

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

H. FERRU

**Caractérisation des nombres de Pisot complexes.
Application géométrique**

Mémoires de la S. M. F., tome 19 (1969), p. 5-20

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__19__5_0

© Mémoires de la S. M. F., 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION DES NOMBRES DE PISOT COMPLEXES.

APPLICATION GÉOMÉTRIQUE.

par

Hélène FERRU

Dans les pages qui suivent, on se propose de relier des propriétés, rattachées à l'analyse harmonique, de sous-ensembles de \mathbb{C} , à des propriétés de nombres algébriques: les nombres de Pisot et de Salem.

Nous dirons qu'un sous-ensemble Λ de \mathbb{C} est harmonieux si les restrictions à Λ des caractères du groupe \mathbb{C} , muni de la topologie discrète sont uniformément approchables, sur Λ , par des caractères du groupe \mathbb{C} , muni de la topologie usuelle. Les premiers caractères seront dits faibles et les seconds forts.

Soit G l'ensemble des entiers de Gauss ; un nombre $\theta \in \mathbb{C}$ est un nombre de Pisot si

i) $|\theta| > 1$

ii) il existe un polynôme de $G[x]$, irréductible sur G

$$P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0$$

dont θ est racine

iii) les autres racines de $P(X) = 0$, dites conjuguées de θ , sont de modules inférieurs à 1.

Si l'on impose aux racines conjuguées de θ d'avoir des modules inférieurs ou égaux à 1, l'un d'entre eux au moins étant égal à 1, θ est alors appelé nombre de Salem.

Le théorème auquel on aboutira, et qui relie ces deux notions est alors le suivant :

Théorème. L'ensemble Λ des puissances θ^k , $k > 0$, de θ , est harmonieux si et seulement si θ est un nombre de Pisot ou de Salem ou une racine pième de l'unité.

Ce résultat, ainsi que les moyens employés pour l'obtenir, généralisent ceux d'Yves Meyer relatifs au cas réel. Nous l'utiliserons pour étudier un ensemble Λ formé des images d'un vecteur de \mathbb{R}^2 par les itérées d'une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même.

Avant de démontrer le théorème, nous allons étudier les ensembles harmonieux et en donner des caractérisations. Un caractère χ de \mathbb{C} , muni de la topologie usuelle, est défini par $z \in \mathbb{C}$ de la façon suivante

$$\chi(\lambda) = \exp 2i\pi \Re \bar{z}\lambda,$$

où $\Re \bar{z}\lambda$ est la partie réelle du produit $\bar{z}\lambda$. Nous noterons $\tilde{\mathbb{C}}$ l'ensemble des caractères faibles de \mathbb{C} ; par l'application injective qui, à un caractère fort associe le caractère faible correspondant, \mathbb{C} s'identifie à un sous-ensemble dense de $\tilde{\mathbb{C}}$ qui est compact. Nous avons alors

Proposition 1. Soit Λ un sous-ensemble de \mathbf{C} , et ε un nombre réel de $]0, 2[$; les trois conditions ci-dessous sont équivalentes

a) A tout caractère faible χ de $\tilde{\mathbf{C}}$, on peut associer $z \in \mathbf{C}$, tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$|\exp 2i\pi \Re \bar{z}\lambda - \chi(\lambda)| \leq \varepsilon.$$

b) Il existe un nombre réel positif T , tel qu'à tout caractère faible χ sur Λ on puisse associer $z \in \mathbf{C}$ ayant les propriétés

$$i) |z| \leq T$$

$$ii) |\exp 2i\pi \Re \bar{z}\lambda - \chi(\lambda)| \leq \varepsilon \quad (\lambda \in \Lambda).$$

c) Il existe un nombre réel positif T , tel que tout cercle de rayon T contienne z vérifiant toutes les inégalités

$$|\exp 2i\pi \Re \bar{z}\lambda - 1| \leq \varepsilon \quad (\lambda \in \Lambda).$$

