P. R. KREE

Distributions quasihomogènes et intégrales singulières

Mémoires de la S. M. F., tome 20 (1969)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__20__3_0>

Bull. Soc. math. France
Mémoire 20, 1969, 47 p.

DISTRIBUTIONS QUASIHOMOGENES ET INTEGRALES SINGULIERES

Paul R. KREE

I - DISTRIBUTIONS QUASIHOMOGENES

RESUME :

Etude de distributions sur $\mathbb{R}^n$ (ou sur $\mathbb{R}^n$ privé de l'origine) vérifiant des conditions d'homogénéité dissymétriques par rapport aux différentes coordonnées : restriction à une hypersurface transverse aux trajectoires, prolongement, transformation de Fourier, étude particulière des distributions nulles dans un demi-espace; application aux équations aux dérivées partielles. Ces résultats avaient été annoncés dans [12] et [12]'.

PLAN.

II - INTEGRALES SINGULIERES

RESUME :

Définition d'une classe d'intégrales singulières contenant à la fois les intégrales singulières de Tricomi-Giraud et celles de F. Jones. Etude de ces intégrales singulières. Les résultats de cette étude avaient été annoncés dans [10] et [11

PLAN.

I. DISTRIBUTIONS QUASIHOMOGENES

La théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques et la théorie des opérateurs pseudo-différentiels classiques utilisent de façon essentielle la théorie des distributions homogènes, voir [6] , [9] , [10] et [15] . Ainsi, sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n_x$, considérons l'opérateur elliptique d'ordre m :

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x) \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \sum_{i=0}^{m} P_i(x,D)$$

où les a_α sont des fonctions de $C^\infty(\Omega)$, les P_i sont pour x fixé des polynômes en $\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ qui sont homogènes de degrés $m-i$. Alors, la méthode de E.E. LEVY permet de construire une solution élémentaire de $P(x,D)$ si l'on connait pour tout x_o fixé dans Ω une solution élémentaire de l'opérateur homogène $P_o(x,D)$. Or, on peut obtenir une telle solution élémentaire en cherchant la transformée de Fourier inverse de la distribution :

$$T = \text{partie finie de } \frac{1}{P_o(x_o,\xi)}$$

(qui est homogène de degré $-m$ dans le complémentaire de l'origine). De plus, en cherchant à exprimer une dérivée d'ordre m d'une solution u de l'équation $P(x,D)u = f$, Giraud [4] a introduit la notion très importante d'intégrale singulière (une intégrale singulière sur $\mathbb{R}^n$ est un opérateur de convolution par une distribution homogène de degré $-n$).

En vue des applications aux équations paraboliques ou semi-elliptiques, on se propose d'étudier dans cet article des distributions ayant des propriétés d'homogénéité différentes par rapport à chacune des variables. Dans un article ultérieur on étudiera la généralisation correspondante de la notion d'intégrale singulière (ces intégrales permettent d'établir les majorations à priori pour les équations paraboliques).

Le plan de l'étude est le suivant. Après quelques préliminaires géométriques (§ 1) , on étudie des distributions quasihomogènes dans le complémentaire de l'origine. On indique alors deux méthodes pour prolonger à l'espace tout entier de telles distributions : la méthode complexe (utilisée extensivement dans [1]) et la méthode réelle (consistant à soustraire à la fonction test un certain développement de TAYLOR (voir [14]). On étudie alors la transformation de FOURIER, puis l'on indique une application aux équations aux dérivées partielles semi-elliptiques (on décrit certaines solutions élémentaires de ces équations) .

§ 1 - Définitions. Préliminaires géométriques.

On se donne une fois pour toutes une famille

(1) $$a = (a_1 \dots a_n)$$

de n nombres $a_i > 0$. Sur $X = \mathbb{R}^n_x$ de point générique $x = (x_1 \dots x_n)$, on a un groupe de difféomorphismes $\mathcal{T}_\lambda$:

(2) $$x \longrightarrow (\lambda^{-a_1} x_1 \dots \lambda^{-a_n} x_n)$$
$$(\text{si } 0 < \lambda < \infty)$$

(3) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n_x$ stable par tout $\mathcal{T}_\lambda$
$$(\forall x \in U \; , \quad \forall \lambda \; , \quad \mathcal{T}_\lambda(x) \in U)$$

On peut prendre par exemple $U = X$ ou $U = \overset{\circ}{X} = X - \{0\}$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(U)$: toutes les fonctions ou distributions que nous considérons sont supposées à valeurs complexes.

Pour tout $\lambda > 0$, notons ${}_\lambda T$ la distribution sur U transportée de T par le difféomorphisme $\mathcal{T}_\lambda$ (voir [5] chapitre 1) . ${}_\lambda T$ est donc telle que :

$$< {}_\lambda T, \varphi > = \lambda^{-|a|} < T, \varphi(\lambda^{-a_1} x_1, \dots) >$$

(4) Définition.

a) Pour tout ouvert U de $X = \mathbb{R}^n_x$ stable par les difféomorphismes $\mathcal{T}_\lambda$ et pour tout α complexe, $\Phi_\alpha(U)$ représente l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'(U)$ qui sont quasihomogènes de degré α c'est-à-dire telles que :

(5) $$\forall \lambda > 0 \; , \qquad {}_\lambda T = \lambda^\alpha T \; .$$

b) $F_\alpha(U)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ sur U qui sont quasihomogènes de degré α .

c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, α' désignera toujours le nombre tel que

(6) $$\alpha + \alpha' + |a| = 0$$
$$\text{avec} \qquad |a| = \sum_{i=1}^n a_i$$

(7) Exemples. Remarques.

a) δ_o = la distribution de Dirac à l'origine est quasihomogène de degré $-|a|$ sur X .

b) Pour tout multi-indice $m = (m_1 \dots m_n)$

$$D^m \delta_o = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m_n} \delta_o$$

est quasihomogène de degré $-|a| - \langle m,a \rangle$ (avec $\langle m,a \rangle = m_1 a_1 + \dots + m_n a_n$) sur X . $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ est quasihomogène de degré $\langle m,a \rangle$.

c) Evidemment tout $T \in \Phi_\alpha(X)$ définit par restriction une distribution de $\Phi_\alpha(U)$, mais la réciproque est fausse en général.

d) On peut faire subir une même homothétie de rapport $\rho > 0$ aux nombres α et $a_1 \dots a_n$: c'est-à-dire que si T est quasihomogène de degré α par rapport à la famille $a_1 \dots a_n$, elle est aussi quasihomogène de degré $\rho\alpha$ par rapport à la famille $\rho a_1 \dots \rho a_n$.

e) La dérivation par rapport à x_i transforme une distribution quasihomogène de degré α en une distribution quasihomogène de degré $\alpha - a_i$.

f) L'exemple type de distribution quasihomogène est sur $\mathbb{R}^2_x = \mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2}$ la solution élémentaire de l'équation de la chaleur :

$$k(x_1,x_2) = \begin{cases} C\, x_1^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4x_1}\right) & \text{si} \quad x_1 > 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x_1 < 0 \end{cases}$$

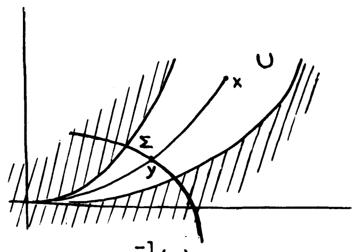
Car $k(\lambda^2 x_1, \lambda x_2) = \lambda^{-1} k(x_1,x_2)$.

On peut voir que k est localement sommable ; mais que $\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 k(x_1,x_2)$ n'est plus localement sommable. Cette dernière fonction quasihomogène de degré -3 définit une intégrale singulière de F. Jones (voir [9]) .

Avant de commencer l'étude des distributions quasihomogènes, nous allons donner quelques préliminaires géométriques.

(8) Orbites. Surfaces γ = constante . Surface Σ

Certaines courbes et hypersurfaces jouent un rôle privilégié relative-



ment au groupe τ_λ .
Ce sont d'une part les orbites de chaque point x de U (lieu de ses transformées par tous les τ_λ) , d'autre part les hypersurfaces qui coupent non tangentiellement une fois et une seule fois chaque orbite, on peut prendre par exemple les surfaces γ = constante où γ est une fonction de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0 . [(a)]

Par exemple dans le cas particulier où les a_i sont tous entiers, posant m = le plus petit entier tel que $\frac{m}{2}$ soit divisible par chaque a_i

$$a'_i = \frac{m}{a_i} \qquad \text{et} \qquad a' = \left(\frac{m}{a_1}, \dots \frac{m}{a_n}\right)$$

(9) on peut prendre

$$\gamma_m(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{a'_i}\right)^{1/m}$$

On pose aussi $\qquad \Sigma = \gamma^{-1}(1) \cap U$

On oriente la variété Σ comme étant le bord de l'ouvert de U où $\gamma < 1$.

(10) Forme σ . Formules diverses.

a) Notons que toute fonction f quasihomogène de degré α dans le complémentaire de l'origine et C^∞ vérifie la formule d'Euler :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, \partial_i f = \alpha f \qquad \text{avec} \qquad \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

b) Si l'on considère une autre fonction $g \in F_\beta(\dot{X})$ et la $(n-1)$ forme différentielle

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, a_i\, x_i\, d_i x$$

avec $\qquad d_i x = dx_1 \wedge \dots dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \dots \wedge dx_n$

un calcul montre que :

$$\boxed{d(f\, g\, \sigma) = (\alpha + \beta + |a|)\, f\, g\, dx}$$

$$df \wedge \sigma = \alpha\, f\, dx$$

(11) Distributions sur Σ

$\mathcal{D}'(\Sigma)$ désigne l'espace vectoriel des distributions sur Σ muni de sa topologie habituelle. Comme la forme σ ne s'annule pas sur Σ , on identifie toute fonction f sur Σ à une distribution sur Σ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \qquad \langle f, \varphi \rangle = \int_{y\in\Sigma} f(y)\,\varphi(y)\,\sigma(y)$$

(12) Coordonnées polaires dans $\overset{\circ}{X} = \mathbb{R}^n_x$

On suppose donnée une fonction γ telle que (8) . Alors tout point $x \neq 0$ de l'espace est repéré par $\gamma(x)$ et le point y où l'orbite de x coupe $\Sigma = \gamma^{-1}(1)$.

Soit $\theta = (\theta_1 \dots \theta_{n-1})$ un système de coordonnées locales pour Σ au voisinage du point y . Alors x est repéré par ses coordonnées polaires qui sont les n nombres :

$$\gamma(x) = \rho \qquad \text{et} \qquad \theta = (\theta_1 \dots \theta_{n-1})$$

Pour obtenir la transposée de dx par la transformation

$$(\rho, \theta_1 \dots \theta_{n-1}) \longrightarrow (x_1 \dots x_n)$$

on remarque que

$$x_1 = \gamma(x)^{a_1}\, y_1 \,\dots\dots\dots \qquad x_n = \gamma(x)^{a_n}\, y_n$$

puisque (en utilisant (10.b) avec $f = \gamma$)

$$d\gamma \wedge \sigma = \gamma\, dx \cdot \text{Mais } \sigma(x) = \gamma(x)^{|a|}\,\sigma(y)$$

(13) d'où
$$\boxed{dx = \gamma(x)^{|a|-1}\, d\gamma(x) \wedge \sigma(y)}$$

Pour obtenir l'expression cherchée, il suffirait de remplacer dans cette formule $\gamma(x)$ par ρ et les y_i par leurs expressions en fonction des θ_i : c'est l'expression de l'élément de volume en coordonnées polaires.

§ 2 - Distributions quasihomogènes dans un "cône" ouvert U ne contenant pas l'origine.

Nous verrons (§ 2) que si T est quasihomogène sur tout X , l'étude de T au voisinage de l'origine présente une difficulté. C'est pourquoi nous allons d'abord étudier l'ensemble $\Phi_\alpha(U)$ des distributions quasihomogènes de degré α , dans un "cône" ouvert U ne contenant pas l'origine.

§ 2.1 . Restriction Θ à Σ d'une distribution $T \in \Phi_\alpha(U)$.

Si T est représentée par une fonction dans U , il est clair que la distribution $T(x)$ dans U est caractérisée par sa restriction $T(y)$ à Σ et que réciproquement à toute fonction sur Σ , il correspond une fonction quasihomogène dans U dont elle est la trace. Plus généralement, on a la

(14) proposition .

a) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on peut définir l'application $H_{\alpha'}$ continue :

(15)
$$\begin{aligned} \mathcal{C}_o^\infty(U) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U) \\ \varphi &\longmapsto H_{\alpha'}\varphi \end{aligned}$$

avec pour tout $x \in U$, $(H_{\alpha'}\varphi)(x) = \int_o^\infty r^{-\alpha'-1}\varphi(r^{a_1}x_1, \ldots)\,dr$

b) Notant $(H_{\alpha'}\varphi)_\Sigma$ la restriction de $H_{\alpha'}\varphi$ à Σ , à toute $T \in \Phi_\alpha(U)$ est associée canoniquement une distribution $\Theta \in \mathcal{D}'(\Sigma)$, appelée sa restriction à Σ , qui est telle que :

(16) $$\forall \varphi \in \mathcal{C}_o^\infty(U) \qquad \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(U) \times \mathcal{D}(U)} = \langle \Theta, (H_{\alpha'}\varphi)_\Sigma \rangle$$

le dernier crochet étant un accouplement $D'(\Sigma) \times D(\Sigma)$

c) Ceci établit une correspondance bijective entre

$$\Phi_\alpha(U) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}'(\Sigma)$$

Preuve : Prenant φ dans $\mathcal{C}_o^\infty(U)$, je cherche l'expression de $\langle T, \varphi \rangle$. Notons qu'à toute partition de l'unité $(\psi_i)_i$ sur Σ est attachée une partition de l'unité $\dot{\psi}_i$ sur U en posant :

$$\dot{\psi}_i(x) = \psi_i(\gamma(x)^{-a_i} x_1, \ldots\ldots.)$$

Je suppose alors que la partition ψ_i est subordonnée à un recouvrement de Σ par des ouverts à carte et je suis ramené à étudier $\dot{\psi}_i\, T$. On a vu (§ 1) qu'à toute carte et à tout système de coordonnées θ sur Σ est naturellement associée une carte et des coordonnées "polaires" $(r = \gamma(x), \theta)$ pour l'ouvert U . Au lieu de lire $T\,\dot{\psi}_i$ sur cette carte, je lis $\gamma(x)^{-\alpha}\, T\, \dot{\psi}_i$ et la formule (A) prouve alors que c'est une distribution indépendante de r . Donc elle s'écrit $1(r) \otimes \tilde{\Theta}_i(\theta)$ où $\tilde{U}_i(\theta)$ est une distribution sur l'ouvert décrit par θ . On a donc :

$$< T\,\dot{\psi}_i, \varphi > \;=\; < \gamma(x)^{-\alpha}\,\psi_i\,T,\ \psi(x)^{\alpha}\,\varphi >$$

$$< 1(r) \otimes \check{\text{Ⓗ}}_i(\theta),\ r^{-1+\alpha+|a|}\,\varphi(r^{a_1}\,y_1(\theta), \ldots) >$$

La carte considérée de Σ permet d'identifier $\check{\text{Ⓗ}}_i$ à une distribution Ⓗ_i sur Σ et je désigne par Ⓗ la somme des distributions Ⓗ_i .

