BERNARD HELFFER

Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte de 3/2 dérivées)

Mémoires de la S. M. F., tome 51-52 (1977), p. 13-61
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__51-52__13_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 51-52, 1977, p. 13-61.

SUR L'HYPOELLIPTICITE DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES MULTIPLES (PERTE DE 3/2 DERIVEES)

par Bernard HELFFER
(Ecole Polytechnique)

INTRODUCTION .

L'étude de l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles a connu un grand développement ces dernières années. Commencée par J. Sjöstrand [10], L. Boutet de Monvel et F. Trèves [2] qui considéraient le cas où l'ensemble caractéristique était un cône C^∞ symplectique Σ, elle fut poursuivie par L. Boutet de Monvel [3] qui construisit une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels contenant les parametrixes des opérateurs considérés et permettant d'étudier des situations plus générales [6], [4]. Dans [9] enfin, L. Hörmander caractérise l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée pour des opérateurs à caractéristiques doubles dont le symbole principal p_m vérifie la condition suivante : microlocalement, il existe un angle Γ dans $\mathbb{C}$ d'ouverture inférieure à π tel que $p_m(x,\xi) \in \Gamma$. Il est montré, dans ce cas général, que, si la condition d'hypoellipticité avec perte d'une dérivée n'est pas satisfaite, on ne peut espérer d'hypoellipticité avec une perte inférieure à 9/8. Dans le cas où Σ est symplectique, il est montré dans [10] qu'on ne peut espérer d'hypoellipticité avec une perte inférieure à 3/2 dérivées. Nous présentons ici une étude de l'hypoellipticité avec perte de 3/2 dérivées, inspirée au départ par l'article de J. Sjöstrand et les discussions que nous avons eu avec lui. Nous tenons à le remercier pour les conseils qu'il nous a donné. Notre présentation est cependant différente dans la forme, car il nous a semblé bon d'utiliser et de développer la théorie des opérateurs d'hermite introduite dans [3] et qui donne lieu à un calcul symbolique plus agréable. Nous introduisons en particulier la notion d'opérateurs d'Hermite pair ou impair et différentes notions de "régularité" qui joueront un rôle important dans les démonstrations.

Cet article est relativement self contained mais nous conseillons au lecteur d'avoir sous la main [3] et [10] en particulier pour l'étude détaillée des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux d'ordre 2 que nous n'avons pu expliquer en détail ici. Les principaux résultats "explicites" sont les théorèmes 1.2, 4.2.1 et 4.3.14 mais d'autres résultats implicites sont donnés dans les propositions 3.2.2 et 3.3.1.

Le plan de ce travail est le suivant :

§ 1 : ENONCE DU THEOREME. NOTATIONS ET PRESENTATION DES PRINCIPAUX RESULTATS.

Soit Ω une variété C^∞ paracompacte de dimension n et soit $T^*\Omega\backslash 0$ le fibré cotangent privé de la section nulle.

On considère des opérateurs pseudodifférentiels P sur Ω qui, dans tout système de coordonnées locales, ont un symbole de la forme :

(1.1) $$p(x,\xi) \sim \sum_{j=o}^{\infty} p_{m-j}(x,\xi)$$

où les $p_{m-j}(x,\xi)$ sont des symboles positivement homogènes de degré m-j.
On dit alors que P est un o.p.d régulier d'ordre m : $P \in L^m_{reg}(\Omega)$.
Un opérateur d'ordre m est dit hypoelliptique avec perte de k dérivées ($k \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall \omega \subset \Omega\ ,\ Pu \in H^s_{loc}\ (\omega) \Rightarrow u \in H^{s+m-k}_{loc}(\omega)$$

Cette définition locale peut être microlocalisée dans $T^*\Omega\backslash 0$.

On considère ici le cas, où le symbole principal p_m de l'opérateur P considéré, s'annule à l'ordre 2 exactement (cf [10]) sur une sous variété Σ conique, fermée, symplectique de codimension 2ν dans $T^*\Omega\backslash 0$.

On peut définir en tout point ρ de Σ les invariants suivants (cf [10])

(1.2) le symbole sous-principal :

$$p'_{m-1}\ (\rho) = (p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_j})\ (\rho)$$

(1.3) L'indice d'enroulement de p_m (winding number) lorsque Σ est de codimension 2.

On fera dans la suite l'hypothèse que cet <u>indice d'enroulement est nul</u>.

(1.4) La matrice fondamentale A_ρ.

On sait que A_ρ opère sur la fibre au dessus de ρ du complexifié du fibré normal à Σ et que ses valeurs propres sont de la forme $\pm i\lambda_j$ $(j=1,\dots,\nu)$ où λ_j appartient à Γ_ρ [Γ_ρ est l'ensemble des valeurs du Hessien de p_m]. L'hypothèse faite en (1.3) assure que Γ_ρ est un angle convexe d'ouverture inférieure à π.

Σ étant symplectique, on peut définir un crochet de Poisson noté $\{,\}_\Sigma$ sur les fonctions C^∞ sur Σ.

Dans le cadre ci-dessus, il est démontré le théorème suivant ([10] [2] [3].)

<u>Théorème 1.1</u>

Soit P vérifiant les hypothèses ci-dessus, on suppose que :
(1.5) $\forall \rho \in \Sigma$, $\forall \alpha_j \in \mathbb{N}$

$$p'_{m-1}(\rho) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j+1)\,\lambda_j(\rho) \neq 0$$

Alors P admet une parametrixe qui est continue de $H_s^{loc}(\Omega)$ dans $H_{s+m-1}^{loc}(\Omega)$ pour tout s réel.

Lorsque (1.5) n'est pas vérifiée, on sait (cf [10]) que l'on ne peut espérer d'hypoellipticité avec perte de r dérivées ($r<3/2$). Le théorème que nous présentons ici étudie l'hypoellipticité avec perte de 3/2 dérivées.

<u>Théorème 1.2</u>

On suppose $\nu=1$; on garde les hypothèses précédentes mais on suppose qu'en un point ρ_0 de Σ, il existe j dans $\mathbb{N}$ tel que :

(1.6) $$p'_{m-1}(\rho_0) + (2j+1)\,\lambda(\rho_0) = 0$$

Soit $\widetilde{p}_{m-1}(\rho)$ le symbole défini sur Σ par :

$$\widetilde{p}_{m-1}(\rho) = p'_{m-1}(\rho) + (2j+1)\,\lambda(\rho)$$

Alors P est strictement hypoelliptique avec perte de 3/2 dérivées dans un voisinage conique du point $\rho_\circ$ dans $T^*\Omega\backslash 0$ si et seulement si :

(1.7) $$\frac{1}{i}\,\{\widetilde{p}_{m-1},\,\overline{\widetilde{p}}_{m-1}\}_\Sigma < 0 \quad \text{au point } \rho_\circ$$

Remarque 1.3

La démonstration du théorème 1.2, permet en fait, en utilisant les résultats de [5], d'obtenir une étude complète de l'hypoellipticité avec perte de r dérivées : $3/2 \leq r < 2$.

Remarque 1.4

Dans le cas où la codimension de Σ est plus grande que 2, on obtient des résultats analogues en imposant des conditions supplémentaires.

Ceci sera détaillé au § 4 [Théorèmes 4.2.1 et 4.3.14].

§ 2 : RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES CLASSES DE BOUTET DE MONVEL

2.1 Les classes $S^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ (cf [3])

On considère un cône C^∞ (au sens de [3], 2.1.1) U et un sous-cône Σ de U. On définit une fonction $r(>0)$ C^∞ homogène de degré 1 sur U et on pose : $U = U' \times \mathbb{R}$. U' est la base de U. On note : $f \lesssim g$ si dans tout cône inclus dans U à base compacte dans U', il existe une constante C telle qu'on a $f \leq Cg$ pour r assez grand. On définit une fonction d_Σ dont le carré est la somme d'une fonction (>0) homogène de degré -1 et d'une fonction positive (>0) hors de Σ, nulle à l'ordre 2 exactement sur Σ, et homogène de degré 0.

Définition 2.1.1

On désigne par $S^{m,k}(U,\Sigma)$ l'espace de toutes les fonctions C^∞ sur U telles que, quels que soient les champs de vecteurs $X_1,..X_p$, $Y_1,..,Y_q$ à coefficients C^∞, homogènes de degré 0, avec les X_j tangents à Σ, on ait :

$$|X_1\ldots X_p.Y_1\ldots Y_q\ a| \lesssim r^m\ d_\Sigma^{k-q}$$

Si $U=T^*\Omega\backslash 0$, on notera $S^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ et on désignera par $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ la classe des opérateurs pseudodifférentiels naturellement associée aux symboles de $S^{m,k}(\Omega,\Sigma)$.

Définition 2.1.2

Soit $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ la classe des symboles pseudodifferentiels sur Ω telle qu'elle a été introduite dans [8] $[0 \leq \delta \leq \rho \leq 1,\ \delta<1]$.

Un symbole de $S^m_{1,0}(\Omega)$ ($S^m(\Omega)$ en abrégé) est dit régulier (resp. semi-régulier) s'il admet un développement asymptotique :

$$p \sim \sum_{j=o}^{\infty} p_{m-j}\ (x,\xi)$$

resp.
$$p \sim \sum_{j=o}^{\infty} p_{m-j/2}\ (x,\xi)$$

où les $p_{m-j/2}(x,\xi)$ sont homogènes de degré m-j/2.

Définition 2.1.3

On dit qu'un opérateur pseudodifférentiel semi-régulier P de degré m s'annule à l'ordre k sur Σ si $p_{m-j/2}(x,\xi)$ s'annule à l'ordre k-j sur Σ pour $j\leq k$.

Il est facile de voir que de tels opérateurs sont dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$.

On utilisera la propriété suivante :

Si k est négatif, un opérateur de $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ opère de $H^{s}_{comp}(\Omega)$ dans $H^{s-m+1/2.k}_{loc}(\Omega)$.

On introduit maintenant les classes d'opérateurs suivantes :

2.1.4 $$OP\mathcal{H}^{m}(\Omega,\Sigma) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} OPS^{m-j,-2j}$$

2.1.5 $$OPS^{m,\infty}(\Omega,\Sigma) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} OPS^{m,j}$$

On utilisera constamment les propriétés suivantes :

Si $A \in OP\,\mathcal{H}^{m}(\Omega,\Sigma)$, $B \in OPS^{m',k'}$, $A^{*} \in OP\,\mathcal{H}^{m}(X,\Sigma)$

$A\circ B$, $B\circ A \in OP\,\mathcal{H}^{m+m'-1/2.k'}(\Omega,\Sigma)$.

En particulier, si A est dans $OP\mathcal{H}^{m}(\Omega,\Sigma)$ et B est dans $OPS^{m',\infty}$, AB et BA sont régularisants (i.e à noyau C^{∞}).

On utilisera également les résultats suivants sur les développements asymptotiques.

