

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-BAPTISTE POLY

## **Sur l'homologie des courants à support dans un ensemble semi-analytique**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 38 (1974), p. 35-43

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1974\\_\\_38\\_\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__35_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'HOMOLOGIE DES COURANTS  
 A SUPPORT DANS UN ENSEMBLE SEMI-ANALYTIQUE

par Jean-Baptiste POLY

1. INTRODUCTION.

Soient  $X$  et  $Y$ ,  $Y \subset X$ , des ensembles semi-analytiques fermés d'un espace analytique réel (Tous les espaces et variétés considérés ici sont supposés réunion dénombrable de compacts). On désigne par  $\mathfrak{D}$  le faisceau différentiel des (germes de) courants impairs de  $X$ , et on considère la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \mathfrak{D}(Y^\infty) \rightarrow \mathfrak{D}(X) \rightarrow \mathfrak{D}(X/Y^\infty) \rightarrow 0$$

où  $\mathfrak{D}(X)$  est le complexe des courants de  $X$ ,  $\mathfrak{D}(Y^\infty)$  le sous-complexe des courants de  $X$  à support dans  $Y$ , et où le quotient  $\mathfrak{D}(X/Y^\infty)$  est aussi le sous-complexe de  $\mathfrak{D}(X-Y)$  constitué des courants de  $X-Y$  prolongeables en courants de  $X$ . Cette situation est étudiée dans le paragraphe 4 de [2], où Herrera et Lieberman montrent (en utilisant la théorie de l'intégration sur les chaînes semi-analytiques) le

1.1. THEOREME. Soient  $Y \subset X$  des ensembles semi-analytiques fermés d'un espace analytique réel. Dans le diagramme commutatif suivant (rattachant la suite exacte d'homologie des courants et la suite exacte d'homologie de Borel-Moore)

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} \rightarrow H_q \mathfrak{D}(Y^\infty) & \rightarrow & H_q \mathfrak{D}(X) & \rightarrow & H_q \mathfrak{D}(X/Y^\infty) \rightarrow \\ & & \downarrow \tau_Y & & \downarrow \tau_{X-Y} \\ \rightarrow H_q(Y, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(X, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(X-Y, \mathbb{C}) \rightarrow \end{array}$$

les flèches verticales sont des surjections (ayant des sections canoniques) ([2], théorème 4.3).

Lorsque  $X$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$ , les flèches  $\tau_X$  sont les isomorphismes classiques de De Rham. En fait, utilisant la résolution des singularités de Hironaka et des résultats de Łojasiewicz, on montre ici le théorème suivant :

1.2. THEOREME. Soient  $X$  une variété analytique réelle et  $Y$  un ensemble semi-analytique fermé de  $X$ . Alors, toutes les flèches verticales du diagramme (1) sont des isomorphismes.

1.3. Interprétation cohomologique.  $X$  étant une variété analytique réelle de dimension  $n$ , est en particulier une  $n$ -variété homologique : désignant par  $\theta = \mathcal{H}_n(X, \mathbb{C})$  le faisceau de  $\mathbb{C}$ -orientation de  $X$  (ou faisceau des complexes tordus), la suite exacte d'homologie de Borel-Moore est isomorphe à la suite exacte de cohomologie locale (à coefficients dans  $\theta$ ) pour  $p+q = n$

$$\begin{array}{ccccc} \rightarrow H_Y^p(X, \theta) & \rightarrow & H^p(X, \theta) & \rightarrow & H^p(X-Y, \theta) & \rightarrow \\ & & \downarrow \mathcal{S} & & \downarrow \mathcal{S} & \\ \rightarrow H_q(Y, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(X, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(X-Y, \mathbb{C}) & \rightarrow \end{array}$$

(cf Bredon [1], chap. V, §9). On en déduit notamment que dans les conditions du théorème 1.2, les flèches naturelles  $H^p \mathcal{S} \cdot (Y^\infty) \rightarrow H_Y^p(X, \theta)$  sont des isomorphismes. On montrerait aussi qu'il en est de même des flèches  $H^p \mathcal{S} \cdot (Y^\infty) \rightarrow H_Y^p(X, \mathbb{C})$  où  $\mathcal{S}$  est le faisceau des courants pairs de  $X$ .

