MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HEINZ-GEORG QUEBBEMANN
RUDOLF SCHARLAU
WINFRIED SCHARLAU
M. SCHULTE

Quadratische Formen in additiven Kategorien

Mémoires de la S. M. F., tome 48 (1976), p. 93-101
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__93_0>

Col. sur les Formes quadratiques (1975, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 48, 1976, p. 93-101

QUADRATISCHE FORMEN IN ADDITIVEN KATEGORIEN

par

H.G. QUEBBEMANN, R. SCHARLAU, W. SCHARLAU, M. SCHULTE

Eine Bilinearform auf einem Vektorraum V ist dasselbe wie ein Element von $\mathrm{Hom}(V,V^*)$, wobei V^* der Dualraum ist. Um die Theorie der Bilinearformen in grösster Allgemeinheit zu entwickeln, kann man daher statt der Kategorie der Vektorräume eine beliebige additive Kategorie $\mathfrak{M}$ wählen, in der man einen Dualitätsbegriff hat, also einen kontravarianten additiven Funktor $* : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, so dass $**$ natürlich isomorph zur Identität ist. Haben wir eine solche Situation, so kann die Theorie der Bilinearformen, der symmetrischen oder schiefsymmetrischen Bilinearformen, der quadratischen Formen usw. in naheliegender Weise entwickelt werden. Wie wir in § 4 erläutern, umfasst dieser Ansatz zahlreiche Beispiele, die in letzter Zeit diskutiert wurden, z. B. Vektorräume mit mehreren Formen, symmetrische bilineare Räume mit ausgezeichneten Unterräumen, quadratische Formen über Schemata, usw. Unser Hauptinteresse gilt der Frage, wie sich der Satz von Krull-Schmidt in dieser Situation formuliert ; im Zusammenhang damit steht der Witt'sche Kürzungssatz.

Für die Gültigkeit dieser Sätze braucht man natürlich weitere (Endlichkeits-) Voraussetzungen. In den genannten Beispielen, die uns in erster Linie interessieren, ist für jedes $M \in \mathfrak{M}$ der Endomorphismen-Ring $\mathrm{End}(M)$ eine endlichdimensionale Algebra über einem festen Körper K. (Ausserdem ist $\mathfrak{M}$ Unterkategorie einer abelschen Kategorie.) Für die Theorie, die wir hier entwickeln, kann man diese Voraussetzung weitgehend abschwächen. Wir brauchen Voraussetzungen, die die Gültigkeit des Satzes von Krull-Schmidt in $\mathfrak{M}$ implizieren, worüber man sich in [2], [10] informieren kann. Weil aber - wie gesagt - in den interessanten Beispielen die Situation viel spezieller ist, wollen wir uns hier nicht über die minimalen Voraussetzungen den Kopf zerbrechen.

1. Definitionen

Es sei also $\mathfrak{M}$ eine additive Kategorie und $* : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ ein additiver kontravarianter Funktor, derart, dass $**$ natürlich isomorph zur Identität ist. Der Einfachheit halber nennen wir die Objekte von $\mathfrak{M}$ Moduln. Wir identifizieren jeden Modul M mit seinem Bidual M^{**} und jeden Morphismus f mit f^{**}.

Die Kategorie der hermiteschen Moduln wird wie folgt definiert : Ihre Objekte sind Paare (M,b), wobei $b : M \to M^*$ ein Morphismus in $\mathfrak{M}$ ist ; wir nennen b eine Bilinearform. Ein Morphismus $f : (M,b) \to (M',b')$ ist ein Isomorphismus $f : M \to M'$ mit $f^*b'f = b$. Jetzt können wir wie üblich definieren :

Eine Bilinearform $b : M \to M^*$ heisst symmetrisch, falls $b = b^*$, schiefsymmetrisch, falls $b = -b^*$, gerade symmetrisch, falls b von der Form $a+a^*$, alternierend, falls b von der Form $a-a^*$ für einen Morphismus $a : M \to M^*$ ist. Die alternierenden Bilinearformen bilden eine Untergruppe $A(M)$ von $B(M) := \mathrm{Hom}(M,M^*)$ und die Elemente $[b]$ von $B(M)/A(M)$ nennen wir quadratische Formen auf M. Das entspricht der üblichen Definition. Wir nennen $[b]$ nicht-singulär, wenn $b+b^*$ ein Isomorphismus ist.