Proposition 2.1.6

i) Soit $a_j \in S^{m-j,k}$ $(j=0,..,\infty)$, alors il existe a dans $S^{m,k}$ tel que : $\forall N$, $a - \sum_{j<N} a_j \in S^{m-N,k}$.

a est défini modulo un élément de $S^{-\infty}(\Omega)$.

ii) Soit $a_j \in S^{m,k+j}$ $(j=0,...,\infty)$, alors il existe a dans $S^{m,k}$ tel que : $\forall N$, $a - \sum_{j<N} a_j \in S^{m,k+N}$, a est défini modulo un élément de $S^{m,\infty}(\Omega,\Sigma)$.

iii) Soit $a_j \in S^{m-j/2,\ k-j}$ $(j=0,..,\infty)$, alors il existe a dans $S^{m,k}$ tel que : $\forall N$, $a - \sum_{j<N} a_j \in S^{m-N/2,k-N}$.

a est défini modulo un élément de $\mathcal{H}^{m-k/2}$.

§ 2.2 : LES OPERATEURS D'HERMITE : OPH^m (cf[3])

On suppose maintenant que Σ est symplectique de codimension 2ν. Alors par un choix convenable de coordonnées canoniques, on peut suposer que la surface Σ est donnée dans $T^*\mathbb{R}^n\backslash 0$ par

$$t = 0$$
$$\tau = 0$$

où $T^*\mathbb{R}^n \ni (x,\xi) = (y,t,\eta,\tau)$

$$t = (t_1,..,t_\nu) \qquad \tau = (\tau_1,..,\tau_\nu)$$

On désigne par Y la surface définie dans $\mathbb{R}^n$ par t=0, $T^*Y\backslash 0$ peut alors être identifié à Σ.

On a alors la définition suivante :

Définition 2.2.1

On appelle opérateur d'hermite de degré m, tout opérateur $H = H'+R$ de $C_0^\infty(Y)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ où R est un opérateur à noyau C^∞ et H' a une représentation intégrale :

$$H' f(x) = (2\pi)^{n-\nu} \int e^{iy\cdot\eta}.\ h(y,t,\eta).\ \hat{f}(\eta)\ d\eta$$

avec $h \in \mathcal{H}^{m+\nu/4}(U,\Sigma_1)$

où $U = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-\nu}\backslash\{0\})$, $(x,\eta) = (y,t,\eta)$ et Σ_1 est le cône t = 0.

On écrira alors que H est dans OPH^m.

Exemple 2.2.2 *

Soit $\tilde{h}\ (y,\mu,t)$ une fonction dans $C^{\infty}_{y,\mu}(\mathbb{R}^{n-\nu} \times S^{n-\nu-1}\ ; \mathcal{S}_t(\mathbb{R}^{\nu}))$ alors $h(y,t,\eta) = (\eta)^{m+\nu/4}\ .\ \tilde{h}(y,\frac{\eta}{|\eta|},\ t|\eta|^{1/2})$ définit le symbole d'un opérateur dans OPH^m.

Soit H un opérateur d'hermite défini par une fonction h dans $\mathcal{H}^{m+\nu/4}\ (U,\Sigma_1)$, le symbole $\sigma^o(H)$ est la classe de h modulo $\mathcal{H}^{m+\nu/4-1/2}\ (U,\Sigma_1)$ et le symbole complet de H, $\sigma(H)$, est la classe de h modulo $S^{-\infty}(U)$.

On dira que H est <u>semi-régulier</u> d'ordre m si $h(y,t,\eta)$ admet un développement asymptotique du type suivant :

2.2.3 $$h(y,t,\eta) \sim \sum_{j=o}^{\infty} h_{m-j/2}(y,t,\eta)$$

où $h_p(y,t,\eta)$ est dans $\mathcal{H}^{p+\nu/4}(U,\Sigma_1)$ et a la propriété d'homogénéité suivante :

2.2.4 $$h_p(y,\lambda^{-1/2}t,\lambda\eta) = \lambda^p\ h_p(y,t,\eta),\ \text{pour}\ \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

On définit de manière analogue un opérateur d'hermite <u>régulier</u> d'ordre m.

On dira qu'un opérateur d'hermite est pair (resp. impair) si son symbole complet est pair modulo $S^{-\infty}$ (resp. impair).

Tout opérateur d'Hermite admet une décomposition en partie paire et impaire.

On utilisera les propriétés suivantes des opérateurs d'Hermite :

Soit H un opérateur d'hermite de degré m, Q un opérateur pseudo-différentiel de degré m' sur Y, alors $H' = H \circ Q$ est un opérateur d'hermite de degré m+m', et on a $\sigma^o(H') = \sigma^o(H) \circ \sigma^o(Q)$.

---

* On désigne par S^{p-1} la sphère unité dans $\mathbb{R}^p$.

Cette opération conserve la parité et la régularité, i.e.

Si H est pair (resp. impair), HQ est pair (resp. impair). Si H est semi-régulier (resp. régulier), Q est semi-régulier (resp. régulier), HQ est semi-régulier (resp. régulier).

Enfin on désignera par $H_{y,\eta}$ l'opérateur de $\mathbb{C}$ dans $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ (ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$) défini par :

$$H_{y,\eta} \cdot z = h(y,\eta,t) \cdot z \quad , \ z \in \mathbb{C}.$$

§2.3 : LES OPERATEURS D'HERMITE ADJOINTS : OPH^{m*}

On définit OPH^{m*}, comme la classe des opérateurs H' de $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(Y)$ de la forme :

2.3.1 $$H' = H^* + R$$

où H^* est l'adjoint d'un opérateur d'Hermite H de OPH^m proprement supporté et R est un opérateur à noyau C^∞.

Une fonction d'hermite h dans $\mathcal{H}^{m+\nu/4}$ définit un opérateur d'hermite adjoint par la formule :

2.3.2 $$(H^* \cdot f)(y) = (2\pi)^{n-\nu} \int_t \int_\eta e^{iy\cdot\eta}\, \bar{h}(y,t,\eta) \cdot \hat{f}(t,\eta)\, dt\, d\eta$$

On appelera symbole de H', le symbole de H ; on étend ainsi toutes les notions de symbole principal, régularité, parité.

Soient H et H' deux opérateurs d'hermite de degré m, m' proprement supportés, alors $H^* \circ H'$ est dans $OPS^m_{1,o}(Y)$, $H \circ H'^*$ est dans $OP\mathcal{H}^{m+m'}(\Omega,\Sigma)$, si H et H' sont semi-réguliers (resp. régulier) $H^* \circ H'$ est semi-régulier (resp. régulier). On a :

2.3.3 $$\sigma^o(H^* \circ H') = \int \overline{\sigma^o(H)} \cdot \sigma^o(H')\, dt$$

Si H et H' sont de parités différentes, $H^* \circ H'$ est régularisant.

Enfin, si H' est dans OPH^{m*} de symbole h, on désignera par $H'_{y,\eta}$ l'opérateur de L^2 dans $\mathbb{C}$ défini pour f(t) dans L^2 par :

$$H'_{y,\eta} . f = \int \bar{h}(y,t,\eta)\ f(t)\ dt.$$

§ 2.4 : LA CLASSE $S^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ DANS LE CAS SYMPLECTIQUE

Lorsque Σ est défini dans $T^*\mathbb{R}^n\backslash 0$ par $t=\tau=0$, les symboles de $S^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ vérifient les relations suivantes (traduction en coordonnées locales de la définition 2.1.1) (au voisinage de $t=\tau=0$).

2.4.1 $$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial \eta^\beta} \cdot \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \cdot \frac{\partial^\delta}{\partial \tau^\delta}\ a(y,\eta,t,\tau)\right| \lesssim$$
$$\lesssim (1+|\eta|)^{m-|\beta|-|\delta|}\ \left(|t| + \frac{|\tau|}{|\eta|} + \frac{1}{|\eta|^{1/2}}\right)^{k-|\gamma|-|\delta|}$$

On désigne par $S^k_{glob}(\mathbb{R}^{2\nu})$ l'espace des symboles a sur $\mathbb{R}^{2\nu}$ vérifiant :

2.4.2 $$\left|\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \cdot \frac{\partial^\delta}{\partial \tau^\delta}\ a(t,\tau)\right| \lesssim (1+|t|+|\tau|)^{k-|\gamma|-|\delta|} \quad .$$

Un symbole de $S^k_{glob}(\mathbb{R}^{2\nu})$ définit un opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ qu'on notera $a(t,D_t)$. Un opérateur régularisant (i.e dans $OPS^{-\infty}_{glob}(\mathbb{R}^\nu)$) est un opérateur qui envoie $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$.

On désigne par $S^{m,k}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^{2\nu})$ la classe des fonctions C^∞ définie par les inégalités 2.4.1 mais où t et τ parcourt $\mathbb{R}^{2\nu}$. Pour (y,n) fixés, ce symbole définit un opérateur dans OP $S^k_{glob}(\mathbb{R}^\nu)$, on notera alors la classe <u>$OPS^{m,k}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^\nu)$</u> pour mentionner la dépendance en (y,η).

Soit A un opérateur pseudo-différentiel semi-régulier s'annulant à l'ordre k sur Σ.

Son symbole admet un développement asymptotique :

2.4.3 $$a(y,\eta,t,\tau) \sim \sum_{j=o}^{\infty} a_{m-j/2}(y,\eta,t,\tau)$$

Il est introduit dans [3] l'opérateur $A_{\Sigma}^{m-k/2}$ défini par son symbole :

2.4.4 $$a_{\Sigma}^{m-k/2}(y,\eta,t,\tau) = $$
$$= \sum_{j=o}^{k} \sum_{|\alpha|+|\beta|=k-j} a_{m-j/2(\beta)}^{(\alpha)}(y,\eta,0,0)\, t^{\beta}.\tau^{\alpha}$$

$A_{\Sigma}^{m-k/2}$ possède la propriété suivante :

2.4.5 $$A-A_{\Sigma}^{m-k/2} \in OPS^{m,k+1}(\Omega,\Sigma)$$

$a_{\Sigma}^{m-k/2}(y,\eta,t,\tau)$ est dans $S_{glob}^{m,k}(\Sigma,\mathbb{R}^{2\nu})$ et possède la propriété d'homogénéité suivante :

2.4.6 $$a_{\Sigma}^{m-k/2}(y,\lambda\eta,\lambda^{-1/2}t,\ \lambda^{1/2}\tau) = \lambda^{m-k/2}\, a_{\Sigma}^{m-k/2}(y,\eta,t,\tau)$$

Un élément de $S_{glob}^{m,k}(\Sigma,\mathbb{R}^{2\nu})$ possédant cette propriété est dit <u>homogène</u>.

On notera $A_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2}$ l'opérateur associé dans $OPS_{glob}^{m,k}(\Sigma,\mathbb{R}^{\nu})$ (mais on ommettra (y,η) lorsqu'aucune confusion ne sera possible).

On va écrire A comme une somme asymptotique de termes homogènes dans $OPS^{m,k+j}(\Omega,\Sigma)$, somme qui sera définie modulo $OPS^{m,\infty}(\Omega,\Sigma)$ (cf Prop 2.1.6).