La condition b) implique évidemment a); montrons que a) implique b). Soit $V(\varepsilon)$ l'ensemble des éléments χ de $\tilde{\mathbf{C}}$ tels que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on ait $|\chi(\lambda) - 1| \leq \varepsilon$; $V(\varepsilon)$ fermé dans $\tilde{\mathbf{C}}$, est un compact de $\tilde{\mathbf{C}}$. A tout entier positif n , associons le compact $K_n = B_n + V(\varepsilon)$, où B_n est le cercle de centre 0 et de rayon n de \mathbf{C} . La condition a) signifie que la réunion des K_n est $\tilde{\mathbf{C}}$ tout entier. Grâce au théorème de Baire, on peut affirmer que l'intérieur de K_n , K_n° , n'est pas vide dès que n est assez grand. Considérons alors, pour une telle valeur de n , les ensembles $z + K_n^{\circ}$ où z appartient à \mathbf{C} ; leur réunion est $\tilde{\mathbf{C}}$ puisque \mathbf{C} est dense dans $\tilde{\mathbf{C}}$, et il existe ($\tilde{\mathbf{C}}$ est compact) un ensemble fini F de nombres

complexes, tel que $F + K_n^0 = \tilde{C}$; a fortiori $F + B_n + V(\varepsilon) = \tilde{C}$ ce qui prouve b)

avec $T = n + \sup_{z \in F} |z|$,

Montrons que b) entraîne c). Au caractère défini par le centre s d'un cercle de rayon T , on peut, grâce à b) associer $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq T$ et que $|\exp 2i\pi \Re \bar{s}\lambda - \exp 2i\pi \Re \bar{u}\lambda| \leq \varepsilon$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; en posant $z = s - u$, on a bien, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $|\exp 2i\pi \Re \bar{z}\lambda - 1| \leq \varepsilon$. Vérifions enfin que c) entraîne b).

Par un raisonnement analogue au précédent nous voyons qu'à tout nombre s , on peut, grâce à c) associer un nombre u tel que $s - u$ appartienne à $V(\varepsilon)$ et que $|u| \leq T$; ainsi le compact $B_T + V(\varepsilon)$ contient C , il est donc identique à \tilde{C} .

Remarquons que la condition c) équivaut à la suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel positif T , tel que tout cercle de rayon T contienne z vérifiant toutes les inégalités $\|\Re \bar{z}\lambda\| \leq \varepsilon$, où $\|x\|$ désigne la distance du nombre réel x à Z . Par analogie avec le cas réel, nous dirons qu'un sous-ensemble A de C est relativement dense, s'il existe $T > 0$ tel que tout cercle de rayon T ait, avec A une intersection non vide. La condition c) exprime que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des z tels que $\|\Re \bar{z}\lambda\| \leq \varepsilon$ est relativement dense.

Notons que l'on peut, au lieu de cercles, utiliser des carrés de côtés $2T$, d'où l'on déduit qu'il suffit, pour qu'un ensemble soit harmonieux que ses projections le soient, la réciproque étant généralement fautive ainsi que le laisse prévoir la proposition suivante.

Proposition 2. A tout ensemble harmonieux Λ , on peut associer un nombre $d > 0$, tel que la distance entre deux points distincts de Λ soit supérieure ou égale à d .

Il suffit de montrer que, si Λ est harmonieux, 0 ne peut être un point d'accumulation de Λ car, si Λ est harmonieux $\Lambda + \Lambda$ et $\Lambda - \Lambda$ le sont aussi. Supposons donc Λ harmonieux, prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et considérons le T correspondant. Dans tout cercle de rayon T , il existe un point z tel que $\|\Re \bar{z} \lambda\| < \frac{1}{4}$; d'autre part, λ étant fixé, un tel point z appartient également à l'une des bandes définies par $\Re \bar{z} \lambda = p + \eta$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $|\eta| < \frac{1}{4}$; ces bandes sont distantes de $\frac{1}{2|\lambda|}$, et l'on aboutit à une incompatibilité si l'on peut trouver $\lambda \in \Lambda$ tel que $0 < |\lambda| < \frac{1}{4T}$. (Deux bandes consécutives sont assez éloignées l'une de l'autre pour que l'on puisse placer entre elles un cercle de rayon T).