Es sei $Q(\mathfrak{M})$ die Kategorie der nicht-singulären quadratischen Moduln $(M,[b])$, wobei Morphismen $f : (M,[b]) \to (M',[b'])$ Isomorphismen $f : M \to M'$ mit $[f\, b'f] = [b]$ sind. Es sei $H(\mathfrak{M})$ die Kategorie der nicht-singulären symmetrischen Moduln.

Wir betrachten zunächst exemplarisch den Fall quadratischer Moduln. (Es ist wohlbekannt, dass man bei der Untersuchung symmetrischer Formen gelegentlich $\frac{1}{2} \in \mathrm{End}(M)$ annehmen muss und dass der Fall gerader symmetrischer Formen ähnlich wie der Fall quadratischer behandelt werden kann.)

Wir identifizieren für Moduln M und N immer $(M \oplus N)^*$ mit $M^* \oplus N^*$ und definieren die orthogonale Summe durch $(M,[b]) \perp (M',[b']) := (M \oplus M',[b \oplus b'])$.

Es sei ferner
$$Q(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}\ , \quad (M,[b]) \mapsto M$$
der Vergiss-Funktor und
$$\mathbb{N} : \mathfrak{M} \to Q(\mathfrak{M})\ , \quad M \to \mathbb{N}(M) := (M,[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}])\ , \quad f \mapsto f \oplus f^{*-1}$$
der neutrale "Funktor" (der nur für Isomorphismen f definiert ist).

2. Die Verlagerung auf den Endomorphismen-Ring

Die Untersuchung von Formen (beliebiger Art) kann in der folgenden Weise auf den Endomorphismen-Ring zurückgeführt werden. Wir setzen voraus, dass auf dem Modul N eine nicht-singuläre symmetrische oder schiefsymmetrische Form existiert. Das folgende Lemma beschreibt einen Fall, in dem diese Voraussetzung erfüllt ist :

2.1. Lemma : Sei N ein Modul mit $N \cong N^*$ und lokalem Endomorphismen-Ring $\mathrm{End}(N)$. Ist $\frac{1}{2} \in \mathrm{End}(N)$, so lässt N eine nicht-singuläre symmetrische oder schiefsymmetrische Form zu.

Beweis : Sei $b : N \to N^*$ ein Isomorphismus. Da $\mathrm{End}(N)$ ein lokaler Ring ist, folgt aus $2 = b^{-1}(b+b^*) + b^{-1}(b-b^*)$, dass einer der beiden Summanden eine Einheit sein muss.

Sei nun b_o eine feste nicht-singuläre ε-symmetrische Form auf $N (\varepsilon = \pm 1)$. Dann definieren wir auf $\Lambda = \mathrm{End}(N)$ eine Involution ^{o} durch $\alpha^o := b_o^{-1}\alpha^* b_o$. (Natürlich gilt $(\alpha\beta)^o = \beta^o\alpha^o$, und wir haben tatsächlich eine Involution, denn $\alpha^{oo} = b_o^{-1}b_o^*\alpha^{**}b_o^{*-1}b_o = \alpha$.) Ist $M = N^r$ r-fache direkte Summe von N, so setzen wir die Involution wie üblich auf $\Lambda' := \mathrm{End}(N^r) = M(r,\Lambda)$ fort : $(\alpha_{ij})^o := (\alpha_{ji}^o)$. Jede Form auf M lässt sich dann eindeutig als $b_\sigma\beta$ mit $\beta \in M(r,\Lambda)$ schreiben, und es gilt : $b_\sigma\beta$ ist genau dann symmetrisch, wenn $\beta^o = \varepsilon\beta$, schiefsymmetrisch, wenn $\beta^o = -\varepsilon\beta$, gerade symmetrisch, wenn $\beta = \alpha+\varepsilon\alpha^o$, alternierend, wenn $\beta = \alpha-\varepsilon\alpha^o$ für ein $\alpha \in \Lambda'$. Also können die quadratischen Formen auf M mit den Elementen von $\Lambda'/A(\Lambda')$ mit $A(\Lambda') = \{\alpha-\varepsilon\alpha^o | \alpha \in \Lambda'\}$ identifiziert werden. Diese Elemente entsprechen quadratischen Formen auf Λ^r. (Dabei werden quadratische Formen auf Λ^r wie üblich als Sesquilinearformen auf Λ^r (bzgl. der Involution ^{o}) modulo Formen der Gestalt $b(x,y) - \varepsilon\, b(y,x)$ definiert.) Der Isomorphie-Begriff für quadratische Formen auf M überträgt sich offensichtlich in den Isomorphie-Begriff für quadratische Formen über $\Lambda = \mathrm{End}(N)$, und damit können wir viele Fragen auf Λ zurückführen.