On utilise un développement de Taylor de 2.4.3 en $t=0$, $\tau=0$

$$a(y,\eta,t,\tau) \sim \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\beta!} a_{m-j/2(\beta)}^{(\alpha)}(y,\eta,0,0)\, t^{\beta}.\tau^{\alpha}$$

qu'on réordonne sous la forme :

$$a(y,\eta,t,\tau) \sim \sum_{i=o}^{\infty} a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y,\eta,t,\tau)$$

avec $a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y,\eta,t,\tau) = \sum_{j=o}^{k+i} \sum_{|\alpha|+|\beta|=k+i-j} \frac{1}{\alpha!\beta!} a_{m-j/2(\beta)}^{(\alpha)}(y,\eta,0,0)\, t^{\beta}\tau^{\alpha}$

Il est facile de voir que $a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y,\eta,t,\tau)$ est homogène dans $S_{glob}^{m,k+i}(\Sigma,\mathbb{R}^{2\nu})$.

On notera

$$A \sim \sum_{i=o}^{\infty} A_{\Sigma}^{m-k/2-i/2} \qquad \text{dans } OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$$

$$\text{modulo } OPS^{m,\infty}$$

L'image de A dans $\sum_{i=o}^{\infty} OPS_{glob}^{m,k+i}(\Sigma,\mathbb{R}^{\nu})$ est la somme formelle :

$$\sum_{i=o}^{\infty} a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y,\eta,t,D_t) = \sum_{i=o}^{\infty} A_{\Sigma,(y,\eta)}^{m-k/2-i/2}$$

Réciproquement, considérant une famille $A^i (i=o,..,\infty)$ dans $OPS_{glob}^{m,k+i}(\Sigma,\mathbb{R}^{\nu})$, on peut associer à ΣA^i un opérateur A dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ unique modulo $OPS^{m,\infty}(\Omega,\Sigma)$. On dira que A est d'ordre m-k/2.

__Définition 2.4.7__*

Un opérateur A dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ sera dit semi-homogène s'il admet un développement :

$$A \sim \sum_{i=o}^{\infty} A_i \qquad (\text{mod } OPS^{m,\infty})$$

où les A_i sont les images inverses dans $OPS^{m,k+i}(\Omega,\Sigma)$ d'éléments de $OPS^{m,k+i}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^\nu)$ à symboles homogènes (cf. 2.4.6).

Par exemple un opérateur semi-régulier est semi-homogène.

Définition 2.4.8*

Un opérateur A dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ sera dit homogène s'il admet un développement :

$$A \sim \sum_{i=o}^{\infty} A_i \qquad (\mathrm{mod.}\ OPS^{m,\infty})$$

où les A_i sont les images inverses dans $OPS^{m,k+2i}(\Omega,\Sigma)$ d'éléments de $OPS^{m,k+2i}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^\nu)$ à symboles homogènes (cf. 2.4.6)

Un opérateur régulier n'est pas homogène mais seulement semi-homogène.

Nous pouvons encore définir une notion de parité : On dira que A dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ conserve la parité (resp. inverse la parité) si tous les $A^{m-k/2-i/2}_{\Sigma(y,\eta)}$ respectent la parité (resp. l'inversent) en tant qu'opérateurs sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$.

On a la propriété suivante :

---

* Un élément de $OPS^{m,k+2i}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^\nu)$ à symbole homogène (2.4.6) est homogène au sens de la définition 2.4.8 de sorte que la coexistence de ces définitions n'est pas gênante.

Si A est régulier, les $A^{m-k/2-i/2}_{\Sigma}$ respectent la parité si $\frac{k+i}{2}$ est pair, l'inversent si $\frac{k+i}{2}$ est impair.

On peut alors écrire :

$$A \sim A \text{ pair} + A \text{ impair} \qquad (\text{mod. } OPS^{m,\infty}(\Omega,\Sigma))$$

où

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ pair} \sim \sum_{i=o}^{\infty} A^{m-k/2-i}_{\Sigma} \\ \\ A \text{ impair} \sim \sum_{i=o}^{\infty} A^{m-k/2-1/2-i}_{\Sigma} \end{array}\right] \quad \text{si } k \text{ est pair}$$

A pair et A impair sont homogènes

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ pair} \sim \sum_{i=o}^{\infty} A^{m-k/2-1/2-i}_{\Sigma} \\ \\ A \text{ impair} \sim \sum_{i=o}^{\infty} A^{m-k/2-i}_{\Sigma} \end{array}\right] \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

Soient A (resp. B) un opérateur dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ (resp. $OPS^{m',k'}(\Omega,\Sigma)$), alors $A \circ B$ est dans $OPS^{m+m',k+k'}$.

Si A et B sont semi-homogènes, $A \circ B$ est semi-homogène. Soient $A_{\Sigma(y,\eta)}$ (resp. $B_{\Sigma(y,\eta)}$) l'image de A (resp. B) dans $\Sigma\ OPS^{m,k}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^{\nu})$ (resp. $\Sigma\ OPS^{m',k'}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^{\nu})$).

On désigne la loi de composition des opérateurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ par #.

On a alors la formule suivante :

2.4.9 $$\sigma(A \circ B) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}\, \sigma\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial\eta^{\alpha}} A_{\Sigma\, y,\eta} \# \frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} B_{\Sigma\, y,\eta}\right)$$

<u>modulo</u> $S^{m,\infty}$.

$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial\eta^\alpha} A_{\Sigma\, y,\eta}\right)$ est l'opérateur dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ dont le symbole est $\frac{\partial^\alpha}{\partial\eta^\alpha} a(y,\eta,t,\tau)$

qu'on peut noter encore $\frac{\partial^\alpha}{\partial\eta^\alpha} a(y,\eta,t,D_t)$.

§ 2.5 : COMPOSITION DE $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ ET DES OPERATEURS D'HERMITE

On considère des éléments de $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ qui sont semi-homogènes.

On a vu que :

$$A - \sum_{i=o}^{N-1} A_{\Sigma}^{m-k/2-i/2} \in OPS^{m,k+N}.$$

Si A est dans $OPH^{m'}$, AH est dans $OPH^{m+m'-k/2}$ et

$$\sigma^o(AH) = A_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} \circ \sigma^o(H)$$

$$\sigma^o(H^* A) \underset{\text{déf}}{=} \sigma^o(A^* H) = (A_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2})^* \circ \sigma^o(H)$$

Le symbole complet h' de H'=AH s'obtient par le développement asymptotique suivant :

2.5.1 $$h' \sim \sum_{i=o}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial\eta^\alpha} A_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2-i/2} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} h(y,\eta,t)\right)$$

où h désigne le symbole complet de H.

Si A est semi-homogène, H est semi-régulier, AH est semi-régulier et h' admet le développement suivant :

$$h' \sim \sum_{j=o}^{\infty} h'_{m+m'-k/2-j/2}(y,t,\eta)$$

où

$$h'_{m+m'-k/2-j/2} = \sum_{\substack{\alpha,i,p \\ \frac{i+p}{2}+|\alpha|=j/2}} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial\eta^\alpha} A^{m-k/2-i/2}_{\Sigma(y,\eta)} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} h_{m'-p/2}(y,t,\eta) \right)$$

Remarquons que si A-B est dans $OPS^{m,\infty}$, (A-B)H est régularisant, ce qui justifie le formalisme ci-dessus.

On a des formules analogues pour H^*A (passer à l'adjoint).

Faisons enfin quelques remarques évidentes sur la parité :

Si H est pair et A conserve la parité, AH est pair.
Si H est impair et A conserve la parité, AH est impair.

§ 2.6 : UN PREMIER CRITERE D'HYPOELLIPTICITE ([10] [3])

Proposition 2.6.1

Soit A un opérateur pseudo-différentiel semi-régulier d'ordre m s'annulant à l'ordre k sur Σ symplectique. On suppose que le symbole principal de A s'annule à l'ordre k exactement sur Σ, alors A est hypoelliptique avec perte de k/2 dérivées si et seulement si pour tout (y,η) dans Σ, $A^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)}$ a son noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ réduit à zéro.

Ce théorème est bien connu [10], mais nous esquissons une démonstration dans le cadre introduit ci-dessus.

On sait [3] [4] que si A s'annule exactement à l'ordre k sur Σ, il existe Q_1 dans $OPS^{-m,-k}$ tel que :

$$Q_1 . A \equiv I+R_1 \text{ où } R_1 \in OPS^{-1/2,-1}(\Omega,\Sigma)$$

utilisant la série $\Sigma(-1)^j\, R_1^j$ (cf Prop 2.1.6), on en déduit l'existence de Q_2 tel que :

$$Q_2 . A \equiv I+R_2 \qquad \text{où } R_2 \in OP\mathcal{K}^{o}(\Omega,\Sigma)$$

Par ailleurs, on peut montrer que si $A^{m-k/2}_{\Sigma\,(y,\eta)}$ est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$, il admet un inverse à gauche $B_{\Sigma(y,\eta)}$ dans la classe $OPS^{-m,-k}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^{\nu})$ (ceci sera détaillé dans un cadre plus général au §3, mais résulte essentiellement du travail de [10])

$B_{\Sigma(y,\eta)}$ définit alors un opérateur B dans $OPS^{-m,-k}(\Omega,\Sigma)$ tel que :

$$B \circ A^{m-k/2}_{\Sigma} = I+R_3 \qquad \text{où } R_3 \in OPS^{-1,0}(\Omega,\Sigma)$$

On utilise ici (2.4.9).

Par ailleurs $B.(A-A^{m-k/2}_{\Sigma}) = R_4$ où R_4 est dans $OPS^{o,1}$ car $A-A^{m-k/2}_{\Sigma}$ est dans $OPS^{m,k+1}$.

On en déduit donc que :

$$B.A = I+R_5 \qquad \text{avec } R_5 \text{ dans } OPS^{o,1}$$

Utilisant la série $\Sigma(-1)^j\, R_1^j$ (cf Prop 2.1.6), on en déduit l'existence de Q_3 dans $OPS^{-m,-k}$ tel que :

$$Q_3 . A = I+R_6 \qquad \text{avec } R_6 \text{ dans } OPS^{o,\infty}$$

Alors $(-R_6.Q_2+Q_3)$ est une parametrixe pour A, ce qui démontre la proposition.

§ 3 : RAPPELS ET COMPLEMENT SUR LA METHODE DE J.SJÖSTRAND

Nous reprenons la méthode de J.Sjöstrand, mais en utilisant notre formalisme. Dans tout le §, A est un opérateur pseudodifférentiel semi-régulier d'ordre m s'annulant à l'ordre k sur Σ symplectique.

§ 3.1 : ETUDE D'UN SYSTEME - SECOND CRITERE D'HYPOELLIPTICITE

On veut maintenant traiter le cas où $A^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)}$ n'est pas injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ en un point (y_0, η_0).

Suivant [10], on introduit le système suivant :

Soient R^{-j} $(j=1,..,p)$ des opérateurs d'hermites dans $OPH^{m-k/2}$ de symbole h^j homogènes , R^{+j} $(j=1,..,q)$ des opérateurs d'hermite adjoints dans $OPH^{*m-k/2}$ de symbole $\tilde{h}^j$ homogène et on considère le système

$$\mathcal{R}^{m-k/2}_{(y,\eta)} = \begin{pmatrix} A^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)} & R^-_{y,\eta} \\ R^+_{y,\eta} & 0 \end{pmatrix}$$

qui opère de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu) \times \mathbb{C}^p$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu) \times \mathbb{C}^q$.