## 2. REMARQUES.

2.1. Les flèches  $\mathcal{C}_X$  étant les isomorphismes de De Rham pour la variété  $X$ , il résulte du lemme des 5 que pour prouver le théorème 1.2, il suffit de montrer que toutes les flèches  $\mathcal{C}_Y$  (ou bien toutes les flèches  $\mathcal{C}_{X-Y}$ ) sont des isomorphismes.

2.2. Si  $X$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$ , le faisceau différentiel  $\mathcal{E}$  des formes différentielles  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $X$  est une résolution fine du faisceau constant  $\mathbb{C}$ . Soit  $'\Delta$  le faisceau flasque dual (au sens de Borel-Moore) du faisceau  $\mathcal{C}$ -mou  $\mathcal{E}$ , défini pour tout ouvert  $V$  de  $X$  par

$$\Gamma(V, '\Delta) = \text{Hom}(\Gamma_{\mathcal{C}}(V, \mathcal{E}), \mathbb{C}).$$

Il résulte de Bredon [1] (chap. V, §5) que pour tout fermé  $Y$  de  $X$ , la suite exacte d'homologie de Borel-Moore est isomorphe à la suite exacte d'homologie des "courants algébriques"

$$\begin{array}{ccccc} \rightarrow H_q '\Delta \cdot (Y^\infty) & \rightarrow & H_q '\Delta \cdot (X) & \rightarrow & H_q '\Delta \cdot (X-Y) & \rightarrow \\ & & \downarrow \mathcal{S} & & \downarrow \mathcal{S} & \\ \rightarrow H_q(Y, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(X, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(X-Y, \mathbb{C}) & \rightarrow \end{array}$$

les flèches  $\mathcal{C}$  du diagramme (1) se définissant grâce à l'inclusion  $\mathcal{S} \cdot \rightarrow '\Delta$ .

2.3. Ce qui précède montre que le théorème 1.2 est de nature locale. Il suffit en effet de montrer que toutes les flèches  $H_q \mathcal{D}(Y^\infty) \rightarrow H_q \Delta(Y^\infty)$  sont des isomorphismes. Soient  $\Delta_{Y^\infty}$  et  $\mathcal{D}_{Y^\infty}$  les faisceaux de sections de  $\Delta$  et  $\mathcal{D}$  à support dans  $Y$ . Ces faisceaux étant acycliques (car  $\Delta_{Y^\infty}$  est flasque,  $\mathcal{D}_{Y^\infty}$  est fin), pour que les flèches  $H_q \Gamma(X, \mathcal{D}_{Y^\infty}) \rightarrow H_q \Gamma(X, \Delta_{Y^\infty})$  soient des isomorphismes, il suffit que  $\mathcal{H}_q \mathcal{D}_{Y^\infty} \rightarrow \mathcal{H}_q \Delta_{Y^\infty}$  soient des isomorphismes. On peut donc dans les démonstrations qui suivent remplacer la variété  $X$  par un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. LE CAS D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE.

3.1. PROPOSITION. Soient  $X$  une variété  $\mathcal{C}^\infty$  et  $Y$  une sous-variété  $\mathcal{C}^\infty$  fermée de  $X$ . Alors, toutes les flèches du diagramme (1) sont des isomorphismes.

Ce résultat est démontré par exemple dans Herrera-Lieberman [2], corollaire 4.5. Désignant par  $\mathcal{D}(Y)$  le complexe des courants de la variété  $Y$ , on sait d'après De Rham que  $H_q \mathcal{D}(Y) \rightarrow H_q(Y, \mathbb{C})$  sont des isomorphismes, et il suffit de montrer que l'inclusion des variétés  $Y \rightarrow X$  induit des isomorphismes  $H_q \mathcal{D}(Y) \rightarrow H_q \mathcal{D}(Y^\infty)$ , ce qui se fait localement en utilisant une formule d'homotopie des courants associée à une rétraction de  $X$  sur  $Y$ .

#### 3.2. La suite exacte de Mayer-Vietoris.

Soient  $Y_1$  et  $Y_2$  des fermés d'un ouvert  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , de réunion  $Y$  et intersection  $y$ . Pour que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{D}(Y^\infty) \rightarrow \mathcal{D}(Y_1^\infty) \oplus \mathcal{D}(Y_2^\infty) \rightarrow \mathcal{D}(Y^\infty) \rightarrow 0$$

soit exacte, il faut et suffit d'après Łojasiewicz [5] (cf aussi Malgrange [6], chap. VII, proposition 1.4) que les fermés  $Y_1$  et  $Y_2$  soient régulièrement situés. Il en est ainsi si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des sous-variétés  $\mathcal{C}^\infty$  fermées de  $X$  se coupant transversalement, et plus généralement d'après Łojasiewicz [6] si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des ensembles semi-analytiques fermés de  $X$ .

