MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JAMES EELLS
GILLES FOURNIER

La théorie des points fixes des applications à itérée condensante

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 91-120
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__91_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 91 - 120.

LA THEORIE DES POINTS FIXES DES APPLICATIONS A ITEREE CONDENSANTE

par James EELLS et Gilles FOURNIER*

1. INTRODUCTION.

Pour commencer, considérons les trois résultats suivants (définitions à suivre) :

THEOREME 1. - *Soient* X *un* C^1*-rétract absolu de voisinage et* $f : X \to X$, *une* C^1*-application possédant un attracteur compact* C. *Si* f *est à itérée condensante ("eventually condensing") près de* C, *alors le théorème de Lefschetz est valable.* (C'est-à-dire, le nombre de Lefschetz, Λ_f, est bien défini et, $\Lambda_f \neq 0$ implique l'existence d'un point fixe pour f.)

THEOREME 1 bis. - *Soient* X *un* C^1*-rétract absolu de voisinage,* U, *un ouvert de* X *et* $f : U \to X$ *une* C^1*-application à itérée condensante telle que* Fix(f) *est compact. Alors l'indice* ind($f : U \to X$) *est défini et possède les propriétés usuelles. En particulier,* ind(f) = Λ_f.

THEOREME 2. - *Soient* X *un* H*-rétracte absolu de voisinage et* $f : X \to X$ *une application holomorphe vérifiant les hypothèses du Théorème 1. Alors* f *possède un unique point fixe.*

Si X est un ouvert d'un espace de Banach, alors le Théorème 1 devient le Corollary 9 de NUSSBAUM [30] et le Théorème 2 est prequ'une reformulation d'un résultat de EARLE-HAMILTON [12]. Avec nos définitions, nous ne rencontrons aucune difficulté à passer au cas général en utilisant des méthodes bien connues ; les démonstrations de ces théorèmes seront données dans le § 5. La définition de l'indice d'une C^1-application à itérée condensante (généralisant celle de NUSSBAUM [28] pour les C°-applications condensantes) et la démonstration du Théorème 1 bis sont plus difficiles ; celles-ci sont données dans les § 6, 7.

Le but essentiel de ce travail est d'examiner les hypothèses de ces théorèmes, du point de vue de situations et de certains exemples existant en analyse concrète. Quant aux *espaces* X, le cadre est plus ou moins satisfaisant grâce aux développements récents de la topologie différentielle des variétés banachiques. Nous pré-

* *Ce travail a été partiellement supporté par une bourse accordée par le Conseil National de Recherches du Canada. Nous tenons à remercier I. NAMIOKA pour les fructueuses discussions.*

senterons beaucoup d'exemples dans le § 2.

Quant aux *applications* f, il y a deux types d'hypothèses :

a) l'existence de l'attracteur compact. Cela intervient essentiellement, il nous semble, dans la définition du nombre de Lefschetz suivant la méthode de Leray.

b) L'hypothèse que f ait une itérée condensante près de l'attracteur. D'abord, nous ne savons pas si une telle restriction est essentielle. D'autre part, ceci est une hypothèse souvent vérifiée, comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 1. – Soit $f : X \to X$ à itérée compacte. Alors f possède un attracteur compact et a une itérée condensante (§ 3) ; le théorème 1 a été énoncé dans [15].

Exemple 2. – Si f possède un attracteur compact C et si, pour tout $x \in C$, la différentielle $Df^n(x)$ d'une itérée f^n (n étant indépendant de x) est condensante, alors f a une itérée condensante près de C (§ 4).

Exemple 3. – Si f possède un attracteur compact C, qui attire un voisinage W, sur lequel

$$\sup_{i \geqslant 1} \|D^2 f^i\|_W < \infty$$

alors f a une itérée condensante près de C (§ 4). Voir aussi Exemple 4C.

L'outil fondamental pour l'étude de l'hypothèse b), est le module de non-compacité, $\gamma(f)$, de l'application f. Cette notion (due à KURATOWSKI [22]) a été utilisée par DARBO [10], en théorie des points fixes, et surtout, par NUSSBAUM [30], d'une manière puissante et fructueuse.

Nous n'avons aucune idée si les hypothèses de différentiabilité sont nécessaires pour la validité des Théorèmes 1 et 1 Bis. (Celles-ci peuvent être écartées complètement si X est localement compact, et, dans ce cas, le théorème est vrai pour tout C^0-ANR). Certainement, celles-ci sont essentielles pour appliquer les méthodes de Nussbaum.

Conventions. – Les espaces sont toujours métrisables et les applications sont toujours continues. Une variété (respectivement, application) de classe C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ sera appelée une C^r-variété (respectivement, C^r-application).

2. RESULTATS TOPOLOGIQUES.

Références générales. – [13], [16], [22].

(A) Soit X un espace métrisable, rétracte absolu de voisinage (noté ANR). Il existe alors un plongement fermé de X dans un espace normé convenable, V, un voisinage N, de X dans V et une rétraction $r : N \to X$. Chaque C°-variété modelée sur un espace vectoriel localement convexe est un ANR.

Par exemple, soit $\mathscr{C}(S,M)$, l'espace des applications $x : S \to M$ d'un espace compact S, dans un ANR, M, muni de la topologie de la convergence compacte. Alors $\mathscr{C}(S,M)$ est lui-même un ANR. Il en est de même pour l'espace $\mathscr{C}^k(S,M)$, des C^k-applications d'une variété différentiable compacte, S, dans une variété différentiable, $M(0 \leqslant k \leqslant \infty)$, $\mathscr{C}^k(S,M)$ étant muni de la topologie de la C^k-convergence compacte. Enfin, $\mathscr{L}^p_r(S,M)$ $(r > (\dim S)/p)$, muni de la topologie de Sobolev évidente, est aussi un ANR.

(B) Nous disons qu'un *espace de Banach, E, est* C^r, s'il existe des partitions de l'unité par des fonctions de classe C^r. (Cette définition est équivalente à celle donnée dans [13], § 2 , si E est séparable.) Alors une C^r-variété banachique, X, modelée sur E admet des C^r-partitions de l'unité. Nous dirons que X est *un* C^r-*rétract absolu de voisinage* (noté C^r-ANR) s'il existe un plongement de classe C^r de X dans un espace de Banach convenable, V, un voisinage, N, de X dans V et une rétraction $r : N \to X$, de classe C^r. Notons ici que $i(X)$ est un fermé de N. Dans cet ordre d'idées, nous dirons qu'une variété analytique complexe X, est *un H-ANR* s'il existe un plongement holomorphe de X dans un espace de Banach complexe et une rétraction holomorphe $r : N \to X$, où N est un voisinage de X.

Exemple 1. - Etant donnée une variété différentiable M, les espaces $\mathscr{C}^k(S,M)$ sont des variétés différentiables banachiques $(0 \leqslant k < \infty)$. Celles-ci n'admettent pas de C^r-partitions de l'unité $(r \geqslant 1)$. Toutefois, elles sont des C^r-ANR, comme le montre la construction suivante : soit $i : M \to F$ un C^r-plongement dans un espace de Banach F, et $r : N \to M$ une C^r-rétraction d'un voisinage ouvert. Alors $\mathscr{C}^k(S,N)$ est ouvert dans l'espace de Banach $\mathscr{C}^k(S,F)$ et r induit (par composition) une C^r-rétraction $\bar{r} : \mathscr{C}^k(S,N) \to \mathscr{C}^k(S,M)$.

De même, si M est une variété de Stein (de dimension finie), alors $\mathscr{C}(S,M)$ est un H-ANR.

Exemple 2. - On peut varier ces exemples en prenant des espaces d'applications vérifiant les conditions de Hölder d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ sur les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k. On obtient ainsi des variétés banachiques non-séparables $\mathscr{C}^{k+\alpha}(S,M)$ $(0 \leqslant k < \infty$, k entier). Celles-ci n'admettent pas de C^r-partitions de l'unité $(r \geqslant 1)$.

Par contraste, les variétés $\Lambda^{k+\alpha}(S,M)$ définies dans [3] sont séparables et admettent des C^∞-partitions de l'unité.

Exemple 3. – Chaque C^1-variété X (séparable ou non) modelée sur un espace de Banach réflexif est un C^1-ANR. (Par exemple, les variétés $\mathcal{L}^p_r(S,M)$ où $r > (\dim S)/p$ et $1 < p < \infty$.) Ceci est une conséquence du résultat suivant :

PROPOSITION 2B. – *Soit* X *une* C^r-*variété modelée sur un* C^r-*espace de Banach,* E ($r \geq 1$). *Alors* X *admet un plongement (fermé et direct) de classe* C^r *dans l'espace de Banach* $\ell_2(E)$. *De plus, il existe un* C^r-*voisinage tubulaire de* X *dans* $\ell_2(E)$. *En particulier,* X *est un* C^r-*ANR.*

Pour la démonstration, voir [16, Corollary 12.1 et Lemma (p. 180)]. Les modifications nécessaires pour rendre compte de la non-séparabilité éventuelle ne présentent pas de difficultés, grâce aux résultats de TORUNCZYK [35] ; voir aussi [37].

(C) Etant donnée une application $f : X \to X$, on appelle une partie compacte non-vide $C \subset X$, *un attracteur compact (pour* f*)* si

1) C est f-invariante (i.e. $f(C) \subset C$) ; et
2) à chaque partie compacte $K \subset X$, et à chaque voisinage, U, de C, correspond un entier positif n_o tel que $f^n(K) \subset U$, pour tout $n \geq n_o$.

Notons que la condition 1) n'est pas restrictive : en effet, si C' est une partie compacte de X ne vérifiant que la condition 2), alors $C = \cup \{f^n(C') : n \geq 1\}$ est un attracteur compact (pour f).

PROPOSITION 2C. – *Une partie compacte non-vide,* C, *de* X *est un attracteur compact pour* f *si et seulement si*
i) C *possède un système fondamental de voisinages* f-*invariants ; et*
ii) $X = \cup \{f^{-i}(U) : i \geq 1\}$ *pour tout voisinage,* U, *de* C.

En outre, si $X_o \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} X$ *est un rétract de* X *et* $f_o : X_o \to X_o$ *possède un attracteur compact* $C_o \subset X_o$, *alors* $i(C_o) = C$ *est un attracteur compact pour* $f : X \to X$ *définie par* $f = i \circ f_o \circ r$.

La démonstration est tout à fait élémentaire ; en particulier, voir [30], § 1.

(D) Le résultat fondamental suivant est dû à LERAY [26], fondé sur sa notion de trace généralisée :

THEOREME 2D. – *Si* X *est un rétract absolu de voisinage et* $f : X \to X$, *une application possédant un attracteur compact, alors le nombre (entier) de Lefschetz de* f *est défini par*

$$\Lambda_f = \Lambda(f) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{Trace}(f^* | H^i(X)).$$

De plus,

a) Si $Y \subset X$ *est un ANR tel que* $f(X) \subset Y$*, alors* $\Lambda(f) = \Lambda(f|Y)$ *;*

b) Si $X_o \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} X$ *est un rétract comme dans la Proposition 2C, alors* $\Lambda(f_o) = \Lambda(f)$.

c) Si, de plus, C *est un attracteur compact (pour* f_o*), alors, pour chaque voisinage* f_o*-invariant,* U*, de* C*, l'ouvert* $W = r^{-1}(U)$ *est* f*-invariant et* $\Lambda(f_o) = \Lambda(f|W)$.

Ici, $H^i(X)$ désigne l'espace de cohomologie (d'Alexander, de Cech ou singulière) de X de dimension i, à coefficients rationnels.