Ici pour z dans $\mathbb{C}^p$: $R^-_{y,\eta}.z = \sum_{j=1}^{p} R^{-j}_{y,\eta}.z_j = \sum_{j=1}^{p} h^j(y,\eta,t)z_j$

pour u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $\left(R^+_{y,\eta}u\right)_j = R^{+j}_{y,\eta}.u = \int \bar{\tilde{h}}^j(y,t,\eta)\, u(t)\, dt$

pour $j=1,..,q$.

Il lui correspond un système d'opérateurs pseudodifférentiels opérant de $C^\infty_0(R^n) \times (C^\infty_0(Y))^p$ dans $C^\infty(R^n) \times C^\infty(Y)^q$, défini par la matrice :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} A & R^- \\ R^+ & 0 \end{pmatrix} \quad : (u,u_1,..,u_p) \to (f,v_1,..,v_q)$$

où $R^-(u_1,\dots,u_p) = \sum_{j=1}^{p} R^{-j} \cdot u_j$

$$(R^+u)_j = v_j = R^{+j}u \qquad j=1,\dots,q$$

On a alors la proposition suivante :

<u>Proposition 3.1.1</u>

On suppose que $\mathcal{A}^{m-k/2}_{y,\eta}$ est bijectif de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^p$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^q$

alors $\mathcal{A}$ admet une parametrixe bilatère au sens suivant :

il existe $E \in OPS^{-m,-k}$, $E^+ \in (OPH^{-m+k/2})^q$, $E^- \in (OPH^{*-m+k/2})^p$,

$E^{\pm} = (E^{\pm})_{ij}$ avec $E^{\pm}_{ij} \in OPS^{-m+k/2}_{1,0}(Y)$ tels que, si on pose :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E^+ \\ E^- & E^{\pm} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}\,\mathcal{E} \equiv I+\mathfrak{R}$$

où $\mathfrak{R}$ est régularisant au sens suivant :

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{R}_{12},\mathfrak{R}_{21},\mathfrak{R}_{22} \text{ sont à noyau } C^\infty \text{ et } \mathfrak{R}_{11} \in OPS^{o,\infty}.$$

Bien entendu, on peut "microlocaliser" cette proposition si $\mathcal{A}^{m-k/2}_{y,\eta}$ est bijectif pour (y,η) dans un voisinage de (y_o, η_o).

Une telle parametrixe permet de démontrer des résultats d'hypoellipticité comme le montre la proposition suivante, qui est l'analogue de la proposition 2.6.1.

Proposition 3.1.2 [10]

Sous les hypothèses précédentes :

i) le système $\mathcal{A}$ admet une parametrixe bilatère $\mathcal{E}$ au sens habituel (i.e $\mathfrak{R}_{11}$ est à noyau C^{∞}).

ii) A est hypoelliptique avec perte de k/2 + t dérivées si et seulement si $E^{\pm}$ est hypoelliptique avec perte de t dérivées.

Remarque 3.1.3

Si $E^{\pm}$ admet une parametrixe à gauche dans $OPS^{m-k/2+t}_{1/2,1/2}(Y)$, *
A admet une parametrixe à gauche dans $OPS^{-m+k/2+t}_{1/2,1/2}(\Omega)$.

Remarque 3.1.4

Comme il est remarqué dans [10], on a des résultats analogues pour la résolubilité locale, la propagation des singularités.

Démonstration de la proposition 3.1.2

Par la proposition 3.1.1, on sait qu'il existe $\mathcal{E}$ tel que :

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{A} \equiv I + \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(modulo des opérateurs à noyau C^{∞}) où $\mathfrak{R}_{11}$ est dans $OPS^{0,\infty}$.

Par ailleurs, il existe (cf Démonstration de la proposition 2.6.1) Q dans $OPS^{-m,-k}$ tel que :

$$Q.A \equiv I + \mathfrak{R}_1 \qquad \text{avec } \mathfrak{R}_1 \text{ dans } OP\mathcal{K}^0$$

---

* chaque terme de la matrice $E^{\pm}$ est dans $OPS^{m-k/2+t}_{1/2,1/2}(Y)$

On en déduit

$$\mathfrak{R}_{11}.Q.A \equiv \mathfrak{R}_{11}$$

car $\mathfrak{R}_{11}\ \mathfrak{R}_1 \equiv 0$

On vérifie alors aisément que :

$$\begin{pmatrix} (E-\mathfrak{R}_{11}Q) & E^+ \\ E^- & E^{\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & R^- \\ R^+ & 0 \end{pmatrix} \equiv I$$

car $\mathfrak{R}_{11}Q.R^- \equiv 0$.

On a ainsi démontré l'existence d'un parametrixe à gauche ; On démontre de même l'existence d'une parametrixe à droite. Ceci termine la démonstration du point i).

On pose $E = E-\mathfrak{R}_{11}Q$; La démonstration du point ii) est faite dans [10], rappelons la brièvement :

La suffisance résulte des deux identités suivantes :

3.1.5 $$E.A + E^+R^+ \equiv I$$

3.1.6 $$E^-.A + E^{\pm}R^+ \equiv 0$$

$$Au \in H^s_{loc}(\Omega) \Rightarrow \begin{array}{l} EAu \in H^{s+m-k/2}_{loc}(\Omega) \\ E^-Au \in \left(H^{s+m-k/2}_{loc}(Y)\right)^p \end{array}$$

On en déduit que $\quad E^{\pm}\ R^+u \in \left(H^{s+m-k/2}_{loc}(Y)\right)^p$

d'où par l'hypoellipticité de $E^{\pm}$

$$R^+u \in \left(H^{s-t}_{loc}\ (Y)\right)^q$$

Retournant à 3.1.5 on en déduit que $u \in H^{s+m-k/2-t}_{loc}(\Omega)$ (t est positif).

La nécessité résulte des deux identités suivantes :

$$A.E^{+} + R^{-} E^{\pm} \equiv 0$$

$$R^{+} E^{+} \equiv I$$

Démonstration de la proposition 3.1.1

La démonstration de 3.1.1 est faite dans [10] en utilisant le formalisme des opérateurs pseudodifférentiels à valeurs vectorielles, nous la transcrivons dans notre formalisme.

On a le lemme suivant :

Lemme 3.1.7

Sous les hypothèses de la proposition 3.1.1, il existe $E_{o(y,\eta)}$ dans $OPS^{-m,-k}_{glob}(\Sigma,\mathbb{R}^{\nu})$, E^{+}_{o} dans $(OP\mathcal{H}^{-m+k/2})^{q}$, E^{-}_{o} dans $(OP\mathcal{H}^{*-m+k/2})^{p}$, $E^{\pm}_{o(y,\eta)}$ dans $(S^{-m+k/2}_{1,o}(Y))^{pq}$ homogènes* tels que si l'on pose :

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} = \begin{pmatrix} E_{o(y,\eta)} & E^{+}_{o(y,\eta)} \\ E^{-}_{o(y,\eta)} & E^{\pm}_{o(y,\eta)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \# \mathcal{A}^{m\ -k/2}_{(y,\eta)} = \mathcal{A}^{m-k/2}_{(y,\eta)} \# \mathcal{E}_{o(y,\eta)} = I$$

Admettons un instant ce lemme et démontrons la proposition 3.1.1.

Soit $\mathcal{E}_{o}$ l'élément dans $\begin{pmatrix} OPS^{-m,-k} & (OPH^{-m+k/2})^{q} \\ (OPH^{*-m+k/2})^{p} & (OPS^{-m+k/2})^{pq} \end{pmatrix}$

---

* au sens de (2.4.6) pour $E_{o(y,\eta)}$, de (2.2.4) pour E^{+}_{o} et E^{-}_{o}, au sens habituel pour $E^{\pm}_{o}$.

associé à $\mathcal{E}_{o(y,\eta)}$, alors :

$$\mathcal{E}_o \circ \mathcal{A} = \mathcal{E}_o . \mathcal{A}_\Sigma^{m-k/2} + \mathcal{E}_o . (\mathcal{A} - \mathcal{A}_\Sigma^{m-k/2})$$

Examinons chacun des termes :

1) Utilisant (2.4.7) et (2.5.1), on obtient :

$$\mathcal{E}_o . \mathcal{A}_\Sigma^{m-k/2} \equiv I + \mathfrak{R}'$$

où

$$\mathfrak{R}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}'_{11} & \mathfrak{R}'_{12} \\ \mathfrak{R}'_{21} & \mathfrak{R}'_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathfrak{R}'_{11} \in OPS^{-1,o}(\Omega,\Sigma)$$

$$\mathfrak{R}'_{12} \in (OPH^{-1})^p$$

$$\mathfrak{R}'_{21} \in (OPH^{*-1})^p$$

$$\mathfrak{R}'_{22} \in (OPS^{-1}(Y))^p$$

2)

$$\mathcal{E}_o\ (\mathcal{A} - \mathcal{A}_\Sigma^{m-k/2}) = \mathfrak{R}''$$

où

$$\mathfrak{R}'' = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}''_{11} & 0 \\ \mathfrak{R}''_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathfrak{R}''_{11} \in OPS^{o,1}(\Omega,\Sigma)$$

$$\mathfrak{R}''_{21} \in (OPH^{*-1/2})^p$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}_o \circ \mathcal{A} = I + \mathfrak{R}''$$

avec
$$\mathfrak{R}''' = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}'''_{11} & \mathfrak{R}'''_{12} \\ \mathfrak{R}'''_{21} & \mathfrak{R}'''_{22} \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{R}'''_{11} \in OPS^{o,1}$, $\mathfrak{R}'''_{12} \in (OPH^{-1/2})^p$, $\mathfrak{R}'''_{21} \in (OPH^{*-1/2})^p$, $\mathfrak{R}''_{22} \in (OPS^{-1/2})^{p^2}$

Il existe $\mathfrak{R}^{(\text{iv})}$ dans la même classe que $\mathfrak{R}'''$ tel que :

$$(I+\mathfrak{R}^{(\text{iv})}) - \sum_{j<N} (-1)^j \, \mathfrak{R}'''^{\,j} \in \begin{pmatrix} OPS^{o,N} & (OPH^{-N/2})^p \\ (OPH^{*-N/2} & (OPS^{-N/2})^{p^2} \end{pmatrix}$$

pour tout N ce qui démontre la proposition 3.3.1 on prend

$$\mathcal{E} = (I+\mathfrak{R}^{(\text{iv})}) \, \mathcal{E}_o$$

<u>Démonstration du lemme 3.1.7</u>

Par hypothèse $\mathcal{A}^{m-k/2}_{(y,\eta)}$ admet un inverse $\mathcal{E}^{o}_{(y,\eta)}$. Vu les propriétés d'homogénéité en η du problème, il suffit en fait d'étudier le cas où $|\eta|=1$, et on doit alors montrer que :

$$E_{o(y,\eta)} \in C^{\infty}\,(\Sigma, OPS^{-k}_{glob}(\mathbb{R}^{\nu}))$$

$$E^{+}_{o(y,\eta)} \in (C^{\infty}\,(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})))^{q}$$

$$(E^{-}_{o(y,\eta)})^{*} \in C^{\infty}\,(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))^{p}$$

$$E^{\pm}_{o(y,\eta)} \in (C^{\infty}\,(\Sigma))^{pq}$$

Pour ℓ dans $\mathbb{N}$, soit $B^{\ell}(\mathbb{R}^{\nu})$, l'espace des $\{u \in L^2(\mathbb{R}^{\nu})\ ;\ t^{\alpha} D^{\beta}_{t}\, u \in L^2(\mathbb{R}^{\nu})$ pour $|\alpha|+|\beta| \leq \ell\}$.

