

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

C. P. BRUTER

Vue d'ensemble sur la théorie des matroïdes

Mémoires de la S. M. F., tome 17 (1969)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__17__3_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

VUE D'ENSEMBLE SUR LA THEORIE

des
MATROÏDES

—
Claude P. BRUTER
—

T A B L E D E S M A T I E R E S

	Pages
Index des principales notations	4
0. Introduction	6
1. Formes équivalentes de l'axiomatique linéaire	7
2. Notion d'orthogonal	15
3. Représentation géométrique des matroïdes	16
4. Etude de la stabilité géométrique (homotopie)	19
5. Le critère de Minimalité	23
6. Porteuses et petites collinéations	24
7. Représentation algébrique des matroïdes	24
8. Quelques propriétés des matroïdes binaires et 2-orientables	27
9. Caractérisation des matroïdes 2-orientables	29
10. Connexité dans les matroïdes binaires : séparateurs et ponts	30
11. Caractérisation des matroïdes graphiques	32
12. Construction des matroïdes	35
13. Matroïdes de couplages, transversales. Théorème de HALL-RADO	38
14. Partition dans les matroïdes. Le théorème de MENGER	40
15. Application aux problèmes d'optimisation	41
Bibliographie	44
Index terminologique.	47

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

- 0. E ensemble
- 0. Σ axiomatique
- 0. $M(E, \Sigma)$ stigmier ou matroïde
- 1.2 \emptyset sous-ensemble vide
- 1.2 X sous-ensemble de E
- 1.2 e élément de E ou sous-ensemble de E réduit à un élément
- 1.3 E ensemble sous-jacent au matroïde ; $\mathcal{P}(E)$ famille des parties de E
- 1.3 \mathcal{B} famille des bases ; B élément de \mathcal{B} ; matroïde $M(E, \mathcal{B})$
- 1.3 \mathcal{F} famille des ensembles ; F élément de \mathcal{F} ; matroïde $M(E, \mathcal{F})$
- 1.3 \mathcal{J} famille des stigmes ; S élément de \mathcal{J} ; matroïde $M(E, \mathcal{J})$
- 1.3 r rang d'un matroïde ; matroïde $M(E, r)$
- 1.3 ϕ fonction de fermeture d'un matroïde ; matroïde $M(E, \phi)$
- 1.5 R, R', \bar{R}, B des matrices
- 1.5 G graphe
- 1.5 $M(G)$ matroïde graphique engendré par G
- 3. U, V, W des plans du matroïde
- 3. c morphisme de contraction
- 3. $M \times D$ contracté de M, de E à D
- 3. ρ morphisme de réduction
- 3. M.D. réduit de M, de E à D
- 4. $Q, P = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ chemin d'un matroïde
- 4. L sous-classe linéaire
- 6. Z porteuse d'un réduit
- 7. A, $c(A)$, s corps de caractéristique $c(A)$; s élément de A
- 7. W espace vectoriel sur A
- 7. \tilde{W} représentation de M dans W au sens de Whitney
- 7. $\text{Supp}(h)$ support du flot h
- 7. T sous-espace vectoriel de W
- 2.7 M^*, T^*, S^* orthogonaux de M, T, S
- 7.9 $M(2), M^*(2)$ matroïdes caractérisant la classe des binaires
- 10. $\pi_1(M, P, S)$ pile du pont P du matroïde M dans S
- 10. KI, KII configurations de Kuratowski
- 11. $M(T)$ matroïde qui admet T pour représentation de Tutte
- 11. $B(G)$ matroïde bord
- 11. $E(G)$ ensemble des arêtes du graphe G
- 11. $\Sigma(G)$ ensemble des sommets du graphe G
- 13. C couplage

13. $C' \subseteq E \times H$ relation entre H et E
13. $C = C(E, H, C')$ couplage par rapport à C' entre E et H
14. $k(M; X, Y) = h(M; X, Y)$ les nombres de Menger.

VUE D'ENSEMBLE SUR LA THEORIE DES MATROIDES

par

C.P. BRUTER

0. INTRODUCTION

Dès 1900, HILBERT affirmait l'unité des différentes disciplines mathématiques. On peut concevoir cette unité, qui s'étend bien au delà de la mathématique, comme la conséquence des quatre "axiomes" d'un système philosophique, et que voici :

- (i) principe d'extrémalité, (ii) présence de champs de force, (iii) principe d'approximations successives, (iv), raisonnement et Algèbre linéaires.

Nous soulignerons, au cours des lignes qui suivent, les moments où interviennent le principe d'extrémalité, et son corollaire, la propriété de stabilité structurelle(29) .

Mais c'est sur l'Algèbre linéaire que nous allons, dans cet exposé, faire principalement porter notre attention, outil premier qui, grâce à la méthode des approximations successives (calcul des variations, approximation d'une variété par un complexe), permet d'étudier n'importe quel autre objet mathématique. Son importance avait été soulignée par J. DIEUDONNE dans l'introduction à son livre d'Algèbre linéaire et de géométrie élémentaire (9) .

La méthode que nous allons suivre est la méthode axiomatique⁽¹⁾ que N. BOURBAKI a souvent employée (7) .

(1) On peut faire remonter très loin l'origine de l'emploi, plus ou moins conscient, de la méthode axiomatique. Toutes les religions et tous les systèmes philosophiques qui partent d'un "principe" unique relèvent de cette démarche de pensée. On la trouve parfaitement explicitée par exemple dans les hymnes orphiques où l'on insiste sur le "un" et sur le "principe". C'est une donnée constante de la pensée grecque. Ainsi Platon, après avoir parlé de la géométrie, dit "... c'est donc, en toute entreprise, sur le point de départ qu'on doit toujours porter le plus de réflexion et le plus d'attention ..." (Cratyle), et encore dans le Phédon "... voilà le chemin que j'ai pris. Je pose en chaque cas un principe, celui que je juge le plus solide ..." .

Pour la fonder, il faut bien distinguer deux choses, qu'en dépit de l'effort de N. BOURBAKI (2), le langage et l'écriture actuels ont tendance à confondre en une seule : la donnée d'une algèbre universelle est, d'abord, la donnée d'un ensemble E muni d'une certaine topologie, puis la donnée de règle de composition entre éléments de E , compatibles avec la topologie de E . De même, la donnée d'une géométrie est, d'abord, la donnée d'un ensemble E muni d'une certaine topologie, puis la donnée de règles de composition entre éléments de E , compatibles avec la topologie E : en effet si on appelle points les éléments de E , on posera $f_k(e_1, e_2, \dots, e_p) = 0$ si e_1, e_2, \dots, e_p sont les points d'un plan de dimension k , et s'il n'existe pas de plan de dimension $k - 1$ qui les contienne.

Dans les deux cas, ces règles de composition permettent de définir des sous-ensembles particuliers de E : on peut étudier, soit les règles d'inclusion, si elles existent, entre ces sous-ensembles, soit les règles qui fixent le passage d'un sous-ensemble à un autre. Un tel ensemble de règles définit ce que nous viendrons d'appeler une structure formelle Σ , ou encore une axiomatique Σ .

On appellera matroïde (ou stigmier) la donnée simultanée d'un ensemble E , et d'une structure formelle Σ compatible avec une (au moins) topologie permise pour E : $M = M(E, \Sigma)$. Lorsque Σ est la structure formelle linéaire (définie à partir de l'Algèbre linéaire ou de la géométrie classique) M est appelé matroïde linéaire. Comme seuls ces derniers retiendront notre attention, le terme de matroïde que nous emploierons par la suite désignera toujours un matroïde linéaire.

1. FORMES EQUIVALENTES DE L'AXIOMATIQUE LINEAIRE Σ

1.1. Généralités : C'est à H. WHITNEY (37) que revient l'honneur et le mérite d'avoir donné, en 1935, quatre formes équivalentes de l'axiomatique linéaire Σ , et d'avoir fondé la théorie des matroïdes. Ces axiomatiques diffèrent selon la nature des sous-ensembles de E qui sont considérés : leur choix est suggéré soit par l'algèbre linéaire (ensembles indépendants, bases, rang) soit par l'étude des complexes simpliciaux où l'on retrouve les notions précédentes, avec en plus, lorsqu'on en regarde les réalisations sous forme de graphes, la notion très importante d'ensemble minimal dépendant ou stigme, qui correspond à celle de polygone d'un graphe.

On peut, grosso modo, classer les dix axiomatiques équivalentes actuellement utilisées selon quatre critères :

	ensembliste	fonctionnel
ouvert	ensemblin (37) base (37)	fonction rang (37)
fermé	stigme (37)	fonction de fermeture (3), (27)

Nous ne donnerons que les cinq axiomatiques qui figurent dans le tableau ci-dessus. Pour ce qui est des détails techniques de démonstration de leur équivalence, le lecteur pourra consulter (5) .

1.2. Notations : $|X|$ désignera le cardinal de X ; s'il n'y a pas risque de confusion, on écrira e au lieu de $\{e\}$; $X \subset E$ désigne l'inclusion stricte ; $X \subseteq E$ désigne l'inclusion ; $\mathcal{P}(E)$ désigne la famille des sous-ensembles de E , \emptyset l'ensemble vide, \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{Z} l'anneau des entiers.

1.3. Axiomes :

<p style="text-align: center;">ENSEMBLIN</p> <p><u>données</u> : (i) un ensemble E (ii) une famille \mathcal{F} de sous-ensembles $F \subseteq E$ appelés ensemblins (ensembles indépendants).</p> <p><u>axiomes</u> :</p> <p>1(i) $\forall e \in E \Rightarrow \{e\} \in \mathcal{F}$ 1(ii) $\forall F \in \mathcal{F}, F' \subseteq F \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$ 1(iii) $F = \cup_{e_i \in \mathcal{F}'} e_i, F' = \cup_{e_i' \in \mathcal{F}'} e_i'$, $F < F' \Rightarrow \exists e_i' \notin F, e_i' \in F'$</p> <p>tel que $F \cup e_i' \in \mathcal{F}$</p> <p><u>résultat</u> : $M(E, \mathcal{F})$ est un matroïde défini sur E.</p>	<p style="text-align: center;">FONCTION RANG</p> <p><u>données</u> : (i) un ensemble E (ii) une fonction où $r: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}^{(1)}$ appelée fonction rang.</p> <p><u>axiomes</u> :</p> <p>2(i) $r(\emptyset) = 0$ 2(ii) $\forall e \in E, r(\{e\}) = 1$ 2(iii) $\forall X \subseteq E, \forall e \in E, \Rightarrow$ $r(X \cup e) = r(X) + k(X, e),$ $k(X, e) \in \{0, 1\}$ 2(iv) $\forall X \subseteq E, \forall e_1, e_2 \in E,$ $r(X \cup e_1) = r(X \cup e_2) = r(X).$ $\Rightarrow r(X \cup e_1 \cup e_2) = r(X).$</p> <p><u>résultat</u> : $M(E, r)$ est un matroïde défini sur E.</p> <p>(1) on peut dans les formulations plus générale prendre pour espace d'arrivée un groupe topologique bien ordonné.</p>
<p style="text-align: center;">BASE</p> <p><u>données</u> : (i) un ensemble E (ii) une famille \mathcal{B} de sous-ensembles $B \subseteq E$ appelés bases.</p> <p><u>axiomes</u> :</p> <p>3(i) $\forall e \in E, \exists B_e \in \mathcal{B}$ telle que $e \in B_e$ 3(ii) $\forall X \subset B \in \mathcal{B} \Rightarrow X \notin \mathcal{B}$ 3(iii) $\forall B, B' \in \mathcal{B}, \forall e \in B \Rightarrow$ $\exists e' \in B', B \cup e' - e = B'' \in \mathcal{B}$</p> <p><u>résultat</u> : $M(E, \mathcal{B})$ est un matroïde défini sur E.</p>	<p style="text-align: center;">FONCTION DE FERMETURE</p> <p><u>données</u> : (i) un ensemble E (ii) une fonction ϕ : $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ appelée fonction de fermeture</p> <p><u>axiomes</u> :</p> <p>4(i) $\forall X \subseteq E, X \subseteq \phi(X)$ 4(ii) $\forall X \subseteq E \Rightarrow \phi(\phi(X)) = \phi(X)$ 4(iii) $\forall X \subseteq E \Rightarrow \phi(X) = \cup \phi(Y), Y \in \mathcal{P}(X)$ 4(iv) $\forall y \notin \phi(X), y \in \phi(X \cup x) \Rightarrow$ $x \in \phi(X \cup y)$</p> <p><u>résultat</u> : $M(E, \phi)$ est un matroïde défini sur E.</p>

STIGME

données : (i) un ensemble E
(ii) une famille \mathcal{J} de
sous ensembles S de E
appelés stigmes.

axiomes :

- (i) $\forall S \in \mathcal{J} \Rightarrow |S| \geq 2$
(ii) $\forall S \neq S' \in \mathcal{J} \Rightarrow S \not\subseteq S'$
(iii) $\forall S, S' \in \mathcal{J}, \forall e \in S \cap S', \forall e' \in S - S'$
 $\Rightarrow \exists e'' \in S'' \in \mathcal{J}, S'' \subseteq S \cup S' - e$

résultat : $M(E, \mathcal{J})$ est un matroïde
défini sur E .