Nous allons maintenant démontrer le théorème ; la proposition directe : "si θ est un nombre de Pisot ou de Salem, $\Lambda = \{\theta^k\}_{k \geq 0}$ est harmonieux", résultera du lemme suivant :

Lemme. Soit θ un entier algébrique, racine du polynôme irréductible sur G , $X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0$ ($c_k \in G$), dont les racines conjuguées sont $\theta_2, \dots, \theta_n$; pour tout caractère faible χ défini sur $\Lambda = \{\theta^k\}_{k \geq 0}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombres complexes z, z_2, \dots, z_n vérifiant $|z_j| < \varepsilon$ pour $2 \leq j \leq n$ et, pour tout entier $k \geq 0$

$$\chi(\theta^k) = \exp 2i\pi \Re \bar{z} \theta^k \exp 2i\pi \Re \sum_{j=2}^n \bar{z}_j \theta_j^k .$$

Un caractère sur Λ est défini par n nombres complexes $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$, avec $0 \leq \alpha_k < 1$, $0 \leq \beta_k < 1$ de telle sorte que $\chi(\theta^k) = \exp 2i\pi \alpha_k$, $\chi(i\theta^k) = \exp 2i\pi \beta_k$ avec $0 \leq k \leq n-1$; les valeurs de χ aux autres points de Λ s'en déduisent nécessairement à partir des égalités $\theta^{n+p} + c_{n-1} \theta^{n-1+p} + \dots + c_0 \theta^p = 0$ valables pour tout entier $p \geq 0$. Il suffit donc de montrer que l'on peut toujours écrire

$$\gamma_k \equiv \bar{z}\theta^k + \sum_{j=2}^n \bar{z}_j \theta_j^k \text{ modulo } G \text{ avec } |z_j| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Soit A l'ensemble des points de \mathbb{C}^n de la forme $(\bar{z}\theta^k + \sum_{j=2}^n \bar{z}_j \theta_j^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour lesquels $|z_j| \leq \varepsilon$; on doit montrer que, modulo G^n cet ensemble est \mathbb{C}^n/G^n tout entier. Puisque $\theta, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont distincts, A contient un ouvert "cylindrique" de \mathbb{C}^n d'axe D défini par $(\bar{z}\theta^k)_{0 \leq k \leq n-1}$, $z \in \mathbb{C}$, et il suffit alors de montrer que l'image de D dans \mathbb{C}^n/G^n est dense. Ce dernier point résulte de la densité, dans \mathbb{C}^n , du sous-groupe formé des points $(\bar{z}\theta^k + c_k)_{0 \leq k \leq n-1}$, $c_k \in G$, car, si ce sous-groupe n'était pas dense, il existerait un caractère continu de \mathbb{C}^n , autre que le caractère unité, valant 1 sur le sous groupe, c'est-à-dire des nombres complexes non tous nuls, μ_0, \dots, μ_{n-1} tels que

$$\Re \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\mu}_k (\bar{z}\theta^k + c_k) \equiv 0 \text{ modulo } 1,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ et toute suite $(c_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ d'éléments de G . On en déduirait d'abord, en faisant $z = 0$, que μ_k appartient à G , puis, en donnant à z des valeurs réelles et imaginaires pures que $\sum_{k=0}^{n-1} \bar{\mu}_k \theta^k = 0$, ce qui est contraire à la définition de θ .

Si θ est un nombre de Salem ou de Pisot, on a alors pour tout $k > 0$,

$$|\chi(\theta^k) - \exp 2i\pi \Re \bar{z}\theta^k| = \left| \exp 2i\pi \Re \sum_{j=2}^n \bar{z}_j \theta_j^k - 1 \right| \ll \sum_{j=2}^n |\bar{z}_j| |\theta_j|^k \ll \varepsilon(n-1)$$

ce qui permet d'affirmer que Λ est harmonieux. Si θ est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, Λ est fini donc harmonieux.