Pour (y,η) fixé : $\begin{pmatrix} E_{o(y,\eta)} & E^{+}_{o(y,\eta)} \\ E^{-}_{o(y,\eta)} & E^{\pm}_{o(y,\eta)} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{\nu}) \times \mathbb{C}^{q}\ ;\ B^{k}(\mathbb{R}^{\nu}) \times \mathbb{C}^{p})$

et il est facile de montrer que (3.1.8) .

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \in C^{\infty}\left(\Sigma \; ; \; \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{\nu})\times\mathbb{C}^q \; ; \; B^k(\mathbb{R}^{\nu})\times\mathbb{C}^p)\right)$$

On va montrer que pout tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$(3.1.9) \qquad \mathcal{E}_{o(y,\eta)} \in C^{\infty}(\Sigma \; ; \; \mathcal{L}(B^{\ell}(\mathbb{R}^{\nu})\times\mathbb{C}^q \; ; \; B^{\ell+k}(\mathbb{R}^{\nu})\times\mathbb{C}^p))$$

ce qui montrera que :

$$E_{o(y,\eta)} : C^{\infty}(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})) \to C^{\infty}(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))$$

$$E_o^+ : (C^{\infty}(\Sigma))^q \to C^{\infty}(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))$$

$$E_o^- : C^{\infty}(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})) \to (C^{\infty}(\Sigma))^p$$

$$E_o^{\pm} : (C^{\infty}(\Sigma))^q \to (C^{\infty}(\Sigma))^p$$

Pour montrer que (3.1.9) se déduit de (3.1.8), on utilise l'identité :

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \cdot \mathcal{A}_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} = \mathcal{A}_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} \cdot \mathcal{E}_{o(y,\eta)} = I$$

et celles qu'on déduit en commutant avec t, et D_t ; par exemple

$$\left[t, \mathcal{E}_o\right] \cdot \mathcal{A}_{\Sigma}^{m-k/2} + \mathcal{E}_o \left[t, \mathcal{A}_{\Sigma}^{m-k/2}\right] = 0$$

$$\left[D_t, \mathcal{E}_o\right] \mathcal{A}_{\Sigma}^{m-k/2} + \mathcal{E}_o \left[D_t, \mathcal{A}_{\Sigma}^{m-k/2}\right] = 0$$

Par conséquent

(3.1.10)
$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \text{ est continu de } C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))\times C^{\infty}(\Sigma)^{q} \text{ dans } C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))\times C^{\infty}(\Sigma)^{p}.$$

Par ailleurs il existe $\mathfrak{B}_{y,\eta}$ (cf [3]) dans $C^{\infty}(\Sigma, OPS^{-k}_{glob}(\mathbb{R}^{\nu}))$ tel que :

$$A^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)} \cdot \mathfrak{B}_{y,\eta} = I+\mathfrak{R}_{y,\eta}$$

où $\mathfrak{R}_{y,\eta} : C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\nu})) \to C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))$

On en déduit l'éxistence de $\mathfrak{F}_{y,\eta} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{y,\eta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tel que :

$$\mathcal{A}^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)} \cdot \mathfrak{F}_{y,\eta} = I+\widetilde{\mathfrak{R}}_{y,\eta}$$

où (3.1.11) $\widetilde{\mathfrak{R}}_{y,\eta} : C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\nu}))\times C^{\infty}(\Sigma)^{q} \to C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu}))\times C^{\infty}(\Sigma)^{p}$

on dira que $\widetilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)}$ est régularisant.

On en déduit :

$$\mathcal{A}^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)} \cdot (\mathfrak{F}_{y,\eta} - \mathcal{E}_{o(y,\eta)}) = \widetilde{\mathfrak{R}}_{y,\eta}$$

$$\mathfrak{F}_{y,\eta} - \mathcal{E}_{o(y,\eta)} = \mathcal{E}_{o(y,\eta)}\widetilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)}$$

On déduit de (3.1.10) et (3.1.11) que $\mathcal{E}_{o(y,\eta)}\, \widetilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)}$ est régularisant c'est à dire

(3.1.12)

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)}\, \widetilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)} : C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\nu}) \times C^{\infty}(\Sigma)^{q} \to C^{\infty}(\Sigma,\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})) \times C^{\infty}(\Sigma)^{p}$$

Les propriétés de $\mathcal{E}_{o(y,\eta)}$ se déduisent alors des propriétés connues de $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{E}_o \tilde{\mathfrak{R}}$.

Ceci termine la démonstration du lemme 3.1.7 et de la proposition 3.1.1.

§ 3.2 : PARITE ET REGULARITE

Au § 3.1, on a montré comment l'existence de fonctions d'hermite h_j, $\tilde{h}_j$, permettant de construire un système inversible, ramenait l'étude de l'hypoellipticité à celle d'un opérateur dont le symbole est une fonction sur Σ.

On suppose dans ce § que l'opérateur A est régulier de sorte que, comme il a été remarqué au § 2.4, $A^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)}$ conserve ou inverse la parité des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ selon la parité de k.

On va montrer ici comment le choix (s'il est possible) de fonctions d'hermites h_j, $\tilde{h}_j$ d'une parité déterminée, se répercute sur la régularité de l'opérateur $E^{\pm}$.

Auparavant, remarquons qu'il découle de la démonstration de la proposition 3.1.1 la remarque suivante :

Remarque 3.2.1

Le symbole principal de $(E^{\pm})_{ij}$ est $(E_o^{\pm})_{ij}$ modulo $(S^{-m+k/2-1/2}(Y))$, $i=1,..,q$, $j=1,..,p$.

On va démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.2.2

On suppose que A dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ est régulier et que les fonctions d'Hermite homogènes h_j , $\tilde{h}_j$ données ont la propriété suivante :

Si ℓ désigne le nombre 1 ou 2 ,

$$h_j(y,\eta,t) = (-1)^{\ell}\, h_j(y,\eta,-t) \quad j=1,..,p$$

$$\tilde{h}_j(y,\eta,t) = (-1)^{\ell+k}\, \tilde{h}_j(y,\eta,-t), \quad j=1,..,q$$

Alors $E^{\pm}$ est régulier, en particulier son symbole principal est égal à $(E_o^{\pm}(y,\eta))_{ij}$ modulo $(S^{-m+k/2}(Y))$, $i=1,..,p$; $j=1,..,q$.

Démonstration de la proposition 3.2.2

On démontre la proposition dans le cas où k et ℓ sont pairs, et, ce qui ne diminue en rien la généralité, m=k/2. Les autres cas se traiteraient de la même manière.

On sait donc que les symboles de R^+ et R^- sont pairs, homogènes et que A^o_Σ conserve la parité. On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.2.3

Sous les hypothèses précédentes, les symboles de E_o^+ et E_o^- sont pairs et $E^o_{(y,\eta)}$ conserve la parité.

On décompose $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^p)$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^q$) de la manière suivante :

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^p) \ni (u,z) = \left(\frac{u(t)+u(-t)}{2}, z\right) \oplus \left(\frac{u(t)-u(-t)}{2}, 0\right)$$

c'est à dire

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^p = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)^{\text{paires}} \times \mathbb{C}^p) \oplus (\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)^{\text{impaires}} \times 0)$$

$$\left(\text{resp } \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^q = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)^{\text{paires}} \times \mathbb{C}^q) \oplus (\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)^{\text{impaires}} \times 0)\right)$$

Le système $\mathcal{A}^o_{(y,\eta)}$ respecte la décomposition ; on en déduit que $\mathcal{E}_o$ la respecte aussi, ce qui démontre le lemme.

Il nous faut maintenant suivre pas à pas la construction de $\mathcal{E}$ à partir de $\mathcal{E}_o$, telle qu'elle est esquissée au § 3.1.

On a :

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \# \mathcal{R}_{\delta(y,\eta)} = I$$

$$A_\Sigma \sim A_\Sigma^o + \widetilde{A}_\Sigma^{-1/2,imp} + \widetilde{A}_\Sigma^{-1,pair}$$

où

$$\widetilde{A}_\Sigma^{-1/2,imp} = \sum_{i=o}^{\infty} A_\Sigma^{-1/2-i}$$

$$\widetilde{A}_\Sigma^{-1,pair} = \sum_{i=o}^{\infty} A_\Sigma^{-1-i}$$

<u>Convention</u>

A partir de maintenant, on utilise des décompositions où les éléments de $OPS^{m,k}$ sont homogènes au sens de la définition 2.4.8, les hermites et leurs adjoints sont réguliers, de même que les opérateurs pseudodifférentiels sur Y.

On a réalisé ci-dessus une telle décomposition, la notation $\widetilde{A}_\Sigma^{-1/2,imp}$ signifie que $\widetilde{A}_\Sigma$ est un opérateur homogène d'ordre -1/2 (i.e m-k/2 pour un élément dans $OPS^{m,k}$) et qui inverse la parité. Avec ces notations, A_Σ^o sera noté $A_\Sigma^{o,pair}$.
De même $R^{o,pair}$ désigne un opérateur d'Hermite régulier d'ordre 0 et pair, $E_o^{\pm o}$ signifie qu'on a un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0.

<u>Remarque</u>

Les opérateurs homogènes ont la propriété de conserver par composition la régularité des opérateurs d'Hermite.

On considère :

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \# \mathcal{H}_{\Sigma(y,\eta)} = I + \mathcal{E}_{o(y,\eta)} \# \left(\mathcal{H}_{\Sigma} - \mathcal{H}^{o}_{\Sigma}\right)_{(y,\eta)} = I + \mathfrak{R}_{(y,\eta)}$$

$\mathfrak{R}_{(y,\eta)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} \end{pmatrix}$ possède (en particulier) la propriété suivante :

$$\mathfrak{R}_{11} \sim \mathfrak{R}_{11}^{o,pair} + \mathfrak{R}_{11}^{-1/2,impair}$$

$$\mathfrak{R}_{12} \sim \mathfrak{R}_{1,2}^{o,pair} + \mathfrak{R}_{12}^{-1/2,impair}$$

$$\mathfrak{R}_{21} \sim \mathfrak{R}_{21}^{o,pair} + \mathfrak{R}_{21}^{-1/2,impair}$$

$$\mathfrak{R}_{22} \sim \mathfrak{R}_{22}^{o}$$

On dira que les matrices $\mathfrak{R}$ possédant cette propriété vérifient la propriété (C).

$\mathcal{H}_{\Sigma(y,\eta)}$, $\mathcal{E}_{o(y,\eta)}$ vérifient la propriété (C)

Remarquons le lien entre l'ordre de l'opérateur (modulo 1) et la parité. La démonstration de la proposition 3.2.2 se déduit alors du lemme suivant :

<u>Lemme 3.2.4</u>

La classe des matrices $\mathfrak{R}$ vérifiant la propriété (C) est stable, par composition (#), par dérivation par rapport à y ou η de son symbole.

