J. LANNES

Transfert de Scharlau et formes quadratiques d'enlacement dans les corps de nombres

Mémoires de la S. M. F., tome 48 (1976), p. 53-59
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__53_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1975, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 48, 1976, p. 53-59

TRANSFERT DE SCHARLAU ET FORMES QUADRATIQUES D'ENLACEMENT DANS LES CORPS DE NOMBRES

par

J. LANNES

§ 1 - Généralités ([2], [4])

Soient A un anneau de Dedekind et K son corps des fractions.

1.1. Un qe-module sur A est un A-module de torsion, de type fini, muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans K/A (forme quadratique d'enlacement).

1.2. Un qe-module est neutre, s'il contient un sous-module I tel que :

$$I = I^{\perp} \quad \text{et} \quad q(I) = 0.$$

1.3. On note $WQ(K,A)$ le groupe de Witt correspondant à ces notions.

1.4. Soit E un espace vectoriel sur K muni d'une forme quadratique non dégénérée (E est un q-espace vectoriel). Soient P un réseau sur E tel que $q(P) \subset A$ et $P^{\#}$ son réseau dual ; on a $P \subset P^{\#}$. La forme quadratique de E induit sur $P^{\#}/P$ une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans K/A. On définit un homomorphisme $\delta : WQ(K) \to WQ(K,A)$ par :

$$\delta([E]) = [P^{\#}/P] \quad .$$

THEOREME. La suite :

$$0 \to WQ(A) \to WQ(K) \to WQ(K,A)$$

est exacte.

1.5. Soit C un qe-module, la décomposition de C en composantes $\mathfrak{p}$-primaires, $\mathfrak{p}$ décrivant l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A, est une décomposition orthogonale ; il en résulte un isomorphisme entre $WQ(K,A)$ et la somme directe $\bigoplus_{\mathfrak{p}} WQ(K,A_{(\mathfrak{p})})$. En outre il y a identité entre la notion de qe-module sur $A_{(\mathfrak{p})}$ et celle de qe-module sur le complété $A_{\mathfrak{p}}$. Notons $K_{\mathfrak{p}}$ le corps des fractions de $A_{\mathfrak{p}}$, l'homomorphisme naturel :

$$WQ(K,A_{(\mathfrak{p})}) \to WQ(K_{\mathfrak{p}},A_{\mathfrak{p}})$$

est un isomorphisme.

1.6. Dans le cas des formes bilinéaires on a, mutatis mutandis, une suite exacte

$$0 \to W(A) \to W(K) \to W(K,A)$$

et des isomorphismes :

$$W(K,A_{(\mathfrak{p})}) \simeq W(\overline{K}_{\mathfrak{p}})$$

$\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ étant le corps résiduel de $A_{(\mathfrak{p})}$. On retrouve la suite exacte classique.

Il est à remarquer par contre que $WQ(K,A_{(\mathfrak{p})})$ ne dépend plus seulement de $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$. Par exemple :

$WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)}) \simeq \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8$, $WQ(\mathbb{Q}[i],\mathbb{Z}[i]_{(1+i)}) \simeq (\mathbb{Z}/2)^5$, $WQ(\mathbb{F}_2(X),\mathbb{F}_2[X]_{(X)})$ n'est pas un groupe fini.

1.7. Soient P un b-module sur A (i.e. un A-module projectif de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans A) et C un qe-module sur A. On peut considérer le produit tensoriel sur A des deux applications

$$P \to \mathrm{Hom}_A(P,A) = P^* \qquad \text{et} \qquad C \to \mathrm{Hom}_A(C,K/A) = \hat{C}$$

comme une application de $P \otimes C$ dans $(\widehat{P \otimes C})$. On obtient ainsi une forme d'enlacement sur $P \otimes C$ (i. e. une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans K/A).

PROPOSITION. Il existe sur le produit tensoriel $P \otimes C$ une et une seule forme quadratique d'enlacement, associée à la forme d'enlacement définie précédemment telle que l'on a :

$$q(x \otimes y) = (x.x)\, q(y)$$

pour tout $x \in P$ et tout $y \in C$.

Cette construction munit le groupe $WQ(K,A)$ d'une structure de $W(A)$-module. La suite exacte (1.4) est une suite exacte de $W(A)$-modules.

Dans [4] nous appliquons à l'anneau des entiers d'un corps de nombres le formalisme décrit ci-dessus qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la théorie de la localisation des formes quadratiques (en un sens très général) développée par M. Karoubi. Dans ce qui suit nous nous limitons à la détermination du conoyau de l'homomorphisme δ.

