = \nu_2 = cte$ $\dim \mathcal{L}_1(\lambda) \cap \mathcal{L}_2(\lambda) = \nu = cte$.
Et on considère des classes $C^\infty(\Sigma\ ;\ OPS_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)}^{m_1,m_2}(E))$, associées à des symboles dans $C^\infty(\Sigma; S^{m_1,m_2}(\mathbb{R}^\mu))$
Un opérateur A est défini par :

$$A_\lambda f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi}\ a(\lambda,\widetilde{L}_1(\lambda,x,\xi),\ \widetilde{L}_2(\lambda,x,\xi),\ M(\lambda,x,\xi))\ \hat{f}(\xi)d\xi$$

λ parcourt Σ (ou un ouvert de Σ), $M(\lambda,x,\xi)$ désigne une base de $\mathcal{L}_1(\lambda) \cap \mathcal{L}_2(\lambda)$ et $(\widetilde{L}_i(\lambda,x,\xi),\ M(\lambda,x,\xi))$ forment une base de $\mathcal{L}_i(\lambda)(i=1,2)$
On pose la définition suivante :

Définition 4.1

On dira que A_λ dans $C^\infty(\Sigma,\ OPS_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)}^{m_1,m_2})$ est régulièrement elliptique à droite, s'il existe Q_λ dans

$C^{\infty}(\Sigma, OPS^{-m_1,-m_2}_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)})$ tel que :

$$A_\lambda Q_\lambda = I + R_\lambda \qquad \text{avec} \quad R_\lambda \text{ dans } C^{\infty}(\Sigma, OPS^{-1,-1}_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)})$$

Alors on montre, en utilisant le fait que

$\bigcap_j C^{\infty}(\Sigma, OPS^{-j,-j}_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)}) = C^{\infty}(\Sigma, OPS^{-\infty}_{\mathcal{L}(\lambda)}(E))$ et le § 4 de [2], le théorème suivant :

Proposition 4.2 :

Soit A_λ dans $C^{\infty}(\Sigma, OPS^{m_1,m_2}_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)})$ un opérateur régulièrement elliptique à droite

Alors, si en un point λ_o de Σ, A_{λ_o} est inversible dans $\mathcal{S}(E)$ à droite

i) il existe un voisinage V_{λ_o} de λ_o où A_λ est inversible à droite

ii) Il existe un inverse à droite Q_λ dans $C^{\infty}(V_{\lambda_o}, OPS^{-m_1,-m_2}_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)})$

et on a la proposition duale :

Proposition 4.3 :

Soit A_λ dans $C^{\infty}(\Sigma, OPS^{m_1,m_2}_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)})$ un opérateur régulièrement elliptique à gauche

Alors si en un point λ_o de Σ, A_{λ_o} est inversible dans $\mathcal{S}'(E)$ à gauche,

i) Il existe un voisinage V_{λ_o} de λ_o où A_λ est inversible à gauche

ii) Il existe un inverse à gauche Q_λ dans $C^{\infty}(V_{\lambda_o}, OPS^{-m_1,-m_2}_{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda)})$

Les propositions 4.2 et 4.3 permettent de résoudre comme dans [2] le problème posé à la fin du chapitre II.
L'objet des chapitres IV et V sera donc d'étudier l'inversibilité de $P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ en tout point v de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap S^*X$

CHAPITRE IV ETUDE DE L'INVERSIBILITE DANS $\mathcal{S}$

§ 1 Introduction

On étudie maintenant le problème particulier posé dans l'introduction.

Soit $\mathcal{P} = P_1\ P_2 + Q$

l'opérateur considéré et on suppose que Q est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 régulier et que P_i (i=1,2) est d'ordre 1/2 et vérifie :

$$(H') \qquad \frac{1}{i}\{p_i, \overline{p_i}\} > 0 \quad i=1,2$$

où p_i désigne le symbole principal de P_i.

Soit Σ_i l'ensemble caractéristique de p_i :

Σ_i est un sous-cône symplectique de $T^*X\backslash 0$, on suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses.

On veut construire une parametrixe à droite pour $\mathcal{P}$. Grâce à la proposition 2.4 (chapitre II) on se ramène à la vérification de deux points :

point i : L'hypothèse (H') entraine que P_i admet une parametrixe à droite dans $OPS^{-1/2,-1}(X,\Sigma_i)$.

Le point i) se déduit alors de l'exemple 2.5 (chapitre II).

point ii : Il nous faut étudier $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$

$$\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = P_{1(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)} \cdot P_{2(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)} + q(o,\tilde{v})$$

où q désigne le symbole principal de Q.

On distingue alors les cas suivants :

cas 1 : Σ_1 et Σ_2 transverses

Dans ce cas, on peut choisir des coordonnées de telle sorte que :

$$\Sigma_i \text{ est défini par } u_i^1 = 0,\ u_i^2 = 0 \qquad (i = 1,2)$$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \text{ est défini par } u_1^1 = 0,\ u_1^2 = 0,\ u_2^1 = 0,\ u_2^2 = 0.$$

Les du_i^j sont indépendantes ($i=1,2$; $j=1,2$).

