MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LAURENCE GRUMAN

Opérateurs différentiels d'ordre infini dans des espaces de fonctions entières

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 89-97
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__89_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 89-97.

OPERATEURS DIFFERENTIELS D'ORDRE INFINI DANS DES ESPACES DE FONCTIONS ENTIERES

par Laurence GRUMAN

Si $f(Z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ est une fonction entière de plusieurs variables, et $M_f(r) = \sup_{\|Z\|=r} |f(Z)|$ (où $\|Z\|$ est la norme euclidienne), on définit l'ordre ρ de $f(Z)$ comme

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \,\ell n\, \ell n\, M_f(r)/\ell n\, r$$

et son type σ par rapport à l'ordre ρ comme

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \,\ell n\, M_f(r)/r^\rho$$

$f(Z)$ est dite de type minimal si $\sigma = 0$, de type normal si $0 < \sigma < \infty$ et de type maximal si $\sigma = +\infty$.

Un ordre précisé (de Valiron) $\rho(r)$ est une fonction telle que

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \,, \quad \lim_{r\to\infty} \rho'(r)\, r\, \ell n\, r = \lim_{r\to\infty} \rho''(r)\, r^2\, \ell n\, r = 0$$

On peut également définir le type d'une fonction d'ordre ρ par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$, et pour chaque fonction entière d'ordre ρ, il existe un ordre précisé par rapport auquel il est de type normal [7].

Si $f(Z)$ est de type normal par rapport à $\rho(r)$, on définit son indicatrice de croissance radiale [6]

$$h^*_{r,f}(Z) = \overline{\lim_{Z'\to Z}} \,[\, \overline{\lim_{r\to\infty}} \,\ell n |f(rZ')|/r^{\rho(r)}]r > 0$$

qui est une fonction plurisousharmonique positivement homogène d'ordre ρ est en particulier semi-continue supérieurement.

Les résultats que nous allons exposer sont également vrais pour le cas des ordres précisés, bien que nous ne les décrivions que dans le cadre plus restreint des ordres constants, afin de simplifier la présentation.

1. - Familles de fonctions entières.

Pour une fonction (réelle) $g(Z)$, nous définissons l'espace de Banach B_g (resp. B^*_g) comme l'espace de fonctions entières $f(Z)$ telles que

(1) $$\sup_Z |f(Z)\exp(-g(Z))| < \infty$$

(resp. $|f(Z)\exp(-g(Z))| \to 0$ quand $\|Z\| \to \infty$) muni de la norme $\|f\|_g = \sup_Z |f(Z)\exp(-g(Z))|$.

Si $\{g_n\}$ est une suite décroissante de fonctions, nous notons l'espace de Fréchet $E_g = \bigcap_n B_{g_n}$ (resp. $E^*_g = \bigcap_n B^*_{g_n}$) muni de la topologie limite projective avec son dual $E'_g = \bigcup_u B'_{g_n}$ (resp. $E^*_g = \bigcup_n B^*_{g_n}$) .

L'espace $B^*_{g_n}$ est composé des mesures μ telles que $\mu \cdot \exp g_n(Z)$ soient bornées [8].

Supposons maintenant que $p(Z)$ soit une semi-norme complexe (i.e. $p(\lambda Z) = |\lambda| p(Z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$) . Nous notons par E^ρ_p l'espace que nous obtenons en mettant $g_n(Z) = \{p(Z) + \frac{1}{n}\|Z\|\}^\rho$ et par E^0 celui que nous obtenons en mettant $g_n(Z) = \|Z\|^{1/n}$; E^ρ_p est l'espace de fonctions $f(Z)$ telle que $h^*_{r,f}(Z) \leqslant (p(Z))^\rho$ et E^0 est l'espace de fonctions entières d'ordre zéro.

2. - La transformée de Fourier-Borel.

A. MARTINEAU [8] a étudié et caractérisé les espaces $(E^\rho_p)'$ pour $p(Z)$ une norme complexe et ρ une constante, $\rho \geqslant 1$ avec l'aide de la transformée de Fourier Borel

$$F_\alpha(u) = \alpha(\exp \langle u,Z\rangle) \quad , \quad \alpha \in (E^\rho_p)'$$

qui est une fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}^N$ (dans tout $\mathbb{C}^N$ pour $\rho > 1$). Nous allons définir la transposée de Fourier-Borel même pour le cas $\rho < 1$ c'est-à-dire même quand les fonctions exponentielles ne se trouvent pas dans notre espace. Cela nous permettra de définir les opérateurs différentiels d'ordre infini à coefficients constants dans ces espaces, et, suivant les raisonnements de MARTINEAU, de démontrer l'existence de solutions. En même temps, nous améliorerons les démonstrations de MARTINEAU pour le cas $\rho \geqslant 1$.