D'où
$$< T, \varphi > \;=\; \sum_i < T\,\dot{\psi}_i, \varphi >$$
$$= \sum_i < 1(r) \otimes \tilde{\text{Ⓗ}}_i(\theta),\ r^{-1-\alpha'}\,\varphi(r^{a_1}\,y_1(\theta), \ldots >$$
$$=< \sum_i \tilde{\text{Ⓗ}}_i(\theta),\ (H_{\alpha'}\varphi)(y(\theta)) > \;=\; <\text{Ⓗ},\ (H_{\alpha'}\varphi)_{\Sigma} >$$

Le 2° est donc prouvé. Pour prouver le 3°, il suffit de remarquer que l'application $\Phi_\alpha(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Sigma)$ est injective et surjective d'après la dernière formule .

§ 2.2. Topologie sur $\Phi_\alpha(U)$. Dualité.

De la même façon, on voit que le sous ensemble $F_\beta(U) \subset \Phi_\beta(U)$ formé des f dont la restriction à Σ est une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ est isomorphe à $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Si l'on munit $\Phi_\alpha(U)$ et $F_\beta(U)$ des topologies transportées de celle de $\mathcal{D}'(\Sigma)$ et $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ par les isomorphismes ci-dessus ; alors, pour tous α et β complexes $\Phi_\alpha(U)$ et $F_\beta(U)$ sont deux espaces vectoriels topologiques en dualité.

(17) $$\forall T \in \Phi_\alpha(U)\ ,\quad \forall f \in F_\beta(U)\ ;\ < T, f >_{\Phi_\alpha(U) \times F_\beta(U)} \;=\; <\text{Ⓗ}, f_\Sigma >_{\mathcal{D}'(\Sigma) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)}$$

Nous allons voir que si α et β sont conjugués $(\beta' = \alpha)$ et si $U = \dot{X}$, cette dualité est indépendante de la variété Σ (pourvu qu'elle "entoure" l'origine) .

§ 2.3. Dualité entre $\Phi_\alpha(X)$ et $F_\alpha(\dot{X})$

(18) proposition.

a) Pour tout couple $f \in F_\alpha(\dot{X})$ et $f' \in F_{\alpha'}(\mathring{X})$, la forme $ff'\sigma$ est fermée.

b) Vue la proposition (14) , les ensembles $F_{\alpha'}(X)$ et $\Phi_\alpha(X)$ sont isomorphes à $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ et $\mathcal{D}'(\Sigma)$ d'où des topologies sur ces ensembles.

c) On peut identifier le dual de $\Phi_\alpha(\dot{X})$ à $F_{\alpha'}(\dot{X})$ en se donnant une variété $\gamma^{-1}(1) = \Sigma$ et en posant :

(19) $\forall T \in \Phi_\alpha(\dot{X}) \qquad \forall f \in F_{\alpha'}(\dot{X}) \qquad < T, f >_\sigma \;=\; < T_\Sigma, f_\Sigma >_{\mathcal{D}'(\Sigma) \times \mathcal{D}(\Sigma)}$

Cette identification ne change pas si l'on remplace γ par une fonction de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0 .

Utilisant la notation (19) , on voit que :

(20) $\forall T \in \Phi_\alpha(\dot{X}) \quad ; \forall \varphi \in \mathcal{C}_o^\infty(\dot{X}) \quad ; \quad < T, \varphi > \;=\; < T, H_{\alpha'} \varphi >_\sigma$

Preuve : (18.a) résulte de (6) et (10.b) . (18.b) a été vu au § 2.2. de même que (19) . Si l'on remplace γ par une autre fonction de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0 , pour toute $T \in F_\alpha(\dot{X})$, la quantité $< T_\Sigma, f_\Sigma >$ ne change pas d'après Stockes. Comme $F_\alpha(\dot{X})$ est dense dans $\Phi_\alpha(X)$, il en est de même pour toute $T \in \Phi_\alpha(\dot{X})$. (20) résulte de (16) .

(21) Remarques.

a) Appliquant Fubini à (16) , il vient :

$$< T, \varphi >_{\mathcal{D}'(U) \times \mathcal{D}(U)} \;=\; \int_o^\infty r^{-\alpha'-1} < Ⓗ_{-r}, \varphi >_{\mathcal{D}'(U) \times \mathcal{D}(U)} \, dr$$

où $Ⓗ_{-r}$ désigne la distribution transportée par (2) de l'extension à U de la distribution Ⓗ sur Σ . Cette formule fait apparaître T comme une intégrale faible de la fonction vectorielle :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathcal{D}'(U) \\ r & \longmapsto & Ⓗ_{-r} \end{array}$$

b) Si l'on avait pris certains $a_i < 0$, (et les autres > 0) on aurait obtenu une situation géométrique un peu différente. Toutes les orbites ne passent pas par l'origine ; et l'on n'aurait pas pu trouver simplement une hypersurface de dimension n-1 coupant une (seule) fois chaque trajectoire. Le raisonnement précédent donnerait simplement une représentation "locale" des distributions quasihomogènes de ce type, c'est-à-dire qu'elle ne serait valable que pour une famille d'orbites coupant une surface transverse suivant un ouvert suffisamment petit.

c) On étudierait de même les distributions T telles que

$$_{\lambda_1;\lambda_2}T \;=\; \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \, T$$

où λ_1 et λ_2 sont deux paramètres réels et $_{\lambda_1;\lambda_2}T$ la distribution sur $\mathbb{R}^n$

transporté par un difféomorphisme (ces transformations formant un groupe à 2 paramètres) .

§ 3 - Prolongement des distributions quasihomogènes par la méthode complexe.

Donnons nous une distribution $k(x)$ sur Σ . A la donnée de k et à celle de tout nombre complexe α , il correspond la donnée d'une distribution T_α sur $\dot{X}$, quasihomogène de degré α . Le problème du prolongement consiste à chercher une distribution T'_α sur X , qui coïncide avec T_α sur $\dot{X}$. La méthode complexe pour résoudre ce problème consiste à chercher d'abord à définir T'_α pour tout α appartenant à un certain ouvert non vide Ω contenu dans $\mathbb{C}$ et à remarquer que l'application $\alpha \longmapsto T'_\alpha$ de Ω dans $\mathcal{D}'(X)$ est holomorphe (au sens de [3]) . On cherche ensuite à définir T'_α pour tout α en effectuant le prolongement analytique de cette application. Dans le cas homogène (voir [1]) ou lorsque les a_i sont tous entiers (voir [12]) , la méthode complexe permet de définir T'_α pour tout complexe α . Mais dans les autres cas, la méthode complexe ne permet de définir T'_α que lorsque α' appartient à un certain demi-plan (d'où l'intérêt des autres méthodes de prolongement : voir paragraphe suivant).

(22) Soit $D_a = \begin{cases} \mathbb{C} \text{ si les nombres } a_i \text{ sont tous entiers ;} \\ \text{le demi-plan où } \mathrm{Re}\,\alpha < \inf \text{ des } a_i \text{ non entiers, sinon.} \end{cases}$

Si $\mathrm{Re}\,\alpha' < 0$, pour toute φ dans $C_o^\infty(\dot{X})$, on peut calculer $< T_{\alpha'}, \varphi >$ en utilisant les coordonnées polaires. Ce qui donne :

$$< T_{\alpha'}, \varphi > = \int_{\theta\in\Sigma} . \, T(\theta)\, d\sigma(\theta) \int_0^\infty r^{-\alpha'} \varphi(r^{a_1} x_1, \ldots) \frac{dr}{r}$$

(23) Posons

$$(H_{\alpha'} \varphi)(x) = \int_0^\infty r^{-\alpha'} \varphi(r^{a_1} x_1, \ldots) \frac{dr}{r}$$

En faisant des intégrations par parties, on trouve : que si α' n'est pas un entier $\geqslant 0$, on a :

(23)' $$(H_{\alpha'} \varphi)(x) = [\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-p)]^{-1} \int_0^\infty r^{-\alpha'+p} \varphi^{(p+1)}(r^{a_1} x_1\ldots)\, dr$$

$$\text{avec} \quad \varphi^{(p+1)}(r^{a_1} x_1,\ldots) = (\frac{d}{dr})^{p+1} \left[\varphi(r^{a_1} x_1, \ldots) \right]$$

Cette expression montre que pour toute φ de $\mathcal{C}_o^\infty(X)$, l'application $\alpha' \longrightarrow (H_{\alpha'} \varphi)(x)$ est méromorphe sur $D_a \setminus \mathbb{N}$. Pour tout entier $p \geqslant 0$, on peut définir alors $(H_p \varphi)(x)$ comme étant le terme constant du développement de Laurent de $(H_{\alpha'}\varphi)(x)$ au voisinage du pole $\alpha' = p$.

Lemme.

On considère la fonction de la variable complexe α :

$$\phi(\alpha) = [\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-p)]^{-1} r^{p-\alpha}$$

avec $r > 0$ et $r^{p-\alpha} = \exp((p-\alpha)\log r)$. Alors le terme constant A du développement de Laurent de ϕ au voisinage du pole $\alpha = p$ est :

$$A = \frac{1}{p!}\left(\log\frac{1}{r} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{p}\right)$$

Ceci se prouve, par exemple en écrivant :

$$\phi(\alpha) = (\alpha-p)^{-1}\psi(\alpha) \quad \text{avec} \quad \psi(\alpha) = r^{p-\alpha}[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)]^{-1}$$

Un développement de Taylor de ψ au point $\alpha = p$ montre alors que $A = \psi'(p)$.

De ce lemme, de (23)' et d'un calcul, il résulte alors que :

(24) $$(H_p\varphi)(x) = \frac{1}{p!}\int_0^\infty \left(\log\frac{1}{r} - 1 - \frac{1}{2}\dots - \frac{1}{p}\right)\varphi^{(p+1)}(r^{a_1}x_1,\dots)\,dr$$

$$= \frac{1}{p!}\int_0^\infty \left(\log\frac{1}{r}\right)\varphi^{(p+1)}(r^{a_1}x_1,\dots)dr + \frac{1}{p!}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right)\sum_{\langle a,\nu\rangle=p} x^\nu!(\partial^\nu\varphi)(0)$$

avec $\nu! = \nu_1!\dots\nu_n!$ et $x^\nu = x_1^{\nu_1}\dots x_n^{\nu_n}$

(25) Propriétés de l'application $\alpha \longrightarrow H_\alpha\varphi$.

a) $H_\alpha\varphi$ est une fonction C^∞ en dehors de l'origine.

b) Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\forall\alpha\in D_a\setminus\mathbb{N} : (H_{\alpha'}(\lambda.\varphi))(x) = \lambda^{-\alpha'}(H_{\alpha'}\varphi)(x)$$

$$\forall p\in D_a\cap\mathbb{N} : (H_p(\lambda.\varphi))(x) = \lambda^{-p}(H_p\varphi)(x) + \frac{\lambda^{-p}}{p!}\log\lambda\sum_{\langle a,\nu\rangle=p}\nu!x^\nu\partial\varphi(0)$$

(Ces formules résultent de calculs à partir des expressions (23) et (24) de $(H_\alpha\varphi)(x)$) . On peut alors énoncer la définition et la proposition qui suivent

(25') proposition (et définition de T'_α) .

a) Soit T_α dans $\dot{\phi}_\alpha(X)$. Alors, pour tout α' dans le demi-plan D_a on peut prolonger T_α en une distribution T'_α sur X ainsi définie.

(26) Pour tout $\varphi \in C^{\infty}(X)$, $< T'_{\alpha} , \varphi > = < T , H_{\alpha'} \varphi >_{\sigma}$ où $H_{\alpha'} \varphi$ est défini par (23) et (24) .

b) Si α' n'est pas un entier positif ou nul, T'_{α} est une distribution quasihomogène qui prolonge T_{α} (et ce prolongement quasihomogène est unique).

c) Si α' est un entier $\geqslant 0$, T'_{α} est une distribution quasihomogène de degré α si et seulement si tous les moments de T sont nuls.

(27) Pour tout multiindice ν tel que $< a.\nu > = p$, $< T, x^{\nu} >_{\sigma} = 0$. On déduit alors de T'_{α} , tous les prolongements quasihomogènes de T_{α} , en ajoutant à T'_{α} une combinaison linéaire de distributions $\partial^{\nu} \delta_{o}$ avec $< a.\nu > = p$.

Preuve :

1°) Le prolongement T' de T défini par (26) est quasihomogène car :

(28) $$< {}_{\lambda}T' , \varphi > = \lambda^{-|a|} < T' , {}_{\lambda^{-1}}\varphi > = < T' , H_{\alpha'}({}_{\lambda^{-1}}\varphi) >_{\sigma}$$

d'où avec (25.b) $$= \lambda^{-|a|-\alpha'} < T' , H_{\alpha'} \varphi >_{\sigma} = \lambda^{\alpha} < T' , \varphi >$$

Le prolongement est unique car si T'' est un autre prolongement quasihomogène de T , $T' - T''$ est portée par l'origine et est quasihomogène de degré α . Ceci entraîne que $T' - T'' = 0$.

2°) Supposons $\alpha' = p$. Le prolongement T' de T vérifie toujours (28) . D'où il résulte vu (25.b) que :

$$* \quad < {}_{\lambda}T' , \varphi > = \lambda^{-|a|-p} < T, H_{\alpha'} \varphi >_{\sigma} + \lambda^{-|a|} \sum_{a\nu=p} \frac{(-1)^p}{p!} \lambda^p \log \lambda \ \nu! \ \partial^{\nu} \varphi(0) < T, x >_{\sigma}$$

Donc, si les conditions (27) sont vérifiées, le dernier terme est nul et T' est quasihomogène de degré p' .

Réciproquement, si T admet un prolongement quasihomogène T'' , $T' - T''$ est une distribution portée par l'origine, donc un polynome de dérivation.

$$** \qquad \sum_{<a,b>=p} a_{\beta} \partial^{\beta} \delta = T' - T''$$

Et l'on obtient en rapprochant (*) et (**)

$$ {}_{\lambda}T' - \lambda^{p'} T' = \frac{(-1)^p}{p!} \lambda^{p'} \log \lambda \sum_{a\nu=p} < T, x^{\nu} >_{\sigma} \nu! \ \partial^{\nu} \delta_{o}$$

$$= \lambda^{-|a|} \sum \lambda^{<a,b>} a_{\beta} \partial^{\beta} \delta_{o} - \lambda^{p'} \sum a_{\beta} \partial^{\beta} \delta_{o}$$

Comme cette dernière égalité a lieu pour tous les $\lambda > 0$, cela entraîne :

- que tous les a_β tels que $\langle a_\beta, \beta\rangle \neq p$ sont nuls ;
- que tous les termes (T, x^ν), avec $\langle a_\nu, \nu\rangle = p$, sont nuls; D'où la conclusion

(29) Proposition.