Alors $\mathcal{L}_i = \tilde{\mathcal{L}}_i$

$$P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)} = \alpha_i^1 \tilde{L}_i^1(u,D_u) + \alpha_i^2 \tilde{L}_i^2(u,D_u) \quad i=1,2$$
$$\alpha_i^j \in \mathbb{C}$$

où $\tilde{L}_i^j(u,D_u)$ a été défini en III. §1.

On omettra dans la suite l'indice $(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ et on désigne par p_i le symbole de P_i c'est une forme complexe sur $(E \times E^*)$ qu'on peut considérer également comme un élément dans le compléxifié de $\tilde{\mathcal{L}}_i$, le 2-plan associé à Σ_i.

Remarquons que l'on a la propriété suivante :

<u>Remarque 1.1</u>

$$\frac{1}{i}\{p_i,\overline{p_i}\} = [P_{i(\Sigma_1\cap\Sigma_2)}, \overline{P_{i(\Sigma_1\cap\Sigma_2)}}] = \frac{1}{i}\{p_{i(\Sigma_1\cap\Sigma_2)}, \overline{p_{i(\Sigma_1\cap\Sigma_2)}}\}$$

c'est la conséquence du fait que l'application $P \to P_\Sigma$ de $OPS^{m,1}(X,\Sigma)$ dans $C^\infty(\Sigma, OPS^1_{\mathcal{L}})$ conserve les crochets.

<u>Cas B : $\mathrm{Dim}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 3$</u>

Dans ce cas, on peut choisir des coordonnées de telle sorte que :

- Σ_i est défini par $u_i=0$, $w=0$ $(i=1,2)$

  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est défini par $u_1=0$, $u_2=0$, $w=0$

  et du_1, du_2, dw sont indépendantes.

Alors

$$P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)} = \alpha_i \tilde{L}_i(u,D_u,D_w) + \beta_i M(w,u,D_u,D_w) \quad (i=1,2)$$

p_i le symbole de $P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)}$ est une forme complexe sur $(E \times E^*)$ qu'on peut considérer comme un élément dans le complexifié de $\mathcal{L}_i$

Cas (C) $\Sigma_1 = \Sigma_2$

Alors $\Sigma_1 = \Sigma_2$ est défini par $u^1 = 0$, $u^2 = 0$

où les du^i sont indépendantes.

$$P_{i_{\Sigma_1}} = (\alpha_i^1 \tilde{L}^1 + \alpha_i^2 \tilde{L}^2)(u, D_u) \qquad (i = 1,2)$$
$$\alpha_i^j \in \mathbb{C}$$

On est bien dans la situation générale étudiée au chapitre III, le fait que Σ_i soit symplectique entraine de plus la propriété suivante :

(1.2) Dans le cas (A) $[\tilde{L}_i^1(u,D_u)\ ,\ \tilde{L}_i^2(u,D_u)] \neq 0$ i=1,2

Dans le cas (B) $[\tilde{L}_i(u,D_u)\ ,\ M] \neq 0$ i=1,2

Dans le cas (C) $[\tilde{L}^1\ ,\ \tilde{L}^2] \neq 0$

Il résulte de la remarque 1.1 , que $P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)}$ qui est dans $C^\infty(\Sigma_1 \cap \Sigma_2\ ,\ OPS^1_{L_i})$, admet une paramétrixe Q_i dans $C^\infty(\Sigma_1 \cap \Sigma_2\ ,OPS^{-1}_{L_i})$;

$\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ est donc régulièrement elliptique à droite.

Par conséquent, en vertu de la proposition 4.2 du chapitre III, il suffit de montrer que en tout point λ_o de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ est inversible dans $\mathcal{S}(E)$ à droite.

Dans le § suivant, on va montrer comment dans les cas (A), (B), (C), on peut en un point de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, grâce à des transformations symplectiques mettre p_1, p_2, $\tilde{L}_i^j$, M sous des formes réduites.

§ 2 Classification symplectique

§ 2.1 Le cas transverse (A)

La classification est déterminée par le rang de la 2-forme canonique

ω sur $(E\times E^*)^*$ restreinte à $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2$.

Ce rang est nécessairement supérieur ou égal à 2, car $\mathcal{L}_1$ est symplectique
On distingue donc deux cas :

<u>Cas A.1</u> Rang $\omega = 4$

Autrement dit, $\mathcal{L}$ est symplectique. On reprend pour $(E\times E^*)$ les coordonnées $(x,\xi)\equiv(x_1,\dots,x_4,\xi_1,\dots,\xi_4)$

Comme $\{L_1^1(x,\xi)\ ,\ L_1^2(x,\xi)\}\neq 0$, on peut toujours supporter que

$$\{L_1^1(x,\xi)\ ,\ L_1^2(x,\xi)\} = 1$$

Il existe une transformation symplectique Φ_1 de $(E\times E^*)$ telle que

$$L_1^1\circ\Phi_1 = x_1$$

$$L_1^2\circ\Phi_1 = \xi_1$$

On note encore

L_2^1 , L_2^2 les formes engendrant $\mathcal{L}_2$ dans ce nouveau système de coordonnées