Réciproquement, si Λ est harmonieux on ne peut avoir $|\theta| < 1$; si $|\theta| = 1$, Λ est nécessairement fini et θ est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité; pour achever d'établir la proposition réciproque nous supposons $|\theta| > 1$ et distinguerons deux cas, θ transcendant et θ algébrique ($\theta \notin \mathbb{R}$). Si θ est transcendant, les restrictions à Λ des caractères faibles sont toutes les suites de nombres complexes de module 1. Nous allons montrer, en utilisant une méthode de J.-F. Méla, que chacune de ces suites n'est pas uniformément approchable par un caractère fort.

Proposition 4. Si $|\theta| > 1$, il existe une suite $(c_k)_{k > 0}$ prenant les valeurs ± 1 , qui n'est pas limite uniforme d'une suite $\exp 2i\pi \Re \bar{z}\theta^k$, $z \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{C}$, $k > 0$.

Soit Δ_ε l'ensemble des nombres complexes z de module 1 et tels que $|z - 1| < \varepsilon$ ou $|z + 1| < \varepsilon$, et soit K_ε l'ensemble des éléments de \mathbb{C} tels que $\exp 2i\pi \Re \bar{z}\theta^k$ appartienne à Δ_ε pour tout k , $k > 0$. Dès que ε est assez petit, 0 est un point isolé de K_ε . En effet, si z appartient à K_ε , on a $|\exp 4i\pi \Re \bar{z}\theta^k - 1| < 2\varepsilon$ qui entraîne $\|\Re 2\bar{z}\theta^k\| < \varepsilon$ ($k > 0$). Si $|2\bar{z}| < \varepsilon$, il existe un premier entier p tel que $|2\bar{z}\theta^k| < \varepsilon$ si $k < p$ et $|2\bar{z}\theta^p| > \varepsilon$; nous allons en déduire qu'il existe un premier entier m , $m > p$, tel que $|\Re 2\bar{z}\theta^m| > \varepsilon$ soit, nécessairement, $|\Re 2\bar{z}\theta^m| > 1 - \varepsilon$. Appelons α l'argument de $2\bar{z}\theta^p$, et φ

l'argument de θ , avec $-\pi < \varphi < \pi$ et $\varphi \neq 0$; choisissons η satisfaisant à l'inégalité (*) $0 < \eta < \inf\left(\frac{|\varphi|}{2}, \frac{\pi - |\varphi|}{2}\right)$, et un entier q tel que $|\theta|^q \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) > 1$. Alors

$$|\Re 2\bar{z}\theta^{p+q}| = |2\bar{z}\theta^{p+q}| |\cos(\alpha + q\varphi)|;$$

si $\alpha + q\varphi$ n'appartient pas à l'un des intervalles de longueurs 2η , de centres $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$$|\Re 2\bar{z}\theta^{p+q}| > \varepsilon |\theta|^q \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) > \varepsilon$$

et $m < p + q$; sinon, on considère $2\bar{z}\theta^{p+q+1}$ ce qui donne, grâce à l'inégalité (*), $m < p + q + 1$. On en déduit $|2\bar{z}\theta^m| > 1 - \varepsilon$ et, comme $|2\bar{z}\theta^{p-1}| < \varepsilon$,

$$|\theta|^{m-p+1} > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon},$$

ce qui, $m - p$ étant borné, est inexact pour ε assez petit. L'inclusion $K_\varepsilon - K_\varepsilon \subset 2K_\varepsilon$ entraîne que, si ε est assez petit, tout point de K_ε est isolé. Alors K_ε est dénombrable, mais comme l'ensemble de toutes les suites de ± 1 ne l'est pas, il existe une suite $(c_k)_{k \geq 0}$, prenant les valeurs ± 1 et qui n'est pas, à ε près, égale à une suite $\exp 2i\pi \Re \bar{z}\theta^k$, $z \in \mathbb{C}$.

Si θ est algébrique et Λ harmonieux, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre complexe non nul, z , tel que $\|\Re \bar{z}\theta^k\| < \varepsilon$ pour tout $k \geq 0$.