Quand  $Y_1$  et  $Y_2$  sont régulièrement situés, on a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_q \mathcal{D}(Y^\infty) & \rightarrow & H_q \mathcal{D}(Y_1^\infty) \oplus H_q \mathcal{D}(Y_2^\infty) & \rightarrow & H_q \mathcal{D}(Y^\infty) & \rightarrow & \\ \rightarrow H_q \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \rightarrow H_q(Y, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(Y_1, \mathbb{C}) \oplus H_q(Y_2, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_q(Y, \mathbb{C}) & \rightarrow & \end{array}$$

où la ligne du bas est la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au couple  $(Y_1, Y_2)$ .

3.3. LEMME. Le théorème 1.2 est valide si Y est une hypersurface analytique à croisements normaux dans une variété analytique réelle X .

On peut supposer que X est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (de coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) dans lequel  $Y = \bigcup_{1 \leq i \leq k} Y_i$ , où les  $Y_i$  sont les hyperplans de coordonnées  $x_i = 0$ . En fait, on démontre le résultat pour des Y du type  $Y = \bigcup_{1 \leq i \leq k} Z_i$  où les  $Z_i$  sont intersections finies d'hyperplans de coordonnées, et cela par récurrence sur k, en utilisant 3.1 et 3.2.

3.4. PROPOSITION. Soient X une variété analytique réelle et Y un sous-ensemble analytique fermé de X . Alors, toutes les flèches du diagramme (1) sont des isomorphismes.

Le résultat est évident au voisinage d'un point x de X en lequel  $\dim_x Y = \dim X$ , Y contenant alors la composante connexe de x dans X. Si  $\dim_x Y < \dim X$ , il existe d'après Hironaka [3] un voisinage ouvert de x (qu'on désigne encore par X), une variété analytique réelle  $\tilde{X}$  (de même dimension que X) et un morphisme analytique  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  ayant les propriétés suivantes :

- $\pi$  est propre et surjectif
- $\tilde{Y} = \pi^{-1}Y$  est une hypersurface à croisements normaux
- $\pi$  induit un isomorphisme  $\tilde{X} - \tilde{Y} \rightarrow X - Y$

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(\mathcal{D}(\tilde{X}/\tilde{Y}^\infty)) & \xrightarrow{\mathcal{C}_{\tilde{X}-\tilde{Y}}} & H_q(\tilde{X}-\tilde{Y}, \mathbb{C}) \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\
 H_q(\mathcal{D}(X/Y^\infty)) & \xrightarrow{\mathcal{C}_{X-Y}} & H_q(X-Y, \mathbb{C})
 \end{array}$$

où les flèches  $\mathcal{C}_{\tilde{X}-\tilde{Y}}$  sont des isomorphismes d'après le lemme 3.3, et où  $\beta$  est un isomorphisme. Pour montrer que les flèches  $\mathcal{C}_{X-Y}$  sont des isomorphismes, il suffit de montrer que  $\alpha$  est un isomorphisme. En fait, on montre ci-dessous (proposition 4) que l'image directe  $\pi_* : \mathcal{D}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{D}(X)$  est surjective, et par suite induit un isomorphisme sur les espaces de courants prolongeables  $\mathcal{D}(\tilde{X}/\tilde{Y}^\infty) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(X/Y^\infty)$ . La proposition 3.4 est ainsi démontrée, compte-tenu des remarques 2.

4. PROPOSITION. Soient  $\tilde{X}$  et X des variétés réelles analytiques de même dimension n,  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  un morphisme analytique propre et surjectif. Alors, l'image directe  $\pi_* : \mathcal{D}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{D}(X)$  est une application surjective.