Le deuxième point est évident, montrons le premier point : Soit $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ vérifiant la condition ($\mathcal{C}$), on va montrer que $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R} \# \mathfrak{R}'$ vérifie la condition $(\mathcal{C})$.

(a) $$\mathfrak{R}''_{11} = \mathfrak{R}_{11} \# \mathfrak{R}'_{11} + \mathfrak{R}_{12} \# \mathfrak{R}'_{21}$$

(b) $$\mathfrak{R}''_{12} = \mathfrak{R}_{11} \# \mathfrak{R}'_{12} + \mathfrak{R}_{12} \# \mathfrak{R}'_{22}$$

(c) $$\mathfrak{R}''_{21} = \mathfrak{R}_{21} \# \mathfrak{R}'_{11} + \mathfrak{R}_{22} \# \mathfrak{R}'_{21}$$

(d) $$\mathfrak{R}''_{22} = \mathfrak{R}_{21} \# \mathfrak{R}'_{12} + \mathfrak{R}_{22} \# \mathfrak{R}'_{22}$$

d'où par exemple pour (a)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}''_{11} = {} & (\mathfrak{R}_{11}^{o,\text{pair}} \# \mathfrak{R}'^{\,o,\text{pair}}_{11} + \mathfrak{R}_{11}^{-1/2,\text{impair}} \# \mathfrak{R}'^{\,-1/2,\text{impair}}_{11} \\
& + \mathfrak{R}_{12}^{o,\text{pair}} \# \mathfrak{R}'^{\,o,\text{pair}}_{21} + \mathfrak{R}_{12}^{-1/2,\text{impair}} \# \mathfrak{R}'^{\,-1/2,\text{impair}}_{21}) \\
& + (\mathfrak{R}_{11}^{o,\text{pair}} \# \mathfrak{R}'^{\,-1/2,\text{impair}}_{11} + \mathfrak{R}_{11}^{-1/2,\text{impair}} \# \mathfrak{R}'^{\,o,\text{pair}}_{11} \\
& + \mathfrak{R}_{12}^{o,\text{pair}} \# \mathfrak{R}'^{\,-1/2,\text{impair}}_{21} + \mathfrak{R}'^{\,-1/2,\text{impair}}_{12} \# \mathfrak{R}'^{\,o,\text{pair}}_{12}) \\
= {} & \mathfrak{R}''^{\,o,\text{pair}} + \mathfrak{R}''^{\,-1/2,\text{impair}}.
\end{aligned}$$

On utilise alors les propriétés suivantes :

1) Le composé de deux opérateurs homogènes est homogène (cf Déf. 2.4.8)
2) Les ordres des opérateurs s'ajoutent par composition.
3) Le composé d'un opérateur "pair" et d'un opérateur "impair" est impair.
4) Si H et H' sont des opérateurs d'hermites réguliers, alors si H et H' ont même parité, $H \circ H'^*$ est un opérateur homogène et $(H \circ H'^*)_{y,\eta}$ conserve la parité.

Si H et H' ont des parités opposées, $H \circ H'^*$ est un opérateur homogène et $(H \circ H'^*)_{y,\eta}$ inverse la parité.

5) Si H et H' sont des opérateurs d'hermites réguliers, $H'^{*} \circ H$ est un opérateur pseudodifférentiel régulier sur Y.
Si H et H' ont des parités différentes $H'^{*} \circ H$ est régularisant.

Le lemme étant admis, la proposition 3.2.2 est très simple ; il suffit de constater que toutes les opérations faites dans la démonstration de la proposition 3.1.1 pour passer de $\mathcal{E}^{o}_{(y,\eta)}$ à $\mathcal{E}$ se font dans les classes vérifiant la propriété (C) ; par conséquent, $\mathcal{E}$ vérifie la propriété (C), en particulier $E^{\pm}$ est régulier.

§ 3.3 : ETUDE D'UN CAS PLUS GENERAL

On peut par les mêmes méthodes qu'au § 3.2 démontrer la proposition suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 3.3.1

On suppose que A dans $OPS^{m,k}(\Omega,\Sigma)$ est régulier et que les fonctions d'hermite homogènes h_j, $\tilde{h}_j$ données ont la propriété suivante :
Soit p' un entier compris entre 0 et p, q' un entier compris entre 0 et q, on a :

$$h_j(y,\eta,t) = h_j(y,\eta,-t) \text{ pour } 1\leq j\leq p'$$

$$h_j(y,\eta,t) = -h_j(y,\eta,-t) \text{ pour } p'<j\leq p$$

$$\tilde{h}_j(y,\eta,t) = (-1)^k\, \tilde{h}_j(y,\eta,-t) \text{ pour } 1\leq j\leq q'$$

$$\tilde{h}_j(y,\eta,t) = (-1)^{k+1}\, \tilde{h}_j(y,\eta,-t) \text{ pour } q'<j\leq q$$

Alors $E^{\pm}(y,\eta)$ a la forme suivante :

$$E^{\pm}(y,\eta) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} E^{\pm}_{11} & E^{\pm}_{12} \\ E^{\pm}_{21} & E^{\pm}_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}\, p' \\ \}\, p-p' \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{q'} & \underbrace{\quad}_{q-q'} \end{matrix} & \end{array}$$

où * $\quad E_{ij}^{\pm} \in (S^{-m+k/2}(Y))$ si $i=j$

$E_{ij}^{\pm} \in (S^{-m+k/2-1/2}(Y))$ si $i \neq j$

et les $E_{ij}^{\pm}$ sont séparément réguliers.

§ 4 : CONSTRUCTION EXPLICITE DES SYSTEMES - DEMONSTRATION DES THEOREMES

§ 4.1 : LE CAS GENERAL : CONSTRUCTION DE J. SJÖSTRAND (cf [10])

On suppose que $A_{\Sigma}^{m-k/2}(y_o,\eta_o,t,D_t)$ n'est pas inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ au point (y_o,η_o).

Soit q la dimension du noyau de A_{Σ}, p la dimension du conoyau. Soit $\tilde{h}_j(t)$ $(j = 1,..,q)$ une base orthogonale du noyau de $A_{\Sigma}(y_o,\eta_o)$, $h_j(t)$ $(j = 1,..,p)$ une base orthogonale du noyau de $A^*_{\Sigma}(y_o,\eta_o)$.

Convenablement prolongés par homogénéité, ils définissent des symboles d'hermite et on peut considérer le système associé :

$$\begin{pmatrix} A_{\Sigma}^{m-k/2}(y,\eta) & R^+_{y,\eta} \\ R^-_{y,\eta} & 0 \end{pmatrix}$$

dont on vérifie aisément qu'il est inversible en (y_o,η_o).

Il existe donc un voisinage conique Γ de (y_o,η_o) dans lequel les hypothèses de la proposition 3.1.1 sont vérifiées. On en déduit alors des résultats d'Hypoellipticité.

Si A est régulier, $A_{\Sigma}^{m-k/2}$ respecte (ou inverse selon la parité de k) la parité. On peut alors décomposer le noyau (resp. le noyau de $A_{\Sigma}^{*m-k/2}$)

* c'est à dire chaque élément de la matrice est dans $S^{-m+k/2}(Y)$.

en partie paire et impaire. Les hypothèses de la proposition 3.3.1 sont alors vérifiées. Sous des hypothèses plus restrictives, et dans le cas k=2, on fera une étude plus précise, permettant de donner un calcul explicite de $E_o^{\pm}(y,\eta)$. Ceci fera l'objet des § suivants.

§ 4.2 : DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2

On suppose que k=2, m=1 et on reprend les notations du § 1, c'est à dire que P = A.

$$A^o_{\Sigma}(y,\eta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(y,\eta)\ \left(\frac{t^\alpha D_t^\beta + D_t^\beta t^\alpha}{2}\right) + a_{oo}(y,\eta)$$

On pose $\quad L^o_{(y,\eta)}(t,D_t) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(y,\eta)\ \left(\frac{t^\alpha D_t^\beta + D_t^\beta t^\alpha}{2}\right)$.

et on sait (cf [10])que $a_{oo}(y,\eta) = p_o'(y,\eta)$ où $p_o'(y,\eta)$ désigne le symbole sous principal. On sait que $A^o_{\Sigma}(y,\eta,t,D_t)$ est d'indice 0 (de $B^2(\mathbb{R}^\nu)$ dans $L^2(\mathbb{R}^\nu)$) et qu'il est inversible si et seulement si

$$p'_{m-1}(y,\eta) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j+1)\ \lambda_j(y,\eta) \neq 0,\ \forall \alpha_j \in \mathbb{N}$$

On suppose qu'en un point (y_o,η_o), il existe $\alpha \in \mathbb{N}^\nu$ tel que :

$$(4.2.1) \qquad p'_{m-1}(y_o,\eta_o) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j+1)\ \lambda_j(y_o,\eta_o) = 0$$

et on fait l'hypothèse suivante sur les valeurs propres $\lambda_j(y_o,\eta_o)$.

H1 Au point (y_o,η_o) les valeurs propres λ_j sont indépendantes sur $\mathbb{Z}$, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i\ \lambda_i = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_i = 0,\ i=1,..,\nu$$

Ceci implique en particulier que les valeurs propres sont distinctes ; on a alors le théorème suivant.(L'hypothèse (H1) assure que (4.2.1) n'est satisfaite que pour un α au plus).

Théorème 4.2.1

Soit P vérifiant les hypothèses du § 1 ; on suppose qu'en un point ρ_o de Σ, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^k$ tel que :

$$p'_{m-1}(\rho_o) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j+1)\, \lambda_j\, (\rho_o) = 0$$

et que l'hypothèse $\boxed{H1}$ est vérifiée.

Soit $$\tilde{p}_{m-1}(\rho) = p'_{m-1}(\rho) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j+1)\, \lambda_j(\rho).$$

Alors P est strictement hypoelliptique au voisinage du point ρ_o avec perte de 3/2 dérivées si et seulement si :

$$\frac{1}{i}\left\{\tilde{p}_{m-1}\ ,\ \overline{\tilde{p}_{m-1}}\right\}_{\Sigma} < 0 \text{ au point } \rho_o.$$

Remarque 4.2.2

Lorsque $\nu = 1$, l'hypothèse [H1] est automatiquement vérifiée. On en déduit le théorème 1.2.

Démonstration du théorème 4.2.1

Il résulte des propositions 3.1.1, 3.1.2 et 3.2.2 qu'il suffit de montrer les points suivants :

1) Construire R^+ et R^- avec des propriétés de parité convenables.
2) Montrer que $E_o^{\pm}(y,\eta) = q(y,\eta)\ .\ \tilde{p}_{m-1}(y,\eta)$ où $q(y,\eta)$ est un symbole elliptique. Le théorème résultera alors d'un théorème classique sur les opérateurs sous-elliptiques pour $E^{\pm}$.

Construction de $R^+_{y,\eta}$, $R^-_{y,\eta}$ et calcul de $E_o^{\pm}(y,\eta)$

Vu les propriétés d'homogénéité du problème, on construit $h_j(y,\eta,t)$, $\tilde{h}_j(y,\eta,t)$ pour $|\eta|=1$. La condition H1 assure que :

$$\dim\ker A^o_{\Sigma(y_o,\eta_o)}(t,D_t) = \dim\ker A^{o*}_{\Sigma(y_o,\eta_o)}(t,D_t) = 1.$$

Par conséquent, on prend p=q=1.