On suppose que les a_i sont tous entiers (afin de simplifier la formulation des résultats). Soit k une fonction $\mathcal{E}^\infty$ définie sur Σ. α désignant un nombre complexe quelconque, on prolonge $k(\theta)$ en une fonction $k(x)$ définie sur $\dot{\mathbb{R}}^n$ en posant $k(r\theta) = r^\alpha k(\theta)$. $pf_\alpha k$ désigne le prolongement holomorphe de $k(x)$.

* a) On a $\quad pf_{\alpha+a_1}(x_1 k) = x_1\, pf_\alpha k$

b) Si $\quad \alpha \neq (p-a_1)' = -|a| - p + a_1$, avec $p \in \mathbb{N}$

** $\quad$ alors $pf_{\alpha-a_1}\left(\frac{\partial k}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(pf_\alpha k)$

Si au contraire $\quad \alpha' = p + a_1$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(pf_\alpha k) = pf_{\alpha-a_1}\frac{\partial k}{\partial x_1} - \frac{1}{p!}\sum_{\langle a,\nu\rangle = p+a_1} \nu!\,\delta^{(\nu)}(0)\int_\Sigma x^{\nu+\varepsilon_1} k(x)\sigma(x)$$

Preuve.

a) Pour $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, la relation * est vérifiée car les distributions intervenant dans les 2 membres de cette relation sont des fonctions localement intégrables égales. Les applications :

$$\alpha \longmapsto pf_{\alpha+a_1}(x_1 k) \text{ et } x_1 pf_\alpha k$$

sont des fonctions méromorphes de α, à valeurs dans $\mathcal{D}'$. Vu le principe du prolongement analytique, elles définissent une même fonction méromorphe $F(\alpha)$ dont les pôles ne peuvent être que les points d'affixe $\alpha = -|a| + p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Nous avons donc prouvé * pour $\alpha \neq -p - |a|$. Supposons à présent $\alpha = -p - |a|$. Comme la multiplication par x_1, est un opérateur continu de $\mathcal{D}'$, on a pour toute φ de $\mathcal{D}$, et vue la définition de $pf_\alpha k$

$$(x_1 pf_\alpha k, \varphi) = \mathrm{tcdL}(\beta \sim p) \text{ de}\left[\int_\Sigma x_1 k(x)(H_\beta\varphi)(x)\sigma(x)\right]$$

où $\mathrm{tcdL}(\beta\sim p)$ de $[\ \ ]$ désigne le terme constant du développement de Laurent (pour β voisin de p) de la fonction de β indiquée entre crochets.

D'où $(x_1 pf_\alpha k, \varphi) = \int_\Sigma x_1 k(x)(H_p\varphi)(x)\sigma(x) = (pf_{\alpha+a_1}\, x_1 k, \varphi)$

Nous avons donc prouvé a)

b) Notons que la relation (entre distributions sur $\mathbb{R}^3$) :

$$-4\pi\delta_0 = \Delta\, pf\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \neq pf\left(\Delta\frac{1}{\|x\|}\right) = 0$$

montre que l'on n'a pas en général

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(pf_\alpha k) = pf_{\alpha+a_1}\frac{\partial k}{\partial x_1}$$

On a (dans le complémentaire de l'origine) :

$$\frac{\partial k}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(r^{\alpha} k(\theta)\right) = \alpha r^{\alpha-2} x_1 k(\theta) + r^{\alpha}\frac{\partial k}{\partial x_1}(\theta)$$

Ceci montre que la fonction $\frac{\partial k}{\partial x_1}(x)$ a pour restriction à Σ la fonction $\alpha x_1 k + \frac{\partial k}{\partial x_1}(\theta)$. Nous avons donc pour toute φ dans $\mathcal{D}$ en notant $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$

$$(pf_{\alpha-a_1}\ \partial_1 k, \varphi) = \int_{\Sigma} (\alpha x_1 k + \partial_1 k)(\theta)(H_{(\alpha-a_1)'}\ \varphi)(\theta)\sigma(\theta)$$

L'application $F_1 : \alpha \mapsto pf_{\alpha-a_1}(\partial_1 k)$ est donc méromorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'$

De même :

$$F_2 : \alpha \mapsto \partial_1 (pf_{\alpha} k)$$

est la composée de l'application méromorphe $\alpha \mapsto pf_{\alpha} k$ et de l'opérateur de dérivation par rapport à x_1. Comme F_1 et F_2 coïncident si $Re\,\alpha > a_1$ elles définissent une même fonction méromorphe F, dont les pôles possibles sont les pôles communs à F_1 et F_2 soit

$$\alpha = -|a| - p + a_1 \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}$$

Nous avons donc prouvé $**$. Si au contraire $\alpha' = p - a_1$, on a en raisonnant comme précédemment :

$$(\partial_1\ pf_{\alpha} k, \varphi) = \text{tcdL}\ (\alpha' \sim p)\ \text{de}\ \left[\int_{\Sigma} (\alpha x_1 k + \partial_1 k) H_{\alpha-a_1} \varphi\, d\sigma\right]$$

d'où en utilisant le lemme précédant (24)

$$= \int_{\Sigma} \left[(-|a| - p) x_1 k + \partial_1 k\right](H_{p+a_1}\varphi)(x)\sigma(x) + \frac{1}{p!}\int x_1 k\sigma(x)\left[\int_0^{\infty} \varphi^{(p+a_1+1)}(rx)\,dr\right]$$

Le dernier crochet est égal à $-\sum_{\langle a,\nu\rangle = p+a_1} x^{\nu}\, \nu!\, (\partial^{\nu}\varphi)(0)$

Or

$$(pf_{\alpha-a_1}\ \partial_1 k, \varphi) = \text{tcdL}\ (\beta \sim p + a_1)\ \text{de}\ \left[\int [(-|a| - p)x_1 k + \partial_1 k](H_{\beta}\varphi)\sigma\right]$$

$$= \int_{\Sigma} \left[(-|a| - p)x_1 k + \partial_1 k\right](H_{p+a_1}\varphi)(x)\sigma(x)$$

En rapprochant les expressions obtenues, on obtient :

$$(\partial_1 pf_{\alpha} k, \varphi) = (pf_{\alpha-a_1}\ \partial_1 k, \varphi) - \frac{1}{p!}\sum_{\langle a,\nu\rangle = p+a_1} \nu!(\partial^{\nu}\varphi)(0)\int_{\Sigma} x^{\nu+\varepsilon_1} k(x)\sigma(x)$$

avec $\varepsilon_1 = (1, 0 \ldots 0)$ Nous avons donc prouvé $**$.

§ 4 - Prolongement des distributions quasihomogènes par la méthode réelle.

(30) Lemme

Les nombres réels $a_i \geq 0$ et $p > 0$ sont fixés. Alors pour toute φ de $\mathcal{D}(X)$, on a

(31)
$$\varphi(x) = \sum_{\langle a,\nu\rangle < p} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}\varphi(0) + \sum x^k\, \varphi_k(x)$$

où la 2^e somme est finie et où les fonctions φ_k sont dans $\mathcal{E}(X)$. De plus les φ_k décrivent un borné de $\mathcal{E}(X)$ lorsque φ décrit un borné de $\mathcal{D}$

Le lemme se prouve en écrivant plusieurs fois de suite une suite d'égalités analogues à celle-ci :

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^1 dt_1 \frac{d}{dt_1} \varphi(t,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \partial_i \varphi(t,x)\, dt_1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 dt_1 \left(\partial_i \varphi(t,x) - \partial_i \varphi(0)\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \,(\partial_i \varphi)(0) \quad .$$

On obtient finalement (31) , où la 2^e somme est étendue aux multi-indices $k = \nu + \mathcal{E}_i$ (avec $< a,\nu > \leqslant p$; $\mathcal{E}_i$ étant le multiindice correspondant à une famille de n nombres, nuls, sauf le i^e , qui est égal à 1 ; avec $<a,k> > p$)

(32) <u>proposition</u> :

Si T est une distribution q.h de degré α dans le complémentaire de l'origine avec

* $\quad \forall k \in \mathbb{N}^n \quad ; \quad < a.k > \; = \; \mathrm{Re}\,\alpha'$

alors il existe un seul prolongement de T en une distribution T' q.h. sur X et ce prolongement est donné par

$$< T' , \varphi > \; = \; < T, K_{\alpha'} \varphi >_{\sigma}$$

avec

$$(K_{\alpha'} \varphi)(x) = \int_0^{\infty} r^{-1-\alpha'} \Big(\varphi(r^{a_1} x_1 \ldots) - \sum_{ak<\mathrm{Re}\alpha'} \frac{D^k\varphi(0)}{k!} r^{a.k} x^k\Big) dr$$

<u>Preuve</u>.

L'intégrale donnant $(K_{\alpha'} \varphi)(x)$ converge :

- à l'origine, d'après la formule de Taylor (31)
- à l'infini (il suffit de séparer l'intégrale en deux parties).

Un changement de variable montre que :

$$K_{\alpha'}({}_{\lambda}\varphi) = \lambda^{-\alpha'} (K_{\alpha'} \varphi)$$

D'où
$$< {}_{\lambda}T' , \varphi > \; = \; \lambda^{-|a|} < T' , {}_{\lambda^{-1}}\varphi >_{\sigma} \; = \; \lambda^{-|a|} < T, K_{\alpha'}({}_{\lambda^{-1}}\varphi) >_{\sigma}$$
$$= \lambda^{-|a|-\alpha'} < T, \varphi > \; = \; \lambda^{\alpha} < T' , \varphi >$$

T' est donc quasihomogène de degré α . Il n'y a pas d'autre prolongement T'' de T , qui soit quasihomogène de degré α car $T' - T''$ serait une distribution à support l'origine, non ulle, quasihomogène de degré α avec (*) ; ce qui est impossible.

(33) proposition .

Soit $T \in \dot{\Phi}_\alpha(X)$ avec α tel que : $\exists\, k \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathrm{Re}\,\alpha' = \langle a.k.\rangle$
Alors, on obtient une distribution T' prolongeant T en posant :

$$\langle T', \varphi\rangle = \int_\Sigma (K_{\alpha'}\varphi)(y)\, T(y)\, \sigma(y)$$

avec

$$(K_{\alpha'}\varphi)(y) = \int_0^\infty r^{-\alpha'-1}\Big(\varphi(r^{a_1} y_1,\dots) - \sum_{ak<\mathrm{Re}(\alpha')} \frac{(\frac{\partial}{\partial x})^k \varphi(0)}{k!} r^{ak} y^k - \sum_{ak=\mathrm{Re}(\alpha')} \frac{(\frac{\partial}{\partial x})^k \varphi(0)}{k!} r^{ak} y^k\, \bar{\psi}(r)\Big)\, dr$$

$\bar{\psi}$ étant une fonction C^∞ sur $[0, +\infty[$, valant 1 au voisinage de 0 et nulle au voisinage de l'infini.

(34) Si $\langle T, y^k\rangle_\sigma = 0$ pour tout k tel que $a.k = \alpha'$, alors T' est quasihomogène. Et réciproquement, la condition (34) est nécessaire pour que T admette un prolongement quasihomogène.

Preuve.

Un changement de variable montre que

$$(35) \quad {}_\lambda T' = \lambda^\alpha T' + \lambda^\alpha \sum_{\langle a,k\rangle > \mathrm{Re}(\alpha')} \frac{1}{k!} \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k (\delta_0)\, \langle T, y^k\rangle_\sigma \int_0^\infty r^{-1}(\psi(r) - \psi(\lambda r))\, dr$$

Ceci montre que T' est quasihomogène si l'on a (34) . Réciproquement, si T admet un prolongement quasihomogène T'' on a

$$T'' - T' = \sum_\beta a_\beta \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\beta \delta_0$$

(distribution à support l'origine) .

$$(36) \quad \text{d'où} \quad {}_\lambda T' - \lambda^\alpha T' = \sum a_\beta (\lambda^{-|a|-a\beta} - \lambda^\alpha)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\beta \delta_0$$

D'où, en rapprochant (35) et (36) :

$$\sum_\beta a_\beta (\lambda^{-|a|-a\beta} - \lambda^\alpha)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\beta \delta_0 = \lambda^\alpha \sum_{ak=\mathrm{Re}(\alpha')} \frac{(\frac{\partial}{\partial x})^k \delta_0}{k!} \langle T, y^k\rangle_\sigma \int_0^\infty r^{-1}(\psi(r) - \psi(\lambda r))$$

Ceci prouve :

- que les a_β tels que $< a.\beta > \neq \alpha'$ sont nuls.
- que tous les $k \in \mathbb{N}^n$ tels que $a.k = \alpha'$ donnent lieu à

(37) Remarque.

Dans le cas où l'on a (34) , le prolongement T' peut encore s'écrire

$$< T' , \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Sigma (L_{\alpha' \varepsilon} \varphi)(y)\, T(y)\, \sigma(y)$$

avec $(L_{\alpha'\varepsilon} \varphi)(y) = \int_\varepsilon^\infty r^{-\alpha'-1} \left(\varphi(r^{a_1} y_1 \ldots) - \sum_{ak<\alpha'} \frac{D^k \varphi(0)}{k!} r^{ak} y^k\right) dr$

ce qui, dans le cas où T est représentée par une fonction, correspond à une distribution "partie finie" .

§ 5 - Transformation de Fourier : distributions pseudohomogènes.

En vue des applications (voir par ex § 7) , il est utile d'étudier la transformation de Fourier, non seulement des distributions quasihomogènes sur tout l'espace, mais aussi des distributions quasihomogènes en dehors de l'origine. Soit donc U une telle distribution (quasihomogène de degré α' en dehors de l'origine). Notons d'abord que U est tempérée car pour toute φ dans $\mathcal{S}$, on a :

$$< U, \varphi > = < U, H_\alpha, \varphi >_\gamma + < P(D), \varphi >$$

où P(D) est une combinaison linéaire de distributions $(\frac{\partial}{\partial x})^k \delta_o$ avec $< a,k > = \alpha$ P(D) est donc nul s'il n'existe pas des entiers k_i tels que $< a,k > = \alpha$ ou si P(D) est une partie finie définie par la méthode holomorphe. Pour toute φ dans $\mathcal{S}$, définissons la transformée de Fourier $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ par :

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{i<x,\xi>} \varphi(x)\, dx$$

D'où $\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i<x,\xi>} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$

La transformée de Fourier des distributions tempérées est définie par la méthode de Schwartz ([14]) .

(38) proposition .

a) Soit T une distribution quasihomogène de degré α et définie sur X . Alors $\mathcal{F}T$ et $\bar{\mathcal{F}}T$ sont quasihomogènes de degré

$\alpha' = -\alpha - |a|$.

b) Soit T une distribution sur X et dont la restriction au complémentaire de l'origine est C^∞ et quasihomogène. Alors $\mathcal{F}T$ est quasihomogène dans le complémentaire de l'origine.