En posant $z = x + iy$, $\theta^k = u_k + iv_k$, cette inégalité devient $\|xu_k + yv_k\| < \varepsilon$, soit $xu_k + yv_k = p_k + \varepsilon_k$, avec p_k élément de \mathbb{Z} et $|\varepsilon_k| < \varepsilon$. Soit $Q(X) = a_q X^q + \dots + a_0$, un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X]$ dont θ est racine; les racines de $Q(X) = 0$ sont simples, soient $\theta, \bar{\theta}, \theta_j \dots$ $1 \leq j \leq q - 2$. Pour tout

entier k positif ou nul on a $a_q \theta^{q+k} + \dots + a_0 \theta^k = 0$, d'où l'on déduit que

$a_q p_{q+k} + \dots + a_0 p_k = -(a_q \varepsilon_{q+k} + \dots + a_0 \varepsilon_k)$. Si $\varepsilon(|a_q| + \dots + |a_0|) < 1$, l'entier du

premier membre est nul et le second membre l'est aussi. On a alors $\varepsilon_k = \mu_1 \theta_1^k + \dots$

$\dots + \mu_{q-2} \theta_{q-2}^k$, où μ_j , $1 < j \leq q-2$ est un coefficient complexe nul si $|\theta_j| > 1$

puisque la suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ est bornée. La série formelle $\sum_{k \geq 0} p_k X^k$, soit

$\sum_{k \geq 0} (\mathcal{R} \bar{z} \theta^k) X^k - \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k X^k$ représente la fraction rationnelle $\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{z}}{1-\theta X} + \frac{z}{1-\bar{\theta} X} \right) - \sum_{j=1}^{q-2} \frac{\mu_j}{1-\theta_j X}$

qui, d'après un lemme de Fatou ([2] lemme 2, p. 64) est égale à $A(X)/B(X)$ où A et

B sont deux éléments de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux, tels que $B(0) = 1$. Comme B

admet $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ pour racines on a nécessairement $\mu_j \neq 0$ pour tout j , ce qui

montre que θ est un nombre de Pisot ou de Salem.

Application. Soient u un endomorphisme de \mathbb{R}^2 , $v_0 \in \mathbb{R}^2$ donné et $v_k = u^k(v_0)$ où

k est un entier positif ou nul. Cherchons à quelles conditions $\Lambda = \{u^k(v_0)\}_{k \geq 0}$ est

harmonieux. Nous supposons que v_0 n'est pas un vecteur propre auquel cas la réponse

est immédiate (la valeur propre correspondante est un nombre de Pisot ou de Salem

réel).

Nous montrerons alors que Λ est harmonieux si et seulement si l'une des conditions

suivantes est satisfaite :

a) l'endomorphisme u est diagonalisable et ses valeurs propres sont des nombres de Pisot ou de Salem (réels ou complexes) ou des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

b) l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable et sa valeur propre est un nombre de Pisot (réel).

Nous envisagerons trois cas suivant que les valeurs propres sont imaginaires conjuguées, réelles distinctes et réelles confondues.

I. Cas où les valeurs propres de u sont imaginaires, soient θ et $\bar{\theta}$.

Considérons la matrice de u , $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ comme la matrice d'un endomorphisme de \mathbb{C}^2 et prenons pour vecteurs propres $e = (c, \theta - a)$ associé à θ , et \bar{e} .

Relativement à la base $\{e, \bar{e}\}$, v_k a pour composantes $v\theta^k$ et $\bar{v}\bar{\theta}^k$ où v est la composante de v_0 sur e . Dans la base initiale, v_k a pour composantes

$$\begin{cases} X_k = \Re 2c v\theta^k \\ Y_k = \Re 2v(\theta - a)\theta^k. \end{cases}$$

L'ensemble Λ est harmonieux si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe T' tel que dans tout pavé de côté $2T'$ il existe un point (X, Y) tel que

$$\|XX_k + YY_k\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geq 0,$$

ce qui se traduit par

$$\|\Re 2v(cX + (\theta - a)Y)\theta^k\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geq 0;$$

ceci équivaut à, il existe $T > 0$ tel que tout pavé de côté $2T$ contienne z tel que $\|\Re z\bar{\theta}^k\| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq 0$ car il suffit de résoudre $\bar{z} = 2v(cX + (\theta - a)Y)$ ce qui est toujours possible puisque $c \neq 0$ et $\Im \theta \neq 0$. Ainsi Λ est harmonieux si et seulement si θ est un nombre de Pisot ou de Salem, ou une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité.