On pose

$$\left.\begin{array}{l}\{L_2^i,x_1\} = k_{i1}\\ \{L_2^i,\xi_1\} = k_{i2}\end{array}\right.\qquad i = 1,2$$

Alors $L_2^i + k_{i1}\,\xi_1 - k_{i2}.x_1 \qquad = L_2'^{\,i}$

commute avec x_1 et ξ_1 et de plus $\{L_2'^{\,1},\ L_2'^{\,2}\}\neq 0$ (On peut se ramener au cas où c'est égal à 1) en raison de l'hypothèse ω non dégénérée.
On peut alors trouver une transformation symplectique sur $(x_2,\dots,x_4,\xi_2,\dots,\xi_4)$ Φ_2 telle que

$$L_2'^{\,1}\circ\Phi_2 = x_2$$

$$L_2'^{\,2}\circ\Phi_2 = \xi_2$$

On s'est ainsi ramené au cas où :

$L_1^1 = x_1 \qquad L_2^1 = x_2 + \widetilde{\alpha}_1 x_1 + \widetilde{\beta}_1 \xi_1 \qquad \widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$

$L_1^2 = \xi_1 \qquad L_2^2 = \xi_2 + \widetilde{\alpha}_2 x_1 + \widetilde{\beta}_2 \xi_1$

Si dans le cas considéré ici, on avait pris $L_i^2 = \mathrm{Re}\, p_i \quad L_i^1 = \mathrm{Im}\, p_i$ et si on avait $\frac{1}{i}\{p_1, \overline{p}_1\} = +1$,

alors après transformation symplectique ,

$p_1 = \xi_1 - i\, x_1 \quad ; \qquad p_2 = \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 x_1$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$

$$2.1 \quad \left[\begin{array}{lcl} \frac{1}{i}\{p_2, \overline{p}_2\} > 0 & & \\ \mathrm{Re}(\alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 x_2) = 0 & \Leftrightarrow & x_2 = 0 \\ \mathrm{Im}(\alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 x_2) = 0 & & \xi_2 = 0 \end{array}\right.$$

(Conséquence du fait que Rep_2, Imp_2 définissent $\mathcal{L}_2$)

<u>Cas A2</u> : Rang $\omega = 2$

On montre qu'on peut se ramener au cas où

$L_1^1 = x_1 \qquad L_2^1 = x_2 + \widetilde{\alpha}_1 x_1 + \widetilde{\beta}_1 \xi_1 \qquad \widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$

$L_1^2 = \xi_1 \qquad L_2^2 = x_3 + \widetilde{\alpha}_2 x_1 + \widetilde{\beta}_2 \xi_1$

$p_1 = \xi_1 - i\, x_1$

$p_2 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 x_1$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ et :

$$2.2 \quad \left[\begin{array}{lcl} \frac{1}{i}\{p_2, \overline{p}_2\} > 0 & & \\ \text{et} \quad \mathrm{Re}(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2) = 0 & \Leftrightarrow & x_2 = 0 \\ \quad \mathrm{Im}(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2) = 0 & & x_3 = 0 \end{array}\right.$$

(Conséquence du fait que Rep_2, Imp_2 définissent $\mathcal{L}_2$)

§ 2.2 Dimension $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = 1$: Le cas (B)

Le rang de la 2-forme sur $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ est nécessairement 2.
Une étude du même type que précédemment montre qu'on peut choisir (à une transformation symplectique près) $L^1(x,\xi)$, $M(x,\xi)$, $L^2(x,\xi)$ de telle sorte que (le choix dépend également de la donnée de p_1 et de p_2) :

$$\begin{aligned} L^1 &= x_1 \\ M &= \xi_1 \\ L^2 &= x_2 + \tilde{\alpha}_2 \xi_1 \\ p_1 &= \xi_1 - i x_1 \\ p_2 &= \alpha x_2 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 x_1 \end{aligned}$$

avec
(2.3) $\left[\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{C} \ , \ \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{i} \{ p_2, \bar{p}_2 \} > 0 \end{array} \right.$

§ 2.3 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$: le cas (C)

Ce cas est connu, on se ramène au cas où

$L_1 = x_1$, $L_2 = \xi_1$ $\quad p_1 = \xi_1 - i x_1 \quad p_2 = \xi_1 - i \alpha x_1$ avec $\mathrm{Re}\alpha > 0$.