Soit $K^*(f)$, l'idéal gradué et f-invariant de $H^*(X)$ défini par

$$K^*(f) = \cup \{\text{Noyau}((f^p)^* : H^*(x) \to H^*(X)) : p \geqslant 1\}.$$

Alors l'existence d'un attracteur compact implique que

$$\dim H^i(X)/K^i(f) < \infty, \text{ et}$$

$$H^i(X)/K^i(f) = 0 \quad \text{pour i suffisamment grand.}$$

Suivant Leray, nous définissons

$$\text{Trace } (f^*|H^i(X)) = \text{Trace } (f^*|H^i(X)/K^i(f)).$$

(E) La construction suivante est usuelle :

<u>PROPOSITION 2E</u>. - *Avec les mêmes hypothèses sur* X *et* $f : X \to X$*, étant donnée une suite* $(r_m)_{m \geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ *décroissante vers 0, supposons que* $(U_m)_{m \geqslant 1}$ *soit un système fondamental de voisinages* f*-invariants de* C *tel que chaque* U_m *admette un recouvrement fini* $\mathscr{S}_m$*, par des ouverts de diamètre inférieur à* r_m*. Supposons en outre, qu'il existe une équivalence d'homotopie,*

$$U_m \underset{\psi_m}{\overset{\phi_m}{\rightleftarrows}} N(\mathscr{S}_m),$$

de petit ordre r_m*. (Ici* $N(\mathscr{S}_m)$ *est le nerf du recouvrement* $\mathscr{S}_m$*.) Alors le théorème de Lefschetz est valable.*

Preuve. - D'abord si $g = \phi_m \circ f \circ \psi_m : N(\mathscr{S}_m) \to N(\mathscr{S}_m)$, alors $\Lambda_g = \Lambda_f$. Par conséquent, $\Lambda_f \neq 0$ implique l'existence d'un point fixe, y_m, de g. En posant $x_m = \psi_m(y_m)$, on voit que $\rho_X(f(x_m), x_m) < r_m$. La compacité de C permet l'extraction d'une sous-suite de (x_m) convergente vers un point $x \in C$. Evidemment, $f(x) = x$.

(F) Voici quelques situations dans lesquelles on peut calculer sans peine le nombre de Lefschetz. Nous supposons, une fois pour toutes, que les hypothèses du Théorème 2D sont vérifiées.

Exemple 1. - Si X *est* $\mathbb{Q}$*-acyclique, c'est-à-dire,*

$$H^i(X) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{si } i\neq 0 \end{cases}$$

alors, $\Lambda_f = 1$. Par exemple,

(a) Si X est un sous-ensemble métrisable convexe d'un espace vectoriel, V, localement convexe.

(b) Si X est un ouvert métrisable contractile de V ; plus généralement, si X est une variété contractile modelée sur un espace de Fréchet.

(c) Si X = P(V), l'espace projectif réel d'un espace de Banach, V ; plus généralement, si X est la variété de Stiefel des n-repères dans V.

(d) Si $X = S(V) = \{x \in V : |x| = 1\}$ où V est un espace de Banach de dimension infinie.

(e) L'espace classifiant $B_\Gamma = K(\Gamma,1)$ d'un groupe fini Γ admet un représentant qui est un ANR. B_Γ est $\mathbb{Q}$ -acyclique (toute classe de $\mathbb{Z}$-cohomologie de B_Γ est une classe de torsion dont l'ordre divise l'ordre de Γ). De même, $K(\Gamma,n)$ est $\mathbb{Q}$ -acyclique pour tout groupe abélien fini Γ, et tout n.

(f) Etant donné un ANR $\mathbb{Q}$ -acyclique et simplement connexe, X, soit $\Omega_{ab}(X)$, l'espace des chemins continus sur X joignant a à b, muni de la topologie de la convergence compacte. Alors $\Omega_{ab}(X)$ est un ANR $\mathbb{Q}$ -acyclique.

Exemple 2. - Soit X *connexe. Supposons que l'algèbre de cohomologie* $H^*(X)$ *(ou, plus généralement,* $H^*(X)/K^*(f)$*) à coefficients rationnels ne possède aucun élément nilpotent, alors* $\Lambda_f = 1$.

Plus particulièrement, $H^i(X)/K^i(f) = 0$ pour $i > 0$. En effet, pour $u \in H^i(X)$, il existe m tel que $u^m \in K^i(f)$, alors $((f^*)^k(u))^m = (f^*)^k(u^m) = 0$, pour un certain k, d'où $(f^*)^k(u) = 0$ et $u \in K^i(f)$. Par exemple,

(a) l'espace classifiant B_G d'un groupe de Lie compact, G, admet un représentant qui est un ANR. Il est bien connu que l'algèbre de cohomologie à coefficients rationnels $H^*(B_G)$ possède la structure d'une algèbre de polynômes. On a les sous-exemples suivants : la grassmannienne des n-plans (réels, complexes ou quaternioniques) dans un espace de Hilbert de dimension infinie, E.

(b) L'espace $\Phi_k(E)$, des opérateurs de Fredholm d'indice k (entier) sur E. Là aussi, $H^*(\Phi_k(E))$ est une algèbre de polynômes.

(c) Si $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ et ΩS^n est l'espace des lacets continus en un point de S^n, alors $H^*(\Omega S^{2m+1})$ est une algèbre de polynômes à une variable, de degré 2m. De la même façon, si G est un groupe de Lie compact et simplement connexe, alors $H^*(\Omega G)$ est une algèbre de polynômes de la forme

$$H^*(\Omega G) = H^*(\Omega S^{2m_1+1}) \times \ldots \times H^*(\Omega S^{2m_j+1}),$$

où j est le rang de G.

(d) Si P est un polyhèdre fini tel que $H^{2i}(P) = 0$ pour tout $i > 0$, alors $H^*(\mathscr{C}(P, S^{2m+1}))$ est une algèbre de polynômes (puisqu'isomorphe à la cohomologie d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, $K(\mathbb{Z}, 2n_j)$, et puisque chacun de ces derniers est une algèbre de cohomologie isomorphe à une algèbre de polynômes à une variable).

3. MODULE DE NON COMPACITE.

Références générales. - [18], [19], [20], [22], [23], [29], [30].

(A) Rappelons maintenant la notion, due à KURATOWSKI [22, 23], de *module de non-compacité*, γ, d'un espace et d'une application.

Si (Y,ρ) est un espace métrique, on définit le nombre

$$\gamma(Y) = \inf \left\{ c \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il existe un recouvrement fini, } (S_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, \text{ de} \\ Y \text{ par des parties, } S_i, \text{ de diamètre } \delta(S_i) \leqslant c \end{array} \right\}.$$

Nous remarquons que $\gamma(Y) < \infty$ si et seulement si Y est borné.

Propriétés :

1. $0 \leqslant \gamma(Y) \leqslant \delta(Y)$.
2. Si $A \subset B \subset Y$, alors $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$.
3. $\gamma(A \cup B) = \max(\gamma(A), \gamma(B))$.
4. $\gamma(\overline{A}) = \gamma(A)$.
5. Si Y est complet, $\gamma(A) = 0$ si et seulement si A est relativement compact.
6. $\gamma(N_\varepsilon(A)) \leqslant \gamma(A) + 2\varepsilon$, où $N_\varepsilon(A) = \{y : \rho(y,A) < \varepsilon\}$.
7. Si (Y,ρ) est complet et si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ est une suite de parties non-vides et fermées de Y telle que $\gamma(A_n) \to 0$, alors

a) $A_\infty = \cap \{A_n : 1 \leqslant n \leqslant \infty\}$ est non-vide et compacte.

b) $A_n \to A_\infty$ dans la métrique de Hausdorff. En particulier, pour chaque voisinage, U, de A_∞ dans Y, il existe un entier n_0 tel que $A_n \subset U$ pour $n \geqslant n_0$.

c) si chaque A_n est connexe, alors A_∞ est connexe.

8. Si $f : X \to Y$ est une application entre deux espaces complets, X et Y, et si $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ est une suite de fermés telle que $\gamma(A_n) \to 0$, alors

$$f\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

Pour les démonstrations de 7. et 8., voir [22] ou [30].

Nous avons besoin de certaines propriétés spéciales du module de non-compacité dans les espaces vectoriels topologiques. Les propriétés suivantes sont dues à DARBO [10]. Soient A, B $\subset$ E, où E est un espace vectoriel normé, alors

9. $\gamma(A+B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$.
10. $\gamma(rA) = |r|\gamma(A)$, pour $r \in \mathbb{R}$.
11. $\gamma(\overline{co}\ A) = \gamma(A)$, où $\overline{co}\ A$ désigne l'enveloppe convexe fermée de A dans E.

(B) Le module de non-compacité d'une application $f : X \to Y$ est défini par

$$\gamma(f) = \inf \{k \geqslant 0 : \gamma_Y(f(A)) \leqslant k\gamma_X(A) \quad \text{pour tout } A \subset X\}.$$

PROPOSITION 3B. - *Dans cette définition, remplacer* $\gamma_X(A)$ *par* $\delta_X(A)$ *donne la même valeur de* $\gamma(f)$: $\gamma(f(A)) \leqslant k\gamma(A)$ *pour tout* A, *si et seulement si* $\gamma(f(A)) \leqslant k\delta(A)$ *pour tout* A.

Preuve. - La nécessité est une conséquence évidente de la Propriété 1 du § 3.A.

Prouvons la suffisance. Si $\gamma(A) = \infty$, c'est évident ; sinon, posons $r = \gamma(A)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $S_1,\ldots,S_n$ tels que $A = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ et $\delta(S_i) \leqslant r+\varepsilon$. Alors,

$$\begin{aligned}\gamma_Y(f(A)) &= \max \{\gamma(f(S_i)) : 1 \leqslant i \leqslant n\}\\ &\leqslant \max \{k\delta(S_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant k(r+\varepsilon).\end{aligned}$$

On déduit que $\gamma_Y(f(A)) \leqslant kr = k\gamma(A)$.

Propriétés :

1. Si l'application f est compacte (c'est-à-dire, f(X) est relativement compact dans Y), alors $\gamma(f) = 0$. Réciproquement, si Y est complet et $\gamma(f) = 0$, alors f est localement compacte.

2. Etant données $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, nous avons : $\gamma(g \circ f) \leqslant \gamma(g)\gamma(f)$.

3. Soit $f : X \to Y$ une application de Lipschitz (c'est-à-dire, il existe $k > 0$ tel que $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant k\rho_X(x_1,x_2)$ pour $x_1, x_2 \in X$), alors $\gamma(f) \leqslant k$.

4. En outre, si $f : X \to Y$ est localement lipschitzienne, alors, pour tout compact $C \subset X$, il existe un voisinage, W, de C tel que $\gamma(f|W) < \infty$.

5. Si V est un espace de Banach et si $f,g : X \to V$, alors $\gamma(f+g) \leqslant \gamma(f) + \gamma(g)$.

6. Si X et V sont deux espaces de Banach, alors $\gamma : \mathcal{L}(X,V) \to \mathbb{R}$ est une semi-norme sur l'espace des opérateurs bornés $u : X \to V$, continue par rapport à la topologie

de la norme sur $\mathcal{L}(X,V)$; en fait, $\gamma(u) \leqslant \|u\|$. De plus, γ induit une norme sur le quotient $\mathcal{L}(X,V)/k(X,V)$, où

$$k(X,V) = \left\{ u \in \mathcal{L}(X,V) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(A) \text{ est relativement compact, si} \\ A \subset X \text{ est borné.} \end{array} \right\}$$

(C) DEFINITIONS. - Si $X = Y$ et $\gamma(f) < 1$, nous dirons que f *est condensante* ou que f *est un condenseur* (f est dite "k-set contraction" ($k < 1$), dans [30]). Une application $f : X \to X$ est dite *à itérée condensante* ("eventually condensing"), s'il existe un entier, n, tel que la $n^{\underline{\text{ième}}}$ itérée, f^n, est condensante. Plus généralement, si U est ouvert dans X, alors $f: U \to X$ est à itérée condensante, s'il existe n tel que $f^n : f^{-n}(X) \to X$ est condensante. Si f possède un attracteur compact, C, nous dirons que f *est condensante* (respectivement, *à itérée condensante*) *près de* C, s'il existe un voisinage, W, de C tel que $f|W$ (respectivement, $f^n|W$) est condensante.