Démonstration .

a) résulte de changements de variables ; car pour toute φ dans $\mathcal{S}$ et tout $\lambda > 0$, on a :

$$_\lambda(\mathcal{F}\varphi) = \lambda^{-|a|}\, \mathcal{F}(_{\lambda^{-1}}\varphi)$$

D'où $$<_\lambda(\hat{T}), \varphi> = \lambda^{-|a|} < \hat{T}, {}_{\lambda^{-1}}\varphi > = \lambda^{-|a|} < T, \mathcal{F}(_{\lambda^{-1}}\varphi) >$$

$$= < T, {}_\lambda(\hat{\varphi}) > = \lambda^{-|a|} < {}_{\lambda^{-1}} T, \hat{\varphi} > = \lambda^{\alpha'} < T, \hat{\varphi}>$$

$$= \lambda^{\alpha'} < \hat{T}, \varphi >$$

b) Soit ζ une fonction de $C_o^\infty(X)$ valant 1 au voisinage de l'origine. On a

$$(ix)^k \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell T = (ix)^k \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell (1 - \zeta\, T) + (ix)^k \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell (\zeta\, T) .$$

Le dernier terme est une distribution à support compact, tandis que pour tout k , il existe ℓ tel que le 1[er] terme du second membre représente une fonction sommable. Donc :

$$\left[\mathcal{F}(ix)^k \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell T\right] = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k \xi^\ell\, \hat{T}$$

est la somme de deux fonctions continues : c'est donc une fonction continue, ce qui prouve que $\hat{T}$ est C^∞ dans le complémentaire de l'origine.

(39) proposition.

On suppose dès lors que les nombres a_i sont entiers strictement positifs. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n_\xi$ quasihomogène de degré α . Désignons par $p.f(T)$ la partie finie de T définie par la méthode complexe. On suppose que α' est un entier $p \geq 0$.

Posons $U = \bar{\mathcal{F}}(p.f.\ T)$

si $< a.\nu > = p$, on pose $m = \frac{\nu!}{p!} (2\pi)^{-n} i^\nu \int_{\gamma(x)=1} x^\nu\, T(x)\, \sigma(x)$

(m_α est un moment de T) . Alors pour tout $\lambda > 0$, on a :

(40) $\quad {}_\lambda U \;=\; \lambda^{\alpha}\, U + \lambda^{p} \log \lambda \sum\limits_{\langle a,\alpha\rangle = p} m_\alpha\, (x)^{\alpha}$

Démonstration .

Pour toute φ dans $\mathcal{S}$, on a :

$$\langle {}_\lambda U, \varphi\rangle \;=\; \lambda^{-|a|} \langle U, \varphi(\lambda^{-a_1} x_1,\dots)\rangle \;=\; \langle \text{p.f. } T, (\bar{\mathcal{F}}\varphi)(\lambda^{a_2} \xi_1,\dots)\rangle$$

$$= \langle T, H_p\, (\bar{\mathcal{F}}\varphi)(\lambda^{a_1} \xi_1,\dots)\rangle_\gamma$$

Vue la relation (24) , on a :

$$\langle {}_\lambda U, \varphi\rangle \;=\; \lambda^{p} \langle U, \varphi\rangle \;=\; \langle T, \frac{\lambda^p}{p!} \log \lambda \sum\limits_{\langle a,\nu\rangle p} \nu!\, x^\nu\, \partial_\nu\, \bar{\mathcal{F}}\varphi(0)\rangle_\gamma$$

Le dernier terme s'écrit :

$$\sum \langle T, x^\nu\rangle_\gamma \frac{\lambda^p}{p!} \log \lambda\; \nu!\, (2\pi)^{-n} \int (ix)^\nu\, \varphi(x)\, dx$$

On a donc la relation (40) .

Les résultats qui précèdent permettent de caractériser l'ensemble des transformées de Fourier des distributions sur $\mathbb{R}^n$ qui sont quasi-homogènes et C^∞ en dehors de l'origine.

(41) Définition des distributions pseudo-homogènes .

On suppose que les nombres a_i sont entiers > 0 . Soit U une distribution sur X , qui est C^∞ en dehors de l'origine

a) Si α' n'est pas un entier positif, on dit que U est pseudohomogène de degré α' lorsque U est homogène de degré α'

b) Si $\alpha' = p =$ entier positif ou nul, on dit que U est pseudohomogène de degré α' lorsque

$$U(x) \;=\; V(x) + \log t(x).P(x)$$

où V est quasihomogène de degré α' . P est un polynôme quasihomogène de degré α' et où γ est une fonction vérifiant les conditions de (8) (On voit que cette définition est indépendante de γ) .

(42) proposition .

Pour qu'une distribution sur $\mathbb{R}^n$ soit pseudohomogène de degré $\alpha' = -\alpha - |n|$, il faut et il suffit qu'elle soit la transformée de

Fourier d'une distribution qui est $\mathcal{C}^\infty$ et quasihomogène de degré α en dehors de l'origine.

§ 6 - Expression de la transformée de Fourier d'une distribution quasihomogène.

Dans ce § on suppose que les nombres a_i sont entiers strictement positifs et l'on considère une distribution U sur X dont la restriction au complémentaire de l'origine est quasihomogène de degré α. On cherche à présent une formule donnant $\mathcal{F}U$ ou $\overline{\mathcal{F}}U$.

On a
$$U = \text{p.f. } U + P(D)\,\delta_0$$

Comme la transformée de Fourier de $P(D)\delta_0$ est bien connue, nous pouvons supposer que $P=0$ et que la partie finie est définie par la méthode complexe. D'où pour toute g dans $\mathcal{S}$: $(\widehat{\text{p.f.} U}, g) = (\text{p.f. } U, \hat{g}) = (U, H_{\alpha'}\hat{g})_{\mathfrak{r}}$

On cherche alors à exprimer $H_{\alpha'}\hat{g}$ en fonction de g (et non de $\hat{g}$). Or formellement, on a :

$$(H_{\alpha'}\hat{g})(x) = \int_0^\infty r^{-\alpha-1}\,dr\left(\int g(u)\,e^{-i\sum r^{a_j}u_jx_j}\,du\right) = \int g(u)\,du\left(\int_0^\infty r^{-\alpha-1}e^{-i(r^{a_1}x_1u_1+\cdots)}\,dr\right).$$

D'où l'idée d'étudier les distributions sur X définies formellement par

$$u \mapsto \chi_\alpha(x,u_1,\dots) = \int_0^\infty r^{-\alpha-1}\exp\left[-i(r^{a_1}x_1u_1+\cdots)\right]dr.$$

Ces distributions dépendent des paramètres α et $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$. Les considérations heuristiques qui précèdent justifient les définitions suivantes

(43) Définition des distributions $u \mapsto \chi_{\alpha,\varepsilon}(x,u_1,\dots)$; avec $\varepsilon > 0$.

a) Si $\operatorname{Re}\alpha < 0$ et $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\chi_{\alpha,\varepsilon}(x,u_1,\dots) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon r}\,r^{-\alpha-1}\exp\left[-i(r^{a_1}x_1u_1+\cdots)\right]dr.$$

b) Pour $\varepsilon > 0$, on définit la distribution sur X s'écrivant en notation fonctionnelle $u \mapsto \chi_{\alpha,\varepsilon}(x,u,\dots)$ en intégrant par parties l'expression de $(\chi_{\alpha,\varepsilon}, \varphi)$ déduite de (43-a) :

(44)
$$\int \chi_{\alpha,\varepsilon}(x,u_1,\dots)\varphi(u)\,du = \int_0^\infty e^{-\varepsilon r}\,r^{-\alpha-1}dr\left[\int \varphi(u)\,e^{-i(r^{a_1}u_1x_1\dots)}du\right]$$
$$= \int_0^\infty e^{-\varepsilon r}\,r^{-\alpha-1}\,\hat{\varphi}(r^{a_1}x_1,\dots)\,dr = \left(\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p)\right)^{-1}\int_0^\infty r^{p-\alpha}\left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1}\left[e^{-\varepsilon r}\hat{\varphi}(r^{a_1}x_1,\dots)\right]dr$$

c) L'expression précédente montre que la fonction $\alpha \mapsto \int \chi_{\alpha,\varepsilon}(x,u,+\cdots)\varphi(u)\,du$ est méromorphe, les pôles étant $\alpha = 0, 1, \dots$. On prolonge alors cette fonction aux valeurs entières de α en convenant qu'au point $\alpha = p$, elle est égale au terme constant de son développement de Laurent au voisinage du point $\alpha = p$.

Utilisant le lemme élémentaire du 33, on voit que :

(45)
$$\int \chi_{p,\varepsilon}(x,u,\dots)\,\varphi(u)\,du$$
$$= \frac{1}{p!}\int_0^\infty \log\frac{1}{r}\left(e^{-\varepsilon r}\,\hat{\varphi}(r^{a_1}x_1,\dots)\right)^{(p+1)}dr + O(\varepsilon,\varphi) + \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}+\dots+1}{p!}\sum_{\langle a,\nu\rangle=p} x^\nu \nu!\,\partial^\nu\hat{\varphi}(0)$$

où $O(\varepsilon,\varphi)$ désigne une quantité de l'ordre de grandeur de ε, uniformément lorsque φ décrit un borné de $\mathcal{S}$.

(46) Définition des distributions $u \overset{T}{\longmapsto} \chi_\alpha(x,u_1,\dots x_n u_n)$

α étant un nombre complexe fixé, T est la limite dans $\mathcal{S}'(X)$ des distributions $u \mapsto \chi_{\alpha,\varepsilon}(x,u_1,\dots)$ lorsque ε tend vers 0. Les formules (44) et (45) montrent que :

a) Pour α non entier $\geqslant 0$:
$$\int \chi_\alpha(x,u_1,\dots)\varphi(u)du = \int_0^\infty \frac{r^{p-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p)}\left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1}\hat{\varphi}(r^{a_1}x_1,\dots)\,dr$$

b) Pour α égal à un entier $p \geqslant 0$:
$$\int \chi_p(x,u_1,\dots)\varphi(u)du = \frac{1}{p!}\int_0^\infty \log\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1}\hat{\varphi}(r^{a_1}x_1,\dots)dr + \frac{1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{p}}{p!}\sum_{\langle a,\nu\rangle=p} x^\nu\nu!\,\partial^\nu\varphi(0)$$

(47) Proposition.

Pour tout g dans $\mathcal{S}$, on a :

a) pour $\xi \neq 0$ $\qquad (H_\alpha\hat{g})(\xi) = \int \chi_\alpha(x,\xi_1,\dots)\,g(x)\,dx$

b) pour $x \neq 0$ $\qquad (H_\alpha \bar{\mathcal{F}} g)(\xi) = (2\pi)^{-n}\int \chi_\alpha(-x,\xi_1,\dots)\,\hat{g}(\xi)\,d\xi.$

Démonstration.

Si $\operatorname{Re}\alpha < 0$ et $\varepsilon > 0$, on a :
$$\int_0^\infty r^{-\alpha-1}e^{-\varepsilon r}\hat{g}(r^{a_1}x_1,\dots)\,dr = \int_0 g(\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-i(r^{a_1}x,\xi_1,\dots)-\varepsilon r}\,r^{-\alpha-1}dr$$
$$= \int g(\xi)\,\chi_{\alpha,\varepsilon}(x,\xi_1,\dots)\,d\xi$$

Une suite d'intégration par parties donne :
$$* \qquad \int_0^\infty \frac{r^{p-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p)}\left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1}e^{-\varepsilon r}\hat{g}(r^{a_1}x_1,\dots)\,dr = \int g(\xi)\,\chi_{\alpha,\varepsilon}(x,\xi_1,\dots)\,d\xi$$

Ceci prouve que les deux membres de cette égalité sont des fonctions méromorphes de α, dont les pôles sont $\alpha = 0, \alpha = 1, \dots$. En faisant tendre ε vers 0 et en supposant α non entier, on obtient (47-a). Pour prouver (47-a) lorsque α est un entier $p \geqslant 0$, il suffit d'égalité les termes constants des développements de Laurent au voisinage de $\alpha = p$. (pour les fonctions définies par $*$) puis de faire tendre ε vers 0. On prouve de même (47-b).

(48) <u>Définition de la distribution</u> $\dot{V}(x) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\, U(\xi)\sigma(\xi)$

Soit U une distribution sur $\dot{\mathbb{R}}^n_x$, quasihomogène de degré α. Alors on peut définir une distribution V sur $\dot{\mathbb{R}}^n_x$ de la façon suivante.

Pour toute g dans $\mathcal{S}$, nulle au voisinage de l'origine, on pose :

$$(V,g) = \int g(x)\,dx \left(\int \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\, U(\xi)\sigma(\xi)\right) = \int_{\gamma=1} U(\xi)\sigma(\xi)\left(\int \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\, g(x)\,dx\right)$$

On voit en effet que si (g_n) tend vers 0 dans $\mathcal{S}$:

$$A_n(\xi) = \int \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\, g_n(x)\,dx \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}^\infty(\Sigma)$$

Donc $\quad (V, g_n) = (U, A_n)_\gamma \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$

(49) <u>Théorème</u>.

Soit T une distribution quasihomogène définie sur $\dot{\mathbb{R}}^n_x$ et de degré α.
Soit $U =$ p.f. T le prolongement de T défini par la méthode complexe: voir (25).

alors a) : $\quad (\mathcal{F}U)(x) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\, T(\xi)\sigma(\xi)$

b) : $\quad (\bar{\mathcal{F}}U)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\, T(\xi)\sigma(\xi)$

<u>Démonstration</u>.

Pour g dans $\mathcal{S}$, on a :

$$(\mathcal{F}U, g) = (U, \mathcal{F}g) = (U, H_{\alpha'}\mathcal{F}g)_\sigma$$

En utilisant les formules (47), on obtient :

$$(\mathcal{F}U, g) = \int_{\gamma=1} U(x)\left[\int \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\, g(x)\,dx\right]\sigma(x)$$

Vue la définition (48) ceci donne :

$$(\mathcal{F}U, g) = \left(\int U(x)\, \chi_{\alpha'}(x,\xi_1,\dots)\sigma(x), g\right)$$

D'où la formule (49-a). On prouve de même (49-b).

(50) <u>Remarque</u>.

Toute distribution T' qui coïncide avec T dans le complémentaire de l'origine, diffère de T d'une combinaison linéaire finie de dérivées de masses de Dirac. Par conséquent, pour toute distribution T' sur $\mathbb{R}^n_x$ qui est quasihomogène dans le complémentaire de 0, on a :

$$\mathcal{F}T' = \mathcal{F}U + \text{polynome}$$

(51) <u>Exemple</u>.

La fonction $U \equiv 1$ est quasihomogène de degré 0, et sa transformée de Fourier inverse δ_0 est quasihomogène de degré $-|a|$. La formule (49-b) montre que :

(52) $$\delta_0(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\gamma=1} \chi_{-|a|}(-x,\xi_1,\dots)\,\sigma(\xi)$$

(53) soit $$\varphi(0) = (2\pi)^{-n} \int_{\gamma=1} \sigma(\xi)\left[\int \chi_{-|a|}(-x,\xi_1,\dots)\varphi(x)\,dx\right]$$

Dans le cas où tous les a_i sont égaux, (52) correspond à la décomposition de δ_0 en ondes planes ; tandis que (53) se réduit alors à la formule permettant de résoudre le problème de Radon : voir [8] .

(54) Interprétation géométrique.