3. Der Satz von Krull-Schmidt

Wir stellen jetzt Voraussetzungen an $\mathfrak{M}$, die die Gültigkeit des Satzes von Krull-Schmidt implizieren. Insbesondere soll für jedes unzerlegbare M der Endomorphismen-Ring $\mathrm{End}(M)$ ein lokaler Ring sein.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Problem, wie man einen quadratischen Modul $(M,[b])$ in eine orthogonale Summe von "einfacheren" Untermoduln zerlegen kann.

Ist Σ eine Menge unzerlegbarer Moduln, so heisst ein Modul M vom Typ Σ (bzw. Σ'), falls jeder unzerlegbare Summand von M isomorph zu einem Element in Σ ist (bzw. falls kein unzerlegbarer Summand isomorph zu einem Element in Σ ist). Σ heisst selbstdual, falls mit N auch N^* in Σ liegt. Folgende Tatsache werden wir oft benutzen :

3.1. Lemma : *Sei M_1 vom Typ Σ, M_2 vom Typ Σ' und*

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_2 \to M_1 \oplus M_2$$

ein Morphismus. Dann gilt :

a) *Ist f ein Isomorphismus, so sind $f_{11} \in \Lambda_1 := \mathrm{End}(M_1)$ und $f_{22} \in \Lambda_2 := \mathrm{End}(M_2)$ Isomorphismen.*

b) *Liegen f_{11} und f_{22} im Radikal von Λ_1 bzw. Λ_2, so liegt f im Radikal von $\Lambda := \mathrm{End}(M_1 \oplus M_2)$.*

Beweis : Sind N_1, N_2 unzerlegbar und nicht-isomorph, so ist jede Abbildung $N_1 \to N_2 \to N_1$ im Radikal von $\mathrm{End}(N_1)$. Mittels dieser Bemerkung sieht man leicht, dass jede Abbildung $M_1 \to M_2 \to M_1$ bzw. $M_2 \to M_1 \to M_2$ im Radikal von $\mathrm{End}(M_1)$ bzw. $\mathrm{End}(M_2)$ liegt. Also ist jede Matrix $\begin{pmatrix} o & * \\ * & o \end{pmatrix}$ im Radikal, und aus dieser Tatsache folgt die Behauptung.

3.2. Satz. Jedes $(M,[b])$ aus $Q(\mathfrak{M})$ ist isomorph zu einer orthogonalen Summe

$$\mathop{\perp}_{i=1}^{n} (M_i,[b_i])$$

mit M_i vom Typ $\{N_i, N_i^*\}$ für einen unzerlegbaren Modul N_i.

Beweis : Es genügt zu zeigen : Ist Σ eine selbstduale Menge unzerlegbarer Moduln und $M \cong M_1 \oplus M_2$ eine Zerlegung von M mit M_1 vom Typ Σ, M_2 vom Typ Σ', so existiert eine orthogonale Zerlegung $(M,[b]) \cong (M_1,[b_1]) \perp (M_2,[b_2])$. Vermöge der Zerlegung $M \cong M_1 \oplus M_2$ schreibt sich $b : M_1 \oplus M_2 \to M_1^* \oplus M_2^*$ als Matrix $b = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$. Nach Addition einer alternierenden Form können wir $B_3 = 0$ annehmen.

Dann ist $b + b^* = \begin{pmatrix} B_1 + B_1^* & B_2 \\ B_2^* & B_4 + B_4^* \end{pmatrix}$ Isomorphismus und nach dem letzten Lemma folgt (da wegen Σ selbstdual $M_1 \cong M_1^*$, $M_2 \cong M_2^*$ gilt) : $B_1 + B_1^*$ ist invertierbar.