PROPOSITION 3C. - *La propriété d'avoir une itérée condensante est indépendante du choix des métriques compatibles sur* X. (Nous dirons que deux métriques ρ_1 et ρ_2 sont compatibles, s'il existe $c > 0$, tel que $\rho_1(x,y) \leqslant c\rho_2(x,y) \leqslant c^2\rho_1(x,y)$, pour $x, y \in X$.)

Preuve. - La propriété (3) ci-haut, montre que $\gamma_1(A) \leqslant c\gamma_2(A) \leqslant c^2\gamma_1(A)$, pour tout $A \subset X$. Si f^n est γ_1-condensante ($\gamma_1(f^n) = k < 1$), nous choisissons m tel que $c^2k^m < 1$, alors $\gamma_2(f^{nm}) < 1$.

(D) Pour une application $f : X \to X$, on dit qu'une partie $C \subset X$ *attire* U, *un voisinage de* C, si pour tout voisinage, W, de C, il existe n tel que $f^n(U) \subset W$.

Exemple. - Si X est complet et si W est un ouvert f-invariant de X tel que $\lim_{n \to \infty} \gamma(f^n(W)) = 0$ et tel que $f^m(W) \subset W$ pour un certain m, alors

$$C_W = \bigcap_{n \geqslant 0} \overline{f^n(W)}$$

est un attracteur compact pour $f|W$, qui attire W, un de ses voisinages.

En particulier, si $X=W$, il est suffisant que $\lim_{n \to \infty} \gamma(f^n(X)) = 0$.

PROPOSITION 3D. - *Soient* X *un espace complet et* C, *un attracteur compact pour* $f : X \to X$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) C *possède un voisinage,* U, *tel que*

$$\lim_{n \to \infty} \gamma(f^n(U)) = 0 \quad ;$$

b) il existe un système fondamental de voisinages $\mathscr{V}$ *de* C *tel que, pour tous* V, V' $\in \mathscr{V}$*, il existe* n *tel que* $f^n(V) \subset V'$ *;*

c) C *attire* U*, un de ses voisinages.*

Preuve. - a) $\Rightarrow$ c). Par la proposition 2C (i), nous pouvons supposer que $f(U) \subset U$. Par la propriété 7 du § 3A,

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f^n(U)}$$

est compact. Si W est un voisinage de C, il existe m tel que $f^m(K) \subset W$. Par la propriété 7 du § 3A, il existe k tel que $f^k(U) \subset f^{-m}(W)$; d'où $f^{m+k}(U) \subset W$.

c) $\Rightarrow$ a). Nous utilisons encore la proposition 2C (i) pour supposer que U est f-invariant. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que $f^{n_\varepsilon}(U) \subset N_{\varepsilon/2}(C)$. Par conséquent, $n \geqslant n_\varepsilon$ implique que

$$\gamma(f^n(U)) \leqslant \gamma f^{n_\varepsilon}(U) \leqslant \gamma(N_{\varepsilon/2}(C)) \leqslant \varepsilon + \gamma(C) \leqslant \varepsilon$$

b) $\Rightarrow$ c). Evident.

c) $\Rightarrow$ b). Choisissons un système fondamental de voisinages de C, $\mathscr{V}$, tel que $V \subset U$ pour tout $V \in \mathscr{V}$. Donc, pour $V' \in \mathscr{V}$, il existe n tel que $f^n(U) \subset V'$; d'où $f^n(V) \subset f^n(U) \subset V'$, pour tout $V \in \mathscr{V}$.

(E) PROPOSITION 3E. - *Soient* X *un espace complet et* C*, un attracteur compact pour* $f : X \to X$. *Si* f *a une itérée condensante, alors* C *attire un de ses voisinages.*

Preuve. - Soit m, un entier tel que f^m soit condensante. Choisissons un voisinage borné et f-invariant, U, de C ; alors,

$$\lim_{i \to \infty} \gamma(\overline{f^{im}(U)}) = 0$$

Notons que $n \geqslant im$, implique que $f^n(U) \subset \overline{f^{im}(U)}$; d'où $\lim_{n \to \infty} \gamma(f^n(U)) = 0$.

Par la proposition 3D, C attire un de ses voisinages.

4. LE CADRE DIFFERENTIABLE.

(A) PROPOSITION 4A. - *Soient* $U \subset X$ *des ouverts d'un espace de Banach,* E, $K \subset U$*, un compact et* $f : U \to X$*, une* C^1*-application. Alors,*

$$\begin{aligned}\sup\{\gamma(Df(x)) : x \in K\} &= \inf\{\gamma(f|N_r(K)) : r > 0\} \\ &= \lim_{r \to 0} \gamma(f|N_r(K)),\end{aligned}$$

où $Df(x)$ *désigne la différentielle de* f *au point* x *et*

$$N_r(K) = \{y \in E : \rho(y,K) < r\}.$$

En particulier, $\sup\{\gamma(Df(x)) : x \in K\} < 1$ *si et seulement s'il existe* $r > 0$ *tel que* $\gamma(f|N_r(K)) < 1$.

Preuve. - Pour chaque point $x \in K$, le développement de Taylor ($R_x(y)$ désignant le reste au point x) s'écrit de la façon suivante :

$$f(y) = f(x) + Df(x)(y-x) + R_x(y).$$

Il en résulte que, pour $x \in U$, et $A \subset U$, $\|R_x(y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|$, pour tout $y \in A$. On obtient : $f(A) \subset N_{\varepsilon\delta(A)}(f(x) - Df(x)(x) + Df(x)(A))$ et $f(x) - Df(x)(x) + Df(x)(A) \subset N_{\varepsilon\delta(A)}(f(A))$.

On en déduit les majorations suivantes :

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned}\gamma(Df(x)(A)) &= \gamma(f(x) - Df(x)(x) + Df(x)(A))\\ &\leqslant \gamma(f(A)) + 2\varepsilon\delta(A),\end{aligned}$$

$$\text{(2)} \qquad \gamma(f(A)) \leqslant \gamma(Df(x)(A)) + 2\varepsilon\delta(A).$$

Posons $k' = \sup\{\gamma(Df(x)) : x \in K\}$; alors, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $x \in K$ tel que $\gamma(Df(x)) > k'-\varepsilon'$. Ainsi $\gamma(Df(x)(A)) > (k'-\varepsilon')\delta(A)$, pour tout borné $A \subset U$; en utilisant la linéarité de $Df(x)$, on obtient que $\gamma(Df(x)(\lambda A)) > (k'-\varepsilon')\delta(\lambda A)$, pour tout $\lambda > 0$. Mais pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x-y\| < \delta$ implique que $N_\delta(x) \subset U$ et que $\|R_x(y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|$; de plus, il existe $\lambda > 0$ tel que $x + \lambda A \subset N_\delta(x)$. Il découle de (1) que

$\gamma(f(x+\lambda A)) + 2\varepsilon\, \delta(x+\lambda A) \geqslant \gamma(Df(x)(x+\lambda A)) > (k'-\varepsilon')\delta(x+\lambda A) \geqslant (k'-\varepsilon')\gamma(\lambda A)$. C'est-à-dire, $\gamma(f(x+\lambda A)) > (k' - (\varepsilon'+2\varepsilon))\gamma(x+\lambda A)$. Autrement dit, pour tous r, ε, $\varepsilon' > 0$, $\gamma(f|N_r(K)) > k' - (\varepsilon' + 2\varepsilon)$; d'où,

$$\text{(3)} \qquad \gamma(f|N_r(K)) \geqslant k' \qquad \text{(pour tout } r > 0\text{)}.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in K$, il existe $\delta_x > 0$ tel que $\|x-y\| < \delta_x$ implique que $\|R_x(y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|$. On peut toujours trouver des points $x_1,\dots, x_n \in K$ tels que $K \subset U_\varepsilon = \cup\{N_{\delta_{x_i}}(x_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, et, $r > 0$ tel que $N_{r'}(K) \subset U_\varepsilon \cap U$, pour tout r', $0 < r' \leqslant r$. Si $A \subset N_{r'}(K)$, $A_i = N_{\delta_{x_i}}(x_i) \cap A$, on obtient de (2) :

$$\gamma(f(A)) = \max\{\gamma(f(A_i)) : 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \max\{\gamma(Df(x_i)(A_i)) + 2\varepsilon\delta(A_i)\}.$$

D'où, $\gamma(f(A)) \leqslant \max\{k'\delta(A_i) + 2\varepsilon\delta(A_i)\} \leqslant (k'+2\varepsilon)\delta(A)$. Par la proposition 3B, on en conclut que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout r', $0 < r' \leqslant r$,

(4) $$\gamma(f|N_{r'}(K)) \leqslant k'+2\varepsilon .$$

Finalement, de (3) et (4), on obtient la conclusion.

COROLLAIRE 4A. - *Si chaque différentielle,* $Df(x)$, *est un opérateur compact, pour* $x \in K$, *alors* $f|N_r(K)$ *est condensante pour* r *suffisamment petit.*

Remarque. - Si $f : U \to F$ est une C^r-application compacte, alors les différentielles, $D^i f(x) : E \times \ldots \times E \to F$, sont compactes pour $i \leqslant r$ [21] ; la réciproque est fausse, même pour $i=1$ [2].

(B) *Application.* - Notons $\mathcal{L}(E)$, l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur l'espace de Banach E, $\mathcal{K}(E)$, l'idéal des opérateurs compacts (plus précisément, opérateurs compacts sur les bornés) et

$$\Phi(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \dim \text{Noyau}(u) < \infty \text{ et } \operatorname{codim} \text{Image}(u) < \infty\},$$

l'espace des opérateurs de Fredholm. Nous remarquons, en passant, qu'on peut trouver une caractérisation (utilisant un module de non-compacité un peu différent de celui du § 3A) de ces opérateurs dans [24].

LEMME (NUSSBAUM-YOOD [31]). - *Si* $u \in \mathcal{L}(E)$ *a une itérée condensante, alors,* $I - u \in \Phi(E)$.

De plus, en appliquant les méthodes de NUSSBAUM [31], on peut montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ a *une itérée condensante si et seulement s'il existe* $0 < k < 1$ *tel que les valeurs propres de valeur absolue supérieure à* k *sont en nombre fini et de multiplicité finie.*

Comme application de la proposition 4A, nous citons le :

COROLLAIRE 4B. - *Etant donnée une* C^r*-application* $(r \geqslant 1)$, $f : U \to E$, *condensante sur un ouvert* $U \subset E$, *l'application* $F = I-f : U \to E$ *est de Fredholm (au sens de [14, 6]).*

En particulier, à chaque point $x \in U$, la différentielle, $DF(x)$, a son indice de Fredholm (= dim Noyau (DF(x)) - codim Image (DF(x))) égal à zéro. De plus, si $F : U \to E$ est σ-propre et $r > 0$, alors les valeurs régulières de F sont résiduelles dans E [33].

Exemple 4B. - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, un opérateur de RIESZ [11, chap. XI]. Un tel opérateur peut être caractérisé comme suit (Théorème de Ruston) :

$$\liminf_{n \to \infty} \{\|u^n + C\|^{1/n} : C \in \mathcal{K}(E)\} = 0.$$

Dans ce cas, u a une itérée condensante. En effet, pour $0 < \varepsilon < 1$, il existe n et C, un opérateur compact, tels que $\|u^n+C\|^{1/n} < \varepsilon$; d'où

$$\gamma(u^n) = \gamma(u^n + C - C) \leqslant \gamma(u^n+C) + \gamma(C) \leqslant \|u^n+C\| + 0 \leqslant \varepsilon^n < 1.$$

(Voir [31] et [37], pour le cas où E est un espace de Hilbert).