Nous allons interpréter géométriquement les calculs des paragraphes 3 et 6. On suppose donnée une distribution T_α , quasihomogène de degré α dans le complémentaire de l'origine. Pour tout θ dans Σ et toute φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, posons :

(55) $$Q_{\alpha',\theta}(\varphi) = (H_{\alpha'}\varphi)(\theta)$$

$Q_{\alpha',\theta}$ est une distribution étalée sur l'orbite de θ . Pour θ fixé dans Σ, $Q_{\alpha',\theta}$ est une fonction méromorphe de α' à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$; tandis que pour α' fixé, $Q_{\alpha',\theta}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de θ . On note $T(\theta)$ la restriction de T à Σ . La formule (26) permet d'écrire le prolongement holomorphe T'_α de T_α sous la forme :

(56) $$T'_\alpha = \int_\Sigma Q_{\alpha',\theta}\, T(\theta)\,\sigma(\theta)$$

l'intégrale étant considérée comme l'accouplement entre la distribution $T(\theta)$ définie sur Σ , et la fonction $\theta \mapsto Q_{\alpha',\theta}$, définie sur Σ et $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathcal{S}'$. T'_α est une fonction méromorphe de α' , puisqu'il en est ainsi de chaque distribution tempérée $Q_{\alpha',\theta}$. Comme la transformation de Fourier est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}'$, il résulte de (56) que :

(57) $$\boxed{\hat{T} = \int \widehat{Q_{\alpha',\theta}}\; T(\theta)\,\sigma(\theta)}$$

Or le raisonnement heuristique fait au début du paragraphe 6, et le principe du prolongement analytique, montrent que la transformation de Fourier de $Q_{\alpha',\theta}$ est la distribution $\xi \mapsto \chi_{\alpha'}(\theta,\xi_1,\dots)$. Par conséquent, la formule (57) coïncide avec (49-a). Dans le cas particulier des distributions positivement homogènes dans le complémentaire de l'origine, la formule (57) peut être rendue encore plus explicite.

En effet, dans ce cas $Q_{\alpha',\theta} = R_{\alpha',\theta} \times S_{\alpha',\theta}$

$R_{\alpha',\theta}$ désigne une distribution égale à $r_+^{-\alpha'-1}$ sur la droite portant θ, tandis que $S_{\alpha',\theta}$ désigne la distribution de Dirac à l'origine de l'hyper plan d'équation $\langle x,\theta\rangle = 0$. Autrement dit $Q_{\alpha',\theta}$ est un produit direct de deux distributions.

(58) D'où $$\widehat{Q}_{\alpha',\theta} = \widehat{R}_{\alpha',\theta} \times \widehat{S}_{\alpha',\theta}$$

$\widehat{S}_{\alpha',\theta}$ est égale à 1 , tandis que $\widehat{R_{\alpha',\theta}}$ a une expression connue : voir [3]. Dans le cas où les a_j sont quelconques, il serait intéressant d'étudier avec précision les distributions $\widehat{Q_{\alpha',\theta}}$.

§ 7 - Distribution quasihomogènes nulles dans un demi-espace.

Pour simplifier l'exposé, nous nous limitons au cas (important dans les applications) où $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$. Soit T une distribution sur quasihomogène de degré α . On montre dans ce paragraphe qu'à l'annulation de T sur le demi-espace où $x_n < 0$, il correspond un prolongement holomorphe de $\widehat{T}(\xi', \xi_n)$ dans le demi-espace où $\operatorname{Im} \xi_n < 0$. Pour démontrer ceci, on utilisera les résultats du paragraphe 6. Notons d'abord le lemme suivant, très utile, et qui ne fait pas intervenir d'hypothèses de quasihomogénéité. On pose

(59) Lemme.

Soit $f(\xi', \zeta_n)$ définie pour ξ' dans $\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'}$ et $\operatorname{Im} \zeta_n = \tau < \tau_0$, telle que :
- pour tout $\tau < \tau_0$, $\xi \mapsto f(\xi + i\tau N)$ est continue
- pour ξ' fixé, $\zeta_n \mapsto f(\xi', \zeta_n)$ est holomorphe
- pour ξ' fixé, $\zeta_n \mapsto f(\xi', \zeta_n)$ est à croissance lente par rapport à $|\zeta_n|$
- pour un $\tau < \tau_0$, la forme linéaire :

(60) $$\varphi \mapsto \int f(\xi + i\tau N)\, \varphi(\xi + i\tau N)\, d\xi$$

est définie et continue sur $\mathcal{Z}$; avec $N = (0, 0, \dots 0, 1)$
Alors cette forme linéaire défini un élément f de $\mathcal{Z}'$. De plus, dans la définition (60) de f , on peut remplacer τ par τ' quelconque plus petit que τ_0 . De plus $T = \overline{\mathcal{F}} f$ est nulle pour $x_n < 0$.

Démonstration.

Vu le théorème de Fubini, on a :

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'}} d\xi' \int_{\operatorname{Im} \zeta_n = \tau} f(\xi', \zeta_n)\, \varphi(\xi', \zeta_n)\, d\zeta_n$$

Le théorème de Cauchy montre que la 2^{e} intégrale ne change pas lorsqu'on remplace τ par $\tau' < \tau$. Pour montrer que $T = \overline{\mathcal{F}} f$ est nulle pour $x_n < 0$, on prend ψ dans $\mathcal{D}$, nulle pour $x_n > -\varepsilon$ et l'on cherche à montrer que $(T, \psi) = 0$. Or la formule de Parseval montre que :

$$(T,\psi) = (2\pi)^{-n}\,(\hat{T},\check{\hat{\varphi}}) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'}} d\xi' \int_{\operatorname{Im}\zeta_n=\tau} f(\xi',\zeta_n)\,\hat{\psi}(-\xi',-\zeta_n)\,d\zeta_n$$

En faisant tendre τ vers $+\infty$, on voit que la dernière intégrale est nulle, soit $(T,\psi)=0$. On étudie à présent le cas particulier où f est quasihomogène.

(61) Lemme.

Soit $f(\xi',\zeta_n)$ une fonction définie pour tout ξ' et tout ζ_n tel que $\operatorname{Im}\zeta_n=\tau<0$. On suppose que f est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à ξ', continue par rapport à (ξ',ζ_n) pour τ fixé, holomorphe par rapport à ζ_n, et quasihomogène de degré α'. Alors f est une distribution quasihomogène de degré α'. De plus $\bar{\mathcal{F}}f=T$ est une distribution quasihomogène de degré α, et nulle pour $x_n<0$.

Démonstration.

On montre d'abord que f est une fonction généralisée de $\mathcal{Z}'$, quasihomogène de degré α', soit :

$$* \qquad ({}_{\lambda}f,\varphi) = \lambda^{\alpha'}(f,\varphi) \quad \text{pour } \lambda>0,\ \varphi\in\mathcal{Z}.$$

Or $({}_{\lambda}f,\varphi) = \lambda^{-|a|}\,(f,\varphi(\lambda^{-a_1}x_1,\dots\lambda^{-a_n}x_n)) = \lambda^{-|a|}\int d\xi'\int_{\operatorname{Im}\zeta_n=\tau} f(\xi',\zeta_n)\,\varphi(\lambda^{-a_1}\xi',\lambda^{-a_n}\zeta_n)\,d\zeta_n$

En effectuant les changements de variable $\lambda^{-a_1}\xi'=\tilde{\xi}'$ et $\lambda^{-a_n}\zeta_n=\tilde{\zeta}_n$ puis en utilisant le théorème de Gauchy, on obtient $*$. De ceci résulte que $\bar{\mathcal{F}}f=T$ est une distribution quasihomogène de degré α. De plus T est tempérée et T est nulle pour $x_n<0$. Par conséquent $\mathcal{F}T=f$ est en fait une distribution.

(62) Exemples.

a) De nombreuses solutions élémentaires d'opérateurs différentiels à coefficients constants peuvent être construites en utilisant le lemme (59). Par exemple si $P(D)$ est un opérateur hyperbolique par rapport à la direction N, on a $P(\xi+i\tau N)\neq 0$ pour $\tau<\tau_0$. Alors $P(D)$ admet une solution élémentaire E telle que :

(63) $$\check{E}(\upsilon) = (2\pi)^{-n}\int \frac{\hat{\upsilon}(\xi+i\tau N)}{P(\xi+i\tau N)}\,d\xi \qquad \text{avec } \tau<\tau_0$$

Il en est de même pour les opérateurs paraboliques au sens de Hörmander : voir [5] chapitre V. Les noyaux de Poisson fournissent d'autres exemples (voir plus loin).

Pour démontrer la propriété énoncée au début de ce paragraphe il nous suffit alors de montrer le :

(64) Lemme.

Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$, nulle pour $x_n < 0$, et quasihomogène de degré α . On suppose que T vérifie l'une des hypothèses suivantes :
(i) T est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine
(ii) La restriction T (θ) de T à Σ est telle que T $(\theta) = 0$ si $\theta_n < \varepsilon$. Alors il existe une fonction $f(\xi', \zeta_n)$ vérifiant les hypothèses du lemme 2 et telle que la fonction généralisée f correspondante soit égale à $\mathcal{F}T$. Noter que l'exemple de la fonction caractéristique du demi-espace où $x_n > 0$, montre qu'une hypothèse supplémentaire est nécéssaire.

Démonstration.

Soit θ dans Σ tel que $\theta_n > 0$. Supposons que $\operatorname{Im} \zeta_n = \tau < 0$ et posons

$$\psi = \exp\left[-i\left(r^{a_1}\theta'\xi' + r^{a_n}\theta_n\zeta_n\right)\right]$$

Nous définissons $P_{\alpha',\theta}$ à l'aide des expressions suivantes :

$$P_{\alpha',\theta}(\xi',\zeta_n) = \begin{cases} \int_0^\infty r^{-\alpha'-1}\psi\, dr \;;\; \text{si } \operatorname{Re}\alpha' < 0. \\ \text{si } \operatorname{Re}\alpha' \geqslant 0 \text{ et } \alpha' \text{ non entier :} \\ \left[\alpha'(\alpha'-1)\cdots(\alpha'-p)\right]^{-1}\int_0^\infty r^{-\alpha'+p}\left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1}\psi\, dr. \\ \text{et si } \alpha' \text{ est égal à un entier } p \geqslant 0 : \\ \frac{1}{p!}\int_0^\infty \log\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1}\psi\, dr + \frac{1}{p!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{p}\right)\sum_{\langle a,\nu\rangle = p}\theta^\nu \xi'^{\nu'}\zeta_n^{\nu_n}\partial^\nu\varphi(0) \end{cases}$$

$P_{\alpha',\theta}$ est holomorphe par rapport à ζ_n , $\mathcal{C}^\infty$ par rapport ξ' . Lorsque α' n'est pas un entier $\geqslant 0$, $P_{\alpha',\theta}$ est positivement homogène de degré α' par rapport à (ξ', ζ_n) . On pose alors

(66) $$f(\xi',\zeta_n) = \int_{\theta\in\Sigma} T(\theta)\, P_{\alpha',\theta}(\xi',\zeta_n)\,\sigma(\theta)$$

On s'aperçoit alors que l'hypothèse supplémentaire (i) ou (ii) entraîne que f est $\mathcal{C}^\infty$ en ξ' et holomorphe en ζ_n . De plus $f(\xi', \zeta_n)$ est quasihomogène : dans le cas où α' n'est pas entier positif cela résulte de la propriété correspondante pour $Q_{\alpha',\theta}$; dans le cas contraire cela résulte du fait que tous les moments d'ordre α' de T sont nuls. Il reste à vérifier que $f(\xi', \zeta_n)$ représente $\mathcal{F}T$.

Or $$P_{\alpha',\theta}(\xi',\zeta_n) = \mathcal{F}\left(e^{r^{a_n}\theta_n\tau}\, Q_{\alpha',\theta}\right).$$

Donc si τ tend vers 0 , $P_{\alpha',\theta}(\cdot\,,\cdot+i\tau)$ tend vers $Q_{\alpha',\theta}$ et $P_{\alpha',\theta}(\cdot\,,\cdot+i\tau)$ tend vers $Q_{\alpha',\theta}$ dans $\mathcal{Z}'$. Vu (57) et (66) , l'hypothèse complé mentaire, il en résulte que $f(\xi', \zeta_n)$ représente T .

§ 8 - Application.

Solutions élémentaires.

Considérons un opérateur différentiel :

$$P(D) = \sum_{\langle a,\alpha\rangle = m} a_\alpha \left(i^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

On suppose $P(D)$ semi-elliptique, c'est-à-dire que les constantes a_α sont telles que :

$$P(\xi) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \xi = 0.$$

Alors la fonction $\xi \mapsto (P(\xi))^{-1}$ est quasihomogène de degré $-m$ dans le complémentaire de l'origine.

(67) Posons $$U = \text{p.f.}(P^{-1}) \qquad \text{et} \qquad E = \bar{\mathcal{F}} U$$

la partie finie étant définie par la méthode complexe. Vu (29), on a :

$$\mathcal{F}(P(D)E) = P(\xi)\cdot \text{p.f.}(P^{-1}) = \text{p.f.}\ \frac{P(\xi)}{P(\xi)} = 1$$

Donc $P(D)E = \delta_0$, c'est-à-dire que E est une solution élémentaire de l'opérateur $P(D)$. E est pseudo homogène. Dans le cas où $m - |a|$ est un entier $k \geqslant 0$, E comporte une partie logarithmique qui peut être calculée en fonction des moments d'ordre k de P^{-1} . Dans le cas particulier où $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ pour $\tau < 0$, les résultats du paragraphe 7 montrent que $P(D)$ admet une solution élémentaire quasihomogène, c'est-à-dire sans partie logarithmique.

Intégrales singulières.

Conservons les notations précédentes et considérons un multi-indice α tel que $\langle a, \alpha\rangle = m$.

Vu (29), on a

$$\mathcal{F}\left[\left(i^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha E\right] = \xi^\alpha\ \text{p.f.}\ \frac{1}{P(\xi)} = \frac{\xi^\alpha}{P(\xi)}$$

La distribution $T = i^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha E$ est donc la transformée de Fourier inverse d'une distribution quasihomogène de degré 0 , $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine. L'opérateur de convolution par T a des prorpriétés remarquables (on dit que $T*$ est une intégrale singulière) qui seront étudiées par ailleurs. Rappelons que les intégrales singulières ont été introduites par Tricomi et Giraud dans le cas homogène et dans un cas particulier, par Jones, pour étudier l'équation de la chaleur.

Opérateurs pseudo différentiels.

Comme on l'a indiqué dans [12]', il est facile de généraliser la théorie des opérateurs pseudo différentiels classiques en considérant des fonctions $p(x,\xi)$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$) telles que :

(68) $$k(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} k_j(x,\xi) \quad \text{si } |\xi| \to \infty$$

où chaque fonction k_j est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \times \dot{\mathbb{R}}^n_\xi$, et quasihomogène de degré m_j par rapport à ξ, ((m_j) est une suite décroissante qui tend vers $-\infty$). Cette classe permet certaines applications aux équations semi elliptiques. Une classe plus particulière d'opérateurs pseudo-différentiels peut être obtenue en supposant que $a_1 = \cdots = a_{n-1}$, et que les fonctions' k et $k_j(x,\xi)$ admettent des prolongements holomorphes par rapport à la variable complexe ξ_n pour $\mathrm{Im}\,\xi_n < 0$. L'étude de cette classe a été effectuée par M. Visik et E. Eskin et par A.Piriou (à paraître). L'intérêt de cette classe est qu'elle permet l'étude des problèmes aux limites pour des opérateurs différentiels paraboliques.