1.4. Définitions : Voici les éléments qui permettent de passer d'une axiomatique à l'autre :

$F \subseteq E$ est un ensemblin ssi $r(F) = |F|$.

Une base B est un ensemblin de cardinal maximal (par suite si $X \supseteq B$ $r(X) = r(B)$) ; $E - B = B^*$ est une co-base.

Si X n'est pas ensemblin, X est un sous-ensemble dépendant.

$S \subseteq E$ est un stigme ssi S est un sous-ensemble minimal dépendant (par suite S s'écrit $S = F \cup e$ où $F \in \mathcal{F}$).

$\phi(X)$ est l'ensemble minimal dépendant contenant X (par suite $X = \phi(X) \Rightarrow$ si $X \subset Y$, $r(X) < r(Y)$: on dit alors que $X \in \mathcal{I}$ est un sous-ensemble linéairement fermé de M . Dans le cas où $E = B \in \mathcal{B}$, on posera $\phi(E) = \bar{E}$ où \bar{E} est la "complétion" de E par adjonction d'un élément symbolique c à E , de sorte que $r(E) = r(E \cup c) = r(\bar{E})$).

Les notations des paragraphes 1.3 et 1.4 seront standard : dans la suite E désignera toujours l'ensemble sous-jacent à un matroïde M , sa fonction rang sera r , la famille de ses bases \mathcal{B} , etc...

1.5. Quelques exemples :

1.5.1. Complexes simpliciaux : On suppose $n \geq 2$. On considère un n -complexe simplicial K . On désigne par E l'ensemble des $(n-1)$ simplexes de K . On dira que l'ensemble des $(n-1)$ -faces d'un n -simplexe de K forment un stigme (générateur). On considère la famille \mathcal{J} des sous-ensembles de E formés par les stigmes générateurs et leurs différences symétriques : $M(E, \mathcal{J})$ est un matroïde défini sur E , appelé matroïde simplicial.

1.5.2. Groupes commutatifs : Prenons le cas particulier d'un groupe cyclique fini $\mathbb{Z}/2p+1$; ses éléments sont

$$-p, -(p-1), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, p-1, p .$$

On considère l'ensemble E suivant qu'il est possible de projeter sur l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/2p+1$:

$$E = \{-p, -(p-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, p-1, p\} .$$

On considère la fonction rang $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$r(\emptyset) = 0 , \quad \forall X \subseteq E , X \neq \emptyset , r(X) = 1 .$$

$M(E, r)$ est un matroïde défini sur E .

Cet exemple se généralise facilement. Soit $X \subseteq E$: on peut considérer X comme une matrice à une ligne. Le rang de cette matrice est égal à $r(X)$. Supposons maintenant que E désigne l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice R qui ne contient pas le vecteur colonne 0 . Si N est une sous-matrice de R formée de l'ensemble ^{de} colonnes $X \subseteq E$, on pose $r(N) = r(X)$. $M(E, r)$ est un matroïde défini sur E , appelé matroïde matriciel.

Exercice : A quelles conditions les matrices à coefficients réels R et R' engendrent-elles deux matroïdes isomorphes ?

Elément de solution : A.W. TUCKER (30) définit la notion de tableaux combivalents. Elle permet de calculer l'inverse d'une matrice, de résoudre un système d'équations linéaires, un programme linéaire de façon très simple, sans faire appel à la notion de déterminant. On pourrait donc traiter ces trois questions dès la classe de troisième.

On pose $T = (I, R)$ où I est une matrice unité.

On dira que $T' = (I, R')$ est combivalent à T , ssi :

$TX = 0 \Rightarrow \exists$ une permutation π des composantes de X , $\pi(X) = X'$
de sorte que $T'X' = 0$.

On montre sans difficulté que deux tableaux T et T' sont combivalents ssi on peut passer de R à R' par permutation de deux colonnes, ou de deux lignes, ou par pivotage sur un coefficient non nul de R . Les transformations qui permettent de passer de T à T' forment un groupe $G(T)$.

Utilisant la notion de pivotage, on peut montrer la

Proposition 1.1. : Deux matrices R et R' , de même format $m \times n$, à coefficients dans un corps A , engendrent deux matroïdes $M(E, r)$ et $M'(E', r')$ (E (resp. E') désigne l'ensemble des colonnes de R (resp. R'), $r(X)$ (resp. $r'(X)$) désigne le rang de la sous-matrice de E dont les vecteurs colonnes sont les éléments de X) ssi on peut passer de R à R'

(i) par transpositions de colonnes

(ii) par pivotages sur des éléments non nuls situés dans la l ème ligne ou la $(n+1)$ -ième colonne d'une matrice \bar{R} obtenue en adjoignant à R une ligne et une colonne supplémentaire de format respectif $1 \times (n+1)$, $(m+1) \times 1$; la première ligne de \bar{R} ne contient qu'un seul coefficient non nul; il n'est pas situé dans la dernière colonne de \bar{R} .

On interprétera géométriquement $M(E, r)$ à partir des polyèdres définis dans A^n par les n vecteurs de R et les $(n+1)$ vecteurs de \bar{R} , polyèdres dont on ne change pas les principales propriétés par dilatation, rotation, retournement ou translation.

1.5.3. Matroïdes cod ln : On désigne sous ce nom un matroïde défini sur un ensemble E de cardinal n . Les n stigmes de ce matroïde sont formés des sous-ensembles de E de cardinal $n-1$.

1.5.4. Matroïdes graphiques : On peut par 1-subdivision partielle d'un 2-complexe engendrer un 1-complexe ou graphe. Les graphes que nous considérons sont des graphes sans boucle; deux sommets quelconques peuvent être joints par plusieurs arêtes. Le matroïde $M(E, r)$, défini à partir de $\mathbb{Z}/2p+1$ dans l'exemple 1.5.2., peut se représenter graphiquement par un graphe formé de deux sommets et de $2p$ arêtes les joignant.

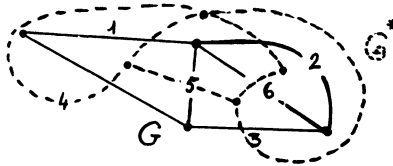
Etant donné un graphe G tel que nous l'avons choisi, on désigne par E l'ensemble de ses arêtes. La famille des polygones simples (ou cycles topologiques) du graphe forment la famille \mathcal{J} des stigmes du matroïde graphique $M(G) = M(E, \mathcal{J})$.

Les matroïdes graphiques, faciles à représenter grâce au graphe qui leur a donné naissance, forment la classe de matroïdes "la plus simple". Il pourra être utile de se servir d'eux comme exemples pour saisir la signification de certains théorèmes.

Le graphe, par l'intermédiaire de son matroïde, doit être considéré comme un objet essentiellement linéaire.

On peut par ailleurs le considérer comme une structure algébrique appelée groupeïde partiel neutre à gauche : x et y étant deux sommets du graphe, on pose $x.y = y$ ssi il existe une arête orientée joignant x à y . On peut montrer que tout groupeïde partiel peut se décomposer en un "produit simple" de groupeïdes partiels neutres à gauche : on retrouve là les notions de linéarisation et d'approximation successive dont nous avons parlé dans l'introduction.

A partir du graphe G ci-dessous nous allons construire le matroïde graphique correspondant, en définissant les ensembles, bases, etc...



$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{F} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}\}$$

$$\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{F} ; |X| = 3\}$$

$$\mathcal{B}^* = \{B^* = E - B ; B \in \mathcal{B}\}$$

$$\mathcal{J} = \{\{1, 5, 4\}, \{5, 6, 3\}, \{1, 6, 3, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 5, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$\phi = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}\}$$

1.6. Remarques

1.6.1. Nous avons, dans nos exemples, considéré des ensembles de base E finis (ce sont des espaces topologiques avec $d(a,b) = |a \cup b| - 1$). Nous ne travaillerons désormais que sur des matroïdes finis : nous restreindrons encore ici à ce cas le domaine de définition des matroïdes. Certains auteurs appellent parfois ϕ -espaces les matroïdes non finis (26). Par ailleurs, on peut légèrement modifier les axiomatiques et laisser tomber les conditions équivalentes, $e \in \mathcal{F}, r(e) = 1, |S| \geq 2$, etc... : on accepte alors les graphes avec boucles et la possibilité pour un élément d'être dépendant de lui-même.

1.6.2. On remarquera l'usage fréquent, dans les différentes axiomatiques linéaires, du principe d'extrémalité : on le retrouve dans la définition des éléments de $\phi, \mathcal{B}, \mathcal{J}$. En particulier à base, ensemblin maximal, s'oppose stigme, ensemble dépendant minimal : on a l'impression d'être en présence des deux faces d'un même visage ; la notion de matroïde orthogonal nous permettra de tirer cette question au clair.

1.6.3. La définition des matroïdes par l'intermédiaire de la notion de stigme présente un intérêt particulier.

Si les notions de rang, de base, ont retenu, très tôt, l'attention des mathématiciens, il n'en a pas été du tout de même avec la notion de stigme découverte par H. WHITNEY.

Et pourtant, n'est-ce-pas du point physique une notion très importante ? La notion de stigme implique la notion d'ensemble d'éléments liés entre eux : c'est à dire un objet difficile à détruire, et cela d'autant plus qu'il se présente sous forme cyclique. Cet ensemble est minimal, on évite de le surcharger d'éléments parasites, qui, semblables à des tumeurs et excroissances inutiles, nuiraient à sa stabilité. Le stigme correspond à un objet physique stable le plus simple qu'on puisse imaginer : l'élastique, la coquille de noix, en suggèrent de bons exemples. Un objet plus complexe sera constitué de stigmes accolés les uns aux autres ; qu'on pense aux alvéoles soudées entre elles et qui constituent un rayon de miel. On voit ici encore que de la notion d'extrémalité dérive la notion de stabilité structurelle.

C'est naturellement vers la Mécanique qu'il faudra se tourner pour trouver des interprétations physiques intéressantes de la notion de matroïde. Dans certains cas (28), on peut, dans l'espace des phases qui représente l'ensemble des trajectoires possibles, décomposer l'ensemble structurellement stable des points non errants en domaines disjoints : on pourra les recouvrir et approcher par des complexes.

2. NOTION D'ORTHOGONAL

La donnée d'un matroïde $M(E, \mathcal{J})$ revient ipso-facto à la donnée d'un autre matroïde défini sur le même ensemble E , $M^*(E, \mathcal{J}^*)$, appelé orthogonal de M . Cette notion a été introduite par WHITNEY.

- (32) Théorème 2.1. : Soit $M(E, \mathcal{J})$ un matroïde défini sur E . Désignons par \mathcal{X}^* la famille des sous-ensembles $X^* \subseteq E$ tels que $\forall S \in \mathcal{J}$, $|S \cap X^*| \neq 1$. Soit \mathcal{Y}^* la sous-famille de \mathcal{X}^* formée des sous-ensembles minimaux $S^* \in \mathcal{Y}^* \subseteq \mathcal{X}^*$. \mathcal{Y}^* est la famille des stigmes d'un matroïde $M^*(E, \mathcal{Y}^*)$, appelé un orthogonal de $M(E, \mathcal{J})$.

Deux orthogonaux de M sont isomorphes. On a dessiné en pointillé, exemple 1.5.4., le graphe G^* orthogonal au graphe G et qui engendre le matroïde $M^*(G)$ orthogonal au matroïde $M(G)$.

- (32) (5) Proposition 2.2. : Les éléments de $B^* = E - B$ constituent un système de représentants minimal des éléments de \mathcal{J}^* , et forment une base de M^* .

D'où la relation

- (37) Corollaire 2.3. : $r(M) = r(B) = |E| - r(B^*) = |E| - r(M^*)$.

Les axiomatiques que nous avons données n'assurent pas l'existence de l'orthogonal d'un ϕ -espace quelconque. On peut s'en assurer cependant si l'axiomatique définit du même coup M et M^* , ce qui est le cas de l'axiomatique de G. MINTY (20), plus restrictive de ce fait que les précédentes. On peut montrer que cette axiomatique est équivalente à celle qu'utilisent R. BRUALDI et E. SCRIMGER (4) ; c'est une axiomatique relative aux bases qui, par rapport à celle qui a été présentée, impose en plus une condition : 3(iii) devient

$$3'(iii) \quad \forall B, B' \in \mathcal{B}, \forall e \in B - B' \Rightarrow \exists e' \in B' - B, \text{ tel que} \\ B \cup e' - e, B' \cup e - e' \in \mathcal{B}.$$

Dans le cas fini 3(iii) et 3'(iii) sont équivalentes. Dans le cas non fini, ces auteurs appellent "système d'échange" ce ϕ -espace particulier (bien que tout matroïde linéaire possède cette propriété d'échange (STEINITZ)).

Les propositions précédentes, comme un grand nombre de celles qui suivent, se démontrent selon la méthode suivante :

On cherche le matroïde dont l'ensemble sous-jacent E est minimal et pour lequel la proposition est fautive ; on montre alors qu'on peut construire un matroïde dont l'ensemble sous-jacent est de cardinal encore plus petit que celui du matroïde "minimal" précédent et pour lequel la proposition est encore fautive.

Des variantes de cette méthode portent sur la notion de dimension au lieu de celle de cardinal.

Afin de classer les différents matroïdes que l'on peut rencontrer, afin d'en bien connaître les propriétés, on va en prendre des images que nous appellerons représentations et sur lesquelles nous allons travailler.

On dira que la matroïde $M(E, \mathcal{J})$ est connexe si on ne peut pas trouver de sous-ensemble U appelé séparateur de M de E tel que $\forall S \in \mathcal{J}, S \cap U = \emptyset$. On supposera désormais le matroïde connexe.

3. REPRESENTATION GEOMETRIQUE DES MATROIDES.

Posons $E' = \mathcal{J}(\mathcal{J})$; désignons par Σ^* l'axiomatique linéaire de M^* . On appelle représentation géométrique de M , le matroïde $M(E', \Sigma^*)$. Un matroïde de ce type porte également le nom de géométrie projective généralisée ⁽¹⁾. L'étude de cette géométrie a été suggérée par G. BIRKHOFF (1) et S. MAC LANE (19) .

On appelle point de cette géométrie tout élément de \mathcal{J} . Le support d'un point est un stigme de M .

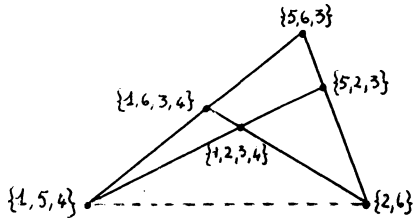
(1) On pourra réfléchir sur cette présentation axiomatique de la géométrie et son enseignement indispensable.

On appelle k-plan U tout élément de $\mathcal{P}(\mathcal{J})$, dont le support est une réunion de stigmes de M , et qui admettent un système de $k+1$ représentants distincts. $k+1$ est le co-rang de U , k la dimension de U . Si $k = 1$, U est une droite. Si S_1 et S_2 sont deux points d'une droite U , on dira indifféremment que les points S_1, S_2 reposent sur U , ou que U repose sur S_1 et S_2 .

(32) Proposition 3.1. : Toute droite non connexe repose sur deux points et deux seulement.

(32) Proposition 3.2. : Toute droite connexe δ repose sur trois points au moins. Soient S_1 et S_2 les supports ensemblistes de deux de ces points. Le support ensembliste de δ est $S_1 \cup S_2$.

Voici la représentation géométrique associée au matroïde graphique défini à partir du graphe G , exemple 1.5.4. :



On peut définir (32) deux types de morphismes fondamentaux :

(i) la contraction

(32) Proposition 3.3. : Soit l'application $c : E \rightarrow D \subseteq E$ telle que $\forall S \subseteq D \Rightarrow c(S) = S$. On pose $c(S) = \{S \in \mathcal{J}, S \subseteq D\}$. Alors $c(M(E, \mathcal{J}))$ est un matroïde $M(D, c(S)) = M \times D$.

$M \times D$ est le contracté de $M = M(E, \mathcal{J})$ de E à D .

(ii) la réduction ρ :

(32) Proposition 3.4. : Soit l'application $\rho : E \rightarrow D \subseteq E$ telle que $\forall S \in \mathcal{J} \Rightarrow \rho(S) = S \cap D$. On désigne par $\rho(\mathcal{J})$ la famille des sous-ensembles minimaux de $\mathcal{L} = \{\rho(S)\}$.

Alors $\rho(M) = M(D, \rho(\mathcal{F})) = M.D$ est un matroïde.

$M.D$ est le réduit de $M = M(E, \mathcal{F})$ de E à D .

Si D et U sont des sous-ensembles de E , on appellera mineur de M tout matroïde de la forme $(M \times D).U$.

Les résultats qui suivent peuvent s'établir de façon ensembliste. On peut également les démontrer en utilisant la fonction rang et le

(37) Lemme 3.5. : Soit $r : E \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction rang. Quels que soient les sous-ensembles $X \subseteq E$, $Y \subseteq E$, $Z \subseteq E$,

$$r(X \cup Y \cup Z) - r(X \cup Y) \leq r(X \cup Z) - r(X).$$

Ce lemme s'établit par récurrence sur les cardinaux de X, Y, Z . On en déduit :

(1) (5) Théorème 3.6. : Si X est un sous-ensemble linéairement fermé du matroïde M , $X^* = E - X$ est $-$ plan de l'orthogonal M^* de M .

On donne le début de la démonstration de ce théorème qui montre que $\forall S \in \mathcal{F}$, $|S \cap X^*|$ (et en particulier $|S \cap S^*|$ où $S^* \in \mathcal{F}^*$) $\neq 1$. Supposons le contraire : $S \cap X^* = e$. Cette condition peut s'écrire $S \subseteq X \cup e = Y$. D'après l'axiome 2(iii) et la définition des sous-ensembles linéairement fermés, $r(Y) = r(X) + k(X, e)$ avec $k(X, e) = 1$. Mais on a aussi $S - e \subseteq X$, et d'après la définition des stigmes $r(S) = r(S - e) + k(S, e)$ avec $k(S, e) = 0$. D'après le lemme précédent $k(X, e) = 0$. En résumé $k(X, e) = 1 = 0$: cette contradiction établit la proposition.

Le lemme de WHITNEY permet également d'établir immédiatement le résultat suivant (en posant $X \cup Y = U$, $X \cup Z = V$).

(32) Théorème 3.7. : Soient U et V deux sous-ensembles de E .

$$r(M \times (U \cup V)) + r(M \times (U \cap V)) \leq r(M \times U) + r(M \times V).$$

(32) Théorème 3.8. : Si U est un k -plan connexe reposant sur un $(k+2)$ -plan connexe V , il existe deux $(k+1)$ -plans connexes, R et T , tels que

$$M \times (R \cap T) = U, \quad M \times (R \cup T) = V.$$

Ces deux derniers résultats ont été établis dans ce langage par TUTTE. Ils signifient que les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ peuvent être ordonnés en un treillis géométrique. Ce résultat avait auparavant été énoncé par G. BIRKHOFF (1), pour les éléments de ϕ , sous-ensembles linéairement fermés de M. BIRKHOFF était parti de l'axiomatique des matroïdes par la fonction rang, et avait qualifié de matroïde le treillis qu'il obtenait.

On pourra compléter l'étude de la liaison entre k-plans et (k+1)-plans à l'aide du théorème de construction des matroïdes suivant :

(5) Théorème 3.9. : Soit P un plan connexe quelconque du matroïde $M(E, \mathcal{Y})$.

La famille \mathcal{Y}' des sous-ensembles de E formés de P et des stigmes de M non contenus dans P, est la famille des stigmes d'un matroïde $M'(E, \mathcal{Y}')$.

Ces premiers résultats sur l'étude géométrique des matroïdes donne des premiers éléments pour leur classification :

on dira qu'un matroïde est n-aire ssi toute droite de ce matroïde contient au plus n+1 points, et s'il contient au moins une telle droite. On peut appeler n la caractéristique géométrique principale du matroïde .

Une classification plus fine peut être défini à l'aide des k-plans du matroïde. On ne connaît bien pour l'instant que les matroïdes 2-aires ou binaires, dont la représentation géométrique est une géométrie projective classique.

4. ETUDE DE LA STABILITE GEOMETRIQUE (HOMOTOPIE)

Un des problèmes important sera de caractériser les différentes classes de matroïdes que l'on saura définir. Or à chaque classe de matroïde est associée un type de géométrie projective généralisée. Le passage d'une classe de géométrie à une autre peut se faire par un certain nombre de déformations élémentaires, et selon ces déformations, on restera dans la même classe de géométrie, ou on se retrouvera dans une autre classe de géométrie. D'où l'intérêt d'étudier le problème de la stabilité géométrique.

Les principales définitions et les résultats de ce paragraphe, souvent difficiles à obtenir, sont dûs, hormis le premier énoncé, à W.T. TUTTE (32) ; on verra au paragraphe 9 la motivation qui a conduit TUTTE à les énoncer.

On dit qu'un sous-ensemble L de E définit une sous-classe linéaire de M ssi tous les points d'une droite δ de M s'appuyant sur deux points S_1 et S_2 situés dans L , appartiennent à L . Deux points sont adjacents s'ils appartiennent à la même droite connexe. Un chemin simple $P = (S_1, \dots, S_k)$ est une séquence finie de points adjacents tous distincts. Le chemin est fermé si $S_1 = S_k$. Le chemin est fiché en S_1 ssi $\forall j \in]k[\Rightarrow S_1 \cap S_j = \emptyset$.

(5) Théorème 4.1. : $P = (S_1, \dots, S_k)$ est un chemin simple ssi il existe un chemin fiché $P' = (S'_1, \dots, S'_k)$ avec $S'_1 = S_1$, tel que tout S'_i rencontre S_1, S_2, \dots, S_i .

(32) Théorème 4.2. : Soit L une sous-classe linéaire de M . Soient U un plan connexe de M , X et Y des points de U tels que $Y \notin L$. Il existe un chemin simple P allant de X à Y ; P ne contient d'autre point de L que X .