Il existe [10] $\widetilde{h}_{(y_o,\eta_o)}(t)$ (resp. $h_{(y_o,\eta_o)}(t)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$) tel que :

$$A^o_{y_o,\eta_o}\cdot\widetilde{h}_{(y_o,\eta_o)} = 0 \qquad \|\widetilde{h}_{(y_o,\eta_o)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^\nu)} = 1$$

$$A^{o\,*}_{y_o,\eta_o} h_{(y_o,\eta_o)} = 0 \qquad \|h_{(y_o,\eta_o)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^\nu)} = 1$$

de plus (4.2.3) $\widetilde{h}_{(y_o,\eta_o)}(-t) = (-1)^{|\alpha|}\,\widetilde{h}_{(y_o,\eta_o)}(t)$

(4.2.4) $h_{(y_o,\eta_o)}(-t) = (-1)^{|\alpha|}\,h_{(y_o,\eta_o)}(t)$

où α est l'élément de $\mathbb{N}^k$ intervenant dans les hypothèses du théorème 4.2.1.

Il est facile de prolonger $\widetilde{h}_{y_o,\eta_o}$ et $h_{(y_o,\eta_o)}$ au voisinage de (y_o,η_o) de telle sorte que :

(4.2.5)
$$\mathcal{R}^o_{\Sigma(y,\eta)}\circ\widetilde{h}_{y,\eta}(t) = a(y,\eta).h_{y,\eta}(t)$$

$$\widetilde{h}_{y,\eta}(-t) = (-1)^{|\alpha|}\,\widetilde{h}_{y,\eta}(t)$$

$$a(y,\eta) = \widetilde{p}_{m-1}(y,\eta)$$

$$h_{y,\eta}(t)\in C^\infty(\Sigma,\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu))$$

(4.2.6)
$$\mathcal{R}^{o\,*}_{\Sigma(y,\eta)}.h_{y,\eta}(t) = \overline{a}_{(y,\eta)}\,h_{y,\eta}(t)$$

$$h_{y,\eta}(-t) = (-1)^{|\alpha|}\,h_{y,\eta}(t)$$

$$h_{y,\eta}(t)\in C^\infty(\Sigma,\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$$

Il est alors facile de voir que $\begin{pmatrix} A^o_{\Sigma(y,\eta)} & R^-_{y,\eta} \\ R^+_{y,\eta} & 0 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ en (y_o,η_o) ; Il nous faut calculer $E_o^{\pm}(y,\eta)$ au voisinage de (y_o,η_o).

On considère le système :

$$\begin{pmatrix} A^o_{\Sigma(y,\eta)}-a & R^-_{y,\eta} \\ R^+_{y,\eta} & 0 \end{pmatrix}$$

Il est inversible et admet comme inverse $\mathcal{F}_{y,\eta}$ qui est de la forme :

$$\mathcal{F}_{y,\eta} = \begin{pmatrix} F_{y,\eta} & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$F_{+(y,\eta)} = \tilde{h}_{(y,\eta)}(t)$$

$$F_{-(y,\eta)} \cdot f = \int_{\mathbb{R}^\nu} f(t) . \overline{h_{y,\eta}} \; dt \text{ pour } f \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$$

Calculons $\mathcal{E}_{o(y,\eta)}$, on a :

$$\mathcal{A}^o_{\Sigma(y,\eta)} \circ \mathcal{F}_{y,\eta} = I + \begin{pmatrix} a(y,\eta)\, F_{y,\eta} & a(y,\eta)\, F^+_{y,\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $a(y_o,\eta_o) = 0$; il existe donc un voisinage de (y_o,η_o) dans lequel

$$I + \begin{pmatrix} aF & aF^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible dans } L^2 \oplus \mathbb{C}.$$

On a donc :

$$\mathcal{E}^o = \begin{pmatrix} F+\sum_{1}^{\infty}(-1)^j F(aF)^j & F_+ + \sum_{1}^{\infty} F(aF)^{j-1} aF^+ \\ F_- + \sum_{1}^{\infty}(-1)^j F_-(aF)^j & \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j F_-(aF)^{j-1} aF_+ \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$E^o_{\pm} = a \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j F_- (aF)^{j-1} F_+$$

si $F_- \ F_+ \neq 0$, on en déduira que :

$$E^o_{\pm} = q(y,\eta).a(y,\eta)$$

où $q(y,\eta)$ est elliptique dans un voisinage de (y_o,η_o) ce qui terminera la démonstration du théorème.

<u>Démonstration de $F^- . F^+ \neq 0$</u>

Par définition, $\quad (F^-F^+) = \int_{\mathbb{R}^\nu} \widetilde{h}(t).\bar{h}(t)\, dt$

On se place au point (y_o,η_o).

$\widetilde{h}(t)$ est la fonction propre associée à la valeur propre $\sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j+1)\lambda_j$ de $L^o_{y_o,\eta_o}(t,D_t)$.

On désigne par $\widetilde{h}^\beta(t)$ les fonctions propres associées aux valeurs propres $\sum_{j=1}^{\nu} (2\beta_j+1)\lambda_j$ pour $\beta \neq \alpha$.

$\left(\sum_{j=1}^{\nu} (2\beta_j+1)\lambda_j\right)$ étant différent de zéro, l'espace engendré par les $\widetilde{h}^\beta(t)$

est dans l'espace image de L^o, par conséquent, il est orthogonal au noyau de L^{o*}. On a donc :

$$\int \tilde{h}^\beta(t).\bar{h}(t)\ dt = 0 \quad \forall \beta \neq \alpha$$

Si $\int \tilde{h}(t).\bar{h}(t)\ dt = 0$, ceci entrainerait que h(t) est orthogonale à un espace dense de $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, ce qui est impossible. c.q.f.d.

§ 4.3 : GENERALISATIONS

On garde les hypothèses du § 4.2 mais on substitue à [H1] l'hypothèse plus faible suivante :

[H2] $\forall \rho \in \Sigma$, A_ρ a toutes ses valeurs propres distinctes

On suppose donc qu'en un point (y_o,η_o) de Σ, il existe $\alpha^1 \in \mathbb{N}^\nu$ tel que :

$$p'_{m-1}(y_o,\eta_o) + \sum_{i=1}^{\nu} (2\alpha_i^1+1)\ \lambda_i(y_o,\eta_o) = 0$$

Soit $(\alpha^1,..,\alpha^p)$ l'ensemble des p ν-tuples tels que :

$$p'_{m-1}(y_o,\eta_o) + \sum_{i=1}^{\nu} (2\alpha_i^j+1)\ \lambda_i(y_o,\eta_o) = 0 \quad \text{pour } j=1,..,p$$

Pour $\beta \neq \alpha^j (j=1,..,p)$, on a par conséquent :

$$p'_{m-1}(y_o,\eta_o) + \sum_{i=1}^{\nu} (2\beta_i+1)\ \lambda_i(y_o,\eta_o) \neq 0$$

La dimension du noyau de $A^o_{\Sigma(y_o,\eta_o)}$ est alors p, et, l'indice étant nul, la dimension du conoyau est également p.

On classe les α^j de la manière suivante :

4.3.1 $$(-1)^{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^j} = 1 \quad \text{pour } j=1,..,p'$$

4.3.2 $$(-1)^{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^j} = -1 \quad \text{pour } j=p'+1,..,p.$$

Le noyau de $A^o_{\Sigma(y_o,\eta_o)}$ (et de $A^{o*}_{\Sigma(y_o,\eta_o)}$) admet alors une décomposition en une partie paire de dimension p' et une partie impaire de dimension (p-p').

Il est clair alors, comme remarqué au § 4.1, qu'on est dans les hypothèses de la proposition 3.3.1. Nous nous proposons de construire ici des fonctions d'hermites $h_j, \tilde{h}_j$ telles que le calcul de $E_o^{\pm}(y,\eta)$ soit aisé.

On suppose $|\eta| = 1$. Comme au § 4.2, on peut trouver p "fonctions propres" de $A^o_\Sigma, \tilde{h}^1_{y,\eta}, .., \tilde{h}^p_{y,\eta}$ dans $C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu))$ (<u>ici intervient l'hypothèse H2</u> cf [10]) telles que :

4.3.3 $$\left[\begin{array}{ll} A^o_{\Sigma(y,\eta)} \cdot \tilde{h}^j_{y,\eta} = a_j \cdot \tilde{h}^j_{(y,\eta)} & j=1,..,p \\ a_j = p'_{m-1} + \sum_{i=1}^{\nu} (2\alpha_i^j+1)\,\lambda_i & \\ \tilde{h}^j_{(y,\eta)}(-t) = \tilde{h}^j_{(y,\eta)}(t) & j=1,..,p' \\ \tilde{h}^j_{(y,\eta)}(-t) = -\tilde{h}^j_{(y,\eta)}(t) & j=p'+1,..,p \end{array}\right.$$

De même, on peut trouver p "fonctions propres" de $A^{\sigma*}_{\Sigma}$, $h^1_{y,\eta}, \dots, h^p_{y,\eta}$ dans $C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu))$ telles que :

4.3.4
$$\begin{cases} A^{\sigma*}_{\Sigma(y,\eta)} \cdot h^j_{y,\eta} = \overline{a_j}\ h^j_{y,\eta} & j=1,\dots,p \\ h^j_{(y,\eta)}(-t) = + h^j_{(y,\eta)}(t) & j=1,\dots,p' \\ h^j_{(y,\eta)}(-t) = - h^j_{(y,\eta)}(t) & j=p'+1,\dots,p \end{cases}$$

On a ainsi décomposé les espaces "propres" en deux parties orthogonales l'une paire et l'autre impaire, mais les $\tilde{h}^j$ (resp. les h^j) ne constituent pas une base orthonormale (ce qui n'est pas essentiel).

On pose :

4.3.5
$$R^-_{y,\eta}\, z = \sum_{j=1}^{p} z_j \cdot h^j_{y,\eta}$$

On désigne par $\tilde{R}^-_{y,\eta}$ le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les $h^j_{(y,\eta)}$.

On désigne par $\tilde{R}^+_{y,\eta}$ le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les $\tilde{h}^j_{y,\eta}$.

Pour f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $R^+_{y,\eta}$ est défini (d'une manière légèrement différente de celle faite au § 3.1) par :

$(R^+_{y,\eta} f)^j = R^{+j}_{y,\eta} f$ est la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de $\tilde{R}^+_{y,\eta} f$ sur la base des $\tilde{h}^j_{y,\eta}$, i.e :

4.3.6
$$\tilde{R}^+_{y,\eta} f = \sum_{j=1}^{p} (R^{+j}_{y,\eta} f) \cdot \tilde{h}^j_{y,\eta}$$

R^{+j} est bien entendu un opérateur d'hermite adjoint dans OPH^{*o}.

Il est clair qu'en (y_o,η_o), le système

$$\begin{pmatrix} A^o_\Sigma(y_o,\eta_o) & R^-_{y_o,\eta_o} \\ R^+_{y_o,\eta_o} & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^p$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\mathbb{C}^p$.