Noyaux de Poisson.

Les noyaux de Poisson classiques sont des opérateurs intégraux de convolution qui donnent la solution de problèmes bien posés du type : "trouver $u(x) = u(x', x_n)$ tel que :

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{si} \quad x_n > 0 \\ B(\gamma u) = g & \text{si} \quad x_n = 0 \end{cases}$$

où P est un opérateur différentiel elliptique de degré m, $\gamma u = (u_0, \ldots u_{m-1})$ est l'ensemble des données de Gauchy sur l'hyperplan où $x_n = 0$, B est une certaine famille d'opérateurs différentiels homogènes et g est un certain ensemble de distributions données sur $\mathbb{R}^{n-1}_{x'}$. Ces noyaux sont décrits et étudiés dans [D] à l'aide de la formule de Radon. Mais on peut retrouver ces résultats en utilisant une transformée de Laplace, analogue à celle que nous avons utilisée au § 7. L'avantage est que l'on obtient directement ainsi que les noyaux de Poisson sont des distributions homogènes (et non pas pseudo-homohènes). Bien sur, ces méthodes se généralisent au cas où P est semi-elliptique : ceci sera détaillé ailleurs.

§ 9. BIBLIOGRAPHIE

[0] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG - Estimates near the boundary for solutions ... Comm. on pure and appl. math., vol. XII (1959) pp. 623-727.

[1] L. GARDING - Transformation de Fourier des distributions homogènes. Bull. soc. math. France, 89 (1961) pp. 381 - 428.

[2] I.M. GELFAND et Z.J. SAPIRO - Les fonctions homogènes et leurs applications. Usp. math. Nauk. USSR , t. 10. 1055 n° 3,pp. 370.

[3] I.M. GELFAND et G.E. SILOV - Les fonctions généralisées et leurs applications t. 1, Moscou 1958.

[4] G. GIRAUD - Equations à intégrale principale. Ann. E.N.S. Paris, (1934) pp. 251 - 372.

[5] L. HORMANDER - Linear Partial Differential operators, Springer (1964).

[6] L. HORMANDER - Pseudo differential operators. (Comm. on pure and appl. math. 18, (1965), pp. 501 - 517.

[7] P. JEANQUARTIER - Distributions et opérateurs différentiels invariants. Comm. math. helv. vol. 39, fasc. 3, (1964).

[8] F. JOHN - The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients. Comm. on pure and appl. math., t. 2, (1950) pp. 273 - 304.

[9] F. JONES - Singular integrals and parabolic equations. Bull AMS 69, (1963), pp. 501 - 503.

[10] JJ. KOHN et L. NIRENBERG - On a algebra of pseudo differential operators. Comm. on pure and appl. math. , 18, pp. 269 - 305 (1965).

[11] P. KRÉE - Sur les multiplicateurs dans FL^P Ann. Inst. Fourier, t. 16, fasc. 2, (1966) pp. 33 - 100.

[12] P. KRÉE - C.R. acad. sc. Paris, t. 261, pp. 2560 - 2563, (4 octobre 1965).

[12]' P. KRÉE - Intégrales singulières - séminaire Bourbaki (novembre 1965).

[13] J. LERAY - Problème de Cauchy IV - Bull. soc. math. France, t. 90, (1962), pp. 1 - 100.

[14] L. SCHWARTZ - Théorie des distributions, t. 1 et 2 - Hermann (1950 et 1951).

[15] SEELEY - Rafinement of the functional calculus of Calderon Zygmund. Koning. nederl. akad. von wetenschappen 69, n° 3 (1965).

[16] TRICOMI - Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio -Math. zeitsch., t. 27, (1927), pp. 87 - 133.

II - INTEGRALES SINGULIERES

1. En vue des applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, TRICOMI [16] et GIRAUD [4] ont introduit des distributions "valeur principale" généralisant la distribution v.p.$(\frac{1}{x})$. Ces distributions sont définies de la façon suivante (toutes les fonctions ou distributions sont à valeurs complexes) :

Soit k une fonction définie sur $\dot{X}$ (complémentaire de l'origine dans l'espace euclidien $X = E_x^n$

(A') k est homogène de degré $-n$:

$$\forall\ \lambda\ (> 0)\ ,\ \forall\ x \text{ dans } \dot{X}\ ,\ k(\lambda x) = \lambda^{-n}k(x)$$

(B') k restreint à la sphère unité S de X a certaines propriétés de régularité (par exemple k S est continuement dérivable)

(C') l'intégrale de k sur S est nulle :

$$\int_{|x|=1} k = 0$$

Pour tout $\epsilon' > 0$, $k_{\epsilon'}$ est la fonction sur X telle que :

$$k_{\epsilon'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq \epsilon' \\ k(x) & \text{si} |x| > \epsilon' \end{cases}$$

Alors $\text{v.p.}k = \lim\limits_{\epsilon' \to 0} k_{\epsilon'}$ (dans $\mathcal{D}'(X)$)

GIRAUD [4] (resp Calderon ZYGMUND [2]) a (resp, ont) montré que la convolution par v.p.(k) définit de façon naturelle un opérateur linéaire continu dans les classes de fonctions höldériennes (resp, les classes de LEBESGUE $L^p(X)$ avec $1 < p < \infty$)

2. En vue des applications à l'équation de la chaleur, F. JONES ([7]) a introduit des distributions v.p.(k) ainsi définies. Soit k une fonction définie sur X telle que :
(on pose $x = (x_1,x')$; $x' = (x_2,\dots x_n)$, $|x'| = (\sum_{i=2}^{n} x_i^2)^{1/2}$)

(A") $\forall\ \lambda > 0\ ,\ \forall\ x\ ,\ k(\lambda^2 x_1,\lambda x') = \lambda^{-(n+1)}\, k(x)$

(B") k vérifie certaines conditions de régularité

(C") $\int k\ (1\ ,\ x')\ dx' = 0$ et $k\ (x_1\ ,\ x') = 0$ si $x_1 \leq 0$

Pour tout $\epsilon'' > 0$, $k_{\epsilon''}$ désigne la fonction sur X telle que :

$$k_{\epsilon''}(x) = \begin{cases} k(x) & \text{si } x_1 \geq \epsilon'' \\ 0 & \text{si } x_1 < \epsilon'' \end{cases}$$

(D") Alors, F. JONES pose :

$$\text{v.p.}(k) = \lim_{\epsilon'' \to 0} k_{\epsilon''} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(X)$$

F. JONES a également montré que la convolution par v.p.k définit pour tout $p(1 < p < \infty)$ un opérateur continu dans $L^p(X)$

3. En vue d'applications aux équations semi-elliptiques et pour simplifier l'exposé de la théorie, il nous a semblé utile d'introduire une classe d'intégrales singulières contenant à la fois les intégrales singulières de TRICOMI-GIRAUD et celles de F. JONES.

Il est facile de généraliser les conditions (A') et (A") : il suffit de se donner un système de n nombres $a_i > 0$, et de considérer les fonctions k sur $\dot{X}$ telles que :

$$(A). \quad \forall \lambda > 0 , \forall x , \quad k(\lambda^{a_1} x_1, \ldots, \lambda^{a_n} x_n) = \lambda^{-|a|} k(x)$$

Mais il est plus difficile a priori de relier les conditions (C') et (C")

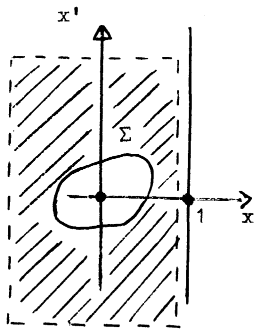
4. Cette formulation s'introduit naturellement (voir [12]) lorsqu'on étudie des distributions quasihomogènes. La voici :

Σ étant une variable orientable compacte "entourant l'origine" et σ étant la $(n - 1)$ forme suivante définie sur X :

$$\sigma(x) = \sum_{i=1} a_i\, x_i\, d_i\, x \qquad \text{avec} \qquad d_i x = (-1)^{i-1}\, dx_1 \wedge \ldots dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge dx_n$$

$$(C) \qquad \int_{\Sigma} k(x)\, \sigma(x) = 0$$

La formule de STOKES montre alors que cette condition ne dépend pas de Σ (car la forme $k\sigma$ est fermée) .



De même on voit que (C) ==> (C') en regardant la figure ci-contre, en appliquant la formule de STOCKES au domaine hachuré et par un passage à la limite (les noyaux de JONES décroissent exponentiellement lorsque $|x'| \to \infty$ et sont nuls pour $x_1 < 0$)

Les conditions (D') et (D") se généralisent alors tout naturellement :

(D) Pour tout $\epsilon > 0$, $\epsilon\,\Sigma$ désigne la surface déduite de Σ par l'homothétie de centre 0 et de rapport ϵ . k_ϵ désigne la fonction égale à k à l'extérieur de $\epsilon\,\Sigma$ et nulle à l'intérieur de $\epsilon\,\Sigma$. On pose :

(1) $$\text{v.p.}k = \lim_{\epsilon \to 0} k_\epsilon \qquad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(X)$$

(l'intérieur de $\epsilon\,\Sigma$ est un"domaine d'exclusion") .

Ces remarques étant faites, il est facile d'étendre aux intégrales singulières ainsi définies les propriétés des intégrales singulières de TRICOMI-GIRAUD; car il suffit de remplacer dans tous les raisonnements relatifs à ces dernières intégrales, les domaines d'exclusion de forme sphérique (ou cubique) par des domaines d'exlusion parallélipédiques. C'est ainsi par exemple qu'on prouve la continuité dans $L^p(X)$ des opérateurs v.p.(k)* , et ce résultat a déjà des applications dans l'étude des équations paraboliques (voir [5]) . Le but de ce papier est de rassembler tous les résultats sur les intégrales singulières, ainsi obtenus.

Le plan de l'étude est le suivant : après quelques préliminaires (géométrie, distributions quasihomogènes) on définit les distributions "p.f.k" , k ayant des propriétés d'homogénéité convenables; lorsque le degré d'homogénéité de k est $-|a|$, on pose p.f.k = v.p.k et l'intégrale singulière associée est l'opérateur de convolution par cette distribution (voir § 2). Au § 3, on donne les résultats de quelques calculs relatifs à la dérivation. Noter à ce point de vue l'avantage de la méthode de prolongement complexe (prop (29) du § 3 de [12]) sur la méthode réelle (définie au § 2 de la présente étude).

En effet, si la distribution p.f.k est définie par la méthode complexe, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{p.f.}k) = \text{p.f.}\,\frac{\partial k}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad x_i\,(\text{p.f.}k) = \text{p.f.}\,(x_i\,k)$$

alors que ces relations sont fausses en général si les parties finies sont définies par la méthode réelle. La transformation de Fourier est étudiée en § 4 (les énoncés des quelques résultats, relatifs aux distributions quasihomogènes et qui sont utilisés ici,sont rappelés au § 2).

On étudie alors quelques propriétés des intégrales singulières :
- continuité dans les classes $\mathcal{C}^{\alpha}$
- continuité dans les espaces L^p

. . .

§ 1. Préliminaires.

On se donne une fois pour toutes un système $a = (a_1 \dots a_n)$ de n nombres $a_i > 0$.

On pose $|a| = \sum_{i=1}^{n} a_i$; et si b est un autre n-uple de nombres, on note $<a, b> = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

On pose $X = \mathbb{R}^n_x$ et $\dot{X} = X$ moins l'origine

(2) fonctions quasihomogènes.

α étant un nombre complexe quelconque et f une fonction sur $\dot{X}$ continuement dérivable (toutes les fonctions ou distributions sont supposées à valeurs complexes), on dit que f est quasihomogène de degré α si

(3) $\forall \lambda > 0 \qquad \forall x \qquad f(\lambda^{a_1} x_1, \dots) = \lambda^{\alpha} f(x)$

Pour une telle fonction, on a une formule d'Euler :

(4) $$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, \partial_i f(x) = \alpha\, f(x)$$

$$\text{avec} \qquad \partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

D'ailleurs pour tout $i = 1 \dots n$, $\partial_i f$ est quasihomogène de degré $\alpha - a_i$

(5) fonction γ et surface $\sum$

(6) Dans ce qui suit, γ désigne une fonction définie sur $\dot{X}$, à valeurs positives, continue, C^{∞} par morceaux(a) et quasihomogène de degré 1. Par exemple si les a_i sont entiers et si m désigne le plus petit entier tel que chaque a_i divise $\frac{m}{2}$, on peut prendre

$$\gamma(x) = (\sum x_i^{m/a_i})^{\gamma_m}$$

Σ désigne le lieu des points x de X où $\lambda(x) = 1$.

(7) distance invariante par translation sur X .

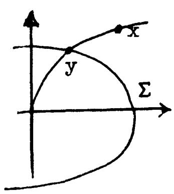
On note que si f vérifie (4), alors f vérifie la relation déduite de (4) en multipliant α et chaque a_i par une même constante positive. On peut donc supposer que

$$\forall\, i \quad , \quad a_i \geq 1 \; .$$

Posons alors $[x] = \sup_i |x_i|^{1/a_i}$

L'application $(x\ ,\ y) \longrightarrow [x - y]$ définit alors une distance sur X ; cette distance sera très utile pour l'étude des intégrales singulières anisotropes liées à la suite $a = (a_1, a_2, \dots a_n)$

(8) Coordonnées "polaires". Elément de volume en coordonnées polaires.



Pour tout x dans $\dot{X}$, notons y l'intersection de Σ avec l'orbite de x relativement au groupe de transformations $x \longrightarrow (\lambda^{a_1} x_1, \dots \lambda^{a_n} x_n)$

On a donc : $x_1 = \gamma(x)^{a_1}\, y_1 \dots \qquad x_n = \gamma(x)^{a_n} y_n$

Soit $(\theta_1 \dots \theta_{n-1}) = \theta$ un système de coordonnées locales sur Σ , au voisinage du point y.

Les n nombres $\theta_1(x) \dots \theta_{n-1}(x)$, $\rho = \gamma(x)$ repèrent le point x : nous dirons que ce sont ses coordonnées "polaires".

Pour chercher l'expression de l'élément de volume en coordonnées "polaires", on remarque que

$$(9) \qquad d\,\gamma(x) \wedge \sigma(x) = \gamma(x)\, dx$$

$$\text{avec} \qquad dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$(10) \qquad \text{et} \qquad \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, d_i x$$

$$(\; d_i x = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n)$$

$$(11) \qquad \text{Donc} \qquad dx = \gamma(x)^{|a|-1}\, d\,\gamma(x) \wedge \sigma\,(y)$$

Pour obtenir la transposée de la n-forme dx par l'application $(\theta\ ,\ \rho) \longrightarrow x$ il suffirait dans cette expression de remplacer $\gamma(x)$ par ρ et les y_i par leurs expressions en fonction de $\theta_1 \dots$ et θ_{n-1} .