(C) PROPOSITION 4C. - *Soient* U *un ouvert d'un espace de Banach*, E, *et* $f : U \to U$, *une* C^1*-application possédant un attracteur compact*, C, *qui attire un voisinage de la forme* $N_{2\varepsilon}(C)$. *Posons*

$$b_i = \sup \{|Df^i(x) - Df^i(y)| : x, y \in N_{2\varepsilon}(C)\} ; \tag{5}$$

nous supposerons, en outre, que

$$\limsup_{i \to \infty} b_i < 1.$$

Alors, il existe k, $0 < k < 1$, *et* m *tels que* $\gamma(Df^i(x)) \leqslant k$ *pour tout* $x \in N_\varepsilon(C)$ *et tout* $i \geqslant m$.

En remplaçant C *par un seul point*, $c \in C$, *dans (5), on obtient la même conclusion pour* $x \in N_\varepsilon(c)$.

Preuve. - Prenons r, s, et un entier, m, tels que $b_i < r < s < 1$ et $\gamma(f^i(N_{2\varepsilon}(C))) < (s-r)\varepsilon$, pour $i \geqslant m$, grâce à la Proposition 3D. Etant donnés un sous-ensemble borné $A \subset E$ et $a \in A$, définissons $B = (\varepsilon/\delta(A))(A-a)$; d'où $\varepsilon = \delta(B)$ et $B \subset \overline{N_\varepsilon(0)}$.

Maintenant, pour $x \in N_\varepsilon(C)$, il s'ensuit que

$$Df^i(x)(B) \subset f^i(x+B) - f^i(x) - R^i_x(x+B) \subset f^i(N_{2\varepsilon}(C)) - f^i(x) - R^i_x(x+B).$$

On en conclut que

$$\gamma(Df^i(x)(B)) \leqslant \gamma(f^i(N_{2\varepsilon}(C))) + \gamma(R^i_x(x+B)) \leqslant (s-r)\varepsilon + \delta(R^i_x(x+B)).$$

Si $y, z \in x+B$, alors

$$\|R^i_x(z) - R^i_x(y)\| \leqslant \|z-y\| \sup \{\|Df^i(x) - Df^i((1-t)z + ty)\| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant \delta(B)b_i < \varepsilon r$$

donc

$$\gamma(Df^i(x)(B)) \leq (s-r)\varepsilon + \varepsilon r = s\varepsilon .$$

Ainsi,

$$\gamma(Df^i(x)(A)) = \gamma(Df^i(x)(a + \frac{\delta(A)}{\varepsilon} B)) = \gamma(\frac{\delta(A)}{\varepsilon} Df^i(x)(B)) \leq \frac{\delta(A)}{\varepsilon} s\varepsilon = s\delta(A).$$

Par la proposition 3B, $\gamma(Df^i(x)) \leq k$, et ceci, pour tout $x \in N_\varepsilon(C)$ et tout $i \geq m$.

Remarque. - Supposons qu'il existe ε, $0 < \varepsilon < 1$, et B, $1 < B < \infty$, tels que

$$(6) \qquad \|D^2f^i(z)\| \leq B \quad \text{pour} \quad z \in N_\varepsilon(x) \quad \text{et tout} \quad i \geq 1.$$

Alors,

$$b_{i,x} = \sup \{\|Df^i(y') - Df^i(y)\| : y', y \in N_\eta(x)\} \leq \varepsilon < 1,$$

où $\eta = \varepsilon/2B$. En effet, pour $y, y' \in N_\eta(x)$, on a

$$\|Df^i(y') - Df^i(y)\| \leq \|y'-y\| \sup \{\|D^2f((1-t)y' + ty)\| : 0 \leq t \leq 1\} \leq 2\eta B = \varepsilon < 1.$$

<u>COROLLAIRE 4C</u>. - *Conservons les notations de la Proposition 4C. Supposons en outre, que* W *est un voisinage de* C *dans* U *tel que, ou bien*

a) il existe $r > 0$ *tel que* $\limsup_{i \to \infty} b_i(r) < 1$, *où*

$$b_i(r) = \sup \{\|Df^i(x) - Df^i(y)\| : x, y \in W \quad \text{et} \quad \|x-y\| < r\} \quad ;$$

ou bien

b) $\sup_{i \geq 1} \sup \{\|D^2f^i(x)\| : x \in W\} < \infty$.

Alors il existe m *tel que* $\sup \{\gamma(Df^m(x)) : x \in C\} < 1$.

En particulier, f *a une itérée condensante près de* C.

Preuve. - Soient V un voisinage attiré par C, $x \in V \cap W$ et $0 < \varepsilon_x < 1$ tel que $4\varepsilon_x < r$ et $N_{2\varepsilon_x}(x) \subset V \cap W$. Encore par la proposition 3D, il s'ensuit que

$$\lim_{i \to \infty} \gamma(f^i(N_{2\varepsilon_x}(x))) \leq \lim_{i \to \infty} \gamma(f^i(V)) = 0.$$

Soit $b_i = \sup \{\|Df^i(y) - Df^i(z)\| : y, z \in N_{2\varepsilon_x}(x)\}$.

Cas a). - $b_i \leq b_i(r)$; d'où, $\limsup_{i \to \infty} b_i < 1$.

Cas b). - Posant $B_{i,x} = \sup \{\|D^2f^i(z)\| : z \in N_{2\varepsilon_x}(x)\}$, nous avons $B_x = \sup \{B_{i,x} : i \geq 1\} < \infty$. On peut donc supposer que ε_x est suffisamment petit pour que $\limsup_{i \to \infty} b_i \leqslant 4\varepsilon_x B_x < 1$.

Dans les deux cas, par la proposition 4C, on obtient qu'il existe $k_x < 1$ et m_x tels que $\gamma(Df^i(y)) \leqslant k_x$, pour tout $y \in N_{\varepsilon_x}(x)$ et tout $i \geqslant m_x$. C étant compact, on peut trouver des points $x_1,\ldots,x_n \in C$ tels que $C \subset \cup \{N_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$, où $N_j = N_{\varepsilon_{x_j}}(x_j)$. Définissons $m = \max\{m_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ et $k = \max\{k_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Donc, $\gamma(Df^m(y)) < k_j \leqslant k < 1$, pour $y \in N_j$. Ainsi,

$$\sup\{\gamma(Df^m(y)) : y \in C\} < 1.$$

La dernière assertion du corollaire résulte de la Proposition 4A.

Exemple 4C. - Soient X un C^ω-ANR et $f : X \to X$, une C^ω-application possédant un attracteur compact, C, attirant son voisinage W. Supposons que f soit la restriction d'une application holomorphe $\phi : U \to U$ d'un voisinage borné d'un C^ω-plongement de X, dans un espace de Banach complexe. Alors il découle de l'inégalité de Cauchy (sur les itérées, $\phi^k : U \to U$) que $\|D^2\phi^k(z)\| \leqslant \text{cte}\ \eta^{-2}\|\phi\|_{N_{2\eta}(C)}$ pour tout $z \in N_\eta(C)$, tout $k \geqslant 1$ et pour un certain $\eta > 0$. Par conséquent, les hypothèses du Corollaire 4C sont vérifiées.

5. LES THEOREMES.

Dans l'énoncé du théorème 1, la condition "f est à itérée condensante près de C" est supposée vérifiée par rapport à une métrique finslérienne sur X.

(A) Preuve du théorème 1. - Par la définition d'un C^1-ANR, soit $X \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} N \subset V$, une C^1-rétraction d'un voisinage, N. Les applications r et i étant localement lipschitzienne sur leur domaines, on peut appliquer la propriété 4 du § 3B. On peut donc choisir W et U tels que W soit f-invariant, U, borné, $i(W) \subset U$, $k = \gamma(f^n|W) < 1$, $r(U) \subset W$, $\gamma(i|W) < \infty$ et $\gamma(r|U) < \infty$.

Il s'ensuit qu'on peut choisir un entier m tel que $\gamma(i|W)\, k^m \gamma(r|U) < 1$; d'où, $\gamma((i\circ f\circ r|U)^{nm}) = \gamma(i\circ f^{nm}\circ r|U) \leqslant \gamma(i|W)\ \gamma(f^n)^m \gamma(r|U) \leqslant \gamma(i|W)\ k^m\gamma(r|U) < 1$. C'est-à-dire, $i\circ f\circ r : U \to U$ a une itérée condensante.

La conclusion découle de l'énoncé suivant qui est un cas particulier du Théorème 1 et qui est obtenu par des modifications élémentaires de [30], Corollary 9 et Theorem 3. (Remarquons que cet énoncé peut aussi être obtenu comme corollaire du Théorème 1 bis que nous prouverons aux paragraphes 6 et 7.)

PROPOSITION 5A. - *Soient* U *un ouvert d'un espace de Banach et* $F : U \to U$, *une* C^1*-application possédant un attracteur compact,* C. *Si* F *a une itérée condensante près de* C, *alors le théorème de Lefschetz est valable.*

(B) Preuve du Théorème 2. - Le résultat suivant est obtenu par des modifications assez élémentaires d'un théorème de EARLE-HAMILTON [12] :

Soient U un ouvert connexe borné d'un espace de Banach complexe, E, et $f : U \to U$, une application holomorphe ; s'il existe une itérée de f telle que $d(f^n(U), E-U) > 0$, alors f possède un et un seul point fixe, x.

En effet, f^n est une contraction stricte par rapport à la structure finslérienne de Carathéodory-Reiffen ; d'où, $(f^m(U))_{m > 1}$ converge vers un point, x. Notons qu'il existe un et un seul point fixe pour f^n si et seulement s'il existe un et un seul point fixe pour f.

Le théorème 2 en est une conséquence facile ; en effet, avec les notations du § 5A, on choisit un voisinage connexe borné de i(C), U, contenu dans un voisinage tubulaire, N, et on définit $F = i \circ f \circ r : U \to U$. Alors f possède i(C), comme attracteur compact, et a une itérée condensante. La proposition 3E montre l'existence d'une itérée F^n, telle que $d(F^n(U), V-U) > 0$; c'est-à-dire que les hypothèses du théorème de Earle-Hamilton sont vérifiées.

(C) Remarque. - Nous n'avons aucune idée si nos conditions de différentiabilité sont nécessaires. Néanmoins, voici quelques situations topologiques, et quelques résultats partiels, dans lesquelles le théorème de Lefschetz est valable :

1. X un C°-ANR (séparable ou non) et $f : X \to X$, une application compacte [6], [13].
2. Plus généralement, si f possède un attracteur compact, C, et s'il existe un voisinage de C, W, tel que $f|W$ est compact (par exemple, X localement compact ou $\dim X < \infty$), ce résultat a été démontré par Eells dans le Séminaire de Mathématiques supérieures à Montréal (été 1969 ; notes par M. Garançon (non publiées)) et par Palais (communication personnelle, même époque). Voir aussi [7], [8] et [9, § 3].

D'autre part, nous ne savons pas si le Théorème 1 est vrai lorsque X est un rétract absolu de voisinage (lipschitzien) et f, une application (lipschitzienne) possédant un attracteur compact et une itérée condensante.

3. En revanche, voici une variation, très faible, du Théorème 1 : *soient* X *une sous-variété fermée différentiable d'un espace de Hilbert et* $f : X \to X$, *une* C°*-application possédant un attracteur compact* C. *Si* f *est condensante près de* C,

alors le théorème de Lefschetz est valable.

La démonstration suit celle du théorème 1. La norme de la différentielle de la rétraction $r : N \to X$ satisfait $\|Dr(x)\| = 1$, pour $x \in X$. Par la proposition 4A, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de $i(C)$, U, tel que $\gamma(r|U) \leq 1+\varepsilon$. Alors, $\gamma(F(B)) \leq k(1+\varepsilon)$, pour $B \subset U$. En prenant $0 < \varepsilon < (1-k)/k$, on garantit que $F : U \to U$ est condensante. Comme dans la preuve du théorème 1, nous avons réduit notre proposition au cas où X est un ouvert d'un espace de Banach ; nous pouvons donc appliquer les méthodes de [30, Corollary 6 et Theorem 3].