§ 2 - Le transfert

2.1. Le cas où la différente est principale

Soient A un anneau de Dedekind de corps des fractions K et L une extension, de degré fini, séparable de K. On note B la fermeture intégrale de A dans L. On suppose que la différente $\mathfrak{D}_{B/A}$ est principale. Soit $g \in \overset{\bullet}{B}$ un générateur de la différente, la forme linéaire s :

$$L \longrightarrow K \ , \quad \ell \longmapsto \mathrm{tr}_{L/K}\left(\frac{\ell}{g}\right)$$

induit deux applications A-linéaires notées encore s :

$$B \longrightarrow A \quad \text{et} \quad L/B \longrightarrow K/A \ .$$

La propriété caractéristique de s est la suivante : l'application A-bilinéaire :

$$B \times B \longrightarrow A \quad , \quad x,y \xrightarrow{\ \ominus\ } s(xy)$$

est non dégénérée.

A l'aide d'une telle forme linéaire on définit comme dans le cas des corps les transferts :

q-modules sur B $\longrightarrow$ q-modules sur A

qe-modules sur B $\longrightarrow$ qe-modules sur A

et les homomorphismes de transfert entre les groupes de Witt correspondants ; le diagramme ci-dessous où les flèches verticales sont les homomorphismes de transfert est commutatif :

$$\begin{tikzcd} WQ(B) \arrow[r] \arrow[d, "s^*"] & WQ(L) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "s^*"] & WQ(L,B) \arrow[d, "s^*"] \\ WQ(A) \arrow[r] & WQ(K) \arrow[r, "\delta"] & WQ(K,A) \end{tikzcd}$$

2.2. Le cas des corps de nombres

On va utiliser le théorème 176 de Hecke [3] :

"La différente est dans le carré d'une classe"

Autrement dit il existe un élément a de K^* et un idéal fractionnaire $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{D} = a\,\mathcal{E}^2$.

Quand on localise en un nombre premier rationnel p on se retrouve dans le premier cas, plus précisément il existe b_p dans K^* tel que $(A_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes A)$:

$$\mathcal{D}_{A_{(p)}/\mathbb{Z}_{(p)}} = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{D} = a b_p^2 A_{(p)}$$

L'homomorphisme de transfert correspondant :

$$WQ(K, A_{(p)}) \longrightarrow WQ(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{(p)})$$

ne dépend pas du choix de b_p. Comme les groupes $WQ(K,A)$ et $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ sont respectivement les sommes directes $\bigoplus_p WQ(K,A_{(p)})$ et $\bigoplus_p WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(p)})$, la collection de ces homomorphismes définit un homomorphisme $T_a : WQ(K,A) \longrightarrow WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$.

Posons $s_a = tr_{K/\mathbb{Q}}(\frac{\quad}{a})$.

PROPOSITION. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} WQ(K) \arrow[r, "s_a^*"] \arrow[d, "\delta"] & WQ(\mathbb{Q}) \arrow[d, "\delta"] \\ WQ(K,A) \arrow[r, "T_a"] & WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

est commutatif. Si la différente est un idéal principal engendré par a, l'homomorphisme T_a coïncide avec l'homomorphisme de transfert s_a^* défini précédemment.

Le théorème 176 de Hecke est nécessaire (en un sens à préciser) à la théorie du transfert des formes quadratiques d'enlacement, voici en contre-partie une démonstration de ce théorème basée sur le transfert de Scharlau (*).

§ 3 - Le théorème 176 de Hecke

3.1. Considérons une extension quadratique L/K $(L = K[\sqrt{d}])$ qui est strictement non ramifiée (une place réelle de K se décompose en deux places réelles de L). Le symbole d'Artin de cette extension donne un caractère χ d'ordre 2 non trivial du groupe des classes d'idéaux de A ; la théorie du corps de classes montre que la correspondance qui associe le caractère χ à l'extension L/K est bijective (dans [4] nous donnons une démonstration "élémentaire" de ces propriétés dont les ingrédients essentiels sont la loi de réciprocité quadratique pour les corps de nombres et le théorème du carré global).