Une conséquence lointaine de ce théorème est la suivante :

Corollaire 4.3. : Soient e et e' deux éléments distincts de E . Le matroïde M est supposé connexe. Il existe alors un stigme S au moins qui contient e et e' .

Ce corollaire est immédiat lorsque le matroïde est défini par la fonction rang. On peut alors s'en servir comme point de départ pour donner des démonstrations plus simples de certains théorèmes sur la géométrie des matroïdes.

Si P et Q sont deux chemins dont l'extrémité du premier est l'origine du second, on note par PQ le chemin obtenu par concaténation de P et de Q . Si PQR est un chemin et si Q est un chemin fermé, on dit que PR s'obtient à partir de PQR par déformation Q .

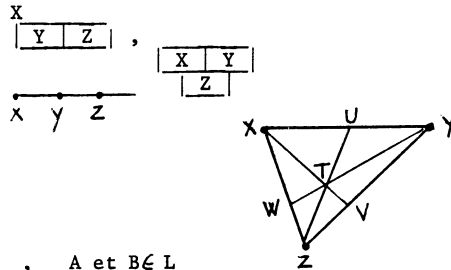
Etant donnée une sous-classe linéaire L de M , on distingue quatre types de déformations, dites élémentaires, par rapport à L .

1er type (X, Y, X) , $X, Y \notin L$



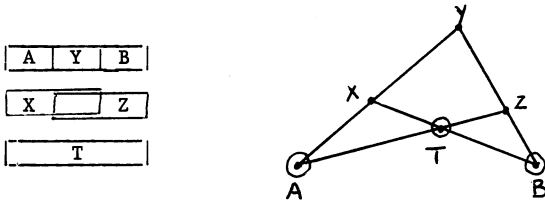
2ème type (X, Y, Z, X) $X, Y, Z \notin L$

$\dim(X \cup Y \cup Z) \leq 2$

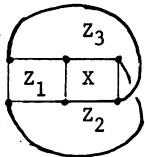


3ème type (X, Y, Z, T, X) $X, Y, Z, T \notin L$, A et $B \in L$

voir l'exemple graphique précédent (2ème type) et celui-ci

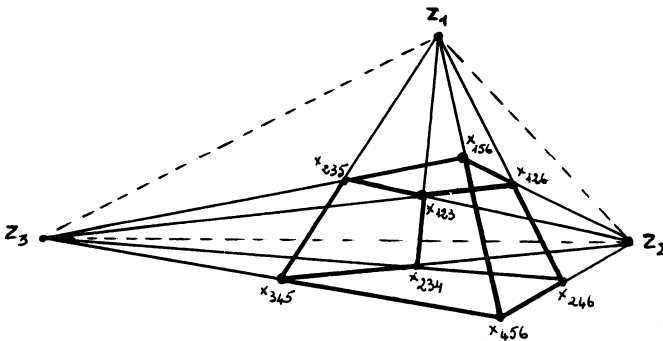


4ème type (Z, X, Z', X', Z) $X, X' \notin L$ $Z, Z' \in L$



Les points X, X', Z, Z' appartiennent à un 3-plan qui est représenté en perspective ci-dessous. Il possède 6 2-plans (par exemple $Z_1, X_{156}, X_{456}, X_{246}, X_{126}$). Les

droites $Z_i Z_{(i+1) \bmod 3}$ $i \in \{1, 2, 3\}$ ne sont pas connexes. On pourra dessiner la géométrie associée au graphe ci-contre qui s'apparente à la géométrie dessinée ci-dessous appelée "boîte".



On dira que deux chemins sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une succession de déformations élémentaires. Un chemin est dégénéré s'il se réduit à un point : on dit dans ce cas qu'il est homotope à zéro.

(32) Théorème d'homotopie 4.4. : Tout chemin fermé Q , extérieur à une sous-classe linéaire L de M classe M est homotope à zéro.

La démonstration de ce théorème, longue et difficile, se fait par récurrence. On appelle $H(n)$ la proposition suivant laquelle le théorème précédent est vrai lorsque Q repose sur un n -plan.

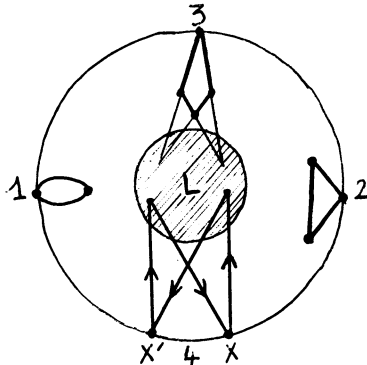
On appelle dimension du chemin la dimension du plan formé par l'union des stigmes qu'il contient.

La démonstration du théorème d'homotopie exige la démonstration préalable du lemme suivant (on peut décomposer sa démonstration en 8 sous-lemmes) :

(32) Lemme d'homotopie 4.5. : Supposons $n \geq 2$ et $H(n)$ vraie ; désignons par $Q = (W, X, Y, Z, W)$ un chemin extérieur à L de dimension $n+1$, tel que $W \cup X \cup Y$ et $Y \cup Z \cup W$ soient des plans connexes, $W \cup Y$ une droite non connexe. Alors Q est homotope à zéro.

Dans le cas où $L = \emptyset$, deux types seulement de chemins élémentaires fermés sont à considérer : le premier et le second. Le théorème d'homotopie dit alors que tout fermé d'un matroïde peut être rendu homotope à un chemin dégénéré par une séquence de déformations élémentaires sur des droites ou des 2-plans.

Résumé :



5. LE CRITERE DE MINIMALITE

Nous avons indiqué précédemment le lien entre le principe d'extrémalité et la stabilité structurelle. On ne s'étonnera donc pas de la métaconjecture suivante quand bien même son énoncé resterait quelque peu obscur :

- (5) Critère de minimalité : Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux classes d'objets définis sur des ensembles finis par la même axiomatique. On suppose $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ce qui signifie que tous les objets de \mathcal{A} ont les mêmes propriétés que les objets de \mathcal{B} . Soit $I(\mathcal{B}) = I_1(\mathcal{B}) \times I_2(\mathcal{B})$ un ensemble d'indice qui correspondent à des propriétés classificatoires des objets de \mathcal{B} . $i_1 \in I_1(\mathcal{B})$ implique en particulier la possibilité d'établir un ordre total sur les éléments de \mathcal{B} par rapport au critère i_1 . Désignons par B la famille des objets de \mathcal{B} , n'appartenant pas à \mathcal{A} , et minimaux par rapport aux critères $i_j \in I_1(\mathcal{B})$ sous les conditions $i_k \in I_2(\mathcal{B})$. Une classe \mathcal{E} d'objets de \mathcal{B} n'est composée que d'objets de \mathcal{A} , si et seulement si les objets de \mathcal{E} ne contiennent pas les objets de B comme sous-objets.

Nous allons immédiatement éclaircir un peu cet énoncé par quelques exemples:

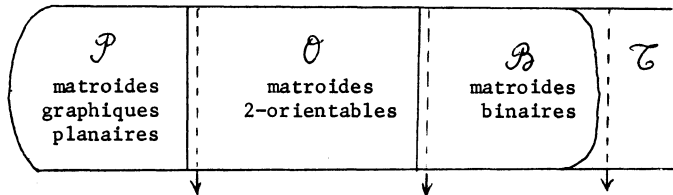
- (i) on peut prendre dans le cas des graphes $I(\mathcal{B}) = I_1(\mathcal{B}) \times I_2(\mathcal{B})$ avec

$$I_1(\mathcal{B}) = \text{nombre de sommets, nombre d'arêtes}$$

$$I_2(\mathcal{B}) = \text{connexe, non connexe}$$

- (ii) on considère les trois classes emboîtées de matroïdes suivants

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{B}:$$



On se place au "voisinage" des classes \mathcal{P} et \mathcal{O} . On cherchera les matroïdes graphiques non planaires engendrés par les graphes dont le nombre de sommets, le nombre d'arêtes est minimal. Ces graphes sont les deux configurations de KURATOWSKI. On énoncera alors le résultat bien connu : un graphe quelconque est 0-représentable (planaire) ssi il ne contient pas comme sous-graphe partiel l'une quelconque des configurations de KURATOWSKI.

Plaçons-nous maintenant au "voisinage" des classes \mathcal{O} et \mathcal{B} . On cherche les matroïdes binaires qui ne sont pas 2-orientables et dont l'ensemble sous-jacent est de cardinal minimal. On les appelle $M(2)$ et $M^*(2)$. On conjecture pour l'instant (voir paragraphe 9) qu'un matroïde binaire est 2-orientable ssi il ne contient pas de mineur du type $M(2)$ ou $M^*(2)$.

6. PORTEUSES ET PETITES COLLINÉATIONS

Pour ramener l'étude des classes de matroïdes à certains matroïdes plus particulier, on introduit [32] les notions de porteuse et de petite collinéation.

Une porteuse de $M.D$ est un sous-ensemble Z de E tel que :

$$(M \times Z).D = M.D$$

(32) Proposition 6.1. : Soient Z une porteuse de $M.D$, S un stigme de $M.D$. Il existe un seul stigme S' de $M \times Z$ tel que $S' \cap D = S$.

On peut alors définir une application h , appelée petite collinéation, des plans de $M.D$ sur les plans de $M \times Z$: $h : M.D \rightarrow M.Z$ vérifie alors

- (i) $h(S) = S'$ (où $S' \cap D = S$)
- (ii) si P est un k -plan de $M.D$, $h(P)$ est le plan formé par l'union des stigmes S' images par h des stigmes S de D .

Il est clair que P et $h(P)$ sont de même dimension.

On peut définir une relation d'équivalence entre deux applications $h, h' : M.D \rightarrow M \times Z$: en effet h et h' peuvent donner globalement le même résultat, mais il peut très bien se faire que $h(e) = e'$, $h'(e') = e$. On appellera collinéation une classe d'équivalence de petites collinéations.

7. REPRESENTATION ALGÈBRE DES MATROÏDES

L'étude de la représentation algébrique des matroïdes va nous fournir d'autres critères pour classer les matroïdes. Les fondements de cette étude sont dus à H. WHITNEY [37].

Nous dirons que $M(E, \mathcal{J})$ est représentable au sens de WHITNEY (W-représentable) ssi

- (i) il existe un espace vectoriel muni d'une base, W , sur le corps d'opérateurs A .
- (ii) il existe un ensemble \tilde{W} de vecteurs de W , ne contenant pas l'origine, de sorte que $h : E \rightarrow \tilde{W}$ est une bijection.
- (iii) $\forall S \in \mathcal{J}$, $h(S)$ est un ensemble minimal de vecteurs linéairement dépendants dans W .

Autrement dit $M(E, \mathcal{J})$ est isomorphe à un matroïde matriciel.

On appellera $c(A)$, caractéristique de A , une caractéristique algébrique du matroïde.

On appellera support de h le sous-ensemble de E suivant $\text{Supp}(h) = \{e \in E / h(e) \neq 0\}$.

Le deuxième type de représentation a été développé par TUTTE à partir de la notion de "circuit matrix" introduite par WHITNEY. Nous l'appelons donc représentation de TUTTE (ou T-représentation). Dans cette représentation W représente l'espace vectoriel des fonctions de E à valeurs dans A , isomorphe à A^n .

T , sous-espace de W , est une T-représentation de M ssi :

- (i) il existe une base de T dont les vecteurs ont pour support des stigmes de M .
- (ii) tout stigme de M est représenté par un point de T .
- (iii) T est de dimension minimale sous les conditions précédentes.

Afin de faire le lien entre cette théorie et la pratique, nous appellerons flot ("chain") une fonction quelconque de E dans A , et cycle un flot h qui a pour support un stigme de M .