Il est donc inversible dans un voisinage de (y_o,η_o) ; Il existe donc dans ce voisinage

$$\mathcal{E}^o_{(y,\eta)} = \begin{pmatrix} E_o(y,\eta) & E^+_o(y,\eta) \\ E^-_o(y,\eta) & E^{\pm}_o(y,\eta) \end{pmatrix}$$

telle que :

4.3.7 $$\mathcal{E}^o_{(y,\eta)} \# \mathcal{A}^o_{(y,\eta)} = \mathcal{A}^o_{(y,\eta)} \# \mathcal{E}^o_{(y,\eta)} = I$$

et on vérifie aisément que $E^{\pm}_o(y_o,\eta_o) = 0$.

On cherche à calculer $E^{\pm}_o(y,\eta)$; on va démontrer le lemme suivant :

<u>Lemme 4.3.8</u>

Il existe deux matrices $(p\times p)$, C^∞, $Q_1(y,\eta)$, $Q_2(y,\eta)$, inversibles au voisinage de (y_o,η_o) telles que :

$$E^{\pm}_o(y,\eta) = Q_1(y,\eta) \begin{pmatrix} a_1(y,\eta) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_p(y,\eta) \end{pmatrix} Q_2(y,\eta)$$

où $$a_j(y,\eta) = p'_{m-1}(y,\eta) + \sum_{i=1}^{\nu} (2\alpha^j_i+1)\,\lambda_i(y,\eta) \quad ,j=1,..,p$$

Démonstration du lemme

On va calculer $E_o^{\pm}(y,\eta)$ par approximation successive. On a à inverser :

4.3.9
$$\begin{cases} R^- z + A^o u = f \\ \tilde{R}^+ u = \sum_{j=1}^{p} x_j \tilde{h}^j \end{cases}$$

On peut naturellement supposer f=0 ;

On pose :

$$\begin{cases} z_o = 0 \\ w_o = \Sigma x'_j \tilde{h}^j \end{cases}$$

On a :

$$R^-(z-z_o) + A^o(u-w_o) = -\Sigma a_j x'_j \tilde{h}^j \overset{\text{déf}}{\equiv} fo$$

(z_o,w_o) est une solution approchée de (4.3.9) (avec f=o) ; On cherche donc à itérer.

Il nous faut faire quelques remarques préliminaires :
Il résulte de 4.3.7, l'identité :

$$A_\Sigma^o E_o + R^- E_o^- = I$$

d'où

(4.3.10)
$$A_\Sigma^o E_o (I-\tilde{R}^-) = (I-\tilde{R}^-)(-R^- E_o^-)(I-\tilde{R}^-)$$

Au point (y_o,η_o), $(I-\tilde{R}^-_{y_o,\eta_o})$ est le projecteur orthogonal sur l'image de $A_\Sigma^o(y_o,\eta_o)$.

Or il résulte également de (4.3.7) que :

$$E_o^- A_\Sigma^o + E_o^{\pm} . R^+ = 0$$

En (y_o,η_o) on en déduit $E_o^-(y_o,\eta_o) \cdot A_\Sigma^o(y_o,\eta_o) = 0$ car $E_o^{\pm}(y_o,\eta_o) = 0$.

$E_o^-(y_o,\eta_o)$ s'annule donc sur l'image de $A_\Sigma^o(y_o,\eta_o)$ et par conséquent :

$$(R^- E_o^-(I-\tilde{R}^-))_{y_o,\eta_o} = 0$$

On pose

$$\left[\begin{array}{l} w_1-w_o = E_o\,(I-\tilde{R}^-)\, f_o \\ \\ R^-(z_1-z_o) = \tilde{R}^-\, f_o \end{array}\right.$$

On déduit de 4.3.10 que :

$$R^-(z-z_1) + A^o(\dot{u}-w_1) = (-R^-E_o^-(I-\tilde{R}^-))f_o = f_1$$

On pose $\qquad K_{y,\eta} = -R^-E_o^-(I-\tilde{R}^-)$

et on définit par récurrence :

$$f_n = K^n(-\Sigma a_j\, x'_j\, \tilde{h}^j)$$

$$w_{n+1}-w_n = E_o(I-\tilde{R}^-)\, f_n$$

$$R^-\,(z_{n+1}-z_n) = \tilde{R}^-\, f_n$$

et on pose :

$$(4.3.11)\qquad u=w_o+\Sigma(w_{n+1}-w_n)=\Sigma x'_j\tilde{h}^j+E_o(I-\tilde{R}^-)[\sum_{n=o}^{\infty}K^n(-\Sigma a_j x'_j\tilde{h}^j)]$$

$$(4.3.12)\qquad R^-z=\sum_n R^-(z_{n+1}-z_n)=\tilde{R}^-(\sum_{n=o}^{\infty}K^n)(-\Sigma a_j x'_j\tilde{h}^j))$$

Utilisant le fait que $K_{y_o,\eta_o}\equiv 0$, on peut trouver un voisinage de (y_o,η_o) tel que :

$$\|K_{y,\eta}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^\nu),L^2(\mathbb{R}^\nu))}<1$$

De sorte que (4.3.11) et (4.3.12) ont un sens dans ce voisinage.

Enfin

$$(4.3.13)\quad \tilde{R}^+u=\sum_{j=1}^{p}x'_j\,\tilde{h}^j+\tilde{R}^+\,E_o(I-\tilde{R}^-)\,[\sum_{n=o}^{\infty}K^n(-\sum_{j=1}^{p}a_j\,x'_j\,\tilde{h}^j)]$$

et on cherche $x'_1,\dots,x'_p$ de telle sorte que

$$\tilde{R}^+u=\sum_{j=1}^{p}x_j\,\tilde{h}^j$$

La matrice $M_{ij}\,(y,\eta)$ définie par

$$M_{ij}=(\tilde{R}^+\,E_o(I-\tilde{R}^-)\,[\sum_{n=o}^{\infty}K^n\,(-a_j\,\tilde{h}^j)])_i$$

est nulle en (y_o,η_o) de sorte que :

$$(x)=(I+M_{y,\eta})\,(x')$$

et $(I+M_{y,\eta})$ est une matrice $p\times p$ inversible ; On pose :

$$Q_2(y,\eta)=(I+M_{y,\eta})^{-1}$$

Déterminons maintenant (z) en fonction de (x')

On utilise (4.3.12) ;

$$(z) = Q_1(y,\eta) \begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_p \end{pmatrix} (\dot{x}')$$

avec
$$(Q_1(y,\eta))_k^j = (\tilde{R}^-(\sum_{n=o}^{\infty} K^n)\, \tilde{h}^j)_k$$

La démonstration du lemme sera complète si on montre que $(Q_1(y_o,\eta_o))_k^j$ est inversible.

Or $(Q_1(y_o,\eta_o))_k^j$ est la $k^{\text{ième}}$ coordonnée sur la base des h^k de $\tilde{R}^-.\tilde{h}^j$.

Si det $(Q_1(y_o,\eta_o)) = 0$, il existe x'' tel que :

$$\tilde{R}^-_{y_o,\eta_o} (\Sigma x''_j \,.\, \tilde{h}^j) = 0$$

C'est à dire qu'il existe un élément u dans le noyau de $A^o_\Sigma(y_o,\eta_o)$ qui est dans l'image de $A^o_\Sigma(y_o,\eta_o)$.

On compléte la base des $\tilde{h}^j$ par des fonctions propres de $A^o_\Sigma(y_o,\eta_o)$, $\tilde{h}^\beta$. et on a :

$$\langle u, h^j\rangle = 0 \qquad j=1,..,p$$

$$\langle \tilde{h}^\beta, h^j\rangle = 0 \qquad j=1,..,p \quad \forall\beta$$

Ceci est contradictoire avec la dimension du noyau de $A^{o*}_\Sigma(y_o,\eta_o)$.

Du lemme 4.3.8, des propositions 3.1.2 et 3.2.2 ; on déduit le résultat suivant.

On fait l'hypothèse suivante

[H3] Le noyau de $A^{o}_{\Sigma(y_o,\eta_o)}$ a une parité déterminée, i.e

$$\forall j = 1,..,p,\quad (-1)^{\sum_{i=1}^{\nu} |\alpha_i^j|} = (-1)^{\sum_{i=1}^{\nu} |\alpha_i^k|}$$

$\forall k$

Théorème 4.3.14

Soit P vérifiant les hypothèses du § 1 ; on suppose qu'en un point ρ_o de Σ, il existe p ν-tuples α tels que :

$$p'_{m-1}(\rho_o) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j^i+1)\,\lambda_j\,(\rho_o) = 0 \text{ pour } i=1,..,p$$

On suppose que les hypothèses [H2] et [H3] sont vérifiées.

Soit $\quad a_i\,(\rho) = p'_{m-1}(\rho) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j^i+1)\,\lambda_j(\rho), i=1,..,p$

Alors P est strictement hypoelliptique au voisinage de ρ_o avec perte de 3/2 dérivées si et seulement si :

4.3.15 $\quad \forall j=1,..,p\ ;\ \frac{1}{i}\,\{a_j,\overline{a_j}\}_\Sigma < 0$ au point ρ_o

Ce théorème généralise les théorèmes 1.2 et 4.2.1.

Remarque 4.3.16

Dans le cas où l'hypothèse [H3] n'est pas satisfaite, il est raisonnable de penser que 4.3.15 reste une condition suffisante. Elle n'est sûrement pas nécessaire en général, car, comme, remarqué dans la proposition 3.3.1, $E^{\pm}$ n'est pas régulier et des termes d'ordre 1/2 de moins peuvent apparaitre. Ce problème est étudié dans [12].

B I B L I O G R A P H I E

[1] R. Beals. A General Calculus of pseudodifferential operators Duke Math. Journal Vol 42, n°1,(1975).

[2] L. Boutet de Monvel. F. Trèves : On a class of pseudodifferential operators with double characteristics. Inventiones math. 24, 1.34 (1974).

[3] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. Comm. pure. Appl. Math. 27, p585 - 639 (1974).

[4] L. Boutet de Monvel. A. Grigis. B. Helffer (à paraître Astérisque)

[5] Y.V. Egorov : Uspehi Tome 30, n°2 et 3 (182) (1975).

[6] A. Grigis : Hypoellipticité pour une classe d'opérateurs pseudo-differentiels à caractéristiques doubles et parametrixes associées (à paraître Astérisque).

[7] V.V. Grusin : On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold. Mat. Sbornik Tom 84 (126) (1971) n°2, p163-195, Math. USSR sb.13 (1971) n°2, p155-185.

[8] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966), p138-183.

[9] L. Hörmander : A class of Hypoelliptic Pseudodifferential operators with double characteristics. Mathematishe Annalen. 217 n°2 1975.

[10] J. Sjöstrand : Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics. Ark. för Mat. 12, p85-130. 1974.

[11] K. Taira : Hypoelliptic differential operators with double characteristics. Proc. Jap. Acad. 50 (1974) 124.

[12] B. Helffer : Construction de parametrixes pour des opérateurs pseudodifferentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lisses.

Bernard H E L F F E R
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU