JEAN-LOUIS NICOLAS

6 nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 141-143
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__141_0>

Calculateurs en Math. (1975 - LIMOGES)
Bull. Soc. math. France
Mémoire 49-50, 1977, p. 141-143

6 NOMBRES dont les SOMMES DEUX à DEUX sont des CARRES

par Jean-Louis NICOLAS

P. ERDÖS a posé le problème suivant (cf. [1], problème 40, p. 110) :

Peut-on trouver n entiers distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que toutes les sommes $x_i + x_j$ $(1 \leq i \leq j \quad n)$ soient des carrés.

Le problème est facile pour $n = 4$; J. Lagrange (cf. [3]) a montré qu'il y avait une infinité de solutions pour $n = 5$, et, dans sa thèse (cf. [4]) qu'il y avait pour $n = 6$ une infinité de pseudo-solutions (14 sur 15 sommes $x_i + x_j$ sont des carrés) et une vraie solution :

-15 863 902; 17 798 783; 21 126 338; 49 064 546; 82 221 218; 447 422 978.

Nous allons expliquer ici les idées utilisées pour faire un programme calculant systématiquement toutes les pseudo solutions en 6 nombres. Il y aura trois étapes.

1°) Recherche des solutions en 4 nombres -

On doit résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = a_1^2 & \qquad x_1 + x_4 = b_1^2 \\ x_3 + x_1 = a_2^2 & \qquad x_2 + x_4 = b_2^2 \\ x_1 + x_2 = a_3^2 & \qquad x_3 + x_4 = b_3^2 \end{cases}$$

Les conditions de compatibilité s'écrivent :

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2.$$

S admet trois décompositions en somme de deux carrés. Réciproquement si S admet trois telles décompositions, on en déduit une et en général deux solutions (obtenues en échangeant a_3 et b_3).

Le paramètre de base sera S que l'on fait varier de 1 à quelques millions par tranche de $\Delta = 10\ 000$. On écrit les solutions correspondant à $4\,S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, de façon à avoir des x_i entiers. Dans chaque tranche, par une méthode de crible, on sélectionne les S qui ont au moins trois décompositions. Pour $SMIN \leq S \leq SMAX$, on fait varier I et J de façon que $0 \leq I \leq J$ et $SMIN \leq I^2 + J^2 \leq SMAX$, et on met dans un tableau le nombre de fois où l'on atteint S. Cette méthode s'est avérée plus rapide que d'utiliser la congruence mod 4 de facteurs premiers de S (cf. [2], ch. 16).

2°) Adjonction d'un 5ème nombre -

La première étape nous fournit toutes les solutions en quatre nombres. On cherche alors les nombres x_5 tels que $x_i + x_5$ soit un carré pour $1 \leq i \leq 4$, avec $x_i < x_5$ (pour $1 \leq i \leq 4$), ce qui nous donnera une fois et une seule les solutions en cinq nombres. On résoud d'abord :

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 + x_5 = c_1^2 & x_1 + x_4 = b_1^2 \\ x_2 + x_5 = c_2^2 & x_2 + x_4 = b_2^2 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$x_2 - x_1 = c_2^2 - c_1^2 = b_2^2 - b_1^2$$

et $(c_2 - c_1)$ est un diviseur d de $(b_2^2 - b_1^2)$ inférieur à $(b_2 - b_1)$ (pour que $x_5 > x_4$). A chaque tel diviseur, correspond une solution x_5 de (1). La recherche des diviseurs se fait à l'aide d'une table de diviseurs des nombres $\leq 10\,000$ incorporée au début du programme et construite par la méthode du crible.

Il reste alors à vérifier que $x_3 + x_5$ et $x_4 + x_5$ sont des carrés. Un premier test décide si ce sont des carrés modulo $3465 = 9.5.7.11$. On utilise ensuite la méthode de Newton.

On obtient ainsi toutes les solutions en 5 nombres.

3°) <u>Recherche des pseudo-solutions en 6 nombres</u> -

Cette étape se traite comme la précédente. On cherche d'abord les pseudo-solutions vérifiant :

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 + x_6 = d_1^2 & x_1 + x_4 = b_1^2 \\ x_2 + x_6 = d_2^2 & x_2 + x_4 = b_2^2 \end{cases}$$

en laissant tomber la condition $d < b_2 - b_1$, car x_6 peut-être quelconque y compris $< x_1$. On compte alors le nombre de carrés $x_i + x_6$, $1 \leq i \leq 5$. Il en faut au moins 4.

Il reste à résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_6 = d_1^2 \\ x_2 + x_6 \neq d_2^2 \\ x_3 + x_6 = d_3^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + x_6 \neq d_1^2 \\ x_2 + x_6 = d_2^2 \\ x_3 + x_6 = d_3^2 \end{cases}$$

où l'on procède similairement.

Chaque pseudo-dolution est obtenue deux fois, et chaque vraie solution est obtenue 6 fois.

Une des difficultés techniques était de ne pas utiliser d'entiers qui dépassent $2^{31} - 1$. Les nombres x_1, x_2, x_3, x_4 ont été pris entiers en machine, tandis que x_5 et x_6 étaient pris en double précision.

Pour $S \leq 40$ millions, on a trouvé 15475 solutions en 5 nombres et 655 pseudo-solutions en 6 nombres. Pour chacune de ces dernières, on a calculé le p. g. c. d. des x_i, pour repérer les solutions primitives ainsi que la somme $\sum_{1 \leq i \leq 6} x_i$ qui est souvent un carré parfait. C'est le cas de la vraie solution signalée dans l'introduction, pour laquelle $\sum x_i = (24531)^2$. Dans notre programme, cette solution a été obtenue pour $S = 34\,137\,050 = \frac{1}{4}(x_1 + x_3 + x_4 + x_5)$.

REFERENCES

(1) P. ERDÖS.- Quelques problèmes de la théorie des nombres.- Monographie de l'enseignement mathématique.- Genève, n° 6, p. 81-135.

(2) G.H. HARDY et E.M. WRIGHT.- An introduction to the theory of numbers.- 4th édition, Oxford at the Clarendon Press.- (1960).

(3) J. LAGRANGE.- Cinq nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés.- Séminaire de Théorie des nombres Delange-Pisot Poitou.- Paris, 12° année, (1970-71), n° 20.

(4) J. LAGRANGE.- Thèse d'Etat de l'Université de Reims.- (1976).

J.L. NICOLAS
Université de LIMOGES
Département de Mathématiques
123, rue Albert Thomas
87100 LIMOGES