MÉMOIRES DE LA S. M. F.

BERNARD KLARES

Problème de la stabilité structurelle des champs de vecteurs holomorphes sur certaines surfaces algébriques

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 73-78
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__73_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 73-78.

PROBLEME DE LA STABILITE STRUCTURELLE DES CHAMPS DE VECTEURS HOLOMORPHES SUR CERTAINES SURFACES ALGEBRIQUES

par Bernard KLARES

I - Problème de la stabilité structurelle

Soient M une variété analytique complexe, compacte de dimension n et $\mathcal{V}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes sur M.

$\mathcal{V}(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie, que l'on supposera muni d'une norme qui en fait un espace de Banach.

1. DEFINITIONS:

- $V \in \mathcal{V}(M)$ et $W \in \mathcal{V}(M)$ sont dits analytiquement équivalents, s'il existe un automorphisme analytique de M, qui transforme V en W.
- $V \in \mathcal{V}(M)$ et $V' \in \mathcal{V}(M)$ sont dits topologiquement équivalents, s'il existe un homéomorphisme de M sur M, qui envoie les trajectoires de V sur celles de V'.
- $V \in \mathcal{V}(M)$ est dit structurellement stable, s'il existe un ouvert $U_M(V)$ contenant V et tel que tout V' de $U_M(V)$ soit topologiquement équivalent à V.

2. Problème de la stabilité structurelle

L'ensemble des champs de vecteurs holomorphes structurellement stables sur M est un ouvert de $\mathcal{V}(M)$. Est-il partout dense ou non dans $\mathcal{V}(M)$?
On va résoudre ce problème dans le cas où M est obtenue à partir de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par éclatements successifs.

II - Recherche des champs de vecteurs holomorphes sur les surfaces considérées.

On va d'abord étudier le problème de l'éclatement.

1. Champs de vecteurs holomorphes et éclatement

On considère : M une variété analytique complexe, de dimension supérieure ou égale à deux, K une sous-variété de codimension supérieure ou égale à deux, M' la variété obtenue par éclatement de Hopf le long de K, $\mathcal{V}_K(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes sur M, s'annulant sur K et $\mathcal{V}(M')$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs holomorphes sur M' . On a :

PROPOSITION 1. <u>$\mathcal{V}_K(M)$ et $\mathcal{V}(M')$ sont deux espaces vectoriels isomorphes.</u>

<u>Démonstration</u> : On va faire la démonstration dans le cas où $\dim M = 2$ et K est un point m . Soient (x,y) des coordonnées locales au voisinage de m , telles que m corresponde à $x = 0$ et $y = 0$. Soit $V \in \mathcal{V}(M)$ tel que $V = P(x,y)\ \partial/\partial x + Q(x,y)\ \partial/\partial y$ au voisinage de m .

Si $\pi : M' \to M$ est la projection associée à l'éclatement, et si $m' \in \pi^{-1}(m)$ il existe des coordonnées locales au voisinage de m' : (u,v) telles que

$u = x \quad v = y/x$ (ou $u' = x/y \quad v' = y$ suivant la position de m' sur $\pi^{-1}(m)$)

Alors V définit un champ de vecteurs $\tilde{V}$ qui s'écrit au voisinage de m' :

$\tilde{V} = \tilde{P}(u,v)\ \partial/\partial u + \tilde{Q}(u,v)\ \partial/\partial v$ avec :

$\tilde{P}(u,v) = P(u,uv) \quad \tilde{Q}(u,v) = -(v/u)P(u,uv) + (1/u)Q(u,uv)$

Pour que $\tilde{V}$ soit holomorphe il faut et il suffit que $P(0,0) = 0$ et $Q(0,0) = 0$ donc que V s'annule en m .

Réciproquement à tout champ de vecteurs holomorphe sur M' on peut associer (par la projection π) un champ de vecteurs holomorphe sur M' qui s'annule en m .