§ 2.4 Conséquences : réduction du nombre de variables :

Cas A : Pour f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, un opérateur A de $OPS^{m_1,m_2}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}(\mathbb{R}^4)$

est défini par

$$Af = (2\pi)^{-4} \int e^{i\, x\cdot\xi} \, a(L_1^1, L_1^2, L_2^1, L_2^2) \, \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

Dans le cas (A.1), on obtient en mettant sous forme réduite :

$$(Af)(x_1,\dots,x_4) = (2\pi)^{-2} \int e^{i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} \, a(x_1,\xi_1,x_2+\tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\beta}_1\xi_1, \xi_2 + \tilde{\alpha}_2 x_1 + \tilde{\beta}_2 \xi_1) \, \hat{f}(\xi_1,\xi_2,x_3,x_4) \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

On voit aisément que dans le problème qui nous interesse x_3 et x_4 ne jouent aucun rôle, et on considère que A opère dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

Dans le cas (A 2), on obtient :

$$(Af)(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2\pi)^{-1} \int e^{i x_1 \xi_1} a(x_1,\xi_1,x_2+\tilde{\alpha}_1 x_1+\tilde{\beta}_1\xi_1, x_3+\tilde{\alpha}_2 x_1 + \tilde{\beta}_2 \xi_1)\hat{f}(\xi_1,x_2,x_3,x_4)\, d\xi_1$$

x_4 ne joue aucun rôle, on considère que A opère dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

<u>Cas B</u> : On obtient :

$$(Af)(x_1,x_2,x_3) = (2\pi)^{-1} \int e^{i x_1 \xi_1} a(x_1,\xi_1,x_2+\tilde{\alpha}_1 x_1+\tilde{\alpha}_2\xi_1)\hat{f}(\xi_1,x_2,x_3)\, d\xi_1$$

x_3 ne joue aucun rôle .

<u>Cas C</u> :

$$(Af)(x_1,x_2) = (2\pi)^{-1} \int e^{i x_1 \xi_1} a(x_1,\xi_1)\hat{f}(\xi_1,x_2)\, d\xi_1$$

x_2 ne joue aucun rôle .

L'existence d'une paramétrixe à droite est donc ramenée à l'étude de l'existence d'un inverse à droite dans $\mathcal{S}$ pour les modèles suivants :

$$\mathcal{P} = P_1 P_2 + q \quad , q \in \mathbb{C}$$

<u>Cas A 1</u>

$$P_1 = D_{x_1} - i x_1$$

$$P_2 = \alpha_1 D_{x_2} + \alpha_2 x_2 + \beta_1 D_{x_1} + \beta_2 x_1$$

+ conditions (2.1) sur $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$

<u>Cas A 2</u>

$$P_1 = D_{x_1} - i x_1$$

$$P_2 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 D_{x_1} + \beta_2 x_1$$

+ conditions (2.2)

Cas B

$$P_1 = D_{x_1} - i\, x_1$$

$$P_2 = \alpha\, x_2 + \beta_1 \, D_{x_1} + \beta_2 x_1 \qquad + \text{ conditions } (2.3)$$

Cas C

$$P_1 = D_{x_1} - i\, x_1$$

$$P_2 = D_{x_1} - i\,\alpha\, x_1 \qquad \mathrm{Re}\,\alpha > 0$$

C'est cette étude que nous mènerons dans le § suivant .

§ 3 Etude de l'inversibilité pour le modèle A1

On étudie l'inversibilité à droite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ de

$$\mathcal{P} = P_1 P_2 + q = (D_{x_1} - i\, x_1)\ (\alpha_1 D_{x_2} + \alpha_2 x_2 + \beta_1 D_{x_1} + \beta_2 x_1) + q$$

Il résulte des hypothèses précédentes que :

$(D_{x_1} - i\, x_1)$ admet un inverse à droite Q_1 dans $OPS^{-1}_{\mathcal{L}_1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}_1$ est maintenant considéré comme un 2-plan de $\mathbb{R}^4$

P_2 admet un inverse à droite Q_2 dans $OPS^{-1}_{\mathcal{L}_2}(\mathbb{R}^2)$; $\mathcal{L}_2$ est maintenant considéré comme un 2-plan de $\mathbb{R}^4$.

Par conséquent, P_1P_2+q est un opérateur elliptique à droite et admet une paramétrixe Q dans $OPS^{-1,-1}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\mathcal{P}\, Q = I + \mathcal{R}$$

$$\text{avec} \qquad \mathcal{R} \in \bigcap_j OPS^{-j,-j}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}(\mathbb{R}^2)$$

Mais $\bigcap_j OPS^{-j,-j}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2} = \bigcap_j OPS^{-j}_{\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2} = OPS^{-\infty}(\mathbb{R}^2)$

$\mathcal{R}$ est donc régularisant , au sens habituel, i.e il opère de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

On est presque, dans la situation classique sauf que $\mathcal{P}$ n'est pas à indice, on va donc étudier $\mathcal{P}\mathcal{P}^*$ qui lui sera un opérateur à indice dans des espaces adaptés.

On va montrer la proposition suivante :

Proposition 3.1 :

$\mathcal{P}\mathcal{P}^*$ a un inverse dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(\mathcal{P}\mathcal{P}^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = 0$

On va montrer que $\mathcal{P}\mathcal{P}^*$ est elliptique bilatère.