(12) Distributions quasihomogènes.(b)

Soit T une distribution sur X. On dit que T est quasihomogène de degré α si :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty (X) \ , \ \forall \lambda > 0 \ . \ \lambda^{-|a|} \int T(x)\, \varphi(\lambda^{-a_1}x, ..)\, dx = \lambda^\alpha \int T(x)\, \varphi(x)\, dx$$

(la suite $a = (a_1 ... a_n)$ est donnée : on pose $|a| = \sum a_i$)

(13) Cette définition entraîne que si T est quasihomogène de degré α, alors $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est quasihomogène de degré $\alpha - a_i$

Exemple : on se donne un polynôme

$$P(D) = \sum_{<a,\alpha>=k} a_\alpha \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \quad ; \text{ avec } <a\,,\alpha> = \sum a_i \alpha_i$$

Alors, δ_0 est quasihomogène de degré $-|a|$ tandis que $P(D)\delta_0$ est quasihomogène de degré $-|a|-k$. Notons que si une distribution T sur X est quasihomogène, alors sa restriction au complémentaire de l'origine est quasihomogène mais la réciproque est fausse en général, comme le montre par exemple la proposition suivante.

(14) Proposition

Soit k dans $\mathcal{C}^1(\dot{X})$ quasihomogène de degré α. Alors pour que k soit prolongeable en une distribution quasihomogène sur X, il faut et il suffit que :

$$\int_{\gamma=1} x^\alpha\, k(x)\, \sigma(x) = 0$$

pour tous les multi-indices α tels que

$$<a\,,\alpha> = \alpha' \quad \text{avec} \quad <a\,,\alpha> = \sum a_i \alpha_i \quad \text{et} \quad \alpha' = -\alpha - |a|$$

Ces relations sont appelées les conditions de prolongement.

En ce qui concerne la transformée de Fourier, nous utiliserons la définition habituelle (voir [14]) :

$$<\hat{T}\,,\varphi> = <T\,,\hat{\varphi}> \quad \text{avec} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{i<x,\xi>}\, \varphi(x)\, dx$$

et la proposition élémentaire suivante.

(15) Proposition

a) si T est quasihomogène de degré α , alors $\hat{T}$ est quasihomogène de degré $\alpha' = -\alpha - |a|$

b) si une distribution T est telle que sa restriction au complémentaire de l'origine est $\mathcal{C}^\infty$, **alors il en est de même de** $\hat{T}$. (c)

§ 2. Définition des distributions p.f.k et v.p.k.

(16) Définition.

Soit k une fonction de $\mathcal{C}^1(\dot{X})$, quasihomogène de degré α **telleque :**

$$\alpha' = -|a| - |\alpha| = \langle a , \ell \rangle$$

$$\ell = (\ell_1, \dots \ell_n) \quad , \quad \text{les } \ell_i \text{ étant entiers } \geq 0$$

On suppose que k vérifie les conditions de prolongement, c'est-à-dire que quel que soit ℓ' tel que $\langle a , \ell \rangle = \langle a , \ell' \rangle$, on a :

$$\int_{\gamma(x)=1} k(x)\, x^{\ell'}\, \sigma(x) = 0$$

Alors, la distribution p.f.(k) est définie par :

$$\langle \text{p.f.}(k), \varphi \rangle = \int_{\gamma(y)=1} (K\varphi)(y)\, k(y)\, \sigma(y)$$

avec $$(K\varphi)(y) = \int_0^\infty r^{-\alpha'-1} dr \, [\varphi(r^{a_1} y_1, \dots) - \sum_{\langle a, j\rangle < \alpha'} \frac{r^{\langle a, j\rangle} y^j}{j!} (\frac{\partial}{\partial x})^j \varphi(0)]$$

On peut montrer (voir § 4 de [12]) que p.f.(k) est quasihomogène de degré α et que si dans la définition de p.f.(k) on remplace γ par une fonction γ' (vérifiant toujours (6)) alors il s'ajoute à p.f.k une distribution à support l'origine, quasihomogène de degré α. Dans le cas particulier ou $\alpha = -|a|$, on pose :

$$\text{p.f.k} = \text{v.p.k}$$

et l'opérateur de convolution par une telle distribution est appelé une intégrale singulière.

§ 3. Dérivation des distributions quasihomogènes.

Notons ∂_i l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$. La remarque exprimée par la proposition suivante permet de voir sans calcul que certaines fonctions quasihomogènes vérifient les conditions de prolongement :

(17) Proposition.

Soit k une fonction continuement dérivable et quasihomogène de degré α dans le complémentaire de l'origine.
a) si k vérifie les conditions de prolongement, alors pour tout ℓ, $(\frac{\partial}{\partial x})^{\ell} k$ vérifie les conditions de prolongement.
b) si k vérifie les conditions de prolongement, alors pour tout multi-indice m, $x^m k$ vérifie les conditions de prolongement.

Preuve.

a) l'hypothèse signifie que k est prolongeable en une distribution quasihomogène T. Dans le complémentaire de l'origine, la distribution $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, quasihomogène vue (13), coïncide avec $\partial_i k$. La distribution définie par $\partial_i k$ étant prolongeable, $\partial_i k$ vérifie les conditions de prolongement.

b) il suffit de remarquer que si k est quasihomogène de degré α, alors $x^m k$ est quasihomogène de degré $\beta = \alpha + < a , m >$ et s'il existe un monôme x^{ℓ} quasihomogène de degré $\beta' = - |a| - \alpha - < a , m >$, alors $x^{\ell+m}$ est quasihomogène de degré $\beta' + < a , m > = - |a| - \alpha = \alpha'$

D'où $\displaystyle\int x^{\ell+m} k(x) \sigma(x) = 0$

(puisque k vérifie les conditions de prolongement).

(18) Exemple.

Soit k_1 une fonction continuement dérivable et q.h. de degré $-|a|+a_i$ dans le complémentaire de l'origine. k_1 étant localement sommable, k_1 définit une distribution q.h. de degré $-|a|+ a_i$ sur tout X. Vue (17-a), il résulte que $\partial_i(k_1)$ vérifie les conditions de prolongement.
Par exemple, pour $X = \mathbb{R}^2_x$, considérons la solution élémentaire de l'équation de la chaleur

$$k(x_1,x_2) = \begin{cases} C\, x_1^{-\frac{1}{2}} \exp \dfrac{(x_2)^2}{2x_1} & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 \quad \text{si } x_1 \leq 0 . \end{cases}$$

k est q.h. de degré -1 avec $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$.
Il résulte de (17-a), sans qu'il soit nécessaire de le vérifier que :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial k}{\partial x_1} (x_1,x_2) (2\, x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1) = 0$$

Σ étant une courbe quelconque d'indice 1 par rapport à l'origine.

(19) Proposition.

a) Soit k_1 une fonction continuement dérivable et quasihomogène de degré $-|\alpha|+\alpha_i$ dans le complémentaire de l'origine. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(k_1) = \mathrm{v.p.}\left(\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right) + \delta_0 \int_{\gamma=1} k_1(y)\,\sigma(y)$$

b) Soit k_2 une fonction continuement dérivable et quasihomogène de degré $-|\alpha|$ dans le complémentaire de l'origine. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{v.p.}\,k_2) = \mathrm{p.f.}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} k_2\right) + \sum_{<a,j>=a_i} \frac{\partial^j \delta_0}{j!} \int_{\gamma=1} y^j k_2(y)\, d_j y$$

(On suppose que les distributions v.p. et p.f. intervenant dans les égalités précédentes sont définies à l'aide d'une même fonction γ).

Pour prouver la formule de (19-a) on utilise la formule de Stokes en notant que

$$d(k_1 \varphi\, d_i x) = (\varphi\, \partial_i k_1 + k_1 \partial_i \varphi)\, dx$$

D'où $$(\partial_i k, \varphi) = -(k_1, \partial_i \varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(x)\geq\varepsilon} k_1(x)\, \partial_1 \varphi(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma=\varepsilon} k_1(x)\,\varphi(x)\, d_1 x + \int_{\gamma>\varepsilon} \varphi(x)\, \partial_i k_1(x)\, dx$$

Mais la formule de Taylor permet d'écrire :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j\, \varphi_j(x)$$

Et

$$(\partial_i k_1, \varphi) = \varphi(0) \int_{\gamma=\varepsilon} k_1(x)\, d_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma=\varepsilon} x_j\, \varphi_j(x)\, k_1(x)\, dx + \int_{\gamma>\varepsilon} \varphi\, \partial_i k_1\, dx$$

En utilisant les coordonnées polaires, on voit que la 1^e intégrale ne dépend pas de ε , tandis que la 2^e $\to 0$ si $\varepsilon \to 0$, d'où la formule de (15-a). Pour prouver la formule de (15-b), on remplace k_2 par k :

$$(\partial_i k, \varphi) = -(k, \partial_i \varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma>\varepsilon} k(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx$$

d'où, avec Stokes :

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma=\varepsilon} k(x)\,\varphi(x)\, d_i x + \int_{\gamma>\varepsilon} \varphi(x)\, \partial_i k(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma > \varepsilon} \Big(\varphi(x) - \sum_{\langle a,j\rangle < a_i} \frac{x^j \partial^j \varphi(0)}{j!} \Big) \partial_i k(x)\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma = \varepsilon} k(x)\varphi(x)\, d_i x + \sum_{\langle a,j\rangle < a_i} \int \frac{x^j \partial^j \varphi(0)}{j!} \partial_i k(x) dx$$

$$= (\mathrm{p.f.}\, \partial_i k, \varphi) + I_\varepsilon + J_\varepsilon$$

En utilisant la formule de Taylor sous la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{\langle a,j\rangle < a_i} \frac{x^j \partial^j \varphi(0)}{j!} + \sum_{\langle a,j\rangle = a_i} \frac{x^j \partial^j \varphi(0)}{j!} + \sum_{\langle a,j\rangle > a_i} x^j \varphi_j$$

on voit que I_ε se décompose en trois termes

$$I_\varepsilon = I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 + I_\varepsilon^3$$

On voit par un changement de variable que :

- I_ε^2 est indépendant de ε et donne la 2ème partie de l'expression (19 b) de $\partial_i (\mathrm{v.p.} k)$
- I_ε^3 tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$

Pour voir que $I_\varepsilon^1 + J_\varepsilon \to 0$, il suffit de voir que

$$(20) \qquad \int_{\gamma = \varepsilon} x^l k(x)\, d_i x + \int_{\gamma > \varepsilon} x^l \partial_i k(x)\, dx = 0$$

pour tout multiindice l tel que $\langle a, l\rangle = 0$.

Or cette condition entraîne que

$$d\,(x^l k(x)\, d_i x) = 0 + x^l \partial_i k(x)\, dx$$

D'où (avec Stokes), l'annulation de (20) vu que

$$\int_{\gamma(x) = R} x^l k(x)\, d_i x \to 0 \qquad \text{si } R \to \infty .$$

§ 4. Transformation de Fourier.

(21) Proposition.

a) La transformation de Fourier réalise un isomorphisme entre, d'une part les distributions v.p.k + $C\delta_0$ (où k est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ q.h. de degré-n dans le complémentaire de l'origine et vérifiant la condition de prolongement) et, d'autre part les distributions l (l décrivant l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et q.h. de degré 0 dans le complémentaire de l'origine.

b) Les transformées de Fourier des distributions "tronquées" k_ε, sont des fonctions bornées en module qui sont uniformément majorées lorsque ε varie (k étant fixé).

Preuve.

(21 a) résulte de l'étude de la transformation de Fourier effectuée dans [12]. En effet, la transformation de Fourier transforme une distribution

quasihomogène de degré α, $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine en une distribution quasihomogène de degré $\alpha' = -\alpha - |a|$ et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine. Or, toute distribution q.h de degré $-|a|$ (resp. 0), $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine s'écrit v.p.k + $C\delta_0$ (resp. 1). L'isomorphisme d'ensembles réalisé est en fait un isomorphisme topologique lorsqu'on munit l'espace des distributions quasihomogènes d'un degré donné de la topologie définie au § 2 de [12].

(21 b) on remarque que :

$$k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|a|}\, k_1(\varepsilon^{-a_1} x_1, \dots)$$

D'où
$$\widehat{k_\varepsilon}(\xi) = \widehat{k_1}(\varepsilon^{a_1}\xi_1, \dots)$$

Il suffit donc de montrer que $\widehat{k_1}$, est une fonction bornée. On écrit alors, ζ dans $\mathcal{C}_0^\infty(X)$ valant 1 au voisinage de l'origine :

$$k_1 = \zeta k_1 + (1-\zeta) k_1$$

Comme ζk_1 est sommable $\widehat{\zeta k_1}$ est bornée et continue

Mais
$$(1-\zeta)k_1 = (1-\zeta)k = k - \zeta k$$

Comme $\widehat{k}$ est une fonction bornée (d'après a)) il en résulte que $\widehat{\zeta k} = \widehat{\zeta} * \widehat{k}$ est une fonction bornée. De tout ceci, il résulte que $\widehat{k_1}$, est une fonction bornée.

§ 5. Composition des intégrales singulières.

(22) Proposition.

Soient k et l deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$, quasihomogènes de degré $-|a|$ dans le complémentaire de l'origine, et vérifiant la condition de prolongement. Soient ε et $\eta > 0$. k_ε et l_η désignent les fonctions coïncidant avec k et l si $\gamma(x) > \varepsilon$ (resp. $\gamma(x) > \eta$) et nulles si $\gamma(x) < \varepsilon$ (resp. $\gamma(x) < \eta$). Vu (21), le produit des transformées de Fourier de v.p.k et v.p.l est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ quasihomogène de degré 0. De plus, cette fonction s'écrit $C + v$, où $v = \mathcal{F}(\text{v.p.}m)$, m étant $\mathcal{C}^\infty$ quasihomogène de degré $-|a|$ et vérifiant la condition de prolongement.

a) Alors $k_\varepsilon * l_\eta \to C\delta_0 + \text{p.f.}(m)$ dans $\mathcal{S}'$ lorsque ε et η tendent vers 0.

b) De plus, dans le complémentaire de l'origine, les fonctions $k_\varepsilon * l_\eta$ tend vers la fonction m (lorsque ε et $\eta \to 0$) uniformément sur tout compact.

Démonstration.

a) Soit $f = \mathcal{F}(\text{v.p. }k)$. Supposant $\varepsilon < \varepsilon'$, on voit (à l'aide d'un développement de Taylor de $\exp(i\langle x,\xi\rangle)$ au voisinage de $x = 0$) que

$$\widehat{k_{\varepsilon'}}(\xi) - \widehat{k_\varepsilon}(\xi) = \int_{\varepsilon < \gamma(x) < \varepsilon'} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, k(x)\, dx$$

tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$, uniformément lorsque ξ décrit un compact de $\mathbb{R}^n_\xi$. De plus, nous avons vu (21 b) que les fonctions $\widehat{k_\varepsilon}$ sont uniformément majorées lorsque ε varie.