<u>Conséquences</u>

– Si on éclate $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ en quatre points formant un repère, sur la surface obtenue il n'y a qu'un seul champ de vecteurs holomorphe : le champ nul. En effet il n'existe aucun champ de vecteurs holomorphe sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, non nul, qui admette les quatre points considérés comme points singuliers $\mathcal{V}_K(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}))$ est alors réduit à 0 donc $\mathcal{V}(M')$ aussi, plus généralement :

– Si M , sous-variété de $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$, contient $N + 2$ points formant un repère, et si l'on éclate M en $N + 2$ points, sur la variété obtenue, il n'y a qu'un seul champ de vecteurs holomorphe : le champ nul.

En effet d'après la proposition 1 il suffit de chercher les champs de vecteurs holomorphes sur M qui s'annulent en ces $N + 2$ points. Comme tout champ de vecteurs holomorphe sur M qui possède un point singulier, au moins, se prolonge en un champ de vecteurs de $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$, ([2]) et qu'il n'existe aucun champ de vecteurs holomorphe de $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ non nul qui possède ces $N + 2$ points comme points singuliers, le résultat s'en déduit immédiatement.

– Cette proposition montre, en outre, qu'il y a de "nombreuses" surfaces compactes ne possédant que le champ nul, comme champ de vecteurs holomorphe plus précisément : Carrel, Howard et Kosniowski ont déterminé dans un récent article, toutes les surfaces compactes admettant un champ de vecteurs holomorphe non trivial et possédant des singularités [1].

- On va maintenant appliquer ces résultats aux surfaces considérées. On peut résumer cette étude par

PROPOSITION 2. Il existe un ouvert $\theta(M)$ partout dense dans $\mathcal{V}(M)$, une carte U et des coordonnées locales (x,y) dans U , tels que tout champ de vecteurs V de $\theta(M)$ soit analytiquement équivalent à un champ de vecteurs W de $\theta(M)$ qui s'écrit dans U :

$$W = P(x,y)\ \partial/\partial x + Q(x,y)\ \partial/\partial y \quad \text{avec}$$

$$\boxed{\alpha} \begin{cases} P(x,y) = ax \\ Q(x,y) = by \end{cases} \qquad \boxed{\beta} \begin{cases} P(x,y) = ax^2 \\ Q(x,y) = by^2 \end{cases} \qquad \boxed{\gamma} \begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$$

Les différents cas obtenus dépendent bien sûr de la position des points où l'on fait successivement, les éclatements.

III - Stabilité structurelle

Tous les champs considérés dans cette partie appartiendront à $\theta(M)$ (proposition 2).

1. Cas de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = M_0$

On est dans le cas de $\boxed{\alpha}$ de la proposition 2) avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $a \neq b$. Tout champ V de $\theta(M_0)$ est donc analytiquement équivalent à un champ W qui a pour composantes dans U : $\begin{cases} P(x,y) = ax \\ Q(x,y) = by \end{cases}$

Etudions les trajectoires de W . W possède quatre points singuliers : $m(x = 0\ ,\ y = 0)$, $m_1(x_1 = 0\ ,\ y_1 = 0)$ avec $x_1 = 1/x$, $y_1 = y$, $m_2(x_2 = 0\ ,\ y_2 = 0)$ avec $x_2 = x$, $y_2 = 1/y$ et $m_3(x_3 = 0, y_3 = 0)$ avec $x_3 = 1/x$, $y_3 = 1/y$.

Il y a quatre trajectoires homéomorphes à des cylindres : $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ \text{ou } x_3 = 0 \text{ ou } y_3 = 0 \end{cases}$

et dans le cas où $\operatorname{Im}(-a/b) \neq 0$ toutes les autres trajectoires sont homéomorphes à des plans admettant le paramétrage suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{\operatorname{Imd}} \log \dfrac{r.s.^{\operatorname{Red}}}{|k|} \\ \theta = \operatorname{Arg}k - \dfrac{1}{\operatorname{Imd}} \log \dfrac{r^{\operatorname{Red}} \cdot s^{|d|^2}}{|k|^{\operatorname{Red}}} \end{cases}$$

où : $d = -a/b$, $x = re^{i\theta}$ $y = se^{i\varphi}$

Ces trajectoires homéomorphes à des plans "s'enroulent" autour des trajectoires homéomorphes à des cylindres puisque lorsque r ou s tendent vers zéro, φ et θ tendent vers l'infini.