Soit B l'anneau des entiers de L, la norme : $B \to A$ est une forme A-quadratique associée à la forme A-bilinéaire :

$$B \times B \longrightarrow A \quad , \quad x,y \xrightarrow{\omega} tr(x\bar{y})$$

celle-ci est non dégénérée parce qu'aucun idéal premier (sous entendu non nul) de A ne se ramifie dans B. Nous notons $\underline{B}$ le q-module sur A décrit ci-dessus. La classe d'isomorphisme de $K \otimes_A \underline{B}$ est $\langle 2\rangle \otimes \langle 1,-d\rangle$. Le discriminant de $tr^*\underline{B}$ est $N_{K/\mathbb{Q}}(d)$, c'est un carré ($v_{\mathfrak{p}}(d)$ est pair pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et d est positif à toutes les places réelles de K). La classe de Witt de $tr^*\underline{B}$ est donc dans $I^2(\mathbb{Q})$.

Pour tout nombre premier rationnel p posons :

$$\mathcal{D}_p = \prod_{\mathfrak{p}/p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D})} \quad \text{nous avons donc} \quad \mathcal{D} = \prod_p \mathcal{D}_p .$$

Nous nous proposons de montrer

$$\chi(\mathcal{D}_p) = \varepsilon_p(tr^* \underline{B})$$

La loi de réciprocité pour $\mathbb{Q}$ donnera alors $\chi(\mathcal{D}) = \varepsilon_\infty(tr^* \underline{B}) = 1$.

Le localisé $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes A$ est principal, soit g un générateur de $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{D}$. Nous avons :

$$\chi(\mathcal{D}_p) = \prod_{\mathfrak{p}/p} \varepsilon_{\mathfrak{p}}(\langle g,-1\rangle \otimes \underline{B}) = \varepsilon_p\,[tr^*(\langle g,-1\rangle \otimes \underline{B}] \quad .$$

La deuxième égalité est une propriété générale dégagée par Scharlau [5]. La première est conséquence du lemme suivant :

LEMME. Pour tout x de $K^*_{\mathfrak{p}}/K^{*2}_{\mathfrak{p}}$:

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}}(\langle x,-1\rangle \otimes \underline{B}) = [\chi(\mathfrak{p})]^{v_{\mathfrak{p}}(x)} \quad .$$

Démonstration. Par définition :

$$\chi(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ est un carré dans } K^*_{\mathfrak{p}} \\ -1 & \text{si } d \text{ n'est pas un carré dans } K^*_{\mathfrak{p}} \end{cases} .$$

Si d est un carré dans $K^*_{\mathfrak{p}}$ il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire les deux membres sont des "formes linéaires" en x, non nulles sur $K^*_{\mathfrak{p}}/K^{*2}_{\mathfrak{p}}$ et nulles sur $A^*_{\mathfrak{P}}/A^{*2}_{\mathfrak{P}}$ qui est de codimension 1.

Revenons au calcul de $\chi(\mathcal{D}_p)$.

$$\chi(\mathcal{D}_p) = \varepsilon_p\,[\mathrm{tr}^*(\langle g\rangle \otimes \underline{B})]\;\varepsilon_p(\mathrm{tr}^*\,\underline{B})$$

D'après 2.1. la classe de Witt de $\mathbb{Q}_p \otimes \mathrm{tr}\,(\langle g\rangle \otimes \underline{B})$ $(\mathbb{Q}_p \otimes \mathrm{tr}\,(\langle \frac{1}{g}\rangle \otimes \underline{B}))$ est dans $WQ(\mathbb{Z}_p)$. La démonstration s'achève en remarquant que $WQ(\mathbb{Z}_p) \cap I^2(\mathbb{Q}_p) = 0$; ceci résulte du fait que l'homomorphisme naturel : $WQ(\mathbb{Z}_p) \to WQ(\mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme.

3.2. Généralisations

- Si l'on suppose seulement L non ramifiée (pas de conditions à l'infini) χ devient un caractère du groupe des classes d'idéaux au sens strict (deux idéaux I et J de A sont strictement équivalents s'il existe un élément m totalement positif de K tel que $J = m\,I$), on obtient (Armitage [1]) :

$$\chi(\mathcal{D}) = \varepsilon_\infty\,(\mathrm{tr}^*\,\underline{B}) = (-1)^{\frac{1}{4}\sigma(\mathrm{tr}^*\,\underline{B})} = (-1)^{\frac{M}{2}}$$

M étant le nombre (pair) de places réelles où d est positif.

- Soit k un corps global de caractéristique non nulle et K/k une extension séparable, la classe du diviseur de la différente $\mathcal{D}_{K/k}$ est un carré (Armitage [1], Weil [6]). Ce résultat peut se démontrer par la méthode ci-dessus (la caractéristique 2 ne fait pas exception).