Die Transformation mit $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B_2^*(B_1+B_1^*)^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ liefert

$f^*bf = \begin{pmatrix} B_1 & -B_1(B_1+B_1^*)^{-1}B_2 + B_2 \\ -B_2^*(B_1+B_1^*)^{-1}B_1 & * \end{pmatrix}$ und nach Addition einer alternierenden Matrix wird das eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Wir fragen jetzt nach der Eindeutigkeit der im letzten Satz gefundenen Zerlegung. Dazu machen wir folgende zusätzliche Voraussetzung :

Für jedes $M \in \mathfrak{M}$ gelte : End(M) ist R-adisch vollständig für $R = \mathrm{rad}(\mathrm{End}(M))$.

Das folgende Approximations-Lemma ist wohlbekannt, siehe z. B. [12].

3.3. Lemma : Es sei Λ ein Ring mit einer Involution $^\circ$. Λ sei R-adisch vollständig für $R = \mathrm{rad}(\Lambda)$. Es seien $U(\Lambda)$ die Einheitengruppe von Λ und $A(\Lambda)$ wie in § 2. Dann gilt für $\beta, \beta' \in \Lambda$ mit $\beta + \beta^\circ$, $\beta' + \beta'^\circ \in U(\Lambda)$: Existiert ein $\psi \in U(\Lambda)$ mit $\psi^\circ \beta \psi - \beta' \in A(\Lambda) + R$, so existiert ein $\phi \in U(\Lambda)$ mit $\phi^\circ \beta \phi - \beta' \in A(\Lambda)$.

3.4. Satz. Unter den gemachten Voraussetzungen gilt :

(i) Es sei $(M_1,[b_1]) \perp (M_2,[b_2]) \cong (M_3,[b_3]) \perp (M_4,[b_4])$ mit M_1, M_3 vom Typ Σ und M_2, M_4 vom Typ Σ'. Dann gilt $(M_1,[b_1]) \cong (M_3,[b_3])$ und $(M_2,[b_2]) \cong (M_4,[b_4])$.

Insbesondere ist die in Satz 3.2. angegebene Zerlegung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(ii) Es sei M vom Typ $\{N, N^*\}$ mit N unzerlegbar und $N \not\cong N^*$. Dann ist $(M,[b])$

neutral (also isomorph zu $\mathbb{N}(N^r)$ für geeignetes r).

(iii) (Witt'scher Kürzungssatz) Es sei $\frac{1}{2} \in \mathrm{End}(M)$ für alle unzerlegbaren $M \in \mathfrak{M}$. Dann gilt :

Aus $(M_1,[b_1]) \perp (M_3,[b_3]) \cong (M_2,[b_2]) \perp (M_3,[b_3])$

folgt $(M_1,[b_1]) \cong (M_2,[b_2])$.

Beweis : (i) Nach Voraussetzung existiert ein Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_2 \to M_3 \oplus M_4 \quad \text{mit}$$

$$\left[\begin{pmatrix} f_1^* & f_3^* \\ f_2^* & f_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right].$$

Insbesondere gilt $f_1^* b_3 f_1 + f_3^* b_4 f_3 = b_1 + a - a^*$ mit $a : M_1 \to M_1^*$. Entsprechend § 2 gehen wir über zu $\Lambda = \mathrm{End}(M_1)$ mit der durch $b_o := b_1 + b_1^*$ gegebenen Involution ^{o}.

Dann gilt $b_o^{-1} f_1^* b_3 f_1 - b_o^{-1} b_1 = b_o^{-1}(a-a^*) - b_o^{-1} f_3^* b_4 f_3$,

wobei $b_o^{-1}(a-a^*) = b_o^{-1} a - (b_o^{-1} a)^o \in A(\Lambda)$ und $b_o^{-1} f_3^* b_4 f_3 \in \mathrm{rad}(\Lambda)$ nach dem in Lemma 3.1. a) Bewiesenen. Nach dem letzten Lemma folgt dann $[f_1^* b_3 f_1] \cong [b_1]$. Analog ergibt sich $[b_4] = [b_2]$.