Soit $\theta'(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de $\theta(M)$ analytiquement équivalents aux champs W qui vérifient $\mathrm{Im}(a/b) \neq 0$. Nous allons montrer que tout champ de vecteurs de $\theta'(M)$ est structurellement stable et par conséquent le problème sera résolu puisque $\theta'(M)$ est un ouvert partout dense de $\mathscr{V}(M)$.

Soit $V \in \theta'(M)$ et $V_M(V)$ l'ensemble des champs de vecteurs de $\theta'(M)$ analytiquement équivalents aux champs W' qui vérifient $\mathrm{Im}\, d\, .\, \mathrm{Im}\, d' > 0$ $(d' = - a'/b')$. Montrons que V et V' de $V_M(V)$ sont topologiquement équivalents. V est analytiquement équivalent à W et V' à W' , il suffit donc de montrer que W et W' sont topologiquement équivalents. Pour cela on va construire un homéomorphisme h qui envoie les trajectoires de W sur celles de W' :

- Le paramètrage (1) montre que toute trajectoire de W (et de W') coupe le tore $\mathcal{T}$: $r = 1$ et $s = 1$ en un point et un seul. Soit $h/\mathcal{T} = \mathrm{Id}$ ce qui donne la correspondance entre les trajectoires de W et celles de W' . Il reste à montrer qu'il existe une correspondance entre les points des trajectoires de W et celles de W' , qui définit une application se prolongeant en un homéomorphisme de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans lui-même.

Associons au point (r,s) de la trajectoire de W , le point (r',s') de la trajectoire de W' (déterminé par la définition de h sur $\mathcal{T}$) tel que :

$$r' = r^{\frac{\mathrm{Im}d'}{\mathrm{Im}d}} \qquad s' = s^{\frac{|d|^2}{|d'|^2} \cdot \frac{\mathrm{Im}d'}{\mathrm{Im}d}}$$

On a alors $\theta' = f_1(\theta,r)$ $\quad \varphi' = g_1(\varphi,s)$ $\quad$ (avec $h(x,y) = (x',y')$ et des notations évidentes).

Ceci montre que l'application ainsi construite se prolonge sur les trajectoires particulières (lorsque r tend vers zéro ou s tend vers zéro) d'une façon continue, de même qu'aux points singuliers qui sont laissés invariants $(\mathrm{Im}d\, .\, \mathrm{Im}d' > 0)$.

h ainsi contruit est un homéomorphisme qui envoie les trajectoires de W sur celles de W' et le problème est résolu.

2. Cas où M est obtenue à partir de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par éclatement en un point

On est encore dans le cas $\boxed{\alpha}$ $\left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \text{et } a \neq b \end{array}\right.$ de la proposition 2. On procède de manière analogue à la précédente :

On considère $\theta'(M_1)$ l'ensemble des champs de vecteurs de $\theta(M_1)$ analytiquement équivalents aux champs W qui vérifient : $\mathrm{Im}(-a/b) \neq 0$ et on montre que tout champ V de $\theta'(M_1)$ est structurellement stable.

Si $V \in \theta'(M_1)$ on appelle $U_{M_1}(V)$ l'ouvert contenant V défini comme suit : $U_{M_1}(V)$ est l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes de $\theta'(M_1)$ analytiquement équivalents aux champs W' tels que : $\mathrm{Im}(a/b)\,\mathrm{Im}(a'/b') > 0$. Montrons que V et V' de $U_{M_1}(V)$ sont topologiquement équivalents. Pour cela il suffit de le montrer pour W et W' .