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^* = (P_1P_2 + q)(P_2^* \cdot P_1^* + \bar{q}) \equiv \quad (P_1P_1^*)\ (P_2P_2^*)\ (\text{modulo } OPS^{1,1}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2})$$

$(P_iP_i^*)$ admet un inverse bilatère dans $OPS^{-2}_{\mathcal{L}_i}(\mathbb{R}^2)$, d'où le résultat.

Il existe alors Q dans $OPS^{-2,-2}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}$ tel que :

$$Q(\mathcal{P}\mathcal{P}^*) = I + \mathcal{R}$$

$$(\mathcal{P}\mathcal{P}^*)Q = I + \mathcal{R}'$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont des opérateurs compacts de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$

On en déduit que $\mathcal{P}\mathcal{P}^*$ est un opérateur à indice d'indice nul de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

On est donc ramené à l'étude du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 3.2 $\quad \mathrm{Ker}\ (\mathcal{P}\mathcal{P}^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = 0$

Démonstration

Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}^* \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = 0$; on réécrit $\mathcal{P}^*$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}^* = (D_{x_1} + i\,x_1)(\alpha(D_{x_1} + i\,x_1) + \beta(D_{x_1} - i\,x_1) + \gamma(D_{x_2} + i x_2) + \delta(D_{x_2} - i\,x_2)) + \lambda$$

$$= P_1^*P_2^* + \lambda$$

où P_i^* est inversible à gauche dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

a) Si $\lambda = 0$, il est clair que $\mathcal{P}^*$ est inversible à gauche et donc $\operatorname{Ker} \mathcal{P}^* \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = 0$.

b) On suppose donc $\lambda \neq 0$, on introduit les fonctions d'Hermite $h^k(t)$, $k=0,..,\infty$ qui possèdent les propriétés suivantes.

i) c'est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

ii) $(D_t + it)\, h^k(t) = \sqrt{2}\,\sqrt{k+1}\; h^{k+1}(t)$

$(D_t - it)\, h^k(t) = \sqrt{2}\,\sqrt{k}\;\; h^{k-1}(t)$

Soit $u(x_1,x_2)$ une solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ de $\mathcal{P}^*u = 0$, on développe u sur la base des fonctions d'Hermite :

$$u(x_1,x_2) = \sum_{j,k} \alpha_{jk}\, h^j(x_1)\, h^k(x_2) = \sum_{j,k} \alpha_{jk}\, h^{jk}$$

On veut montrer que $\mathcal{P}^*u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

or

$$\begin{aligned} P(\alpha_{jk}\, h^{j,k}) = {} & \alpha.2\sqrt{(j+1)(j+2)}\;\alpha_{jk}\; h^{j+2,k} \\ & + (2\beta j + \lambda)\,\alpha_{jk}\; h^{j,k} \\ & + 2\gamma\,(\sqrt{(j+1)(k+1)})\; h^{j+1,k+1} \,.\, \alpha_{jk} \\ & + 2\,\delta\,(\sqrt{(j+1)k}\;\alpha_{jk}\; h^{j+1,k-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{P}^*u = 0 \Leftrightarrow$

$$(3.3)\quad (2\beta j + \lambda)\,\alpha_{jk} = -2\,\alpha\,\sqrt{j(j-1)}\;\alpha_{j-2,k} - 2\gamma\sqrt{jk}\,.\,\alpha_{j-1,k-1} - 2\delta\sqrt{j(k+1)}\;\alpha_{j-1,k+1}$$

On suppose que :

$$(2\beta j+\lambda) \neq 0\ ,\ \forall j < j_o$$

Alors (3.3) implique que :

$$\alpha_{j,k} = 0 \qquad \forall k\ ,\ \forall j < j_o$$

Si donc $(2\beta j + \lambda) \neq 0$, $\forall j$, alors $\mathcal{P}^*u = 0 \Rightarrow u = 0$

Si il existe j_o tel que :

$(2\beta j_o + \lambda) = 0$, alors il résulte de (3.4) que

$$u = (D_{x_1} + i\,x_1)^{j_o}\, v$$

avec v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\mathcal{P}^* u = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}^*_\lambda (D_{x_1} + i\,x_1)^{j_o} \,.\, v = 0$$

Or on vérifie que pour tout λ

$$\mathcal{P}^*_\lambda (D_{x_1} + i x_1)^{j_o} = (D_{x_1} + i x_1)^{j_o} \quad \mathcal{P}^*_{\lambda + 2\beta j_o}$$

Par conséquent, lorsque $(2\beta j_o + \lambda) = 0$

$$\mathcal{P}^*_{-2\beta j_o} \circ (D_{x_1} + i\,x_1)^{j_o} = (D_{x_1} + i\,x_1)^{j_o}\, \mathcal{P}^*_o \,.$$

On reconnait là un procédé de concaténation [8]

Or Ker $\mathcal{P}^*_o \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = 0$ (d'aprés a))

On en déduit que

$$\mathcal{P}^*_{-2\beta_{j_o}} \quad (D_{x_1} + i x_1)^{j_o}\, v = 0 \Leftrightarrow (D_{x_1} + i\,x_1)^{j_o} \circ \mathcal{P}^*_o\, v = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}^*_o v = 0$$

$$\Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

c . q . f . d .