Le théorème suivant indique comment on passe d'une T-représentation à une W-représentation :

(5) (15) Théorème 7.1. : Soit T une T-représentation du matroïde M dans W . Les vecteurs images dans W/T des vecteurs unitaires de W constituent une W-représentation de M . On a la relation $\text{rang}(M) = \dim(W/T)$.

(37) Théorème 7.2. : Soit T^* l'orthogonal de T dans $W = W^*$ par rapport à la forme hermitienne produit scalaire. T^* est une T-représentation de l'or-

thogonal M^* de M .

C'est à partir des travaux de WHITNEY, MAC LANE et R. RADO (25) que LAZARSON a pu énoncer le théorème suivant sur les W -représentations :

- (17) Théorème 7.3. : Soit $n = cr+1$, où c est un nombre premier, r un entier positif. Soient V un espace vectoriel sur le corps non commutatif K de caractéristique c , et l'ensemble $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n, u, u-e_1, u-e_2, \dots, u-e_n\}$ où e_1, e_2, \dots, e_n sont des vecteurs linéairement indépendants dans V , $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Soit $M(E, \mathcal{F})$ un matroïde défini sur E tel que tout ensemble de M se compose d'éléments de E correspondants à des vecteurs linéairement indépendants dans V . Supposons que M soit W -représentable dans W , espace vectoriel sur A , corps non commutatif. La caractéristique de A est cr , c si $r = 1$.

Si $c = 2$, $r = 1$, on définit ainsi un matroïde $M(2)$ représentable seulement dans $\mathbb{Z}/2$ (37).

On peut, à l'aide, entre autres, du théorème précédent montrer qu'il existe un matroïde à 16 qui n'est représentable sur aucun corps (17). E désigne les 10 (resp. 9) points de la configuration de Desargues (Pappus). On ôte à chacune de ces configurations une droite, on pose $\forall X \subseteq E$, $r(X) = |X|$ si $|X| \leq 2$; si X désigne les trois points d'une droite $r(X) = 2$; $r(X) = 3$ dans les autres cas. Les matroïdes obtenus $D(E, r)$, $P(E, r)$ ont les propriétés de n'être représentables sur aucun corps pour le premier, que sur un corps non commutatif pour le second. INGLETON (16) conjecture que $D(E, r)$ et $P(E, r)$ sont les matroïdes de plus petit cardinal à vérifier ces propriétés.

Points et droites d'une géométrie projective suffisent pour la décrire complètement.

On ne s'étonnera pas du résultat important suivant (qui n'est peut être pas étranger au théorème fondamental de la géométrie projective classique) :

- (32) Théorème 7.4. : Soient $M(E, \mathcal{F})$ un matroïde et W l'espace vectoriel des fonctions définies sur E à valeurs dans le corps A . On suppose que pour tout triplet de points S, S', S'' situés sur la même droite de la géométrie associée à M , il existe trois éléments non nuls de A , s, s', s'' respectivement associés à trois cycles h, h', h'' de W dont les supports sont

S, S', S'' , tels que $s \cap h(E) + s' \cap h'(E) + s'' \cap h''(E) = 0 \pmod{c(A)}$. Soit T le sous-espace vectoriel de W engendré par cette famille de cycles. T est une T -représentation de M dans W .

Nous pensons qu'on peut généraliser ce théorème et écrire : soient $M(E,)$ un matroïde et W le module des fonctions définies sur E à valeurs dans l'anneau A . Alors quel que soit le triplet de points ..., il existe Si cette conjecture était vraie, elle permettrait d'apporter des lueurs sur la géométrie dans les modules par l'intermédiaire de la géométrie bien connue des matroides dans lesquels on peut les représenter. Le problème fondamental de la représentation algébrique des matroides "cod \ln ", représentés géométriquement par des droites connexes, n'est pas résolu.

La classification algébrique des matroides permet de distinguer entre ceux qui sont représentables sur n'importe quel corps et ceux qui sont représentables sur des corps de caractéristique spécifique. Les premiers sont dits 2-orientables (ou totalemt unimodulaires, ou réguliers). Parmi les seconds, qui contiennent ceux de la première classe, il faut citer les matroides représentables sur $\mathbb{Z}/2$: ce sont les matroides binaires.

Soit T une T -représentation de M . Désignons par $R(M)$ la matrice formée par les vecteurs de T qui l'engendrent et dont les supports sont des stigmes de M . Une telle matrice s'appelle matrice fondamentale associée à M . Lorsque tous ses coefficients non nuls sont égaux à 1, on dit qu'elle est normalisée. C'est alors également la matrice d'incidence de E à une famille de stigmes $\mathcal{J}_g \subseteq \mathcal{J}$ dits stigmes générateurs de M . Le rang de $R(M)$ est égal au cardinal d'une co-base.

8. QUELQUES PROPRIETES DES MATROIDES BINAIRES ET 2-ORIENTABLES

8.1. Matroides binaires : En voici quelques définitions équivalentes :

(32) Théorème 8.1. : un matroïde est binaire ssi toute droite connexe repose exactement sur 3 points.

(32) Théorème 8.2. : ssi toute différence symétrique de stigmes est union de stigmes disjoints.

(18) Théorème 8.3. : ssi $\forall s \in \mathcal{J}, s^* \in \mathcal{J}^* \quad |s \cap s^*|$ est pair.

Un matroïde binaire est représentable sur $\mathbb{Z}/2$; de plus

(32) Proposition 8.4. : tout flot est somme de cycles à supports disjoints.

On peut enfin montrer que

(5) Proposition 8.5. : Soit r le rang du matroïde binaire $M(E, \mathcal{I})$. Il existe une famille de stigmes $\mathcal{Y}^* \subseteq \mathcal{Y}^*$ (resp. $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$) de $M^*(E, \mathcal{Y}^*)$ (resp. $M(E, \mathcal{Y})$) contenant r (resp. $(|E| - r)$) éléments, qui engendrent M^* , et tels que, $\forall S^* \in \mathcal{Y}^*$, $\forall S' \in \mathcal{Y}'$, $\forall S \in \mathcal{Y}$, $|S \cap S^*| = 0$ ou 2 .

Il est possible de plonger tout matroïde de M dans un matroïde graphique M_G de rang supérieur ou égal à celui de matroïde donné. On ne sait encore rien en général sur les rapports entre M et M_G . Par contre on sait reconnaître si un matroïde binaire donné est graphique (35).

8.2. Matroïdes 2-orientables : On les appelle ainsi car on peut affecter un signe à chaque élément de E , $+$, $-$ et trouver une représentation algébrique de M qui traduise l'orientation des éléments de E .

(32) (20) Théorème 8.6. : Un matroïde est orientable ssi il peut être représentable sur un corps de caractéristique nulle.

On dira qu'un cycle est primitif ssi ses coefficients non nuls sont égaux à 1 ou -1 ; que le flot est conforme au flot g si le support de f , $\text{Supp}(f) \subset \text{Supp}(g)$, et si, $\forall e \in \text{Supp}(f) \implies f(e) g(e) > 0$.

T désigne le sous-espace d'une T -représentation du matroïde 2-orientable M .

(31) Lemme 8.7. : Soit f un flot de T ; il existe un cycle primitif de T conforme à f .

(31) Corollaire 8.8. : f est une somme de cycles primitifs de T , tous conformes à f .

(31) Théorème 8.9. : Soit e un élément de E : il existe un cycle primitif à éléments positifs ou nuls dont le support contient e , qui est : ou bien un vecteur de T , ou bien un vecteur de T^* .

De ce théorème on déduit le "lemme des arcs colorés" (TUTTE, 1956).

On a enfin le

- (32) Théorème 8.10. : La matrice fondamentale normalisée $R(M)$ est totalement unimodulaire. (Les déterminants des sous-matrices carrées de $R(M)$ sont égaux à -1 , 0 ou 1).

Ces derniers résultats ont une interprétation très utile en programmation mathématique linéaire.

9. CARACTERISATION DES MATROIDES 2-ORIENTABLES

Il s'agit de démontrer la conjecture énoncée en fin de paragraphe 6. Cette démonstration est typiquement de style géométrique et algébrique.

- (32) Théorème 9.1. : Un matroïde binaire est 2-orientable ssi il n'admet pas de mineur isomorphe à $M(2)$ ou $M^*(2)$.

La principale difficulté est de montrer que la condition est suffisante. Pour cela, on procède par l'absurde. On considère le matroïde M défini sur l'ensemble E de sorte que $|E|$ soit minimal et que la proposition soit alors fausse. La proposition est donc vraie sur $M' = M.(E-e)$ où $e \in E$. Désignons par Z la porteuse associée à M' , h la petite collinéation $M.(E-e) \rightarrow M \times Z$, L la sous-classe linéaire formée des points S de M' tels que $e \notin h(S)$. Puisque M' est 2-orientable, on peut lui associer une représentation totalement unimodulaire. A l'aide des chemins fermés extérieurs à L contenant e , on construit une représentation algébrique de M qui est totalement unimodulaire, ce qui contredit le fait que la proposition est fausse pour M .

Du point de vue géométrique le théorème s'exprime ainsi :

- (32) Théorème 9.2. : Un matroïde binaire est 2-orientable ssi sa géométrie associée ne contient ni la T-configuration de FANO, ni le T-heptaèdre (configuration de TUTTE).

On désigne par T-heptaèdre une géométrie isomorphe à la géométrie associée à $M(2)$, et pour laquelle la famille des plans P_i de cette géométrie admet un système de représentants distincts : $P_i \neq P_j \Rightarrow e_i \neq e_j$ avec $e_i \in E \cap P_i$,

$e_j \in E \cap P_j$. Cette configuration peut s'obtenir à partir de la boîte en remplaçant les droites non connexes Z_i, Z_j par des droites connexes, et où on introduit un système plan qui passe par quatre coins de la boîte, coupe chaque droite Z_i, Z_j en un point (c'est la géométrie associée au graphe dessiné près de la boîte).

On désigne par T-configuration de FANO, une configuration de FANO dont les sept droites possèdent un système de représentants distincts.

C'est du point algébrique que la caractérisation est intéressante ; elle peut en effet s'exprimer de la façon suivante :

(32) Théorème 9.3. : Une matrice à coefficients 0 ou 1 est totalement unimodulaire ssi elle ne contient pas de sous-matrice du type

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce résultat, joint au critère de minimalité, suggère des généralisations de ce théorème et l'introduction de la notion de matroïdes n-orientables (5) .

10. CONNEXITE DANS LES MATROIDES BINAIRES : SEPARATEURS ET PONTS

Le problème qui va retenir maintenant notre attention est celui de la caractérisation des matroïdes graphiques : ce sont des matroïdes 2-orientables représentables géométriquement par des graphes de sorte que d'une part le cardinal de l'ensemble sous-jacent au matroïde est égal au cardinal de l'ensemble d'arêtes de son graphe associé, d'autre part à tout stigme du matroïde correspond un polygone du graphe. (L'orthogonal d'un matroïde graphique est 2-orientable, mais il n'est pas forcément graphique : s'il l'est le matroïde graphique est dit planaire).

La méthode utilisée s'inspire de celle qu'a employée KURATOWSKI pour caractériser les graphes de genre 0 (planaire) dans la classe des graphes de genre 1 .

Les notions qui y sont rencontrées, comme celles qui ont trait en général à la connexité dans les graphes, ont été, pour bon nombre d'entre elles, généralisées pour des matroïdes quelconques ou binaires. TUTTE (32) a énoncé 45 résultats qui vont de l'étude des ponts dans les matroïdes généraux à la caractérisation des matroïdes graphiques. Nous ferons des coupes sombres dans cette moisson de résultats.

Etant donné un matroïde quelconque, on appelle ponts du stigme S dans M , les séparateurs élémentaires de $M.(E-S)$. On suppose maintenant le matroïde binaire.

Z étant un stigme de $M.(E-S)$, supposons que $Z \cup S$ soit une droite connexe ; désignons par T le troisième point de cette droite. On pose $V = T \cap S$, $W = Z \cap S$. V et W sont les arches de S déterminées par Z .