Remarquons que le point m où l'on éclate correspond à $x = 0$ et $y = 0$ et que x et y sont des coordonnées locales "habituelles" de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (les changements de cartes sont les mêmes que ceux définis précédemment). On procède de la même façon que dans le cas (1). Toute trajectoire non homéomorphe à un cylindre coupe $\mathcal{T}$ en un point et un seul et on pose $h/\mathcal{T} = \mathrm{Id}$.

Il faut montrer que l'on peut choisir la correspondance des points sur les trajectoires de W et W' , de façon que l'application ainsi définie se prolonge en un homéomorphisme de M_1 . Pour cela on va modifier la correspondance définie précédemment au voisinage de m , plus précisément dans $E = \{p(x,y) \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}$:

Soit $E_1 = \{(x,y) \mid r \leqslant s \leqslant 1\}$ $\qquad x = re^{i\theta} \quad y = se^{i\varphi}$

$E_2 = \{(x,y) \mid s \leqslant r \leqslant 1\}$

Dans E_1 au point (r,s) de la trajectoire de W on associe le point (r',s') de la trajectoire de W' tel que :

$$\begin{cases} r' = r^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \\ s' = s^{\frac{|d|^2\,\mathrm{Imd}'}{|d'|^2\,\mathrm{Imd}}}\; r^{\frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{|d|^2\,\mathrm{Imd}'}{|d'|^2\,\mathrm{Imd}}} \end{cases} \qquad \alpha = \frac{1+2\,\mathrm{Red} + |d|^2}{\mathrm{Imd}}$$

et dans E_2 :

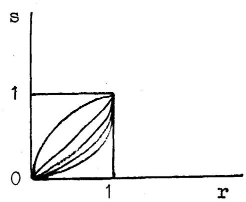
$$\begin{cases} s' = s^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \\ r' = r^{\frac{\mathrm{Imd}'}{\mathrm{Imd}}}\; s^{\frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{\mathrm{Imd}'}{\mathrm{Imd}}} \end{cases}$$

On vérifie que l'application ainsi définie se prolonge bien en un homéomorphisme de M_1 dans elle même, et le problème est résolu.

3. <u>Cas général</u>

- Lorsque l'on reste dans le cas des variétés correspondant à

$\boxed{\alpha}$ $\begin{cases} a \neq 0 \quad b \neq 0 \\ \text{et} \quad a \neq b \end{cases}$ de la proposition 2, on procède comme précédemment, c'est-à-dire qu'on modifie la correspondance des points des trajectoires de W et de W' de telle façon que l'application ainsi construite se prolonge en un homéomorphisme de la variété considérée sur elle-même. Pour ce faire, on est amené à considérer comme précédemment l'ensemble E , et à définir la correspondance dans des parties de E situées entre des courbes du type $r = s^{p/q}$ $p/q \in \mathbb{Q}^+$,



$E = \{(x,y) \mid r \leqslant 1 \text{ et } s \leqslant 1\}$

Le nombre de courbes considérées correspondant au nombre d'éclatements successifs opérés. Les conclusions précédentes restent vraies.

- Il reste à traiter les cas $\boxed{\alpha}$ $a = 0$ ou $b = 0$ $\boxed{\alpha}$ $a = b$, $\boxed{\beta}$ et $\boxed{\gamma}$ mais dans ces cas le problème est plus simple car il s'agit de cas dégénérés et l'on peut même construire un automorphisme de M qui envoie les trajectoires de V sur celles de V' . D'où :

4. THEOREME - Sur une surface algébrique complexe obtenue par éclatements successifs de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, l'ensemble des champs de vecteurs structurellement stables est un ouvert partout dense de l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes.

5. Remarques

On fait une démonstration analogue à partir de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ce qui généralise les résultats obtenus par J. Guckenheimer dans un article à paraître.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARRELL (J.), HOWARD (A.) and KOSNIOWSKI (C.) . - Holomorphic Vector Fields on complex Surfaces (à paraître).

[2] MATSUSHIMA (Y.) . - Holomorphic vector fields on compact Kähler manifolds, A.M.S., 1971.

(Texte reçu le 8/VI/1972)

Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile de Saulcy
57 - METZ