Par conséquent $\widehat{k_\varepsilon} \to f$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n_\xi$, les fonctions $\widehat{k_\varepsilon}$ étant uniformément majorées. De même $\widehat{l_\eta} \to g = \mathcal{F}(\text{v.p.}l)$ lorsque $\eta \to 0$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n_\xi$, les fonctions $\widehat{l_\eta}$ étant uniformément majorées. Par conséquent $\widehat{k_\varepsilon * l_\eta}$ tend vers f.g lorsque ε et $\eta \to 0$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n_\xi$, les fonctions $\widehat{k_\varepsilon * l_\eta} = \widehat{k_\varepsilon} \cdot \widehat{l_\eta}$ étant uniformément majorées. A fortiori, $k_\varepsilon * l_\eta$ tend vers f g = $C + v$ dans $\mathcal{S}'$, lorsque ε et η tendent vers zéro. La transformation de Fourier réalisant un isomorphisme de $\mathcal{S}'$, $k_\varepsilon * l_\eta$ tend vers $C\,\delta_0 + \overline{\mathcal{F}}v$ dans $\mathcal{S}'$ lorsque ε et η tendent vers 0 .

b) Vu (22 a), il suffit de prouver que pour $x \neq 0$, ($k_\varepsilon * l_\eta$) (x) tend vers une limite lorsque ε et η tendent vers 0 et que la limite est uniformément atteinte lorsque x décrit un compact de $\dot{X}$ .Or α étant une fonction de $\mathcal{C}^\infty_0(X)$, valant 1 au voisinage de l'origine on a :

$$\int_D k(x-y)\,l(y)\,dy = \int \left[k(x-y) - k(x)\alpha(y)\right]\left[l(y) - l(x)\alpha(x-y)\right]dy$$
$$+\, l(x)\int_D k(x-y)\,\alpha(x-y)\,dy \;+\; k(x)\int \alpha(y)\,l(y)\,dy - k(x)\,l(x)\int_D \alpha(y)\,\alpha(x-y)\,dy$$

D étant le domaine où $\gamma(x-y) \geqslant \varepsilon$ et $\gamma(y) \geqslant \eta$

Des quatre termes ainsi apparus, le quatrième a évidemment une limite. Le deuxième et le troisième restent constants dès que ε et η sont assez petits. Enfin, la fonction sous le premier signe d'intégration est intégrable : lorsque y ou $x-y$ tend vers 0 , un facteur est $O(\gamma(y)^{-n})$ alors que l'autre est $O(\gamma(y))$.

On peut vérifier de la même manière que la convergence de $k_\varepsilon * l_\eta$ vers sa limite est uniforme sur tout compact de $\dot{X}$.

§ 6. Intégrales singulières et classes de fonctions holdériennes.

On va étendre aux intégrales singulières (v.p.k) l'inégalité dite de Hölder - Kern - Lichtenstein - Giraud) relative aux intégrales singulières usuelles.

(23) Définition de l'espace $\mathcal{C}^\beta$

Soit $\beta > 0$. On pose $\gamma(x) = [x]$ = sup $|x_i|^{1/a_i}$. Soit P une partie de $X = \mathbb{R}^n_x$. On dit qu'une fonction $\varphi : P \to \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{C}^\beta(P)$ si

$$|\varphi|_{\beta,P} = \sup_{x \text{ et } y \in P} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{[x-y]^\beta} < \infty$$

(24) Remarque.

Nous utiliserons plusieurs fois le fait que si k est q.h de degré α et continue dans le complémentaire de l'origine, on a

$$\left| \int_{b\leqslant[x]\leqslant c} k(x)\,dx \right| \leqslant \int_{b\leqslant[x]\leqslant c} |k(x)|.|dx| \leqslant C\int_b^c x^{|a|-1+\alpha}\,dx$$

(25) Définition de $\tilde{\varphi} = k*\varphi$

Soit k une fonction q.h de degré $-|a|$ et $\mathcal{C}^1$ dans le complémentaire de l'origine et vérifiant la condition de prolongement. Soit φ dans $\mathcal{C}^\beta(X)$ et à support compact K. Alors pour tout x dans X, il existe une constante C telle que :

$$(k_\varepsilon * \varphi)(x) = \int_{\varepsilon\leqslant[x-y]\leqslant C} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \int_{\varepsilon\leqslant[x-y]\leqslant C} k(x-y)\big(\varphi(y)-\varphi(x)\big)\,dy$$

Or $$|k(x-y)(\varphi(y)-\varphi(x))| \leqslant C[x-y]^{-|a|}\|\varphi\|_{\beta,X}[x-y]^\beta$$

Vue la remarque (24), ceci prouve que $(k_\varepsilon * \varphi)(x)$ tend vers une limite lorsque ε tend vers 0 : cette limite est notée $(k*\varphi)(x) = \tilde{\varphi}(x)$

On étudie à présent l'application $\varphi \mapsto k*\varphi$

(26) Proposition.

Soit β tel que $0<\beta<\inf a_i$ et K un compact de X.
Alors il existe une constante D fonction de k,β et K telle que pour toute φ dans $\mathcal{C}^\beta(X)$ à support dans K, on a

$$\|k*\varphi\|_{\beta,K} \leqslant \|\varphi\|_{\beta,K}$$

Démonstration.

Soient x' et x'' dans K tels que $[x'-x''] = \delta > 0$.

Alors :

$$\tilde{\varphi}(x')-\tilde{\varphi}(x'') = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<[x'-y]<C}\big(\varphi(y)-\varphi(x')\big)k(x'-y)\,dy - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<[x''-y]<C}\big(\varphi(y)-\varphi(x'')\big)k(x''-y)\,dy = I_1 + I_2$$

Où I_1 (resp. I_2) désigne la somme des limites des intégrales du second membre étendues seulement aux y tels que $[y-x']\leqslant 2\delta$ (resp $[y-x']\geqslant 2\delta$)

$$|I_1| \leqslant \int_{[y-x']<2\delta} |\varphi(y)-\varphi(x')|.|k(x'-y)|\,dy + \int_{[y-x']\leqslant 2\delta} |\varphi(y)-\varphi(x'')|\,|k(x''-y)|$$

La remarque (c) permet de voir que $|I_1| \leqslant C\delta^\beta\|\varphi\|_{\beta,K}$

$$I_2 = \int_{2\delta<[y-x']<C}\big(\varphi(x'')-\varphi(x')\big)k(x'-y)\,dy + \int_{2\delta<[y-x']<C}[\varphi(y)-\varphi(x'')][k(x'-y)-k(x''-y)]\,dy$$

Effectuons une translation des axes de façon que $x' = 0$. En utilisant les coordonnées "polaires" (8), on voit que la $1^{\text{ère}}$ intégrale du second membre est nulle.

De plus

(27) $$\left| k(y-x'') - k(y) \right| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} k(y-tx'')\,dt \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i''| \cdot \sup_{0\leq t\leq 1} |\partial_i k(y-tx'')|$$

$\partial_i k$ étant q.h. de degré $-|a|-a_i$, et comme $|x_i''| \leq [x]^{a_i} = \delta^{a_i}$, il vient :

$$| k(y-x'') - k(y) | \leq C \sum_{i=1}^{n} \delta^{a_i} (\rho - \delta)^{-|a|-a_i}$$

D'où finalement :

$$| I_2 | \leq \sum_{i=1}^{n} C_i \int_{2\delta}^{C} (\rho+\delta)^{\beta} \delta^{a_i} (\rho-\delta)^{-|a|-a_i} \rho^{|a|-1} d\rho$$

Posant $\rho = \delta x$, on obtient

$$| I_2 | \leq \sum C_i' \int_2^{\infty} (1+x)^{\beta} (x-1)^{-|a|-a_i} x^{|a|-1} dx = D\delta^{\beta}$$

§ 7. Intégrales singulières et classes L^p de Lebesgue.

$L^p(X)$ désigne l'espace des fonctions $\varphi : X \to \mathbb{C}$ telles que

$$\| \varphi \|_p = \left(\int | \varphi(x) |^p dx \right)^{1/p} < \infty \qquad \text{avec } 1 < p < \infty$$

La proposition suivante étend le théorème de Calderon Zygmund ([2]) relatif aux intégrales singulières usuelles et le théorème de F. Jones ([7]) relatif aux intégrales singulières paraboliques.

(28) Proposition.

Soit k une fonction q.h. de degré $-|a|$ continuement dérivable : $X \to \mathbb{C}$ et vérifiant la condition de prolongement. (On suppose que inf $a_i \geq 1$).

Soit v.p.k la limite dans $\mathcal{S}'$ des fonctions

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} k(x) & \text{si } [x] = \sup |x_i|^{1/a_i} \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } [x] < \varepsilon \end{cases}$$

Soit $1 < p < \infty$. Alors il existe une constante $C(k,p)$ telle que pour toute φ de $\mathcal{C}_0^\infty(X)$, on a

(29) $$\| \text{v.p.}k * \varphi \|_p \leq C \| \varphi \|_p .$$

Démonstration.

a) Montrons d'abord que les fonctions k_ε sont telles que si $1 \leq p \leq 2$

(30) $$\exists C(k,p),\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(X) \qquad \| k_\varepsilon * \varphi \|_p \leq C \| \varphi \|_p .$$

Vu (21 b) et le théorème de Plancherel, on a (30) si $p = 2$. Vu le théorème 3 de [9] pour montrer (30), il suffit de montrer que :

(31) $\exists C > 0$ et $A \in \mathbb{N}$, $\forall\, l$ et $m \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = 2^m$, $[y] \leq 2^l$,

$$I = \int_{[x] \geq 2^{l+A}} | k_\varepsilon (x-y) - k_\varepsilon (x) | \, dx \leq C$$

Posant $A = 1$ et $l' = \sup(2^{l+1}, 2^m)$, on a ce qui suit.

Posons $I = I_1 + I_2$ où I_1 (resp. I_2) désigne la partie de I obtenu en intégrant sur le domaine où $2^{l'} \leq [x] \leq 2^{l'+1}$ (resp. $[x] \geq 2^{l'+1}$)

Vue la remarque (c), I_1 est uniformément majoré. Utilisant alors (27) et le changement de variable $\rho = 2^l u$, on obtient :

$$I_2 = \int_{[x] \geq 2^{l'+1}} | k_\varepsilon (x-y) - k_\varepsilon (x) | \, dx \leq \int_{[x] \geq 2^{l+2}} \sum_{i=1}^{n} y_i \sup \left| \frac{\partial k}{\partial x_i} (x - ty) \right| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 2^{l a_i} \int_{2^{l+2}}^{\infty} (\rho - 2^l)^{-|a|-a_i} \rho^{|a|-1} \, d\rho \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_4^{\infty} (u-1)^{-|a|-a_i} u^{|a|-1} du$$

D'où $I \leq C$, ce qui prouve (31), donc (30).

b) Comme les fonctions k_ε tendent vers v.p.k dans $\mathcal{S}'$ lorsque ε tend vers 0, il résulte de (30) (voir aussi proposition 2 de [9]) que (v.p.k) définit naturellement un opérateur borné de L^p $(1 < p \leq 2)$

c) Comme les raisonnements des points a) et b) peuvent être repris en remplaçant k par $\check{k}$, on en déduit (par transposition, voir aussi proposition 1 de [9]) que (v.p.k $*$) définit naturellement un opérateur borné de L^p $(2 \leq p < \infty)$.

Remarque.

Lorsque k est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine, (28) il résulte aussi du théorème 7 de [9].

Autres résultats.

Cora Sadosky a montré que si l'on pose pour toute φ de $\mathcal{C}_0^\infty(X)$, $\tilde{\varphi}_*(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |(k_\varepsilon * \varphi)(x)|$, l'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}_*$ est de type fort (p,p) pour $1 < p < \infty$ et de type faible $(1,1)$. De plus il y a convergence pnctuelle : pour φ dans $L^p(X)$ avec $1 \leq p < \infty$, pour presque tout x, la limite de $(k_\varepsilon * \varphi)(x)$ existe lorsque ε tend vers 0.

On peut voir quelques applications des intégrales singulières anisotropes dans:

- V.P. Il'in. Représentation intégrales des fonctions différentiables et de leurs dérivées dans le problème du prolongement des fonctions de la classe Silrrsky Mat. Jurnal. t.VIII n° 3 Mai-Juin 1967.
- Singular integrals. Proceedings of symposia in pure Mathematics. Amer. Math. Soc. 1967.

§ 8. BIBLIOGRAPHIE

[1] G. ARNESE - Ric. di math. vol. XIII (1964) pp. 1 - 45.
[2] A.P. CALDERON et A. ZYGMUND - Act. math.,t. 88 (1952) pp. 85 - 139.
[3] A.P. CALDERON et A. ZYGMUND - Stud. math., vol. 20 (1961) pp. 171 - 225.
[4] G. GIRAUD - Ann. E.N.S. Paris (1934) pp. 251 - 372.
[5] P. GRISVARD - (à paraître).
[6] L. HÖRMANDER - Act. math., t. 104 (1960) pp. 93 - 140.
[7] F. JONES - Amer. Journ. of math., vol. 86 n° 2 (april 1964) pp. 441 - 462.
[8] P. KRÉE - Comptes rendus acad. sc. Paris.
[9] P. KRÉE - (Thèse) Ann. Inst. Fourier, t. 16 fasc. 2 (1966) pp. 33 - 100.
[10] P. KRÉE - Comptes rendus acad. sc. Paris, t. 261 (1965) pp. 2560 - 2563.
[11] P. KRÉE - Séminaire Bourbaki - (Nov. 1965).
[12] P. KRÉE - Distributions quasihomogènes (ce mémoire).
[13] C. SADOSKY - A note on parabolic fractional and singular integral. Stud. math.
[14] L. SCHWARTZ - Théorie des distributions - Herm. Paris (1950 - 1951).
[15] L. SCHWARTZ - Sém. fac. sc. Paris (1954 - 1955).
[16] L. SCHWARTZ - Sém. fac. sc. Paris (1959 - 1960).
[17] F. TRICOMI - Math. Zeitschrift, t. 27 (1927) pp. 87 - 133.

§ 9. NOTES

(a). Ceci signifie qu'il existe une réunion finie A de variétés à bord de dimension $n-1$, plongées dans R^n_x, telles que pour toute composante connexe V de $R^n_x \setminus A$, la restriction de γ à V est dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{V})$.

(b). Si T vérifie les conditions de la définition suivante où X est remplacé par $\dot{X}$, on dit que T est quasihomogène sur $\dot{X}$.

(c). Remarque.
Soit $k(x)$, quasihomogène de degré $-\alpha$ dans $\dot{X}$, et représentée par une fonction continue (dans $\dot{X}$). Alors $k(x)$ est localement intégrable si $\operatorname{Re} \alpha > -|a|$: ceci se montre en utilisant les coordonnées polaires (8).

(d). où I_ε désigne la 2e intégrale, tandis que J_ε désigne la dernière somme.

(texte reçu le 18 février 1970)

Paul R. KRÉE
61 Boulevard de Mont Boron
06 - NICE