Pour une fonction d'une variable complexe u avec développement de Taylor à l'origine $f(u) = \Sigma\, c_q\, u^q$ l'ordre et le type sont donnés par la formule [1,7].

(2) $$(\sigma\,\rho\,e)^{1/\rho} = \overline{\lim_{q\to\infty}}\,(q^{1/\rho}\,|c_q|^{1/q})$$

Pour une fonction de plusieurs variables, nous écrivons $f(Z) = \Sigma\, P_q(Z)$, somme de polynômes homogènes d'ordre q.
Si $A_q = (q/e\rho)^{q/\rho}$, nous désignons par $f_t(Z) = \sum_q A_q\, P_q(Z)$ qui est une fonction holomorphe dans l'ouvert $D = \{Z : p(Z) < 1\}$ et quand nous munissons l'espace $\mathcal{H}(D)$ des fonctions holomorphes sur D de la topologie de la convergence compacte, l'application $f \mapsto f_t$ est un isomorphisme entre E_p^ρ et $\mathcal{H}(D)$. Pour $\alpha \in (E_p^\rho)'$ nous définissons $\alpha_t \in \mathcal{H}'(D)$ par $(f_t\,,\,\alpha_t) = (f\,,\,\alpha)$ qui définit un isomorphisme entre $(E_p^\rho)'$ et $\mathcal{H}'(D)$.

Une fonctionnelle linéaire $\gamma \in \mathcal{H}'(\mathbb{C}^N)$ est portée par le convexe K si, pour chaque voisinage ouvert Ω de K, il existe une constante C_Ω telle que $|\gamma(f)| \leqslant C_\Omega \sup_\Omega |f|$.

Nous définissons la transformée de Fourier-Borel de γ comme

$$F_\gamma(u) = \gamma(\exp \langle Z,u\rangle)\ ,$$

et, si la fonction $H_K(u) = \sup_{Z\in K} \operatorname{Re} \langle u,Z\rangle$, on a (cf. [5]).

PROPOSITION 1. - γ est portée par le convexe compact K si et seulement si $|F_\gamma(u)| \leqslant C_\delta \exp(H_K(u) + \delta\|u\|)$ pour tout $\delta > 0$.

Chaque $\alpha_t \in \mathcal{H}'(D)$ est portée par un ensemble $K_n = \{Z : p(Z) + \frac{1}{n}\|Z\| \leqslant 1\}$. Alors, si $p_n'(u) = \sup_{Z\in K_n} \operatorname{Re} \langle u,Z\rangle$, qui est une famille croissante de normes complexes, on a

(3) $$|F_{\alpha_t}(u)| \leqslant C_\alpha \exp p_n'(u) \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Soit ν un multi-entier, $|\nu| = \sum_{i=1}^N \nu_i$, $Z^\nu = Z_1^{\nu_1} \dots Z_N^{\nu_N}$. Parce que le développement de Taylor à l'origine d'une fonction $f \in \mathcal{H}(D)$ converge vers f dans cet espace, on a

$$\begin{aligned}\alpha_t(\exp \langle Z,u\rangle) &= \alpha_t\Big(\sum_q \sum_{|\nu|=q} Z^\nu U^\nu/\nu!\Big)\\ &= \sum_q \sum_{|\nu|=q} \alpha_t(Z^\nu)\, U^\nu/\nu! = \sum_q P_q^{\alpha_t}(U)\end{aligned}$$

et il découle de (2) et de la proposition 1 que

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \{\tfrac{q}{e}| P_q^{\alpha_t}(U)|^{1/q}\} \leqslant p_n'(U) \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Parce que $\alpha_t(Z^\nu) = 1/A_{|\nu|}\ \alpha(Z^\nu)$ on voit que $\alpha \in (E_p^\rho)'$ (resp. E_o') si et seulement si

$$(4) \qquad \overline{\lim_{q\to\infty}} \{\tfrac{q}{e}| \frac{1}{A_q} \sum_{|\nu|=q} \alpha(Z^\nu)\ U^\nu/\nu\,! \} \leqslant p_n'(u)$$

pour n assez grand (resp. pour ρ assez petit).