Soit P un point de S dans M . Si P possède un stigme dans $M \times (E-S)$, on appellera pile $\pi_1(M, P, S)$ du pont P dans S , ou "pile de S ", une intersection non vide minimale d'arches de S déterminées par les stigmes de $M.(E-S)$ dans P .

L'ensemble des piles de S est appelé alignement de S (ou partition de S).

On dit que deux ponts sont disjoints s'ils n'ont pas de pile commune sinon ils se rencontrent.

S est décomposable s'il est possible de ranger les ponts de S en deux classes disjointes de sorte que tout couple de ponts appartenant à une classe différente soient disjoints.

On dit d'un matroïde (binaire) qu'il est pair si tout stigme S de M peut être décomposé, impair dans le cas contraire.

Si on désigne par KI et KII les matroïdes graphiques engendrés par les configurations de KURATOWSKI, on a les exemples suivants de matroïdes pair et impair :

(32) Proposition 10.1. : Tout matroïde du type $M^*(2)$ est pair. Tout matroïde des types $M(2)$, KI et KII sont impairs.

On peut montrer (la démonstration peut se décomposer en sept lemmes) :

(32) Théorème 10.2. : Tout matroïde binaire impair contient un mineur du type $M(2)$, KI ou KII .

On dit que les stigmes Z et Z' de $M.(E-S)$ sont croisés par rapport à S ssi ils déterminent des partitions respectives $\{U,V\}$ et $\{U',V'\}$ de S de sorte que $U \cap U'$, $V \cap U'$, $U \cap V'$, $V \cap V'$ ne sont pas vides. Deux ponts P, P' de S dans M sont croisés s'ils contiennent deux stigmes croisés par rapport à S . Un pont P de S est n -pont si $|\{\pi_i(M,P,S)\}| = n$.

(32) Théorème 10.3. : Soient P_1 et P_2 deux ponts de S dans le matroïde binaire M qui se rencontrent. Ou bien P_1 et P_2 sont croisés, ou bien ce sont deux 3-ponts.

Sautant de pile en pile, passant de ponts en ponts, on peut visiter le matroïde et en connaître la structure intime. Donnons ces deux résultats qui se rapportent aux matroïdes 2-orientables.

(32) Théorème 10.4. : Supposons que le matroïde binaire M ne contienne pas de mineur $M(2)$. Soient S_1, S_2, S_3 des stigmes de $M.(E-S)$ reposant sur les ponts distincts P_1, P_2, P_3 de S dans M . $S_i, i \in \{1,2,3\}$, détermine les arches $\{X_i, Y_i\}$. Alors, si X_3 rencontre à la fois $X_1 \cap X_2$ et $Y_1 \cap Y_2$, il contient un des ensembles $X_1 \cap Y_2, X_2 \cap Y_1$.

(32) Théorème 10.5. : Supposons que M n'ait pas de mineur $M^*(2)$. Soit P un pont de S dans M , W une pile de $\{\pi_i(M,P,S)\}$. Alors il existe un stigme Z de $M.(E-S)$ reposant sur P qui détermine les arches $\{W, S-W\}$ de S .

11. CARACTERISATION DES MATROIDES GRAPHIQUES

Tout comme la caractérisation des matroïdes 2-orientables, la caractérisation des matroïdes graphiques s'obtiendra par une méthode algébrique et géométrique. Cette caractérisation a été reprise par GHOUILA-HOURI (13), qui, par une présentation plus algébrique certains des concepts du paragraphe précédent définis par TUTTE arrive au résultat plus rapidement, utilisant un biais différent. Mais TUTTE, par la distinction qu'il introduit en matroïde binaire pair et impair,

finit par avoir des résultats plus précis. C'est donc sa filière que nous allons encore suivre.

On associe à un graphe G une T -représentation T dans un corps ordonné. On désigne par T^* le groupe des cobords qui représente l'orthogonal du matroïde graphique $M(G)$ engendré par les polygones de G . On peut appeler $M(T^*)$, le matroïde engendré par T^* et orthogonal à $M(G)$, le matroïde bord de G , $B(G)$. On dira qu'il est co-graphique.

Etant donné le graphe G , dont l'ensemble des sommets est $\Sigma(G)$, l'ensemble des arêtes $E(G)$, $T \subseteq E(G)$ définit un sous-graphe fermé de G , noté $G:T$: ce graphe a pour ensemble de sommets $\Sigma(G)$, pour ensemble d'arêtes T . Supprimons dans $G:T$ les sommets, dits isolés, qui ne sont adjacents à aucune arête de $G:T$; on obtient un graphe $G.T$, la réduction de G à T . Une composante H de $G:T$ est un graphe du type $G.V$, $V \subseteq T$, qui n'a pas de séparateurs autres que V et \emptyset .

(32) Proposition 11.1. : $S^* \subseteq E(G)$ est un stigme de $M(T^*)$ ssi il existe des composantes H et K de $G : (E(G) - S^*)$ de sorte que chaque arête de S^* ait une extrémité dans $\Sigma(H)$, l'autre extrémité dans $\Sigma(K)$.

On appellera graphes extrémités de S^* , les graphes H et K ainsi déterminés par S^* (on dit parfois que S^* est une coupe de G).

Le résultat suivant est utilisé pour reconnaître si un matroïde est graphique ou non (35).

(32) Théorème 11.1. : Si $M(T^*) \cdot (E(G) - S^*)$ est un matroïde connexe cographique, soit H , soit K est composé d'un sommet unique.

On peut établir ensuite ce résultat :

(32) Théorème 11.2. : Tout matroïde cographique est pair.

Voici une première caractérisation des matroïdes co-graphiques (ou graphiques).

(32) Théorème 11.3. : Si M^* , 2-orientable, ne contient pas de mineur du type KI ou KII, M^* est un matroïde co-graphique.

Le raisonnement est semblable à celui qui a été utilisé pour établir la caractérisation des matroïdes 2-orientables. Pour montrer que la condition est suffisante on procède par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un matroïde 2-orientable M^* qui ne contient pas de mineur de type KI ou KII et qui n'est pas graphique. On le choisit de manière que sa dimension soit minimale. On le choisit naturellement connexe. On peut montrer qu'il existe un stigme S^* de M^* qui possède deux ponts distincts. D'après le théorème 11.2, M^* est pair et par conséquent S^* est décomposable. On range donc les ponts de S^* dans deux classes disjointes ; X et Y sont les ensembles sous-jacents. D'après le choix de M^* , il existe des graphes H et K tels que :

$$B(H) = M^* \times (S^* \cup Y)$$

$$B(K) = M^* \times (S^* \cup X) .$$

On montre alors qu'on peut, à partir de H et K, reconstruire le graphe G dont le groupe des cobords est $T^* : M^* = M(T^*) = B(G)$.

On peut améliorer la condition suffisante de la manière suivante :

(34) Théorème 11.4. : Soit S^* un stigme quelconque d'un matroïde binaire M^* ; supposons qu'il ait les propriétés suivantes :

(i) S^* est décomposable

(ii) si P est un pont de S^* , $M^* \times (P \cup S^*)$ est quelconque.

Alors M^* est cographique.

Ce résultat permet d'énoncer une réciproque du Théorème 11.2. :

(34) Théorème 11.5. : Si M^* est un matroïde 2-orientable pair, M^* est cographique.

12. CONSTRUCTION DES MATROIDES

12.1. A partir d'un ensemble E donné

On prend un graphe dont l'ensemble E des arêtes est de cardinal $|E| = n$. Ce graphe engendre un matroïde graphique. Une matrice à E lignes (ou colonnes) engendrent des matroides matriciels (les vecteurs 0 sont exclus). Les géométries dont l'ensemble des points est de cardinal $|E|$ engendrent des matroides géométriques. On pourra construire ces derniers à l'aide de treillis géométriques T et d'une application convenable $h : E \rightarrow \{1\}$ où $\{1\}$ désigne les ensembles des éléments de rang 1 de T. La famille des sous-ensembles à $|E| - 1$ éléments de E est la famille des stigmes du matroïde cod ln défini sur E. Si P est une partition de E en sous-ensembles E_i , les sous-ensembles $E - E_i$ sont les stigmes d'un matroïde défini sur E.

12.2. A partir d'un matroïde donné, par une méthode ensembliste

Contraction et réduction d'un matroïde définissent de nouveaux matroides.

$M'(E', \mathcal{J}')$ est obtenu par 1-subdivision partielle de $M(E, \mathcal{J})$ ssi

- (i) $E \subset E'$
- (ii) si $S \in \mathcal{J}$, $S' \in \mathcal{J}'$ soit $S = S'$, soit il existe $e \in E' - E$ tel que $S' = S \cup e$.

(5) Proposition 12.1. : Soient $M(E, \mathcal{J})$ un matroïde, S un stigme de \mathcal{J} , D un sous-ensemble de S. Soit r le cardinal maximal d'une famille de stigmes S_1, S_2, \dots, S_r de M tels que :

- (i) $\emptyset \neq \bigcap S_i = D_r \subset D$
- (ii) $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$, $\forall b \in (S_i - S_j) \cup (S_j - S_i)$ il existe un stigme $S(b) \subset S_i \cup S_j$ pour lequel $S(b) \cap D_r = \emptyset$.

Soit $E \subset E_1$. Posons $E' = E \cup e$ où $e \in E_1 - E$

$$S'_i = S_i \quad \text{si } i \notin \{r\}$$

$$S'_i = S_i \cup e \quad \text{si } i \in \{r\}$$

Alors $M'(E', \mathcal{J}')$ est un matroïde défini sur E' , où $\mathcal{J}' = \{S'\}$.

On peut également construire des matroïdes par adjonction simple d'un élément. On part de $M(E, \mathcal{J})$. On pose $E' = E \cup e$ où $e' \in E$, puis $e \in E$ étant fixé, on considère les sous-ensembles de E'

- (i) $S' = \{e, e'\}$
- (ii) $S \in \mathcal{J}$ si $e \notin S$
- (iii) $S'' = S \cup e' - e$ si $S \in \mathcal{J}$ et $e \in S$.

On vérifie trivialement que

- (5) Proposition 12.2. : La famille \mathcal{J}' de sous-ensembles de E' que l'on vient de considérer est la famille des stigmes d'un matroïde $M'(E', \mathcal{J}')$.

On rappelle que le théorème 3.9. est également un théorème de construction de matroïde (dite par fusion de stigmes). Joint à la proposition précédente il permet de démontrer un résultat dû à H. CRAPO, obtenu comme sous-produit d'un théorème de construction des treillis géométriques :

- (8) (5) Théorème 12.3. : Soit $M(E, \mathcal{J})$ un matroïde défini sur l'ensemble E . On pose $e' \cup E = E'$ où $e' \notin E$. Soit L une sous-classe linéaire de M . Il existe un matroïde $M'(E', \mathcal{J}')$ défini sur l'ensemble E' , et qui admet comme famille \mathcal{J}' de stigmes :

- (i) les stigmes de M contenus dans L
- (ii) les sous-ensembles de la forme $S \cup e'$ où S est un stigme de M qui n'appartient pas à L
- (iii) les sous-ensembles de E qui forment des droites de M ne s'appuyant sur aucun stigme de L .

12.3. A partir d'un matroïde donné, par une méthode fonctionnelle

NASH-WILLIAMS a montré qu'étant donnés un matroïde $M(E, \mathcal{J})$, un ensemble E' et une fonction quelconque $h : E \rightarrow E'$, il est possible de construire un matroïde sur E' .

(22) Théorème 12.4. : Soient la fonction $h : E \rightarrow E'$ et le matroïde $M(E, \mathcal{F})$.
Il existe un matroïde $M(E', \mathcal{F}')$ tel que :

$$r'(E') = \min_{X \subset E} (r(h^{-1}(A)) + |E-A|)$$

où r et r' désignent les fonctions rang respectives de $M(E, \mathcal{F})$ et $M(E', \mathcal{F}')$.

On pose $\mathcal{F}^k = \{F^k = \bigcup_{i=1}^k F_i ; F_i \in \mathcal{F}\}$. On déduit du théorème précédent celui-ci.

(22) Théorème 12.5. : Si $M(E, \mathcal{F})$ est un matroïde, $M(E, \mathcal{F}^k)$ est aussi un matroïde. Soit r_k sa fonction rang. $r_k(E) = \min_{X \subset E} (kr(A) + |E-A|)$.

Ce Théorème est à rapprocher du théorème 14.3.

On peut construire sur E' un matroïde de façon différente que ne le propose NASH-WILLIAMS.

(5) Théorème 12.6. : Etant donnés un matroïde $M(E, r)$ et la fonction $h : E \rightarrow E'$, il existe un matroïde $M'(E', h(r))$. Si h est surjective $h^{-1}(S') \subseteq S$ (la contre image d'un stigme de M' est contenue dans un stigme de M).

12.4. Construction de sommes de matroides

On considère les deux matroides $M_1(E_1, r_1)$ et $M_2(E_2, r_2)$. Si $\forall X \subseteq E_1 \cap E_2$ $r_1(X) = r_2(X)$, on construit un matroïde $M(E_1 \cup E_2, r)$ par recollement : $\forall X \subseteq E_1$ $r(X) = r_1(X)$,

$$\forall X \subseteq E_2 \quad r(X) = r_2(X),$$

$$\forall X, E_1 \cap E_2 \subseteq X \subseteq E_1 \cup E_2 \quad r(X) = r(X \cap E_1) + r(X \cap E_2) - r(E_1 \cap E_2).$$

Si les matroides M_1 et M_2 sont quelconques, on construit $M'_1(E', h(r_1))$ et $M'_2(E', h(r_2))$ à l'aide du théorème précédent ($E' = E_1 \cup E_2$) ; puis le matroïde somme $M(E', r)$ où $r = \max(h(r_1), h(r_2))$ (5). On peut alors construire une catégorie abélienne de matroides : l'objet zéro de la catégorie est \emptyset , les morphismes sont des collinéations.

13. MATROIDES DE COUPLAGES, TRANSVERSALES - THEOREME DE HALL-RADO

Nous abordons maintenant des problèmes de nature plus combinatoire. Les matroïdes de couplages ont été introduits par EDMONDS et FULKERSON (11) . Ces derniers auteurs ont développé la notion de transversale, ainsi que L. MIRSKY et H. PERFECT (21) , H. PERFECT et J. PYM (23) .

Leurs résultats s'étendent au cas non fini des systèmes d'échange. On obtient alors la formulation de R. BRUALDI et E. SCRIMGER (4) .

On appellera relation C' entre deux ensembles E et H un sous-ensemble de $E \times H : C' \subseteq E \times H$. Un couplage $C(E, H, C')$ entre E et H par rapport à une relation C' est une relation $C \subseteq C'$, telle que :

$$(e, h) \in C, (e', h') \in C' \Rightarrow e = e', h = h' .$$

Soient $F = \{e ; (e, h) \in C\}$ et $F' = \{h ; (e, h) \in C\}$; on dira que, par rapport à (a, h) , le couplage C rencontre E en F et H en F' . On posera $CF = F'$.

(11) (4) Théorème 13.1. :

1) Soit $C(E, H, C')$ un couplage entre E et H par rapport à C' . Posons $\mathcal{F}_C = \{F ; h \in H\}$: \mathcal{F}_C est la famille des ensembles d'un matroïde de couplage $M(E, \mathcal{F}_C)$.

2) Désignons par \mathcal{G}_C l'ensemble des $G \subseteq H$ pour lesquels existe un couplage par rapport à C' qui, d'une part rencontre E selon une base de \mathcal{F}_C , d'autre part rencontre H selon un sous-ensemble de $H - G$. \mathcal{G}_C est la famille des ensembles d'un matroïde transverse $M(E, \mathcal{G}_C)$.

(21) (4) Théorème 13.2. :

1) Soient $C(E, H, C')$ un couplage et $M(E, \mathcal{F}_C)$ le matroïde associé. Supposons que les couplages $C_1(E, H, C')$ et $C_2(E, H, C')$ rencontrent E selon les bases respectives B_1 et B_2 de \mathcal{F}_C . Il existe un couplage $C_{12}(E, H, C')$ qui rencontre E selon B_1 et H selon $C_2 B_2$.

2) Soient B_3 et B_4 deux bases de \mathcal{G}_C telles qu'il existe des couplages C_3 et C_4 qui rencontrent E respectivement selon $E - B_3$ et $E - B_4$. Il existe un couplage C_{34} qui rencontre E selon $E - B_3$ et H selon $C_4 (E - B_4)$.

On déduit de ce résultat que les bases d'un système d'échange ont même cardinal.

Posons $H = \{H_i ; i \in I, \cup_i H_i = E\}$. Soit C une relation entre E et I définie par :

$$(e_i, i) \in C \iff e_i \in S_i.$$

L'ensemble \mathcal{F}_C défini selon le théorème 13.1. est alors la famille des transversales partielles de H . Si $I \in \mathcal{F}_C$ on dira que cette famille admet une transversale et qu'elle est complète. L'ensemble \mathcal{G}_C se compose des transversales partielles continues dans une transversale minimale d'une sous-famille complète $H' \subseteq H$.

Le théorème 13.2. première partie montre que si B est une transversale d'une sous-famille complète de H , B est une transversale de toute sous-famille complète de H . La seconde partie de ce théorème nous indique qu'une transversale minimale (maximale) d'une sous-famille maximale complète de H est transversale minimale (maximale) de toute sous-famille maximale complète de H .

Citons enfin ce théorème d'autant plus intéressant qu'il contient le théorème de SCHRÖDER-BERNSTEIN sur l'équivalence de deux ensembles.

(23) (4) Théorème 13.3. : Soient E et H deux ensembles, C_1 et C_2 deux couplages qui rencontrent E respectivement en E_1 et E_2 , H respectivement en H_1 et H_2 . On considère la relation C entre E et H définie par $C_1 \cup C_2 = C$. Il existe alors un couplage $C_3 \subseteq C$ tel que C_3 rencontre E selon $E_1' \supseteq E_1$ et H selon $H_2' \supseteq H_2$. Si C_4 est un couplage quelconque, $C_4 \subseteq C$, qui rencontre E en $E_1'' \supseteq E_1$, et H en $H_2'' \supseteq H_2$, alors $E_1' \subseteq E_1''$, $H_2' \subseteq H_2''$.

Voici enfin un théorème aux applications combinatoires nombreuses, dû à RADO, généralisant un résultat de P. HALL :

(24) Théorème 13.4. : Soient $M(E, \mathcal{F})$ un matroïde, et $H = \{H_i ; i \in I\}$ une famille de sous-ensembles de E . Cette famille admet une transversale qui est un ensemblin de \mathcal{F} , ssi :

$$\forall J \subseteq I \quad r(\{H_i ; i \in J\}) \geq |J|.$$

On trouvera des applications intéressantes de ce théorème dans les articles cités en début de ce paragraphe et dans J. WELSH (36) .

14. PARTITION DANS LES MATROIDES - LE THEOREME DE MENGER

Certains des résultats établis dans ce paragraphe ont d'abord été énoncés par HORN et RADO dans le cas des espaces vectoriels. Mais il semble qu'indépendamment de ces travaux antérieurs, ces résultats ont été établis simultanément, d'une part par J. EDMONDS (10) pour le cas fini, d'autre part par P. ROBERT (26) dans le cas des ϕ -espaces. Certains d'entre eux peuvent s'établir de façon élégante à partir des théorèmes 12.4 et 12.5.

(26) (10) Théorème 14.1. : On peut réaliser une partition de l'ensemble E sous-jacent à un matroïde $M(E,r)$ en k ensembles, ssi :

$$\forall X \subseteq E \Rightarrow |X| \leq k r(X) .$$

On dira que X ferme Y ssi $\phi(X) \supseteq Y$.

(10) Théorème 14.2. : Soient U et V deux sous-ensembles de E . Il existe une partition de V en k sous-ensembles qui se ferment l'un l'autre et qui ferment W , ssi il n'existe pas de contraction $M' = M \times E'$ du matroïde M de sorte que $V \cap E'$ soit partagé en k ensembles de M' formant une partition de E' , l'un d'eux au moins ne fermant pas $W \cap E'$.

On se donne k matroides $M_i(E, r_i)$ définis sur le même ensemble E . Est-il possible de faire une partition de E en k sous-ensembles F_1, F_2, \dots, F_k où F_i est un ensemble de M_i ?

(26) (10) Théorème 14.3. : On peut trouver une telle partition ssi

$$\forall X \subseteq E \Rightarrow |X| \leq \sum_{i \in k} r_i(X)$$

On trouvera dans (10) diverses applications de ces théorèmes. Leur démonstration sont en général constructives ; c'est le cas également pour les théorèmes du chapitre précédent.

On considère maintenant un graphe G ; $\Sigma(G)$ est l'ensemble des sommets de G . On considère deux sommets x et y qui ne sont pas reliés par une arête.

$T(x,y) \subseteq E(G) - \{x,y\}$ sépare x et y ssi tout chemin reliant x à y passe par un sommet de $T(x,y)$. On pose $k(G;x,y) = \min_{(x,y)} |T(x,y)|$.

Un chemin du graphe est simple s'il ne passe pas deux fois par le même sommet, ni deux fois par la même arête. Deux chemins reliant x et y sont disjoints intérieurement s'ils n'ont pas d'arête commune. On désigne par $h(G;x,y)$ le nombre maximal de chemin intérieurement disjoints reliant x à y .

Une forme du théorème de MENGER exprime que

$$h(G;x,y) = k(G;x,y)$$

Ce théorème a été généralisé par TUTTE.

Soient X et Y deux sous-ensembles disjoints de l'ensemble E sous-jacent au matroïde $M(E,r)$. On pose, $\{U,V\}$ désignant une partition de E ,

- (i) $\ell(M;U,V) = r(M) - r(M \times U) - r(M \times V) + 1$
- (ii) $k(M;X,Y) = \min \ell(M;U,V) (\{U,V\} ; X \subseteq U, Y \subseteq V)$
- (iii) $h(M;X,Y) = \max \ell(M';X,Y) (M' ; M' = (M \times U) \cdot (X \cup Y))$

(33) Théorème 14.4. : $k(M;X,Y) = h(M;X,Y)$.

La démonstration procède par récurrence.

15. APPLICATION AUX PROBLEMES D'OPTIMISATION

Ce sont des problèmes d'extrémalité, problèmes constants de la pratique. On peut donner une formulation algébrique au problème de MENGER pour les graphes. Cette formulation permet de supposer le matroïde 2-orientable. On peut alors donner une forme algébrique équivalente au théorème précédent (31), (14), (20), (12).

On peut présenter le problème de la programmation mathématique de la façon suivante :

Soient x, c', c des vecteurs de format $n \times 1$, B une matrice de format $m \times n$; les composantes de x, c', c, B appartiennent à un même corps qui est soit le corps des réels, soit celui des rationnels, soit un corps de galois; dans ce dernier cas, on en suppose les éléments ordonnés par l'ordre induit par \mathbb{Z} , anneau des entiers. Le problème est d'optimiser la fonction numérique de la composante x_1 de x , $v(x_1)$, sous les conditions $Bx = 0, c' \leq x \leq c$. Nous supposons que nous sommes dans le cas linéaire : $v(x_1) = x_1$.

On peut montrer, sans condition géométrique apparente, la nécessité des conditions de KHUN et TUCKER à l'optimum (5).

Les résultats suivants sont dus à C. MINTY :

- (20) Théorème 15.1. : On considère le matroïde 2-orientable $M(E, r)$, et une T-représentation de M sur l'anneau d'intégrité totalement ordonné A . On se donne $|E| = n$ intervalles I_i ($i \in]n$) de A . Il existe un flot $x \in T^*$ vérifiant :

$$x_i \in I_i$$

ssi pour tout cycle primitif h de T

$$0 \in \sum h(e_i) I_i \quad (h(e_i) = -1, 0 \text{ ou } +1)$$

où : $(-1) I_i = \{a \in I_i ; a < 0\}$; $(+1) I_i = \{a \in I_i ; a > 0\}$, $(0) I_i = 0$,
 $\sum h(e_i) I_i = \{\sum a \mid a \in h(e_i) I_i, i \in]n\}$.

GHOUILLA-HOURI (13) a étudié les propriétés de ces familles d'intervalles ce qui lui a permis d'énoncer son théorème plus général que le précédent.

Le résultat qui suit est une conséquence des énoncés de 8.2.

- (20) Théorème 15.2. : Soit $M(T)$ un matroïde 2-orientable, dont T est une T-représentation de l'ensemble E sous-jacent à $M(T)$ et de la forme :

$$E = e_1 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

(i) ou bien il existe un cycle h de T tel que

$$\begin{aligned}
 & e_1 \in \text{Supp}(h) \\
 & \text{Supp}(h) \subseteq e_1 \cup E_1 \cup E_2 \\
 & e_1, e_j \in (\text{Supp}(h) - e_1) \cap E_1 \Rightarrow h(e_1)h(e_j) > 0
 \end{aligned}$$

(ii) ou bien il existe un cycle h^* de T^* tel que

$$\begin{aligned}
 & e_1 \in \text{Supp}(h^*) \\
 & \text{Supp}(h^*) \subseteq e_1 \cup E_1 \cup E_3 \\
 & e_1, e_j \in (\text{Supp}(h^*) - e_1) \cap E_1 \Rightarrow h^*(e_1)h^*(e_j) > 0 .
 \end{aligned}$$

Les deux résultats qui précèdent ont permis à P. CAMION (6) de formuler le problème orthogonal en programmation linéaire, et de montrer l'égalité à l'optimum du primal et de l'orthogonal sans considération géométrique apparente. En outre il a pu donner une présentation nouvelle de l'algorithme dual-simplicial.

On trouvera d'autres exemples d'applications des notions rencontrées en 8.2. dans (12) . (18) en contient une application intéressante en théorie des jeux.

(Ajouté en cours d'épreuves) :

Pendant la mise en page du manuscrit, d'autres articles sur les matroïdes ont été publiés (cf. (38) à (41)) : (39) , en particulier, contient une belle généralisation du théorème de MENGER.

De notre côté, nous avons introduit pour un matroïde les notions de s-excision et de s-éclatement. On appelle s-expansion et s-complexification les opérations inverses : en voici les définitions intuitives :

(i) Soit un n -simplexe ; on en considère les $(n-1)$ -simplexes ou faces ; ce sont les éléments de l'ensemble $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ d'un matroïde $\text{cod } l_n$: $n-1$ faces adjacentes à un sommet forment un stigme S . Subdivisons partiellement une face e_1 en deux faces : $e_1 \rightsquigarrow e_1', e_1''$. Le matroïde M_{e_1} obtenu en remplaçant dans chaque stigme de $\text{cod } l_n$ $\{e_1\}$ par $\{e_1', e_1''\}$ est une 1-expansion de $\text{cod } l_n$.

(ii) $\text{cod } l_n$ est défini sur $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Soit $\text{cod } l_{n+1}$ défini sur $E \cup e_{n+1}$ ($e_{n+1} \notin E$) . L'opération $\text{cod } l_n \rightsquigarrow \text{cod } l_{n+1}$ est une 1-complexification de $\text{cod } l_n$.

Théorème 12.7 : On peut construire tout matroïde par un processus de 1-expansion et de 1-complexification.

Peut-on alors déduire de ce théorème, comme pour renforcer le camp des partisans de la géométrie algébrique, qu'existe une bijection entre la classe des complexes et celle des matroïdes ?

BIBLIOGRAPHIE

- (1) G. BIRKHOFF : Abstract linear dependence and abstract lattices.
Am. J. Math 57 (1935) 800-804.
- (2) N. BOURBAKI : Algèbre - chapitre 1 - Hermann Paris (1966)
- (3) N. BOURBAKI : Algèbre - Chapitre 5 - Hermann Paris (1966)
- (4) R. BRUALDI et E. SCRIMGER : Exchange systems, Matchings, and Transversals.
J. of Comb. Theory 5 (1968) (244-257).
- (5) C. BRUTER : L'axiomatique linéaire et ses développements : Introduction
à la théorie des matroïdes.
Dunod, à paraître.
- (6) P. CAMION : Modules unimodulaires.
J. of Comb. Theory 4 (1968) 301-362.
- (7) G. CHOQUET : L'analyse et BOURBAKI.
Enseign. Math 8 (1962) 109-135.
- (8) H. CRAPO : Single element extension of matroids.
J. Res. Natl. Bur. Standards. 69B (1965) 57-65.
- (9) J. DIEUDONNE : Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.
Hermann Paris (1964).
- (10) J. EDMONDS : Minimum partition of a matroid into independent sets.
J. Res. Natl. Bur. Standards. 69B (1965) 67-72.
- (11) J. EDMONDS et D. FULKERSON : Transversal and matroid partition.
J. Res. Natl. Bur. Standards 69B (1965) 147-153.
- (12) D. FULKERSON : Networks, frames, blocking systems.
Rand Report RM 5365 Mai 1967.
- (13) A. GHOUILLA-HOURI : Flots et tensions dans un graphe.
Ann. Ec. Norm. Sup. 81 (1964) 267-339.
- (14) T. GALLAI : Über regulären Kettengruppen.
Act. Math. Ac. Sc. Hungar. 10 (1959) 227-240.
- (15) R. GRAVER : Lectures on the theory of matroids (1967).
- (16) A. INGLETON : A Note on independence functions and rank.
T. Lond. Math. Soc. 31 (1959) 49-56.
- (17) T. LAZARSON : The representation problem for independence function.
T. Lond Math. Soc. 33 (1958) 21-25.
- (18) A. LEHMAN : A solution of the Shannon switching problem.
J. Soc. Ind. Appl. Math. 12 (1964) 687-725.

- (19) S. MAC LANE : Some interpretation of abstract linear independence in terms of projective geometry.
Am. J. Math. 58 (1936) 236-240.
- (20) G. MINTY : On the axiomatic foundations of the theories of direct linear graphs, electrical network and network programming.
J. Math. Mech. 15 (1966) 485-520.
- (21) L. MIRSKY et H. PERFECT : Applications of the notion of independence to problem of combinatorial analysis.
J. of Comb. Theory 2 (1967) 327-357.
- (22) NASH-WILLIAMS : An Application of matroids to graph theory.
Journée Inter. d'Etude sur la Théorie des Graphes
Rome (1966) 263-265.
- (23) H. PERFECT et J. PYM : An extension of Banach's mapping theorem, with applications to problems concerning common representatives.
Proc. Cambridge - Phil. Soc. 62 (1966) 187-192.
- (24) R. RADO : A theorem on independence relations.
Quart. J. of Math. (Oxford) 13 (1942) 83-89.
- (25) R. RADO : A note on independence function.
Proc. Lond. Math. Soc. 7 (1957) 300-320.
- (26) P. ROBERT : Sur l'axiomatique des systèmes générateurs, des rangs...
Mémoire 14 , Bull. Soc. Math. France (1968)
- (27) P. SAMUEL et O. ZARISKI : Commutative Algebra.
Van Nostrand (1958).
- (28) S. SMALE : Differentiable Dynamical Systems.
Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967) 747-817.
- (29) R. THOM : Stabilité structurelle et morphogénèse : Essai d'une théorie Générale des modèles.
Ediscience Paris et Benjamin New-York (1969).
- (30) A. TUCKER : Pivotal Algebra - Seminar Notes.
Princeton University (1964-65).
- (31) W. TUTTE : A Class of Abelian Groups.
Am. J. Math. 8 (1956) 13-28.
- (32) W. TUTTE : Lectures on Matroids.
J. Res. Natl. Bur. Standards 69B (1965) 1-47.
- (33) W. TUTTE : Menger's theorem for matroids.
J. Res. Natl. Bur. Standards 69B (1965) 49-53.
- (34) W. TUTTE : On even matroids.
J. Res. Natl. Bur. Standards 71B (1967) 213-214.

- (35) W. TUTTE : An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic.
Proc. Am. Math. Soc. 11 (1960) 905-917.
- (36) D. WELSH : Some applications of a theorem of Rado.
Mathematika 15 (1968) 199-203.
- (37) H. WHITNEY : On the abstract properties of linear independence.
Am. J. Math. (1935) 509-533.

(Ajouté en cours d'épreuves) :

- (38) H. PERFECT : Independence spaces and combinatorial problems.
Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 17-30.
- (39) J. PYM : The linking of sets in graphs.
J. London Math. Soc. 44 (1969) 542-550.
- (40) D. WELSH : A bound for the number of matroids.
J. of Comb. Theory 6 (1969), 313-316.
- (41) D. WELSH : Euler and bipartite matroids.
J. of Comb. Theory 6 (1969), 375-377.

INDEX TERMINOLOGIQUE

paragraphe

4.	Adjacents (points)	3	droite
12.	Adjonction simple	1.3	Ensemblin
10.	Alignement	7	Flot
10.	arche	1.3	fonction de fermeture
0	Axiomatique	1.3	fonction rang
1.3	Base	7	fondamentale (matrice)
3	binaire	4	Homotope
11	bord	3	Géométrie projective généralisée
4	Chemin dégénéré	11	graphes extrémités
4	- élémentaire	3	K-plan
4	- fermé	7	Matrice fondamentale normalisée
4	- fiché	7	- d'incidence aux stiges
4	- simple	0	matroïde
1.4	cobase	1.3	- axiomes
11	cographique	1.3	- base
6	collinéation	11	- bord
1.5	combivalent	11	- cographique
11	composante	3	- contraction
8	conforme	13	- couplage
2	connexe	1.3	- ensemblin
3	contraction	1.3	- fermeture
3	corang	1.5	- graphique
11	coupe	10	- impair
13	couplage	1.5	- matriciel
10	croisé	3	- mineur
7	cycle (fonctionnel)	3	- n-aire
8	- conforme	7	- 2-orientable
8	- primitif	2	- orthogonal
1.5	- topologique	10	- pair
11	décomposable	10	- planaire
4	déformation élémentaire	10	- pont
7	2-orientable	1.3	- rang
3	dimension	3	- réduction
4	- d'un chemin	7	- régulier

- 1.5 - simplicial
- 1.3 - stigme
- 7 - totalement unimodulaire
- 13 - transverse
- 3 mineur
- 3 N-aire
- 10 n-pont
- 2 Orthogonal
- 10 Pair
- 1.6 phi-espace
- 1.5 p-groupe d'ordre neutre à gauche
- 10 pile
- 1.5 pivotage
- 10 planaire
- 1.5 polygone
- 6 porteuse
- 12 Recollement
- 13 Relation
- 3 réduction
- 2 Séparateur
- 4 sous-classe linéaire
- 0 stigmier
- 12 subdivision partielle
- 7 support
- 2 systèmes d'échange
- 1.5 Tableaux combivalents
- 9 T-configuration de Fano
- 9 T-heptaèdre
- 13 transversale partielle
- 13 - complète
- 7 T-représentation
- 7 W-représentation.

(texte reçu le 1er mars 1969)

Claude P. BRUTER
33, Boulevard Dubreuil
91-ORSAY