6. INDICE DE POINT FIXE DANS LES ESPACES DE BANACH.

La notion d'indice de point fixe a été définie par LERAY dans [25, chap. VI] ; voir aussi [5, 26, 32]. Une généralisation a été donnée, pour les applications condensantes, par NUSSBAUM [28, 29].

Dans ce paragraphe, nous supposons, une fois pour toutes, que, $U \subset X$, sont des ouverts d'un espace de Banach.

(A) Nous dirons qu'une application $f : U \to X$ *est faiblement condensante* s'il existe m, un entier, $k < 1$, k', K, $\varepsilon < (1-k)/mk'$, $r_\circ$ positifs, tels que $\gamma(f^m(A)) < k\gamma(A)$, $\gamma(f(A)) < k'\gamma(A)$, pour tout $A \subset W = f^{-m}(X)$ et tels que $N_{r\delta(A)}(\text{co } A) \subset W$ et $\delta(A) < K$ entraînent que

(1) $\quad \gamma(f^i(N_{r\delta(A)}(\text{co } A))) \leq \gamma(f^i(A)) + \varepsilon\delta(A) \quad$ pour tout $i < m$ et $0 \leq r \leq r_\circ$.

L'inégalité (1) (plus particulièrement (2), plus bas) est motivée par une analyse du théorème de Taylor (avec reste) pour les applications différentiables ; voir [15, Proposition 2].

Notons ici que cette notion n'est introduite que pour simplifier la démarche à suivre et est utile seulement en vertu des exemples suivants. Remarquons que l'on peut partout accepter r=0 sauf pour obtenir la propriété 8 (homotopie) du § 7A.

Exemple 6A.

(1) Toute application condensante est faiblement condensante.

(2) Toute somme d'une application faiblement condensante et d'une application compacte, est faiblement condensante.

PROPOSITION 6A. - *Toute* C^1*-application,* $f : U \to X$, *a itérée condensante est faiblement condensante au voisinage de tout compact* f*-invariant,* M, *avec* ε *aussi petit que l'on veut, si* K *est assez petit.*

Preuve. - Choisissons $k < 1$ et m tels que $\gamma(f^m(A)) \leqslant k\gamma(A)$ pour tout $A \subset W = f^{-m}(X)$. Définissons $k' = \sup\{\|Df(x)\| + 1 : x \in M\}$; il existe s tel que $y \in N_{3s}(M)$ implique que $\|Df(y)\| < k'$. Alors $\|x-y\| < 3s$ entraîne que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k'\|x-y\|$, pour tous $x,y \in N_s(M)$; d'où $A \subset N_s(M)$ implique que $\gamma(f(A)) \leqslant k'\gamma(A)$, car $\gamma(N_s(M)) \leqslant 2s < 3s$.

Choisissons $\varepsilon < (1-k)/mk'$ et K tels que $0 < K < s$ et, $\|x-y\| < K$ implique que $\|Df^i(x) - Df^i(y)\| < \varepsilon/4$ pour tout $i < m$ et tous $x, y \in N_K(M)$.

Si $\mathrm{co}\, A \subset N_K(M)$ et $\delta(A) < K$, alors pour tout $i < m$,

$$\gamma(f^i(\mathrm{co}\, A)) \leqslant \gamma(f^i(A)) + 2(\varepsilon/4)\delta(A), \tag{2}$$

car $f^i(\mathrm{co}\, A) \subset N_{\varepsilon\delta(A)/4}(\mathrm{co}\, f^i(A))$. En effet, si $\{x, y_1, \dots, y_n\} \subset A$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \cdot (a_i \geqslant 0)$, alors

$$\left\| f^i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big) - \sum_{j=1}^{n} a_j f^i(y_j)\right\| \leqslant \sum_{j'=1}^{n} a_{j'} \left\| R_x^i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big) - R_x^i(y_{j'})\right\|$$

$$\leqslant \sum_{j'=1}^{n} a_{j'} \left\| \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big) - y_{j'}\right\| \sup\{\|Df^i(x) - Df^i(y)\| : y \in \mathrm{co}\, A\}$$

$$\leqslant (\varepsilon/4)\delta(A).$$

Enfin, choisissons $r < \frac{1}{2}\varepsilon(k')^{-m}$; ainsi,

$$\gamma(f^i(N_{r\delta(A)}(\mathrm{co}\, A))) \leqslant \gamma(f^i(\mathrm{co}\, A)) + (k')^i r\delta(A)$$

$$\leqslant (\gamma(f^i(A)) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\delta(A)) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\delta(A).$$

Remarque 6A. - Si, pour tout $x \in U$, $Df(x)$ est un opérateur de Riesz, alors f est faiblement condensante près de $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in U : f(x) = x\}$.

En effet, d'après l'Exemple 4B, pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$, il existe m_x tel que $\gamma(Df^{m_x}(x)) = \gamma((Df(x)^{m_x}) < 1$. Comme $x \longmapsto \gamma(Df^n(x))$ est continue, il existe un recouvrement fini, $\{N_1, \dots, N_k\}$, de $\mathrm{Fix}(f)$ tel que $x \in N_j$ entraîne que $\gamma(Df^{m_j}(x)) < 1$. Posons $m = m_1 m_2 \dots m_k$; alors, pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$, on a : $\gamma(Df^m(x)) < 1$ et $\sup\{\gamma(Df^m(x)) : x \in \mathrm{Fix}(f)\} < 1$. D'où, par les propositions 4A et 6A, on obtient la conclusion.

(B) <u>PROPOSITION 6B</u>. - *Soit* $f : U \to X$ *une application faiblement condensante et soit* M, *un compact* f-*invariant de* U. *Alors il existe,* $\{B_n\}_{n \geqslant 1}$, *une suite de réu-*

nions finies de fermés convexes de U *telle que si* $B_\circ = f^{-1}(B_1)$, *on ait :*

(1) B_1 *est un voisinage de* M,

(2) $f(B_{n-1} \cap B_\circ) \subset B_n \subset B_{n-1}$, *pour tout* $n > 1$,

(3) $\lim_{n \to \infty} \gamma(B_n) = 0$.

Preuve. - Choisissons $N_1, \ldots, N_v$, des fermés convexes de $f^{-m}(X)$ tels que $B_1 = \bigcup_{j=1}^{v} N_j$ soit un voisinage de M et $\delta(N_j) < K$, pour tout $j = 1,\ldots,v$. On a que $f(B_1 \cap B_\circ) \subset B_1$. Choisissons $t > 0$ tel que $1 < t^2 < (k + \varepsilon(m-1)k')^{-1}$.

Par induction, supposons que B_n est défini et est une réunion finie de fermés convexes vérifiant $f(B_n \cap B_\circ) \subset B_n$. Choisissons $S_1,\ldots,S_s$ tels que $f(B_n \cap B_\circ) = \bigcup_{j=1}^{s} S_j$, $\delta(S_j) < t\gamma(f(B_n \cap B_\circ))$ et chaque $S_j \subset N_p$ pour un certain $p = p(j)$. Définissons $B_{n+1} = \cup\{(\overline{co}\ S_j) \cap B_n : 1 \leq j \leq s\}$. On n'a que $B_{n+1} \subset B_n$, que B_{n+1} est une réunion finie de fermés convexes et que $f(B_{n+1} \cap B_\circ) \subset f(B_n \cap B_\circ) \subset B_{n+1} \subset B_n$.

Il reste à montrer que $\lim_{n \to \infty} \gamma(B_n) = 0$.

Notons que $co\ S_j \subset N_p$ et $\delta(S_j) \leq \delta(N_p) < K$; donc, pour $i < m$, on a :

$\gamma(f^i(B_{n+1})) \leq \max\{\gamma(f^i(co\ S_j)) : 1 \leq j \leq s\} \leq \max\{\gamma(f^i(S_j)) + \varepsilon\delta(S_j) : 1 \leq j \leq s\}$ d'où, $\gamma(f^i(B_{n+1})) \leq \gamma(f^{i+1}(B_n)) + \varepsilon t\gamma(f(B_n))$. Mais, $\gamma(f(B_n)) \leq k'\gamma(B_n) \leq k'\gamma(B_j)$, pour tout $j \leq n$, et $\gamma(B_{n+1}) \leq t\gamma(f(B_n))$, pour tout n. D'où,

$$\gamma(B_{n+m}) \leq t\gamma(f(B_{n+m-1})) \leq t(\gamma(f^m(B_n)) + \varepsilon t \sum_{j=1}^{m-1} k'\gamma(B_n))$$

$$\leq t^2(k + \varepsilon k'(m-1))\gamma(B_n).$$

Ainsi, si $k'' = t^2(k + \varepsilon k'(m-1)) < 1$, on n'a que

$$\gamma(B_n) \leq (k'')^j\gamma\ (B_{n-jm}) \leq (k'')^j\gamma(B_1) \quad \text{pour tout } n > jm.$$

D'où, $\lim_{n \to \infty} \gamma(B_n) = 0$.

(C) Le lemme suivant, et son utilisation pour bien définir l'indice de point fixe, est la seule raison pour laquelle nous utilisons des fermés plutôt que des ouverts.

LEMME 6C. - *Soient* $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ *des fermés convexes d'un espace de Banach. Notons* $A = \cup \{A_j : 1 \leq j \leq n\}$ *et, pour chaque* $J \subset \{1,\ldots,n\}$, $A_J = \cap \{A_j : j \in J\}$. *Alors il existe une application* $\pi : A \to A$, *telle que* $\pi(A_J) \subset A_J$, *pour tout* J, *et il existe un polyhèdre fini,* P, *tel que* $\pi(A) \subset P \subset A$.

Preuve. - Le cas où $\cap \{A_j : 1 \leq j \leq n\} \neq \emptyset$ est trivial ; supposons donc que nous sommes dans le cas contraire.

Définissons $\mathcal{J} = \{J \subset \{1,\ldots, n\} : A_J \neq \emptyset\}$. Soit $\mathcal{J}_\circ$ l'ensemble des éléments maximaux de $\mathcal{J}$. Pour tout $J \in \mathcal{J}_\circ$, choisissons $x_J \in A_J$. Définissons $\pi : A \to A$ par

$$\pi(x) = \frac{\Sigma\{\mu_J(x)x_J : J \in \mathcal{J}_\circ\}}{\Sigma\{\mu_J(x) : J \in \mathcal{J}_\circ\}}, \text{ où } \mu_J(x) = \min\{d(x, A_j) : j \notin J\}.$$

Notons que $x \in A_i$ et $\mu_J(x) \neq 0$ impliquent que $i \in J$; d'où $\pi(A_J) \subset \mathrm{co}\,\{x_{J'} : J \subset J' \in \mathcal{J}_\circ\} = P_J \subset A_J$, pour tout $J \subset \{1,\ldots,n\}$, et $\pi(A) \subset P = \cup \{P_i : 1 \leq i \leq n\} \subset A$.

(D) Définition de l'indice. - Soit $f : U \to X$ une application faiblement condensante telle que $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in U : f(x) = x\}$ est compact. Par la proposition 6B, il existe une suite $\{B_n\}_{n \geq 1}$, de réunions finies de fermés convexes et $B_\circ$, un ouvert tel que $\mathrm{Fix}(f) \subset B_\circ \subset \overline{B_\circ} \subset U$, $B_{n+1} \cup f(B_{n-1} \cap B_\circ) \subset B_n$, pour tout $n \geq 1$, et $\lim_{n\to\infty} \gamma(B_n) = 0$. Notons que, f étant sans point fixe sur le fermé $\partial B_\circ$, il existe β, un recouvrement ouvert de U tel que $W \in \beta$ et $x \in \overline{W} \cap \partial B_\circ$ impliquent que $f(x) \notin \overline{W}$; en fait, pour tout $x \in \partial B_\circ$, il existe U_x et V_x des ouverts tels que $\overline{U}_x \cap \overline{V}_x = \emptyset$, $x \in U_x$ et $f(x) \in V_x$; alors il existe un ouvert, V, tel que $\beta = \{V\} \cup \{U_x \cap f^{-1}(V_x) : x \in \partial B_\circ\}$ est un tel recouvrement. Soit α un raffinement de β par des ouverts convexes.