§ 4 - Le conoyau de δ : $WQ(K) \to WQ(K,A)$

4.1. Notons respectivement γ_a et G_a les composés :

$$WQ(K,A) \xrightarrow{T_a} WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mu_8$$

où γ est l'homomorphisme qui associe à la classe dun qe-module C sur $\mathbb{Z}$ le nombre complexe suivant (qui est une racine huitième de l'unité) :

$$(\# C)^{-\frac{1}{2}} \sum_{x \in C} e^{2i\pi q(x)} \;;$$

$$W(A) \times WQ(K,A) \longrightarrow WQ(K,A) \xrightarrow{\gamma_a} \mu_8$$

où la première flèche correspond à la structure de W(A)-module de WQ(K,A).

La formule de Milgram entraîne la suivante :

Pour $w \in W(A)$, $w' \in WQ(K)$:

$$G_a(w,\delta\, w') = e^{\frac{2i\pi}{8} \sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(\langle a\rangle)\,\sigma_v(w)\,\sigma_v(w')}$$

où V_∞ désigne l'ensemble des places réelles de K et σ_v la signature en une place réelle v.

On en déduit que l'image de δ est orthogonale à la torsion de W(A), nous montrons en fait dans [4] que G_a met en dualité le conoyau de δ et la torsion de $W(A)$ (qui sont des groupes finis).

Exemple. $A = \mathbb{Z}[i]$. Soient g_1 et g_2 les homomorphismes de $WQ(\mathbb{Q}[i],\mathbb{Z}[i])$ dans μ_2 qui associent à la classe d'un qe-module C les sommes de Gauss :

$$g_1(C) = (\# C)^{-\frac{1}{2}} \sum_{x\in C} e^{2i\pi \mathcal{R}e[q(x)]}$$

$$g_2(C) = (\# C)^{-\frac{1}{2}} \sum_{x\in C} e^{2i\pi \mathcal{I}m[q(x)]}$$

La suite :

$$WQ(\mathbb{Q}[i]) \longrightarrow WQ(\mathbb{Q}[i],\mathbb{Z}[i]) \xrightarrow{g_1 \times g_2} \mu_1 \times \mu_2 \longrightarrow 0$$

est exacte.

4.2. Remarque. On déduit de 4.1. que les noyaux de G_a sont respectivement $I^3(K)$ et $\delta[\text{Tors } WQ(K)]$.

4.3. Généralisations. Soient P un ensemble d'idéaux premiers de A et $A_{(P)}$ l'énneau $\bigcap_{\mathfrak{p}\in P} A_{(\mathfrak{p})}$. L'application G_a met en dualité les deux groupes finis suivants :

d'une part le noyau de l'homomorphisme naturel :

$$\text{Tors } W(A) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\notin P} W(K_{\mathfrak{p}})$$

d'autre part le conoyau de l'homomorphisme δ :

$$WQ(K) \longrightarrow WQ(K,A_{(P)}) \quad .$$

Ce résultat est une simple conséquence du cas où P est l'ensemble de tous les idéaux premiers de A.

On obtient facilement des résultats analogues dans le cas des corps globaux de caractéristique non nulle, la variante essentielle est la suivante.

Soient k un corps (fini) et C un qe-module sur $k[X]$, C est aussi un espace vectoriel sur k de dimension finie et la composition :

$$C \xrightarrow{q} k(X)/k[X] \xrightarrow{\text{res}} k$$

est une forme k-quadratique non dégénérée. On définit ainsi un homomorphisme Res :

$$WQ(k(X),k[X]) \longrightarrow WQ(k)$$

qui joue le rôle tenu précédemment par l'homomorphisme γ :

$$WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mu_8$$

(comparer [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.V. ARMITAGE - On a theorem of Hecke in number fields and functions fields, Inventiones Math., 2 (1967), p. 238-246.

[2] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR, P. VOGEL - Λ-sphères, Ann. Sc. E.N.S., t. 7, 1974, fasc. 4, p. 463-506.

[3] E. HECKE - Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Lepipzig. Akad. Verlag 1923 and 1954.

[4] J. LANNES - Formes quadratiques d'enlacement sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 8, 1975, p. 535-579.

[5] W. SCHARLAU - Quadratic reciprocity laws, J. Number Theory 4, 78-97 (1972).

[6] A. WEIL - Basic Number Theory. Springer (1967).

Référence (*) . Cette démonstration est sembable à celle de M. KNEBUSCH et W. SCHARLAU dans "Quadratische Formen und quadratische Reziprozitätsgesetze". Math. Z. 121, 346-368 (1971).

Département de Mathématiques
Université de Tunis
Campus Universitaire

TUNIS

TUNISIE