Pour $\alpha \in (E_p^\rho)'$ (resp. $(E^o)'$, nous définissons sa transformée de Fourier-Borel comme la série formelle.

$$F_\alpha(U) = \alpha(\exp \langle U,Z\rangle) = \sum_q \sum_{|\nu|=q} \alpha(Z^\nu)\ U^\nu/\nu! = \sum_q P_q^\alpha(U)\ .$$

Pour $\rho > 1$, soit $\rho^* = \frac{\rho}{\rho-1}$ et $A = \frac{(\rho-1)^{\rho/\rho-1}}{\rho}$ avec $F^{\rho^*}_{Ap'} = \bigcup_n E^{\rho^*}_{Ap'_n}$. On a

THEOREME 1. - L'application $\alpha \mapsto F_\alpha(U)$ est bijective entre $(E_p^\rho)'$ (resp. $(E^o)'$) et

(i) $F^{\rho^*}_{Ap'}$ pour $\rho > 1$

(ii) l'ensemble de séries formelles Q_p^ρ, qui satisfont à (4) pour n assez grand pour $\rho < 1$.

(iii) l'ensemble de séries formelles Q^o qui satisfont à (4) pour ρ assez petit pour $(E^o)'$.

LEMME 1. - Pour $\rho < 1$, l'ensemble de séries qui satisfont à (4) est une algèbre. Pour $\rho > 1$, $F^{\rho^*}_{Ap'}$ est un module sur les éléments d'ordre minimal par rapport à ρ^*.

THEOREME 2 : Si $H(u)$, $F(u) \in Q_p^\rho$ pour $\rho < 1$ et $H(u) = F(u)\ G(u)$ où $G(u)$ est une série formelle, alors $G(u) \in Q_p^\rho$. Si $H(u)$, $F(u) \in F^{\rho^*}_{Ap'}$, $F(u)$ de type minimal par rapport à ρ^* et $H(u) = F(u)\ G(u)$ avec $G(u)$ une fonction entière, alors $G(u) \in F^{\rho^*}_{Ap'}$.

3. - Equations differentielles d'ordre infini.

Pour $\rho > 1$ et $\alpha \in (E_p^\rho)'$ telle que $F_\alpha(u)$ est de type minimal par rapport à ρ^* , et pour $\rho < 1$ et toute $\alpha \in (E_p^\rho)'$, nous définissons un opérateur $\check{\alpha}$ sur

E_p^ρ de la façon suivante : pour $\beta \in (E_p^\rho)'$, on définit l'opération de convolution

(5) $$(\alpha * \beta)\ (f) = \alpha_Z(\beta_W f(Z+W)) = \beta_W\ (\alpha_Z f(Z+W))$$

qui est bien défini, et

$$(\check{\alpha}(f)\ ,\ \beta) = (f\ ,\ \alpha * \beta)$$

est un <u>opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre infini</u>.

Cela inclut tout opérateur différentiel d'ordre fini aussi bien que les équations aux différences $\check{\alpha}(f) = \Sigma_{\lambda_n}\ f(Z-Z^{(n)})$ si λ_n converge assez rapidement. On veut se servir de

PROPOSITION 2. - Si E , F sont deux Fréchets et ν une application linéaire continue de E dans F , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) ν est surjective

(ii) ${}^t\nu : F' \to E'$ est injective et son image ${}^t\nu(F')$ est faiblement fermée dans E' .

Si ${}^t\nu$ est aussi surjective, alors ν est injective.

On a, par la transformée de Fourier-Borel, que

$$F_{\alpha*\beta}(U) = F_\alpha(U)F_\beta\ (U)$$

Ainsi, grâce aux lemme 1, théorème 2, et proposition 2, on a

THEOREME 3. - Pour tout opérateur différentiel $\check{\alpha}$ et tout $f \in E_p^\rho$ $(\rho \neq 1)$ (resp.E^0), il existe une solution de l'équation $\check{\alpha}(X) = f$ dans le même espace.

Nous signalons que l'on peut obtenir de pareils résultats pour le cas

(i) $\rho = 1$ et $g_n(Z) = p(Z) + \frac{1}{n}\ ||Z||$, $p(Z)$ une fonction convexe

(6) $$(\text{i.e. } p(Z_1 + Z_2) \leqslant p(Z_1) + p(Z_2)\ ;\ p(tZ) = t\ p(Z)\ ,\ t \geqslant 0)$$

(ii) $\rho > 1$, tout ordre $\rho(r)$ et $p(Z)$ une semi-norme quelconque

$$(g_n(Z) = (p(Z) + \frac{1}{n}\ ||Z||)^\rho)$$

(iii) $g_n(Z) = (\sigma + \frac{1}{n})\ (\ell n^+||Z||)^\rho \quad (\sigma \geqslant 0\ ,\ \rho > 1)$

4. Fonctions de type exponentiel.

Soit maintenant $g(Z)$ une fonction qui satisfait à

$$g(Z_1+Z_2) \leqslant g(Z_1) + g(Z_2)$$

Alors, on calcule facilement que pour α , $\beta \in (B_g)'$ (resp. $B_g^{*\prime}$) $\alpha * \beta$ donnée par (5) est bien définie, et si l'on munit $(B_g)'$ (resp. $B_g^{*\prime}$) de sa norme duale

$$\|\alpha\| = \sup_{\|f\|_g = 1} |\alpha(f)|$$

on a $\|\alpha * \beta\| \leqslant \|\alpha\| \, \|\beta\|$, c'est-à-dire B_g' (resp. $B_g^{*\prime}$) est une algèbre de Banach avec identité (donnée par $\delta(0)$, la mesure de Dirac).
Soit $\overline{B_g'}$ l'adhérence de B_g' dans l'espace de mesures μ telles que μ . exp $g(Z)$ soient bornées.

LEMME 2. - L'ensemble d'homomorphismes non triviaux (l'espace d'idéaux maximaux) sur l'espace $\overline{B_g'}$ est précisément l'ensemble d'exponentielles dans B_g .

Si $g(Z)$ est une fonction convexe (i.e. qui satisfait à (6)), on définit l'ensemble $K = \{U : \mathrm{Re} \langle U,Z\rangle \leqslant g(Z) \, \forall Z \in \mathbb{C}^N\}$ qui est un compact convexe. Pour $\alpha \in \overline{B_g'}$ (resp. B_g^*) , on définit sa transformée de Fourier-Borel

$$F_\alpha(U) = \alpha(\exp \langle U,Z\rangle)$$

qui est continue sur K est holomorphe à l'intérieur.

THEOREME 4. - Si $g(Z)$ est convexe et $\alpha \in \overline{B_g'}$ (resp. B_g^*) telle que $F_\alpha(U) \neq 0$ sur K , alors pour tout $f \in B_g$ (resp. B_g^*) , il existe une fonction unique $\tilde{f} \in B_g$ (resp. B_g^*) telle que $\check{\alpha}(\tilde{f}) = f$.

Démonstration : L'idéal I_α engendré par α est tout l'espace parce qu'il n'y a pas d'homomorphisme qui s'annule sur α . Alors, on applique la proposition 2.

Q.E.D.

COROLLAIRE. - Si $g(Z)$ est convexe et si $\alpha \in \bigcup \overline{B_{g_n}'}$ (resp. $\bigcup B_g^{*\prime}$) est telle que $F_\alpha(U) \neq 0$ sur $K = \bigcap K_n$ alors pour $f \in E_g$ (resp. E_g^*) , il existe une solution unique $\tilde{f}$ dans E_g (resp. E_g^*) de l'équation $\check{\alpha}(X) = f$.

5. <u>Fonctions de type exponentiel dans</u> $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Soit maintenant $g(Z)$ de la forme $g(Z) = \Sigma\, \tau_i |y_i|$, $\tau_i \geqslant 0$ et B_g^p (resp. B_g^{*p}) le sous-espace de B_g (resp. B_g^*) qui satisfait à

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(X)|^p \, dX = \|f\|_p^p < +\infty \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

qui est un espace de Banach quand on le munit de la norme

$$\|f\|_{g,p} = \|f\|_g + \|f\|_p$$

Le dual est composé de fonctionnelles $\alpha + \gamma$, $\alpha \in B_g$, $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

PROPOSITION 3. - (cf. [1]) Si $f(Z)$ est de type exponentiel τ (pour $n = 1$) et si pour un nombre p , $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dX < \infty$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(X+iY)|^p \, dX < e^{p\tau|Y|} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dX$$

dont découle d'une façon évidente

LEMME 3. - $\|f(X+iY)\|_p \leqslant e^{g(Z)} \|f\|_p (X = (X_1,\dots,X_n) \; ; \; Y = (Y_1,\dots,Y_n))$

Si, pour $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on applique γ à $f(Z+W)$, en général le résultat n'est pas dans B_g et ainsi $\bar{B}_g^{p'}$ (resp. $B_g^{*p'}$) n'est pas une algèbre. Mais on a

LEMME 4. - Pour $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\gamma_W f(Z+W) \in B_g$ pour $f \in B_g^p$ (resp. B_g^{p*}) .

On peut alors appliquer α à $\gamma_W f(Z+\omega)$ pour $\alpha \in \bar{B}_g'$ (resp. $B_g^{*\prime}$) et ainsi $(B_g^{p*})'$ et $\bar{B}_g^{p'}$ sont des <u>modules</u> à gauche. Raisonnant de la même manière que dans le théorème 4 ,

THEOREME 5. - Si $\alpha \in \bar{B}_g'$ (resp. $B_g^{*\prime}$) est telle que $F_\alpha(U) \neq 0$ sur K , pour toute $f \in B_g^p$ (resp. B_g^{*p}) , il existe une solution unique $\tilde{f} \in B_g^p$ (resp. B_g^{*p}) telle que $\check{\alpha}\;(\tilde{f}) = f$.

COROLLAIRE. - Si $f \in \cap B_{g_n}^p$ (resp. $\cap B_{g_n}^{*p}$) et $\alpha \in \cup \bar{B}_{g_n}'$ (resp. $\cup B_{g_n}^{*\prime}$) est telle que $F_\alpha(u) \neq 0$ sur $K = \cap K_{g_n}$, alors il existe une solution unique $\tilde{f} \in \cap B_{g_n}^p$ (resp. $\cap B_{g_n}^{*p}$) telle que $\check{\alpha}(\tilde{f}) = f$.

6. Fonctions de croissance moins qu'exponentielle.

Supposons maintenant que $g(Z)$ soit telle que $B_g \subset B_{\frac{1}{n}\|Z\|}$ pour tout n. Nous dirons en ce cas que $g(Z)$ est de croissance moins que linéaire. Le seul homomorphisme possible est la constante 1.

THEOREME 6. - Si g est de croissance moins que linéaire et si $\alpha \in B_g$ (resp. B_g^*) est telle que $\alpha(1) \neq 0$, alors il existe une solution unique $\tilde{f}$ dans l'espace B_g (resp. B_g^*) telle que $\check{\alpha}(\tilde{f}) = f$.

Exemples : (i) $g(Z) = \sigma[\ell n^+ p(Z)]^\rho$ ρ constant

(ii) $g(Z) = (p(Z))^{\rho(r)}$

pour une semi-norme $p(Z)$ et un ordre précisé $\rho(r)$.

LEMME 5. - Si $p_o(Z)$ est semi-continue supérieurement, non négative et réelle homogène d'ordre un et si

$$\mathfrak{F} = \{p(Z) : p(Z) \text{ est une norme }, p(Z) \geqslant p_o(Z)\}$$

alors $p_o(Z) = \inf\limits_{p(Z)\in\mathfrak{F}} p(Z)$

Soit $(E_\infty^{\rho(r)})' = \bigcap\limits_{A>0} (E_{A\|Z\|}^{\rho(r)})'$. Alors pour tout $\alpha \in (E_\infty^{\rho(r)})'$ telle que $\alpha(1) \neq 0$ et toute $p(Z)$ norme réelle, par le théorème 6, si $f \in B_{p(Z)}$, il existe une solution unique de l'équation $\check{\alpha}(X) = f$. Par l'unicité de la solution et par le lemme 5, on conclut

THEOREME 7. - Il existe une solution unique $\tilde{f}$ de l'équation $\check{\alpha}(X) = f$ telle que $h_{f,r}^{*+}(Z) = h_{\tilde{f},r}^{*+}(Z)$ où $h^{*+}(Z) = \sup(0,h^*(Z))$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOAS (R.P.). - Entire Functions. Academic Press, N.Y. (1954).

[2] GRUMAN (Laurence). - The growth of entire solutions of differential equations of finite and infinite order. Ann. Inst. Fourier (Grenoble)XXII, n°1 (1972)

[3] GRUMAN (Laurence). - Infinite order differential equations in Banach spaces of Entire functions (à paraître : Jour. London Math. Soc.)

[4] GRUMAN (Laurence). - Some precisions on the Fourier-Borel transform and infinite order differential equations (à paraître Glasgow Math. Jour.).

[5] HORMANDER (L.). - An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Princeton, N.J., Van Nostrand (1966).

[6] LELONG (Pierre). - Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables) Les Presses de l'Université de Montréal (1968).

[7] LEVIN (B. Ja.). - Distribution of Zero of Entire Functions. Transl. Math. Mono. Vol. 5, A.M.S. Providence, R.I. (1964).

[8] MARTINEAU (A.). - Equations différentielles d'ordre infini. Bull. Soc. Math. France, 95 (1967), pp. 109-154.

(Texte reçu en Septembre 1972)

Tulane University
New-Orléans
Louisiana 70118
(U.S.A.)