Par la propriété 7 du § 3A, $B_\infty = \cap \{B_n : n \geq 1\}$ est compact et il existe un sous recouvrement fini de B , donc de B_i, pour tout $i \geq n$, si n est assez grand. Dans ce cas, il existe $\{S_1,\ldots,S_s\}$, un recouvrement de B_n par des parties fermées convexes de B_n, chacune contenue dans un élément de α.

Par le lemme 6C, il existe,

$$P \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B_n$$

où P est un polyhèdre fini telle que $i \circ r(S_i) \subset S_i$.

DEFINITION 6D. - *l'indice d'une application faiblement condensante* $f : U \to X$, *est donné par*

$$\mathrm{ind}(f : U \to X) = \inf(r\circ f\circ i : P \cap i^{-1}(B_\circ) \to P),$$

le membre de droite étant défini de la façon habituelle [32]. Notons qu'à cause des précautions prises ci-haut, l'application $r\circ f\circ i$ est sans point fixe sur $\partial i^{-1}(B_\circ)$.

LEMME 6D. - *Cette définition est indépendante des choix effectués.*

Preuve. - Soient $(B_i^1)_{i\geqslant 1}$ et $(B_i^2)_{i\geqslant 1}$ deux telles suites ; formons les intersections, $B_i = B_i^1 \cap B_i^2$ pour $i \geqslant 0$; choisissons $\alpha > \alpha^1 \cap \alpha^2$ tel que $U \in \alpha$ et $x \in \overline{U} \cap \mathscr{C}B_\circ \cap (B_\circ^1 \cup B_\circ^2)$ entraînent que $f(x) \notin \overline{U}$; choisissons $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ pour lequel il existe $\{A_1^p, \ldots, A_s^p\}$, un recouvrement de B_n^p, plus fin que α, par des parties fermées convexes de B_n^p, pour $p = 1,2$.

Par le lemme 6C, il existe $\pi : B_1^1 \cup B_1^2 \to B_1^1 \cup B_1^2$ telle que $\pi(S_j^p) \subset S_j^p$ (où les S_j^p recouvrent $B_{n_p}^p$), $\pi(A_j^p) \subset A_j^p$ et $\pi(B_i^p) \subset P_i^p \subset B_i^p$, où P_i^p est un polyhèdre fini, $p=1,2$ et $i \leqslant n$; de même, $\pi(B_i) \subset P_i \subset B_i$, où P_i est un polyhèdre fini, $P_i \subset P_i^p$ pour $p = 1,2$ et $i \leqslant n$. Par homotopie et par commutativité, comme $r_1 \circ f \circ i_1 \simeq r_1 \circ \pi \circ f \circ i_1$ et $\pi\circ f \simeq \pi\circ i_1 \circ r_1 \circ f$, on n'a que $\mathrm{ind}(r_1 \circ f \circ i_1 : P^1 \cap i_1^{-1}(B_\circ^1) \to P^1) = \mathrm{ind}(\pi \circ f : P_{n_1}^1 \cap B_\circ^1 \to P_{n_1}^1)$. De plus, par commutativité, comme $\pi\circ f(B_{i-1}^1 \cap B_\circ^1) \subset \pi(B_i^1) \subset P_i^1$ pour $i = n_1, \ldots, n$, on a que

$\mathrm{ind}(\pi\circ f : P_{n_1}^1 \cap B_\circ^1 \to P_{n_1}^1) = \mathrm{ind}(\pi\circ f : P_n^1 \cap B_\circ^1 \to P_n^1)$. Par excision, on a :

$\mathrm{ind}(\pi\circ f : P_n^1 \cap B_\circ^1 \to P_n^1) = \mathrm{ind}(\pi\circ f : P_n^1 \cap B_\circ \to P_n^1)$. Finalement, comme $\pi\circ f(P_n^1 \cap B_\circ) \subset P_n^1 \cap P_1$ et $\pi\circ f(P_n^1 \cap B_\circ \cap P_i) \subset P_n^1 \cap P_{i+1}$, pour $i < n$, on a, par commutativité, que $\mathrm{ind}(\pi\circ f : P_n^1 \cap B_\circ \to P_n^1) = \mathrm{ind}(\pi\circ f : P_n \cap B_\circ \to P_n)$. De même, on obtient :

$$\mathrm{ind}(r_2 \circ f \circ i_2 : P^2 \cap i_2^{-1}(B_\circ^2) \to P^2) = \mathrm{ind}(\pi\circ f : P_n \cap B_\circ \to P_n).$$

Remarque 6D. - On définit de la même manière l'indice d'une application, $f : U \to X$, faiblement condensante dans un voisinage de $\mathrm{Fix}(f)$.

7. PROPRIETES DE L'INDICE.

Cet indice de point fixe possède les propriétés usuelles :

(A) Propriétés :

1. (Excision) *Si* $\mathrm{Fix}(f) \subset V \subset U$ *et* V *est un ouvert, alors,*

$$\mathrm{ind}(f : U \to X) = \mathrm{ind}(f : V \to X).$$

2. (Addition) *Si* $U = \cup \{U_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *et* $U_j \cap U_i \cap \mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, *pour tout* $i \neq j$, *alors*,

$$\mathrm{ind}(f : U \to X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}(f : U_i \to X).$$

3. (Point fixe) $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ *implique que* $\mathrm{ind}(f : U \to X) = 0$.

4. (Produit) $\mathrm{ind}(f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to X_1 \times X_2) = \prod_{i=1}^{2} \mathrm{ind}(f_i : U_i \to X_i)$.

Notons que si l'on définit la norme sur $E_1 \times E_2$ par :

$$\|(x_1, x_2)\| = (\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient que $\gamma(A \times B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$.

5. (Normalité) *Si* $U = X$ *et* f *possède un attracteur compact*, C, *alors le nombre de Lefschetz de* f *est défini et*

$$\Lambda(f : X \to X) = \mathrm{ind}(f : X \to X).$$

En effet, $\mathrm{Fix}(f) \subset C$ et $f(C) \subset C$; soit donc $\{B_n\}_{n \geqslant 1}$ comme à la Proposition 6B, et soit, par le lemma 5 de [30], W, un voisinage f-invariant de C tel que $f(W) \subset B_1$, alors $\lim_{n \to \infty} \gamma(f^n(W)) = 0$. Par la proposition 3D, il existe $V_\circ$, un ouvert f-invariant tel que C attire $V_\circ$ et $C \subset V_\circ \subset \overline{V_\circ} \subset X$. Soit m tel que $\overline{f^m(V_\circ)} \subset V_\circ$, soient $V_\circ \supset \overline{V_1} \supset V_1 \supset \ldots \supset \overline{V_m} \supset V_m \supset \overline{f^m(V_\circ)}$ et soit $B_\circ = V_\circ \cap f^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap f^{-m}(V_m)$, alors on n'a que

$$\overline{f(B_\circ)} \subset f(\overline{V_\circ}) \cap \overline{V_1} \cap \ldots \cap f^{1-m}(\overline{V_m}) \subset f^{-m}(V_m) \cap V_\circ \cap \ldots \cap f^{1-m}(V_{m-1}) = B_\circ.$$

Notons que $\lim_{n \to \infty} \gamma(\overline{f(B_\circ \cap B_n)}) \leqslant \lim_{n \to \infty} \gamma(B_{n+1}) = 0$; donc, par la propriété 7 du § 3A, $K = \cap \{\overline{f(B_\circ \cap B_n)} : i \geqslant 1\}$ est compact et non-vide.

Or $K \subset \overline{f(B_\circ)} \subset B_\circ$; soit N, un voisinage de $K \cup C$ dans $B_\circ$ qui est une réunion finie de fermés convexes. Il existe j tel que $f(B_\circ \cap B_n) \subset N$, pour tout $n \geqslant j$. Soient α un recouvrement ouvert de X, n assez grand et, par le lemme 6C, $P \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B_n$ tels que $r(B_n \cap N) \subset P' \subset P$, $i(P') \subset B_n \cap N$, $i \circ r | N \simeq I_{N \cap B_n}$ et, $\mathrm{ind}(f : U \to X) = \mathrm{ind}(r \circ f \circ i : P \cap i^{-1}(B_\circ) \to P)$, où P et P' sont des polyhèdres finis. Par commutativité, on a que $\mathrm{ind}(r \circ f \circ i : P \cap i^{-1}(B_\circ) \to P) = \mathrm{ind}(r \circ f \circ i : P' \to P')$ et, par normalité, on a que $\mathrm{ind}(r \circ f \circ i : P' \to P') = \Lambda(r \circ f \circ i : P' \to P')$. Or, $\Lambda(r \circ f \circ i : P' \to P') = \Lambda(i \circ r \circ f : B_n \cap N \to B_n \cap N)$ et comme $i \circ r | N \simeq I_{N \cap B_n}$, on obtient que $\Lambda(i\circ r\circ f : B_n \cap N \to B_n \cap N) = \Lambda(f : B_n \cap N \to B_n \cap N)$. D'autre part, comme pour tout compact K, de X, il existe m tel que $f^i(K) \subset B_\circ$, pour tout $i \geqslant m$, on a que $f^i(K) \subset f\circ f^n(f^{i-n}(K)) \subset f\circ f^n(B_\circ) \subset f(B_n \cap B_\circ) \subset N \cap B_n$; d'où, $\Lambda(f : X \to X) = (f : B_n \cap N \to B_n \cap N)$, car, dans ce cas, nous avons l'isomorphisme canonique $H^*(X)/K(f) \approx H^*(B_n \cap N)/K(f)$.

6. (<u>Commutativité</u>) *Soient* $f : U \to X$ *et* $g : V \to Y$, *où* $U \subset Y$ *et* $V \subset X$ *; les applications* $g\circ f : f^{-1}(V) \to Y$ *et* $f\circ g : g^{-1}(U) \to X$ *sont définies. Si* $\mathrm{Fix}(f\circ g)$ *est compact, alors* $\mathrm{Fix}(g\circ f)$ *est compact. De plus si* $\gamma(f)\gamma(g) < 1$*, alors*

$$\mathrm{ind}(g\circ f : f^{-1}(V) \to Y) = \mathrm{ind}(f\circ g : g^{-1}(U) \to X).$$

Voir NUSSBAUM [30].

7. (<u>Commutativité</u>) *Soient* $f : U \to X$ *et* $g : V \to Y$, *où* $U \subset Y$ *et* $V \subset X$. *Si* $\mathrm{Fix}(f\circ g)$ *est compact, alors* $\mathrm{Fix}(g\circ f)$ *est compact. Si, de plus,* f *et* g *sont continûment différentiables et* $f\circ g$ *a une itérée condensante, alors* $g\circ f$ *a une itérée condensante, et,*

$$\mathrm{ind}(g\circ f : f^{-1}(V) \to Y) = \mathrm{ind}(f\circ g : g^{-1}(U) \to X).$$

En effet, la première assertion découle immédiatement de l'inclusion $\mathrm{Fix}(g\circ f) \subset g(\mathrm{Fix}(f\circ g))$.

Il existe m et $k < 1$ tels que $\gamma((f\circ g)^m) < k$. Comme f et g sont continûment différentiables, on peut supposer qu'il existe b et b' tels que $b, b' > 1$, $\|g(x) - g(y)\| < b\|x-y\|$ pour tous $x, y \in V$ et $\|f(x) - f(y)\| < b'\|x-y\|$ pour tous $x, y \in U$.

Par la proposition 6A et par excision, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et K assez petit tels que $\varepsilon < (1-k)(bb'(m-1))^{-1}$ et, $\mathrm{co}\, A \subset (f\circ g)^{-m}(X)$ et $\delta(A) < K$ impliquent que $\gamma(f^i(\mathrm{co}\, A)) \leqslant \gamma(f^i(A)) + \varepsilon\delta(A)$.

Soit t tel que $t < (1-k)(bb'(m-1))^{-1}$ et soit $s > 0$ tel que $s < (1-(k+t\varepsilon bb'(m-1)))(2tb(1 + (m-1)(bb')^m)^{-1}$. Soit K' tel que $\delta(A) < K'$ et $\mathrm{co}\, A \subset U$ entraînent que $f(\mathrm{co}\, A) \subset N_{s\delta(A)}(\mathrm{co}\, f(A))$.

Choisissons $N_1, \ldots, N_p$ des convexes fermés de $(f\circ g)^{-m} \circ g^{-1}(U)$ tels que $B_1 = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_p$ soit un voisinage de $\mathrm{Fix}(f\circ g)$ et $\delta(N_i) < K$, pour $i=1, \ldots, p$. Choisissons $N'_1, \ldots, N'_q$ des convexes fermés de $f^{-1}(V)$ tels que $B'_1 = N'_1 \cup N'_2 \cup \ldots \cup N'_q$ soit un voisinage de $\mathrm{Fix}(g\circ f)$, $f(B'_1) \subset B_1$ et $\delta(N'_i) < K'$, pour $i = 1, \ldots, q$. Soient W et W' deux ouverts tels que $\mathrm{Fix}(f\circ g) \subset W \subset \overline{W} \subset g^{-1}(B'_1)$ et $\mathrm{Fix}(g\circ f) \subset W' \subset \overline{W'} \subset f^{-1}(B_1)$.

Supposons (par induction) que B'_n et B_n soient des réunions finies de fermés convexes telles que $g(W \cap B_n) \subset B'_n$ et $f(W' \cap B'_n) \subset B_n$.

Choisissons $S'_1,\dots,S'_{s'}$ tels que $g(W \cap B_n) = S'_1 \cup S'_2 \cup \dots \cup S'_{s'}$, $\delta(S'_j) < t\gamma(g(W \cap B_n))$ et $S'_j \subset N'_i$ pour au moins un i. Définissons $B'_{n+1} = \cup\{(\overline{co}\ S'_j) \cap B'_n : 1 \leqslant j \leqslant s'\} \subset B'_n$. Notons que $f(W' \cap B'_{n+1}) \subset f(W' \cap B'_n) \subset B_n$; choisissons donc $S_1,\dots,S_s$ tels que $f(W' \cap B'_{n+1}) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_s$, $\delta(S_j) < t\gamma(f(W' \cap B'_{n+1}))$ et $S_j \subset N_i \cap f(co\ S'_{i'})$ pour au moins un i et un i'. Définissons $B_{n+1} = \cup\{(\overline{co}\ S_j) \cap B_n : 1 \leqslant j \leqslant s\} \subset B_n$. On n'a que $f(W' \cap B'_{n+1}) \subset B_{n+1}$ et $g(W \cap B_{n+1}) \subset g(W \cap B_n) \subset B'_{n+1}$.

Définissons $B_o = W \cap g^{-1}(W')$ et $B'_o = W' \cap f^{-1}(W)$; alors, on a que $g(B_o \cap B_n) \subset B'_{n+1} \cap W'$; d'où, $f\circ g(B_o \cap B_n) \subset f(W' \cap B'_{n+1}) \subset B_{n+1} \cap B_n$. De même, on obtient que $g\circ f(B'_o \cap B'_n) \subset B'_{n+1} \subset B'_n$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} \gamma(B_n) = 0$; on aura alors que $\lim_{n\to\infty} \gamma(B'_n) = 0$, car $\gamma(B'_{n+1}) \leqslant t\gamma(g(B_n)) \leqslant tb\gamma(B_n)$. Or,

$$co\ S_i \subset co\ f(co\ S'_j) \subset co(N_{s\delta(S'_j)}(co\ f(S'_j))) \subset N_{st\gamma(g(B_n))}(co\ f(S'_j))$$

d'où

$$\begin{aligned}\gamma((f\circ g)^i(B_{n+1})) &\leqslant \max_j \gamma((f\circ g)^i(N_{st\gamma(g(B_n))}(co\ f(S'_j))) \\ &\leqslant 2(bb')^i st\gamma(g(B_n)) + \gamma((f\circ g)^i \circ f(g(W \cap B_n))) \\ &\qquad + \max_j \varepsilon\delta(f(S'_j)) \\ &\leqslant \gamma((f\circ g)^{i+1}(B_n)) + (2bb')^m s + \varepsilon b')tb\gamma(B_n),\end{aligned}$$

car, $\delta(f(S'_j)) \leqslant b'\ \delta(S'_j) \leqslant b't\gamma(g(B_n)) \leqslant b'tb\gamma(B_n)$. De plus,

$$\begin{aligned}\gamma(B_{n+1}) &\leqslant t\gamma(f(B'_{n+1})) \leqslant \max_j \gamma(f(co\ S'_j)) \\ &\leqslant \max_j \gamma(N_{st\gamma(g(B_n))}(co\ f(S'_j))) \\ &\leqslant 2stb\gamma(B_n) + \gamma(f\circ g(B_n)).\end{aligned}$$

Or, $\gamma(f\circ g(B_{n+m-1})) \leqslant \gamma((f\circ g)^m(B_n)) + (m-1)(2(bb')^m s + \varepsilon b')tb\gamma(B_n)$, d'où,

$$\gamma(B_{n+m}) \leqslant (2stb + k + (m-1)(2(bb')^m s + \varepsilon b')tb)\gamma(B_n).$$

Or, ce dernier coefficient est inférieur à 1.

Notons qu'il existe un recouvrement ouvert, β, de $f^{-1}(V)$ tel que, pour tout $x \in \partial B_o'$, $x \in U' \in \beta$ implique que $g \circ f(x) \notin U'$. De plus, il existe un recouvrement ouvert, α, de $(f \circ g)^{-1}(V)$ tel que, pour tout $W \in \alpha$, il existe $U' \in \beta$ tel que $\overline{W} = g^{-1}(U')$.

Or si α est composé d'ouverts convexes et est assez fin, et si n est assez grand, il existe, $P \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B_n$, où P est un polyhèdre fini telle que $h : r \circ i \simeq I_{B_n}$, où, pour tout $x \in B_n \cap \overline{B_o}$, il existe $W \in \alpha$ tel que $h(x,I) \subset \overline{W}$ et

$$\mathrm{ind}(f \circ g : g^{-1}(U) \to X) = \mathrm{ind}(r \circ f \circ g \circ i : P \cap i^{-1}(B_o) \to P).$$

De plus, $f \circ i \circ r \circ g \simeq f \circ g$ et l'homotopie est sans point fixe sur $\partial B_o'$.

De même, toujours si n est assez grand, il existe $P' \underset{r'}{\overset{i'}{\rightleftarrows}} B_n'$ où P' est un polyhèdre fini telle que

$$\mathrm{ind}(g \circ f : f^{-1}(V) \to Y) = \mathrm{ind}(r' \circ g \circ f \circ i' : P' \cap i'^{-1}(B_o') \to P'),$$

$g \circ i' \circ r' \circ f \simeq g \circ f$ et l'homotopie est sans point fixe sur ∂B_o.

Par homotopie, on a que

$$\mathrm{ind}(r \circ f \circ g \circ i : P \cap i^{-1}(B_o) \to P) = \mathrm{ind}(r \circ f \circ i' \circ r' \circ g \circ i : P \cap i^{-1}(B_o) \to P)$$

et

$$\mathrm{ind}(r' \circ g \circ f \circ i' : P' \cap i'^{-1}(B_o') \to P') = \mathrm{ind}(r' \circ g \circ i \circ r \circ f \circ i' : P' \cap i'^{-1}(B_o') \to P').$$

D'où, par commutativité, considérant les applications $r \circ f \circ i'$ et $r' \circ g \circ i$, on obtient la conclusion.

8. (<u>Homotopie</u>) *Soit* $h : U \times I \to X$ *telle que* $\mathrm{Fix}(h) = \cup \{\mathrm{Fix}(h_t) : t \in I\}$ *est compact. Si* $H : U \times I \to X \times I$, *définie par* $H(x,t) = (h(x,t), t)$, *est faiblement condensante, alors*

$$\mathrm{ind}(h_o : U \to X) = \mathrm{ind}(h_1 : U \to X).$$

En effet, $\mathrm{Fix}(H) = \cup\{\mathrm{Fix}(h_t) \times \{t\} : t \in I\}$ étant compact, par une démarche parallèle à la démonstration de la proposition 6B, on obtient $\{B_n\}_{n \geq 1}$ vérifiant les conclusions de cette proposition et telle que $B_n = \cup \{C_{i,n} \times I_{i,n} : 1 \leq i \leq q\}$ où $C_{i,n}$ est un convexe fermé de U et $I_{i,n}$ est un intervalle fermé : prenant B_{n+1} comme réunion de tels sous-ensembles, $C_{i,n} \times I_{i,n}$, de B_n tels que $\mathrm{co}\, S_j \subset \cup \{C_{i,n} \times I_{i,n} : i \in J\} \subset N_{r\delta(S_j)}(\mathrm{co}\, S_j)$, (prendre $\delta(I_{i,n}) < r\delta(S_j)$ et $C_{i,n} = \mathrm{proj}_1(\mathrm{co}\, S_j \cap (X \times I_{i,n}))$) où r est assez petit.

Soit α un recouvrement de U par des produits d'ouverts convexes tel que si $U \in \alpha$ et $x \in U \cap \partial B_o$, alors $h(x,I) \cap U = \emptyset$. Soit $\{C_1 \times I_1, \ldots, C_p \times I_p\}$ un recouvrement de B_n par des produits de fermés convexes inclus dans B_n, qui est plus fin que α.

Soient $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tels que, pour tout k, il existe U_k, un ouvert de U pour lequel on a que $B_o \cap (X \times [t_{k-1}, t_k]) = U_k \times [t_{k-1}, t_k]$ et il existe $J_k \subset \{1,\ldots,p\}$ tel que $B_n \cap (X \times [t_{k-1}, t_k]) = A_k \times [t_{k-1}, t_k]$, où $A_k = \cup \{C_j : j \in J_k\}$.

Par le lemme 6C, il existe $P \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A_k$, où P est un polyhèdre fini telle que $\mathrm{ind}(h_t : U \to X) = \mathrm{ind}(r \circ h_t \circ i : P \cap i^{-1}(U_k) \to P)$, pour tout $t \in [t_{k-1}, t_k]$; si on pose $B_n^t = \{x : (x,t) \in B_n\}$, alors $\{B_n^t\}_{n \geqslant 1}$ est une suite vérifiant les conclusions de la proposition 6B et, $B_n^t = A_k$ et $B_o^t = U_k$, pour tout $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Or h est sans point fixe sur $\partial U_k \times [t_{k-1}, t_k]$; donc, par homotopie, on obtient que

$$\mathrm{ind}(r \circ h_{t_{k-1}} \circ i : P \cap i^{-1}(U_k) \to P) = \mathrm{ind}(r \circ h_{t_k} \circ i : P \cap i^{-1}(U_k) \to P) ;$$

d'où, $\mathrm{ind}(h_{t_{k-1}}) = \mathrm{ind}(h_{t_k})$, pour tout $k = 1,\ldots,m$.

(B) Supposons que $f : U \to X$ est une C^1-application telle que $1 \notin \mathrm{spec}(Df(x))$ pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Alors les points fixes sont isolés. Soit $U_x \subset U$ un voisinage de x tel que $U_x \cap \mathrm{Fix}(f) = \{x\}$.

