

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NICOLAAS H. KUIPER

## **La courbure totale absolue minimale des surfaces dans $E^3$**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 46 (1976), p. 11

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1976\\_\\_46\\_\\_11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__11_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA COURBURE TOTALE ABSOLUE MINIMALE

DES SURFACES DANS  $E^3$

par Nicolaas H. KUIPER

Le théorème de Gauss-Bonnet sur une surface compacte métrique riemannienne s'écrit

$$\int_M \frac{K|d\sigma|}{2\pi} = \chi(M) \quad (1)$$

où  $\chi(M)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré,  $K$  la courbure de Gauss, et  $d\sigma$  l'élément de volume.

D'autre part pour une surface  $C^2$ -immergée dans l'espace euclidien  $E^3$  nous avons

$$\int_M \frac{|Kd\sigma|}{2\pi} \geq 4 - \chi(M) \quad (2)$$

L'égalité dans (2) n'est pas atteinte pour le plan projectif  $P$  ni pour la bouteille de Klein.

Au lieu des immersions on considère les applications  $C^\infty$ -stables au sens de René Thom. Alors on trouve pour l'application stable  $f : P \rightarrow E^3$  définie par

$$\begin{array}{ccc} S^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} & \rightarrow & P = S^2/(x,y,z) = (-x,-y,-z) \\ \downarrow & \swarrow f & \\ (u,v,w) = (x^2-y^2, 2xy, yz) & & \end{array}$$

que l'intégrale dans (2) existe et qu'elle donne l'égalité. Dans cet exemple les singularités (toutes deux du type "parapluie de Whitney") sont en  $(x,y,z) = (0,0,1)$  et en  $(1,0,0)$ . Aussi pour la bouteille de Klein, on trouve un exemple dont on peut déduire que (1) et (2) sont valables pour toute application stable de surfaces dans  $E^3$  quoique  $K$  ne soit pas définie aux points singuliers. Pour plus de détails, voir N.H. Kuiper "Stable surfaces in euclidean three space", Math. Scand. 36, (1975), 83-96.

Nicolaas H. KUIPER  
 Institut des Hautes Etudes Scientifiques  
 91449 BURES SUR YVETTE (France)