4.1. Soit  $\tilde{A}$  l'ensemble des points critiques de  $\pi$ . D'après le théorème de Sard,  $\pi(\tilde{A})$  est négligeable dans  $X$ . Posant  $U = X - \pi(\tilde{A})$  et  $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ , alors  $U$  est dense dans  $X$  et  $\pi|_{\tilde{U}}$  est un isomorphisme local de  $\tilde{U}$  sur  $U$ . Pour des raisons techniques, on voudrait aussi que  $\tilde{X} - \tilde{A}$  soit dense dans  $\tilde{X}$ . A priori,  $\tilde{A}$  est un ensemble analytique de  $\tilde{X}$ , défini localement par l'annulation du jacobien de  $\pi$ . Soit  $\tilde{B}$  l'ensemble des points de  $\tilde{X}$  où  $\tilde{A}$  est de dimension  $n$ ;  $\tilde{B}$  est une réunion de composantes connexes de  $\tilde{X}$ . On pose  $\tilde{X}' = \tilde{X} - \tilde{B}$  et  $\pi' = \pi|_{\tilde{X}'} : \tilde{X}' \rightarrow X$ .

$\pi'$  est un morphisme analytique propre, surjectif (l'image de  $\pi'$  est d'une part fermée dans  $X$  car  $\pi'$  est propre, et d'autre part dense dans  $X$  car elle contient  $U$ ) dont l'ensemble des points critiques est un vrai sous-ensemble analytique de  $\tilde{X}'$ . Enfin, si  $\pi'_*$  est surjective, il en est de même de  $\pi_*$ . On suppose donc désormais que l'ensemble des points critiques de  $\pi$  est un vrai sous-ensemble analytique de  $\tilde{X}$ .

4.2. On désigne par  $\mathcal{E}(X)$  l'espace des courants de  $X$  à support compact, dual de l'espace de Fréchet  $\mathcal{L}(X)$  des formes différentielles  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $X$ . Pour démontrer la proposition 4, il suffit de montrer que si  $V$  est un ouvert de coordonnées dans  $X$  et  $\tilde{V} = \pi^{-1}V$ , alors  $\pi_* : \mathcal{E}(\tilde{V}) \rightarrow \mathcal{E}(V)$  est une application surjective. En effet, il existe un recouvrement ouvert localement fini de  $X$  par des ouverts de coordonnées  $V_i \subset X$ , et on peut trouver une partition  $\mathcal{C}^\infty$  de l'unité sur  $X$  par des fonctions  $\eta_i \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $V_i$ . Pour tout courant  $T \in \mathcal{E}(X)$ , on a  $\eta_i T \in \mathcal{E}(V_i)$ . S'il est prouvé que  $\eta_i T = \pi_* \tilde{T}_i$  avec  $\tilde{T}_i \in \mathcal{E}(\tilde{V}_i)$ , alors on a

$$T = \sum \eta_i T = \sum \pi_* \tilde{T}_i = \pi_* \sum \tilde{T}_i$$

en notant qu'on peut calculer  $\sum \tilde{T}_i$  car  $\tilde{V}_i$  est un recouvrement localement fini de  $\tilde{X}$ .

On peut donc se ramener au cas où  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (de coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) et il suffit alors de montrer que  $\pi_* : \mathcal{E}_n(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{E}_n(X)$  est une application surjective. En effet, tout courant  $T$  de dimension  $q$  s'écrit  $T = \sum T_I dx_I$  où les courants  $T_I$  sont de dimension  $n$ . S'il est prouvé que  $T_I = \pi_* \tilde{T}_I$ , alors on a

$$T = \sum \pi_* (\tilde{T}_I) dx_I = \sum \pi_* (\tilde{T}_I \wedge \pi^* dx_I).$$

Par dualité, il suffit donc de montrer que  $\pi^* : \mathcal{E}^n(X) \rightarrow \mathcal{E}^n(\tilde{X})$  est un monomorphisme de Fréchet, c'est-à-dire une injection à image fermée.

4.3. Le cas des fonctions continues.

Soit  $C(X)$  l'espace de Fréchet des fonctions continues sur  $X$ . Alors  $\pi^* : C(X) \rightarrow C(\tilde{X})$  est un monomorphisme.

En effet, pour toute  $f \in C(X)$  et tout compact  $K$  de  $X$ , on a

$$\sup_K |f| = \sup_{\pi^{-1}K} |\pi^* f|$$

$\pi$  étant propre et surjectif.

4.4. Le cas des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soit  $E(X)$  l'espace de Fréchet des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $X$ . Alors,  $\pi^* : E(X) \rightarrow E(\tilde{X})$  est un monomorphisme.