Propriété 9. - Si f *a une itérée condensante, alors,* $\mathrm{ind}(f : U_x \to X) = (-1)^{\alpha(x)}$, *où* $\alpha(x)$ *est la somme des multiplicités des valeurs propres de* $Df(x)$ *contenues dans* $(1,\infty)$. *En outre, si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est fini, alors,*

$$\mathrm{ind}(f : U \to X) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f)} (-1)^{\alpha(x)}.$$

Cette formule est due à LERAY-SCHAUDER pour les C^1-applications compactes [27, 34] et à FENSKE [17] pour les C^1-applications condensantes. Le cas général est une conséquence des résultats du § 4B.

La propriété 9 est une conséquence immédiate des lemmes suivants.

<u>LEMME 1</u>. - *Soient* $f : U \to X$, *une* C^1*-application à itérée condensante et* $x \in \mathrm{Fix}(f)$ *; si* $1 \notin \mathrm{spec}(Df(x))$, *alors il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\mathrm{ind}(Df(x)) = \mathrm{ind}(f|N_\varepsilon(x)).$$

Preuve. - Comme $1 \notin \mathrm{spec}(Df(x))$, l'opérateur $Df(x) - I_E$ possède un inverse continu.

Posons $s = \|(Df(x) - I_E)^{-1}\|$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in N_\varepsilon(x)$, on ait que $\|f(y) - f(x) - Df(x)(y-x)\| \leq s^{-1}\|y-x\|$; alors,
$h_t(y) = tf(y) + (1-t)(f(x) + Df(x)(y-x))$ définit une homotopie sans point fixe sur $N_\varepsilon(x) - \{x\}$: car $h_t(y) = y$ implique l'égalité suivante :
$(y-x) - Df(x)(y-x) = t(f(y) - f(x) - Df(x)(y-x))$; et si l'on applique $(Df(x) - I_E)^{-1}$ aux deux membres de l'équation, on n'obtient que

$\|y-x\| \leq st(s^{-1}\|y-x\|) = t\|y-x\|$, d'où, $y=x$.

De plus, si $H(x,t) = (h_t(x), t)$, alors, pour tout n, on a que $DH^n(x,t) = (DH(x,t))^n$; et comme $Dh_t(x) = tDf(x) + (1-t)Df(x)$, on a que $\gamma(DH^n(x,t)) \leq \gamma((Df(x))^n) \leq \gamma(Df^n(x)) \leq \gamma(f^n) < 1$. Ainsi, par la proposition 4A, on peut supposer ε suffisamment petit pour que H ait une itérée condensante ; d'où, par la propriété 8 du § 7A, on a que $\mathrm{ind}(f|N_\varepsilon(x)) = \mathrm{ind}(h_o) = \mathrm{ind}(Df(x))$ (la dernière égalité étant obtenue par commutativité, car $h_o = T_x \circ Df(x) \circ T_{-x}$, où $T_x(y) = y+x$).

<u>LEMME 2</u>. - *Soient* $f : U \to X$, *une* C^1*-application à itérée condensante et* $x \in \mathrm{Fix}(f)$ *; si* $1 \notin \mathrm{spec}(Df(x))$, *alors*, $\mathrm{ind}(Df(x)) = (-1)^{\alpha(x)}$.

Preuve. - Posons $T = Df(x)$, alors T a une itérée condensante, car $\gamma(T^n) = \gamma(Df^n(x)) \leq \gamma(f^n)$.

Soit $E_o^j = \{0\}$ et, par récurrence, soit E_{n+1}^j, le sous-espace linéaire de E engendré par $\{v \in E$: il existe $\lambda \geq 1$ tel que $T^j(v) - \lambda v \in E_n^j\}$, pour tout $j \geq 1$. Soit $E^j = \cup\{E_n^j : n \geq 1\}$.

Remarquons que nous aurions obtenu les mêmes espaces si nous nous étions limités aux valeurs propres de T^j contenues dans $(1,\infty)$. De plus, $E^1 \subset E^j$, pour tout j.

Or, il existe $j \geq 1$ tel que T^j est condensante ; d'où, (FENSKE [17], AMBROSETTI [1]) $\dim E^j < \infty$ et ainsi, $\dim E^1 < \infty$.

Soit donc, $\pi : E \to E^1$, une projection continue. Définissons,
$h_t(v) = tT(v) + (1-t)T(\pi(v))$, alors $h_t(v) = v$ implique que
$T(v) - \lambda v = \lambda(1-t)T(\pi(v)) \in E^1$, où $\lambda = t^{-1} \geq 1$; ainsi, $v \in E^1$ donc $v = h_t(v) = T(v)$; d'où $v=0$, car $1 \notin \mathrm{spec}(T)$.

De plus, si $H(x,t) = (h_t(x), t)$, alors pour tout n,
$\gamma(DH^n(0,t)) = \gamma((Dh_t(0))^n) = \gamma(h_t^n)$. Or,

$$h_t^n = t^nT^n + \sum_{i=0}^{n-1} t^i(1-t)T^{n-i} \circ \pi \circ T^i$$

et ainsi h_t^n est condensante si n est suffisamment grand. D'où H a une itérée condensante ; donc, par homotopie et commutativité,

$$\mathrm{ind}(T : E \to E) = \mathrm{ind}(T\circ\pi : E \to E^1) = \mathrm{ind}(T : E^1 \to E^1).$$

Or, E^1 étant de dimension finie on a, par LERAY-SCHAUDER [27], que

$$\mathrm{ind}(T : E^1 \to E^1) = (-1)^{\dim E^1}.$$

Remarquons, enfin, que $\dim E^1 = \alpha(x)$.

8. INDICE DE POINT FIXE DANS LES C^1-ANR.

De la propriété 7 établie dans le § 7A, provient *l'extension de la définition de l'indice aux* C^1*-applications* $f : U \to X$*, où* U *est un ouvert d'un* C^1-ANR*,* X*,* f *a une itérée condensante et* Fix(f) *est compact.* En effet, soit

$$X \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} N$$

une C^1-rétraction, comme d'habitude. Alors il existe un voisinage de $\mathrm{Fix}(i\circ f\circ r) = i(\mathrm{Fix}(f))$ dans lequel $i\circ f\circ r$ a une itérée condensante. Définissons

$$\mathrm{ind}(f : U \to X) = \mathrm{ind}(i\circ f\circ r : r^{-1}(U) \to N).$$

Le résultat suivant est immédiat.

PROPOSOTION. - *Dans ce cadre, les propriétés 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 sont vérifiées pour cet indice.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. AMBROSETTI, *Proprietà spettrali di certi operatori lineari non compatti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 42 (1969), p. 189-200.

[2] R. BONIC, *Four brief examples concerning polynomials on certain Banach spaces*, J. Diff. Geometry, 2 (1968), p. 391-392.

[3] R. BONIC, J. FRAMPTON et A. TROMBA, *Λ-manifolds*, J. Fun. Analysis, 3 (1969), p. 310-320.

[4] F.E. BROWDER, *On a generalization of the Schauder fixed point theorem*, Duke Math. J., 26 (1959), p. 291-304.

[5] F.E. BROWDER, *On the fixed point index for continuous mappings of locally connected spaces*, Sum. Brasil. Math., 4 (1960), p. 253-293.

[6] F.E. BROWDER, *Fixed point theorems on infinite dimensional manifolds*, T.A.M.S., 119 (1965), p. 179-194.

[7] F.E. BROWDER, *Asymptotic fixed point theorems*, Math. Ann., 185 (1970), p. 38-60.

[8] F.E. BROWDER, *Some new asymptotic fixed point theorems*, Proc. Nat. Acad. Sc., 71 (1974), p. 2734-2735.

[9] R.F. BROWN, *On some old problem of fixed point theory*, Rocky Mountain J. Math., 4 (1974), p. 3-14.

[10] G. DARBO, *Punti uniti in transformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24 (1955), p. 84-92.

[11] J. DIEUDONNE, *Eléments d'analyse, tome I*, Gauthier-Villars, 1968.

[12] C.J. EARLE ET R. HAMILTON, *A fixed point theorem for holomorphic mappings*, Proc. Symp. Pure Math. A.M.S., Vol. XVI, p. 61-66.

[13] J. EELLS, *A setting for global analysis*, Bull. Am. Math. Soc., 72 (1966), p. 751-807.

[14] J. EELLS, *Fredholm structures*, Proc. Symp. Pure Math., 18 (1970), p. 62-85.

[15] J. EELLS et G. FOURNIER, *Applications asymptotiquement compactes*, C.R. Paris 280 (1975), Sér. A, p. 1109-1111.

[16] K.D. ELWORTHY, *Embeddings, isotopy and stability of Banach manifolds*, Comp. Math., 24 (1972), p. 175-226.

[17] C. FENSKE, *Analytische Theorie des Abbildungsgrade fur Abbildungen in Banachraümen*, Math. Nach., 48 (1971), p. 279-290.

[18] G. FOURNIER, *Généralisations du théorème de Lefschetz pour des espaces non-compacts, I, II, III*, à paraître dans Bull. Acad. Polon. Sc., 1975.

[19] M. FURI et M. MARTELLI, *On the minimal displacement under acyclic-valued maps defined on a class of ANR's*, Bonn Univ. Preprint (1974).

[20] M. FURI et A. VIGNOLI, *On α-nonexpansive mappings and fixed points*, Accad. Naz. Lincei, 58 (1970), p. 195-198.

[21] N. KRIKORIAN, *Compact multilinear transformations*, Proc. A.M.S., 33 (1972), p. 373-376.

[22] K. KURATOWSKI, *Sur les espaces complets*, Fund. Math., 15 (1930), p. 301-309.

[23] K. KURATOWSKI, *Topologie I*, Warsaw, 1948 ; *Topologie II*, Warsaw, 1950.

[24] A. LEBOW et M. SCHECHTER, *Semigroups of operators and measure of noncompactness*, J. Fun. Analysis, 7 (1971), p. 1-26.

[25] J. LERAY, *Sur les équations et les transformations*, J. Math. Pures et Appl. 24 (1945), p. 201-248.

[26] J. LERAY, *Théorie des points fixes : Indice total et nombre de Lefschetz*, Bull; Soc. Math. France, 87 (1959), p. 221-233.

[27] J. LERAY et J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Ec. Nor. Sup., 51 (1934), p. 45-78.

[28] R.D. NUSSBAUM, *The fixed point index for local condensing maps*, Ann. di Mat. 89 (1971), p. 217-258.

[29] R.D. NUSSBAUM, *Asymptotic fixed point theorems for local condensing maps*, Math. Ann., 191 (1971), p. 181-195.

[30] R.D. NUSSBAUM, *Some asymptotic fixed point theorems*, T.A.M.S., 171 (1972), p. 349-375.

[31] R.D. NUSSBAUM, *The radius of the essential spectrum*, Duke math. J., 38 (1970), p. 473-478.

[32] B. O'NEILL, *Essential sets and fixed points*, Am. Math. J., 75 (1953), p. 497-509.

[33] F. QUINN, *Transversal approximation on Banach manifolds*, Proc. Symp. Pure Math. XV, (1970), p. 213-222.

[34] E.H. ROTHE, *Mapping degree in Banach spaces and spectral theory*, Math. Z., 63 (1955), p. 195-218.

[35] H. TORUNCZYK, *Smooth partitions of unity on some non-separable Banach spaces*, Studia Math., 46 (1973), p. 43-51.

[36] J.C. WELLS, *Differentiable functions on Banach spaces with Lipschitz derivatives*, J. Diff. Geometry, 8 (1973), p. 135-152.

[37] T.T. WEST, *The decomposition of Riesz operators*, Proc. London Math. Soc., 16 (1966), p. 737-752.

James EELLS
Mathematics Institute
University of WARWICK
COVENTRY

Gilles FOURNIER
Mathematics Institute
University of WARWICK
COVENTRY