§ 4 Etude de l'inversibilité dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ pour le modèle A2.

On étudie dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ l'opérateur

$$\mathcal{P} = P_1 P_2 + q = (D_{x_1} - i\,x_1)(\alpha(D_{x_1} + i\,x_1) + \beta(D_{x_1} - i\,x_1) + \gamma\,x_2 + \delta\,x_3) + q$$

Comme au § précédent, on se ramène à l'étude de $\mathcal{P}\mathcal{P}^*$

On montre la proposition 4.1

<u>Proposition 4.1</u>

$\mathcal{P}\mathcal{P}^*$ a un inverse dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si pour tout $(x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2$ $\mathrm{Ker}\ (\mathcal{P}\mathcal{P}^*_{x_2,x_3}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0$

On montre comme au § précédent que $\mathcal{P}\mathcal{P}^*$ est elliptique, c'est à dire qu'il existe Q tel que

$$Q\ (\mathcal{P}\mathcal{P}^*) = I + \mathcal{R} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{R} \in OPS^{-\infty}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^3)$$

$$(\mathcal{P}\mathcal{P}^*)Q = I + \mathcal{R}' \qquad \qquad \mathcal{R}' \in OPS^{-\infty}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^3)$$

où $\mathcal{L}$ est le 4-plan engendré par x_1, ξ_1, x_2, x_3 , la proposition résulte alors de la démonstration du théorème 3.1 de [2](point (iii) → i).

On vérifie alors aisément que $\mathrm{Ker}\ (\mathcal{P}\mathcal{P}^*_{x_2,x_3}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0$; en effet, ceci résulte $\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}^*_{x_2,x_3} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0$

On montre ce point en remarquant que

$$\begin{matrix} [P_2,P_2^*] > 0 \\ [P_1,P_1^*] > 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Indice } \mathcal{P}^*_{x_2,x_3} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}\ \mathcal{P}^*_{x_2,x_3} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0$$

On montre par la même technique que $\mathcal{P}$ est inversible à droite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, ou $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans les cas B) et C).

CHAPITRE V APPLICATIONS

§ 1 : Enoncé des Théorèmes : le cas quasitransverse

Les propositions 2.4, 2.5 chapitre II, 3.2 chapitre III, 4.2 chapitre III, et 3.1, 3.2, 4.1, nous permettent de démontrer le théorème suivant.

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudo-différentiels réguliers sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ d'ordre 1/2 dont le symbole principal p_1 (resp. p_2) vérifie l'hypothèse :

(H') $\qquad \frac{1}{i}\{p,\bar{p}\}_{x,\xi} > 0$ lorsque $p(x,\xi) = 0$.

Soit Σ_i le cône caractéristique de p_i, on a alors :

Théorème 1.1 : On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses, alors $\forall$ A opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0, l'opérateur $\mathcal{P} = (P_1 \circ P_2 + A)$ admet une parametrixe à droite dans $OPS^{-1,-1,-1}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$.

Par passage à l'adjoint, on considère la situation exposée dans l'introduction : Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudodifférentiels réguliers sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ d'ordre 1/2 dont le symbole principal p_1 (resp. p_2) vérifie l'hypothèse.

(H) $\qquad \frac{1}{i}\{p,\bar{p}\} < 0$ lorsque $p(x,\xi) = 0$

Alors :

Théorème 1.2 : On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses, alors $\forall$ A opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0, l'opérateur $\mathcal{P} = (P_1P_2 + A)$ admet une parametrixe à gauche dans $OPS^{-1,-1,-1}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$.
En particulier, $P_1P_2 + A$ est hypoelliptique avec perte d'une dérivée.

§ 2 : Démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.2 dans le cas général.

Soit donc à étudier $P_1P_2 + A$ où p_1 et p_2 vérifient la condition (H) et les hypothèses du § précédent.

Σ_1 est défini dans $T^*X\backslash 0$ par $\mathrm{Re}\,p_1 = 0$, $\mathrm{Im}\,p_1 = 0$

Σ_2 est défini dans $T^*X\backslash 0$ par $\mathrm{Re}\,p_2 = 0$, $\mathrm{Im}\,p_2 = 0$

On utilise alors une idée de [6].

On considère $X \times \mathbb{R}^2 \ni (x, z_1, z_2)$

et $\qquad T^*(X \times \mathbb{R}^2)\backslash 0 \ni (x, z_1, z_2, \xi, \zeta_1, \zeta_2)$

On identifie $T^*(X)\backslash 0$ au sous cône $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$

et soit U_ε le cône défini par $|\zeta_1| + |\zeta_2| < \varepsilon|\xi|$.

Dans ce cône U_ε, il est clair que des symboles pseudodifférentiels sur $T^*(X)\backslash 0$ peuvent être considérés comme des symboles sur U indépendants de (z, ζ).

Ainsi P_2, A définissent des opérateurs $\tilde{P}_2$, $\tilde{A}$ opérant sur les microfonctions dans U_ε.

$\tilde{P}_2$ est caractéristique sur $\tilde{\Sigma}_2$ défini dans U par $\mathrm{Re}\,p_2 = 0$, $\mathrm{Im}\,p_2 = 0$.

On considère $\tilde{\Sigma}_1$ défini dans U_ε par :

$$\mathrm{Re}\,p_1 + \frac{\zeta_1}{|\xi|^{1/2}} = 0$$

$$\mathrm{Im}\,p_1 + \frac{\zeta_2}{|\xi|^{1/2}} = 0$$

et soit $\tilde{P}_1$ l'opérateur pseudodifférentiel sur U de symbole

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \frac{\zeta_1}{|\xi|^{1/2}} + i\frac{\zeta_2}{|\xi|^{1/2}}$$

On remarque alors que $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ sont transverses dans U et que $\tilde{\Sigma}_i$ (i=1,2) est symplectique de codimension 2 si ε est choisi suffisamment petit ; en effet :

$$\frac{1}{i}\{\tilde{p}_1, \overline{\tilde{p}_1}\} = \frac{1}{i}\{p_1, \overline{p_1}\} \text{ pour } \zeta_1 = 0,\ \zeta_2 = 0$$

$\frac{1}{i}\{p_1,\overline{p}_1\}$ étant strictement négatif lorsque $\mathrm{Re}\,p_1=0$, $\mathrm{Im}\,p_1=0$, $\frac{1}{i}\{\tilde{p}_1,\overline{\tilde{p}_1}\}$ est strictement négatif lorsque $|\zeta_1|+|\zeta_2|<\varepsilon|\xi|$

$$\mathrm{Re}\,p_1 = -\frac{\zeta_1}{|\xi|^{1/2}}$$

$$\mathrm{Im}\,p_1 = -\frac{\zeta_2}{|\xi|^{1/2}}$$

pour ε suffisamment petit.
On considère l'opérateur :

$$\tilde{P} = \tilde{P}_1.\tilde{P}_2 + \tilde{A}$$

alors $\tilde{P} \in OPS^{1,1,1}(U,\tilde{\Sigma}_1,\tilde{\Sigma}_2)$ et vérifie microlocalement dans U les hypothèses du théorème 1.2.
De plus le symbole de $\tilde{P}$ ne dépend pas de (z_1,z_2).
Il existe $\tilde{Q}$ dans $OPS^{-1,-1,-1}(U,\tilde{\Sigma}_1,\tilde{\Sigma}_2)$ tel que

$$\tilde{Q} \circ \tilde{P} = I + \tilde{\mathcal{R}}$$

où $\tilde{\mathcal{R}}$ est régularisant dans U (ie pour toute distribution ω dont le WF est dans U, $\tilde{\mathcal{R}}u$ est C^∞).

De plus le symbole de $\tilde{Q}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ ne dépendent pas de z_1,z_2 en un sens évident.

Soit $\tilde{q}$ et $\tilde{p}$ les symboles complets de $\tilde{Q}$ et $\tilde{P}$, si on désigne par # la loi des symboles dans U, on a :

$$\tilde{q}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2) \# \tilde{p}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2) = 1+\tilde{r}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2) \tag{2.1}$$

où $\tilde{r}$ est dans $S^{-\infty}(U)$, $\tilde{q},\tilde{p},\tilde{r}$ ne dépendent pas de z_1 , z_2
On désigne par $\circledast$ la loi de composition des symboles dans $T^*X\backslash 0$. Alors

$$\tilde{q}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2) \# \tilde{p}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2) \equiv \tilde{q}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2) \circledast \tilde{p}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2) \tag{2.2}$$

$$= 1+\tilde{r}'(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2)$$

est <u>multiplicative</u> en ζ_1 , ζ_2 sur les symboles qui ne dépendent pas de (z_1,z_2) (modulo $S^{-\infty}$).

En effet, on a :

$$\tilde{q} \# \tilde{p} = I(c)$$

avec $c = (2\pi)^{-n-2} \iint e^{i(\tilde{x}.\xi+\tilde{z}.\zeta)} \tilde{q}(x,\xi+\tilde{\xi},\zeta+\tilde{\zeta})\tilde{p}(x-\tilde{x},\xi,\zeta)\ d\tilde{x}.d\tilde{\xi}.d\tilde{z}.d\tilde{\zeta}$