II. Cas où les valeurs propres sont réelles distinctes, soient θ_1 et θ_2 .

Dans une base convenablement choisie, Λ est l'ensemble $\{(\theta_1^k, \theta_2^k)\}_{k \geq 0}$.

Si θ_1 et θ_2 sont des nombres de Pisot ou de Salem, Λ est harmonieux.

Inversement supposons Λ harmonieux. A cause de la proposition 2 on ne peut avoir $|\theta_1| < 1$ et $|\theta_2| < 1$. En dehors du cas immédiat $|\theta_1| = 1$, il reste à envisager les cas où $|\theta_1| > 1$. Nous allons voir tout d'abord que ni θ_1 ni θ_2 ne peut être transcendant. Supposons en premier lieu que l'un des nombres θ_1 ou θ_2 soit transcendant et que $|\theta_2| < 1 < |\theta_1|$. Puisque $|\theta_1| > 1$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout entier $m > 0$, il existe une suite $(c_k)_{k \geq 0}$ valant ± 1 pour laquelle on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{k \geq m} |\exp 2i\pi x \theta_1^k - c_k| \geq \varepsilon_0 ;$$

pour s'en assurer, il suffit de remplacer, dans la démonstration d'Y. Meyer ([1], lemme 3.4), K_ε par l'ensemble $K_{\varepsilon, m}$ des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\exp(2i\pi x \theta_1^k)$ appartienne à Δ_ε pour $k \geq m$. Une telle suite, si θ_1 ou θ_2 est transcendant, définit un caractère de Λ et, par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $T(\varepsilon)$ tel qu'on puisse trouver un point (x, y) dans le cercle de centre 0 et de rayon $T(\varepsilon)$ satisfaisant à toutes les inégalités

$$|\exp 2i\pi (x\theta_1^k + y\theta_2^k) - c_k| \leq \varepsilon, \quad k \geq 0 ;$$

on en déduit, pour $k \geq p(\varepsilon)$ défini par $T(\varepsilon)|\theta_2|^{p(\varepsilon)} \leq \varepsilon$,

$$|\exp 2i\pi x \theta_1^k - c_k| \leq 2\varepsilon$$

d'où une contradiction si l'on a choisi $2\varepsilon < \varepsilon_0$, $m \geq p(\varepsilon)$ et la suite correspondant à m .

Supposons maintenant, que l'un des nombres θ_1 ou θ_2 soit transcendant et

que $1 < |\theta_2| < |\theta_1|$ (le cas $\theta_2 = \theta_1$ se résolvant immédiatement). Donnons à Δ_ε la même signification que plus haut et soit encore K_ε , l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $\exp 2i\pi (x\theta_1^k + y\theta_2^k)$ appartienne à Δ_ε pour tout $k \geq 0$. Montrons que, pour ε assez petit, 0 est un point isolé de K_ε et par conséquent que tous les points de K_ε sont isolés. Les points de K_ε satisfont aux inégalités $\|4(x\theta_1^k + y\theta_2^k)\| \leq \varepsilon$, $k \geq 0$. S'il existe x et y non tous les deux nuls appartenant à K_ε et vérifiant $|4x| \leq \varepsilon/2$ et $|4y| \leq \varepsilon/2$ alors il existe un premier entier p tel que $|4(x\theta_1^p + y\theta_2^p)| \leq \varepsilon$ et $|4(x\theta_1^p + y\theta_2^p)| > 1 - \varepsilon$. Si $x = 0$, l'existence de p résulte de ce que $|\theta_2| > 1$ et l'on a alors $|\theta_2| > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ce qui est impossible si ε est assez petit. Sinon, posons $y = t(\varepsilon)x$; alors