(ii) Wir schreiben $M = N^r \oplus N^{*r}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$. Wegen $N \not\cong N^*$ ist b_2 nach Lemma 3.1.a) invertierbar, also o.B.d.A. $b_2 = 1$. Wir betrachten ausserdem $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\Lambda = \mathrm{End}(M)$ mit der durch $b_o := \mathbb{b} + \mathbb{b}^*$ gegebenen Involution ^{o}.

Dann gilt $b_o^{-1} b - b_o^{-1} \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 & b_4 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{rad}\,\Lambda$ nach Lemma 3.1.b), also $[b] \cong [\mathbb{b}]$ nach Lemma 3.3.

(iii) Nach (i), (ii) können wir uns auf den Fall $M_1 \oplus M_3$ vom Typ $\{N\}$, N unzerlegbar, beschränken. Dann lässt sich unsere Behauptung durch Verlagerung auf $\mathrm{End}(N)$ und Reduktion modulo $\mathrm{rad}(\mathrm{End}(N))$ auf den bekannten Kürzungssatz für quadratische Formen über einem Schiefkörper zurückführen.

Für Anwendungen ist das folgende Korollar wichtig.

3.5. Korollar. Für alle $M \in \mathfrak{M}$ sei $\mathrm{End}(M)$ eine endlichdimensionale K-Algebra mit K algebraisch abgeschlossen, $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. Dann gilt $(M_1,[b_1]) \cong (M_2,[b_2])$ falls $M_1 \cong M_2$.

Beweis : Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind quadratische Formen vom gleichen Rang isometrisch.

3.6. Bemerkung. Der Kürzungssatz 3.4. (iii) ist natürlich viel schwächer als die Aussage in 3.4. (i). Er gilt insbesondere schon, wenn man nur die Voraussetzung semilokaler Endomorphismen-Ringe macht ! Der Beweis kann auf den von Reiter [6] bewiesenen Kürzungssatz zurückgeführt werden :

Es sei $N \in \mathfrak{M}$. Wir setzen voraus, dass auf N eine nicht-singuläre ε-symmetrische Form b_o existiert ($\varepsilon = \pm 1$), und versehen $E = \mathrm{End}(N)$ mit der durch b_o definierten Involution (vgl. § 2). Unsere Verlagerungsmethode lässt sich folgendermassen ausbauen : Wir betrachten einerseits die volle Unterkategorie $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$, deren Objekte zu direkten Summanden von $N \oplus \ldots \oplus N$ isomorph sind. Wegen $N \cong N^*$ ist die Einschränkung $* : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ definiert. Andererseits betrachten wir die Kategorie $\mathfrak{P}(E)$ der endlich-erzeugten projektiven rechten E-Moduln. Auf $\mathfrak{P}(E)$ wird durch $P \to \mathrm{Hom}_E(P,E)$ ein Dualitätsfunktor ^{o} definiert, der hermitesche Formen im üblichen Sinne liefert. Wie man nun leicht sieht, ist $F = \mathrm{Hom}(N,\ )$: $\mathfrak{N} \to \mathfrak{P}(E)$ eine volle Einbettung und

$(\phi_M)_{M \in \mathfrak{N}} : F^* \to F^o$ mit

$\phi_M : F(M^*) \to F(M)^o \quad , \quad f \to F(b_o^{-1} f^*)$,

eine natürliche Isomorphie. Also liefert

$(M,b) \to (F(M),\phi_M F(b))$

eine volle Einbettung der hermiteschen Kategorien wobei die analogen Aussagen wie in § 2 gelten, d. h. $b = b^*$ bedeutet $\phi_M F(b) = \varepsilon(\phi_M F(b))^o$ (wegen $\phi_{M^*} = \varepsilon\ \phi_M^o$) u.s.w. Insbesondere folgt der Kürzungssatz für quadratische Formen in $\mathfrak{N}$ aus dem für quadratische Formen über E. Indem man N jeweils genügend gross wählt, etwa

$(N,b_o) := (M \oplus M^*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$

für

$$(M,[b]) = (M_1,[b_1]) \perp (M_3,[b_3]) = (M_2,[b_2]) \perp (M_3,[b_3])$$

erhält man den Kürzungssatz für $Q(\mathfrak{M})$.