Formellement, on peut écrire :

$$I(c) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\tilde{x}.\tilde{\xi}}.\tilde{p}(x-\tilde{x},\xi,\zeta)\ [(2\pi)^{-2}\int \tilde{q}(x,\xi+\tilde{\xi},\zeta+\tilde{\zeta})e^{i\tilde{z}.\tilde{\zeta}}d\tilde{z}\ d\tilde{\zeta}]\ d\tilde{x}\ d\tilde{\xi}$$

$$= (2\pi)^{-n}\int e^{i\tilde{x}.\tilde{\xi}}\ p(x-\tilde{x},\ \xi,\zeta)\ .\ \tilde{q}(x,\xi+\tilde{\xi},\zeta)\ d\tilde{x}\ d\tilde{\xi}$$

$$= p(.\ ,.,\zeta) \# q(.\ ,.,\zeta).$$

Cette formule est exacte sous des hypothèses convenables d'intégrabilité sur $\tilde{q},\tilde{p},\tilde{q}.\tilde{p}$ (Théorème de Fubini). Classiquement $\tilde{q},\tilde{p}$, $\tilde{q}(.,.,\zeta),\tilde{p}(.,.,\zeta)$ étant des symboles dans un $S^{\mu}_{1/2}$, on peut se ramener à ce cas par intégration par partie (utiliser un opérateur P tel que : $P.e^{i(\tilde{x}.\tilde{\xi}+\tilde{z}.\tilde{\zeta})} = e^{i(\tilde{x}.\tilde{\xi}+\tilde{z}.\tilde{\zeta})}$, cf [1]).

On peut faire $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$ dans (2.2), et on obtient

$$\tilde{q}(x,\xi,0,0) \# \tilde{p}(x,\xi,0,0) = \tilde{q}(x,\xi,0,0) \# p(x,\xi) = 1+\tilde{r}(x,\xi,0,0) \tag{2.3}$$

Posons $q(x,\xi) = \tilde{q}(x,\xi,0,0)$, q est le symbole complet de la parametrixe de P.

La question est de savoir dans quelle classe est $q(x,\xi)$. Il est immédiat que $q(x,\xi)$ est dans $S^{o}_{1/2}(T^{*}X)$ car $\tilde{q}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2)$ est dans $S^{o}_{1/2}(U)$, mais il est difficile d'être plus précis dans le cas général.

On a le lemme suivant :

Lemme 2.1 : Soit $\tilde{q}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2)$ dans $S^{m,k_1,k_2}(U,\tilde{\Sigma}_1,\tilde{\Sigma}_2)$. On suppose que tout champ tangent à Σ_1 et Σ_2 peut s'écrire comme la somme d'un champ tangent à $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ et d'un champ nul sur $(\zeta_1=0,\zeta_2=0)$, alors $q(x,\xi)$ est dans $S^{m,k_1,k_2}(T^*X,\Sigma_1,\Sigma_2)$.

Il importe de remarquer que l'hypothèse du lemme n'est pas vérifiée dans le cas général.
On pourrait par contre, en utilisant ce lemme ramener l'étude du cas quasitransverse à l'étude du cas transverse.
Dans le cas général, on a cependant les propriétés suivantes :
Si Q est la parametrixe, Q, QP_1, QP_2, P_1Q, P_2Q sont dans $OPS^{o}_{1/2}(X)$, ceci nous suffira pour l'application aux systèmes.

§ 3 : APPLICATION AUX SYSTEMES

Utilisant les théorèmes précédents, on montre les deux théorèmes suivants

Théorème 3.1 : Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre 1/2 vérifiant (H').
Alors pour tous opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre 0, A et B, le système :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & A \\ B & P_2 \end{pmatrix}$$

admet une parametrixe à droite $Q = (Q_{ij})_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}$ avec $Q_{ij} \in OPS^{o}_{1/2}(X)$.

Théorème 3.2 : Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre 1/2 vérifiant (H). Alors pour tous opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre 0, A et B, le système $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & A \\ B & P_2 \end{pmatrix}$ admet une parametrixe à gauche $Q = (Q_{ij})_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}$ avec $Q_{ij} \in OPS^{o}_{1/2}(X)$. En particulier, le système est souselliptique avec perte d'1/2 dérivée.

Esquisse de la démonstration du Th. 3.2

On pose $$\check{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} P_2 & -A \\ -B & P_1 \end{pmatrix}$$

$$\check{\mathcal{P}}.\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_2P_1-AB & [P_2,A] \\ -[B,P_1] & -BA+P_1P_2 \end{pmatrix}$$

Les termes diagonaux de $\check{\mathcal{P}}.\mathcal{P}$ (et dominants) sont du type étudié au §2.

On en déduit un inverse à gauche pour $\check{\mathcal{P}}.\mathcal{P}$, d'où un inverse pour $\mathcal{P}$. La classe obtenue dans le théorème se déduit aisément du calcul symbolique.

Le théorème 3.2 répond à une question posée dans [3].

REFERENCES

[1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. Comm. Pure. Appl. Math. 27 p585-639 (1974).

[2] L. Boutet de Monvel. A. Grigis. B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (à paraître Astérisque).

[3] B. Helffer : Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte 3/2 dérivées) (à paraître).

[4] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and non elliptic boundary problems. Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.

[5] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966) p138-183.

[6] Rotschild L.P, Stein E.M. Hypoelliptic differential operators and Nilpotent groups (à paraître).

[7] Sjöstrand J. Parametricès for pseudodifferential operators with multiple characteristics. Ark för Mat. 12, 85-130 (1974).

[8] Trèves F. Concatenations of second. Order Evolution Equations applied to local solvability and hypoellipticity. Comm. pure appl. Math. 26 (1973), 201-250.

Bernard HELFFER, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 91128 PALAISEAU