$|4x(\theta_1^k + t\theta_2^k)| = |4x\theta_1^k| \left| 1 + t \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^k \right|$ tend vers l'infini avec k et $p(\varepsilon)$ existe; si, quand ε tend vers 0, $1 + t(\varepsilon) \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^{p(\varepsilon)}$ ne tend pas vers zéro et ne lui est pas égal, alors on a, pour des valeurs de ε arbitrairement petites

$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \leq |\theta_1| \left| \frac{1 + t \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^{p+1}}{1 + t \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^p} \right| \leq C |\theta_1|$$

ce qui est impossible pour ε assez petit. Si $1 + t \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^{p(\varepsilon)}$ est nul ou tend vers zéro, on considère de façon analogue l'inégalité

$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \leq |\theta_1|^2 \left| \frac{1 + t \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^{p+1}}{1 + t \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^{p-1}} \right| \leq K |\theta_1|^2$$

qui conduit également à une contradiction. L'ensemble K_ε étant dénombrable il

existe une suite $(c_k)_{k \geq 0}$ valant ± 1 telle que pour tout (x, y)

$$\sup_{k \geq 0} |\exp 2i\pi (x\theta_1^k + y\theta_2^k) - c_k| \geq \varepsilon$$

ce qui est contradictoire avec le fait qu'une telle suite est un caractère de Λ .

Supposons enfin que θ_1 et θ_2 soient algébriques avec toujours $|\theta_1| > 1$.

Soit P le polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ dont θ_1 et θ_2 sont racines et qui n'a que des racines simples,

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0.$$

Si Λ est harmonieux, ε étant donné, on peut écrire, pour x et y convenablement choisis

$$x\theta_1^k + y\theta_2^k = p_k + \varepsilon_k$$

avec $p_k \in \mathbb{Z}$ et $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq 0$. Si ε est choisi assez petit, p_k

et ε_k vérifient une équation récurrente à coefficients entiers. Nous avons alors

$$\varepsilon_k = \mu_2 \theta_2^k + \mu_3 \theta_3^k + \dots + \mu_n \theta_n^k$$

où $\theta_3, \dots, \theta_n$ sont les racines de P , autres que θ_1 et θ_2 et où $\mu_j = 0$

si $|\theta_j| > 1$. Il existe alors des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux A et B ,

tels que $B(0) = 1$ et que

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{x}{1 - \theta_1 X} + \frac{y - \mu_2}{1 - \theta_2 X} - \sum_{j=3}^n \frac{\mu_j}{1 - \theta_j X}.$$

Puisque l'on peut, grâce à la condition $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$ supposer $y - \mu_2 \neq 0$ on en

déduit comme précédemment que θ_1 et θ_2 sont des nombres de Pisot ou de Salem.

III. Cas où θ est la seule valeur propre. Si Λ est diagonalisable le résultat est immédiat. Sinon, dans une base convenablement choisie, on peut écrire

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \theta & \beta \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \neq 0, \text{ d'où } \Lambda^k = \begin{pmatrix} \theta^k & \beta^k \theta^{k-1} \\ 0 & \theta^k \end{pmatrix}.$$

Dans une base convenablement choisie, Λ devient alors l'ensemble $\{(\theta^k, k\theta^{k-1})\}_{k \geq 0}$.

Si θ est un nombre de Pisot, les ensembles $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$ et $\{k\theta^{k-1}\}_{k \geq 0}$ sont harmonieux et Λ est harmonieux.