4. Beispiele

4.1. Es sei X eine vollständige algebraische Varietät über einem Körper K und $\mathfrak{M}$ die Kategorie der lokalfreien O_X-Moduln von endlichem Typ (Vektorbündel über X). Da die Endomorphismen-Ringe endlich-dimensionale K-Algebren sind, sind die Voraussetzungen von § 3, § 4 erfüllt [1]. Insbesondere gilt der Wittsche Kürzungssatz für quadratische Formen über X. Ist K algebraisch abgeschlossen, so spezialisiert sich Korollar 3.5. zu einem Satz von Grothendieck [3] Prop. 3.1. Ist X die projektive Gerade $\mathbb{P}_1$, so erhält man unter Verwendung der Grothendieck'schen Klassifikation der Vektorbündel über $\mathbb{P}_1$ sofort einen Satz von Harder und Knebusch

(Vgl. [4] Theorem 13.2.2.).

4.2. Es sei K ein Körper, I eine teilweise geordnete Menge mit Involution $^{\perp}$: $I \to I$ und $\mathfrak{M}$ die Kategorie der I-Räume (V,V_i) (d.h. $V_i \subset V$ und $i \leqslant j$ impliziert $V_i \subset V_j$). Definiert man das Dual durch $(V,V_i)^* = (V^*,V_{i^\perp}^{\perp})$, so ist $Q(\mathfrak{M})$ die Kategorie der quadratischen Räume mit Unterraum-System, die in [9] untersucht wird. Die Diskussion in § 3 beantwortet offensichtlich einige der dort gestellten Fragen.

4.3. In letzter Zeit sind mehrfach Beispiele von Vektorräumen mit mehreren (im allgemeinen 2) Bilinearformen untersucht worden, z. B. Vektorräume mit zwei alternierenden Formen [8], Vektorräume mit zwei symmetrischen Formen, und Vektorräume mit einer beliebigen Bilinearform [7] (= einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform im Fall $\mathrm{char}(K) \neq 2$). Diese Theorien ordnen sich hier folgendermassen ein :

Es seien ein Körper K, eine Indexmenge I und $\varepsilon_i = \pm 1$ für alle $i \in I$ gegeben. Dann betrachten wir einerseits die Kategorie $\mathfrak{B}$ der Familien $(V,(b_i)_{i\in I})$ von ε_i-symmetrischen Bilinearformen b_i auf endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V und andererseits die Kategorie $\mathfrak{M}$ der Familien $(V,W,(s_i)_{i\in I})$ von endlich-dimensionalen Vektorräumen V,W und linearen Abbildungen $s_i : V \to W$. In $\mathfrak{M}$ haben wir eine Dualität durch

$$(V,W,(s_i))^* = (W^*,V^*,(\varepsilon_i s_i)^*) \quad .$$

Die symmetrischen hermiteschen Moduln sind diejenigen von der Form

$$((V,W,(s_i)) \ , \ (h,h^*)) \quad \text{mit} \quad h : V \to W^* \quad .$$

Es existiert nun ein kanonischer Funktor F von $\mathfrak{B}$ in die Kategorie $H(\mathfrak{M})$ der symmetrischen hermiteschen Moduln

$$F : (V,(b_i)) \mapsto ((V,V^*,(b_i)),(i_V,i_{V^*}))$$

wobei i_V der kanonische Isomorphismus $V \to V^{**}$ ist. Dieser Funktor hat ein kanonische Links-Inverses G definiert durch

$$G : (V,W,(s_i)) \ , \ (h,h^*)) \mapsto (V,(h^*s_i)) \quad .$$

Man rechnet sofort nach, dass für $X = (V,W,(s_i),(h,h^*))$ aus $H(\mathfrak{M})$

$$(1,h^*) : X \to FG(X)$$

ein Isomorphismus ist. Also liefern F und G zueinander inverse Bijektionen auf den Isomorphieklassen von Objekten in $\mathfrak{B}$ und $H(\mathfrak{M})$.

4.4. Es seien K ein Körper, A eine K-Algebra (assoziativ mit Einselement), eine Involution auf A mit $\bar{\ }|_K = \mathrm{id}$ und $\mathfrak{M}$ die Kategorie der K-endlichen (rechten) A-Moduln. Für $M \in \mathfrak{M}$ wird der Dualraum $M^* = \mathrm{Hom}_K(M,K)$ zu einem (rechten) A-Modul durch $m(\lambda a) := (m\bar{a})\lambda$, wobei $m \in M$, $\lambda \in M^*$, $a \in A$. Eine Form auf M kann dann geschrieben werden als Bilinearform $b : M \times M \to K$ mit

$b(ma,m') = b(m,m'\bar{a})$, wobei $m,m' \in M$, $a \in A$. Für $A = K[G]$, die Gruppenalgebra einer Gruppe G mit der durch $g \to g^{-1}$ $(g \in G)$ gegebenen Involution, ist $Q(\mathfrak{KG})$ im Fall $\mathrm{char}(K) \neq 2$ die Kategorie $Q(G)$ der orthogonalen Darstellungen von G (Darstellungen $G \to O(r,[b])$ mit $(V,[b])$ nichtsingulärer quadratischer Raum über K).

Für $\mathrm{char}(K) = 2$ ist $Q(\mathfrak{KG})$ im allgemeinen eine echte Unterkategorie von $Q(G)$. In $Q(G)$ haben wir G-invariante quadratische Formen q, in $Q(\mathfrak{KG})$ sind diese von der Form $q = [b]$, wobei b eine G-invariante Bilinearform auf V ist. Falls G endlich von ungerader Ordnung ist, gilt $Q(\mathfrak{KG}) = Q(G)$. Denn für G-invariantes $q = [g]$, g Bilinearform auf V, und

$$b := |G|^{-1} \sum_{s \in G} g^s$$

gilt $[b] = q$, und b ist G-invariant. Für $G = \mathbb{Z}$ führen unsere Ergebnisse zu der bekannten Klassifikation der Isometrien t quadratischer Formen (vergl. [12], [5]). Für $\mathrm{char}(K) = 2$ wird dabei der (schwierige) Fall, dass $T+1$ das Minimalpolynom von t teilt, nicht erfasst. Im anderen Fall ($1+t$ invertierbar) gibt es wieder zu gegebenem t-invarianten $q = [g]$ ein t-invariantes b mit $[b] = q$. Definiere nämlich

$$b = (g+g^*)(1+t)^{-1}$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
[(1+t)^*(b-g)(1+t)] &= [(1+t^*)(g+g^*) - (1+t^*)\, g(1+t)] \\
&= [(1+t^*)\, g^* - (1+t^*)\, gt] \\
&= [g^* + t^* g^* - gt - t^* gt] \\
&= [g^* - t^* gt] = [q - q^t] = 0 ,
\end{aligned}$$

also $[b-g] = 0$, d.h. $[b] = q$. Weiter ist $b+b^* = g+g^*$, also $b+b^* = b(1+t)$, also $b^* = bt$, also

$$t^* bt = t^* b^* = (bt)^* = b^{**} = b ,$$

d.h. b ist t-invariant.

Literatur

[1] M. ATIYAH - On the Krull-Schmidt theorem with applications to sheaves. Bull. Soc. Math. France 84, 307-317 (1956).

[2] H. BASS - Algebraic K-Theory, Benjamin, New-York 1968.

[3] A. GROTHENDIECK - Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann. Am. J. Math. 79, 121-138 (1957).

[4] M. KNEBUSCH - Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen. Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. 1969/70.

[5] J. MILNOR - On Isometries of inner product spaces. Invent. math. 8, 83-97 (1969).

[6] H. REITER - Witt's theorem for noncommutative semilocal rings. J. Algebra 35, 483-499 (1975).

[7] C. RIEHM - The equivalence of bilinear forms. J. Algebra 31, 45-66 (1974).

[8] R. SCHARLAU - Paare alternierender Formen. Preprint. Erscheint in Math. Z.

[9] W. SCHARLAU - On subspaces of inner product spaces. Preprint. Erscheint in Proc. International Congress of Math., Vancouver 1974.

[10] R. SWAN - Algebraic K-Theory. Lecture Notes in Mathematics 76, 1968.

[11] C.T.C. WALL - On the axiomatic foundations of the theory of hermitian forms. Proc. Cambridge Phil. Soc. 67, 243-250 (1970).

[12] G.E. WALL - On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups. J. Australian Math. Soc. 3, 1-62 (1963).

Mathematisches Institut
der Universität Münster

D-4400 MÜNSTER
Allemagne