Inversement supposons Λ harmonieux ; on ne peut avoir $|\theta| < 1$, et le cas $|\theta| = 1$ étant immédiat, il reste à envisager les cas où $|\theta| > 1$. Supposons d'abord θ transcendant, et soit K_ε l'ensemble des points (x, y) du plan, tels que $\exp 2i\pi(x\theta^k + yk\theta^{k-1})$ appartienne à Δ_k pour tout entier $k \geq 0$. Là encore, pour ε assez petit, 0 est point isolé de K_ε . Les points de K_ε satisfont à toutes les inégalités $\|4(x\theta^k + yk\theta^{k-1})\| \leq \varepsilon, k \geq 0$. S'il existe x et y , non tous les deux nuls, appartenant à K_ε et vérifiant $|4x| \leq \varepsilon/2, |4y| \leq \varepsilon/2$, alors il existe un premier entier $p(\varepsilon)$ tel que $|4(x\theta^p + yp\theta^{p-1})| \leq \varepsilon$ et $|4(x\theta^{p+1} + y(p+1)\theta^p)| \geq 1 - \varepsilon$. Si $y = 0$, p existe et l'on a alors $|\theta| \geq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$ ce qui est impossible si ε est assez petit ; sinon posons $x = t(\varepsilon)y$, alors $|x\theta^k + yk\theta^{k-1}| = |y\theta^{k-1}(t\theta + k)|$ tend vers l'infini avec k puisque $|\theta| > 1$ et p existe ; si, quand ε tend vers zéro $t\theta + p$ n'est pas nul, on en déduit

$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \leq |\theta| \left| \frac{t\theta + p + 1}{t\theta + p} \right| = |\theta| \left| 1 + \frac{1}{t\theta + p} \right| ;$$

si $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |t\theta + p| > 0$ on a $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \ll k|\theta|$ pour des valeurs de ε arbitrairement

petites, ce qui est impossible ; si $t\theta + p$ est nul ou tend vers zéro, on considère

alors l'inégalité $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \ll |\theta|^2 \left| \frac{t\theta+p+1}{t\theta+p-1} \right|$ qui est impossible pour ε assez petit.

L'ensemble K_ε est dénombrable et il existe une suite $(c_k)_{k \geq 0}$ valant ± 1 , caractère faible sur Λ , qui n'est pas approchable à ε près par un caractère fort, ce qui contredit le fait que Λ est harmonieux.

Supposons enfin θ algébrique ; pour tout $\varepsilon > 0$ et (x, y) convenablement choisi on a, pour tout $k \geq 0$,

$$x\theta^k + yk\theta^{k-1} = p_k + \varepsilon_k \text{ avec } p_k \in \mathbb{Z} \text{ et } |\varepsilon_k| \leq \varepsilon.$$

Soit $P(X)$ le polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X]$ dont θ est racine, posons

$Q(X) = P^2(X) = a_{2n}X^{2n} + \dots + a_0$; θ est racine double de $Q(X) = 0$ et l'on en

déduit que pour tout $k \geq 0$

$$a_{2n}p_{2n+k} + \dots + a_0 = -(a_{2n}\varepsilon_{2n+k} + \dots + a_0) = 0$$

si ε est assez petit. Ainsi ε_k , solution bornée d'une équation récurrente dont

l'équation caractéristique n'admet que des racines doubles, peut s'écrire

$$\varepsilon_k = \sum_{j=2}^n (\lambda_j k \theta_j^{k-1} + \mu_j \theta_j^k)$$

où $\lambda_j = 0$ si $|\theta_j| \geq 1$ et $\mu_j = 0$ si $|\theta_j| > 1$ et où $\theta_2, \dots, \theta_n$ sont les racines de P , autres que θ . Il existe deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre

eux A et B , tel que $B(0) = 1$ et

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{x}{1-\theta X} - \frac{y/\theta X}{(1-\theta X)^2} + \sum_{j=2}^n \frac{\mu_j}{1-\theta_j X} - \sum_{j=2}^n \frac{\lambda_j/\theta_j X}{(1-\theta_j X)^2}$$

ce qui exige $\lambda_j \neq 0$ pour tout j et par conséquent $|\theta_j| < 1$ pour tout j ; θ est alors un nombre de Pisot.

- [1] Y. MEYER. Nombres de Pisot et Analyse harmonique. Studia Math. vol. 34, n° 2, 1969.
- [2] R. SALEM. Algebraic numbers and Fourier analysis. Heath Mathematical Monographs 1961.

Hélène FERRU
Mathématiques (425)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)