La démonstration utilise les résultats suivants :

(I) THEOREME. Soient  $W$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $s \neq 0$  une fonction analytique réelle dans  $W$ . Alors, la multiplication par  $s$  est un monomorphisme  $s : E(W) \rightarrow E(W)$ . (Łojasiewicz [5], cf aussi Malgrange [7], p. 72).

(II) LEMME. Soient  $\pi : W \rightarrow V$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  (où  $V$  et  $W$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ) et  $J$  le jacobien de  $\pi$ . Pour tout opérateur différentiel  $P$  (à coefficients  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $V$  d'ordre  $k \geq 1$ , il existe un opérateur différentiel  $Q$  (à coefficients  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $W$  d'ordre  $\leq k$ , tel que pour toute  $f \in E(V)$

$$J^{2k-1} \pi^*(Pf) = Q(\pi^*f).$$

(Désignant par  $x_i$  et  $y_j$  les coordonnées dans  $V$  et  $W$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (\pi^* f) = \sum_i \pi^* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (x_i)$$

et en résolvant ce système

$$J \pi^* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \right) = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial y_j} (\pi^* f)$$

ce qui prouve le lemme pour  $k = 1$ . On achève la démonstration par récurrence sur  $k$ . Cf Kantor [4]).

Démonstration de 4.4. L'application  $\pi^* : E(X) \rightarrow E(\tilde{X})$  est injective car  $\pi$  est surjective, et il reste à montrer que, si  $f_k$  est une suite de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $X$  telle que  $\pi^* f_k$  converge dans  $E(\tilde{X})$ , alors pour tout opérateur différentiel  $P$  sur  $X$ , la suite  $Pf_k$  converge dans  $C(X)$ . Soit  $W_i$  un recouvrement

dénombrable de  $\tilde{X}$  par des ouverts connexes de coordonnées. D'après le lemme (II), il existe sur  $W_i$  un opérateur différentiel  $Q_i$  et une fonction analytique réelle  $s_i \neq 0$  ( $s_i$  est en fait une puissance du jacobien  $J_i$  de  $\pi/W_i$  et, d'après 4.1, ses zéros forment un vrai sous-ensemble analytique de  $W_i$ ), tels que

$$s_i \pi^*(Pf) = Q_i(\pi^*f).$$

On a alors la suite des assertions :

- $\pi^*f_k$  converge dans  $E(X)$
- $\Rightarrow \pi^*f_k$  converge dans  $E(W_i)$  et il en est de même de  $Q_i(\pi^*f_k) = s_i \pi^*(Pf_k)$
- $\Rightarrow \pi^*(Pf_k)$  converge dans  $E(W_i)$  d'après le théorème (I)
- $\Rightarrow \pi^*(Pf_k)$  converge dans  $E(\tilde{X})$  car l'injection  $E(\tilde{X}) \rightarrow \pi E(W_i)$  est un monomorphisme.
- $\Rightarrow Pf_k$  converge dans  $C(X)$  d'après 4.3.

ce qui achève la démonstration.

#### 4.5. Le cas des n-formes.

L'application  $\pi^* : \mathcal{E}^n(X) \rightarrow \mathcal{E}^n(\tilde{X})$  est un monomorphisme.

En effet, l'application  $\pi^*$  est une injection, car  $\pi$  est un isomorphisme local au-dessus d'un ouvert dense  $U$  de  $X$  (cf 4.1). Il reste à montrer que l'image de  $\pi^*$  est fermée. Soit  $\omega_k = f_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  une suite de n-formes différentielles  $\mathcal{E}^\infty$  sur  $X$  telles que  $\pi^*\omega_k$  converge dans  $\mathcal{E}^n(\tilde{X})$ . Soit comme dans 4.4,  $W_i$  un recouvrement dénombrable de  $\tilde{X}$  par des ouverts connexes de coordonnées. Dans chaque  $W_i$ , on a  $\pi^*\omega_k = J_i \pi^*f_k dy_1^i \wedge \dots \wedge dy_n^i$ . Raisonnant comme dans 4.4, puisque  $J_i \pi^*f_k$  converge dans  $E(W_i)$ , on en déduit que  $\pi^*f_k$  converge dans  $E(\tilde{X})$ . Alors, d'après 4.4, la suite  $f_k$  converge dans  $E(X)$ , et par conséquent, la suite  $\omega_k$  converge dans  $\mathcal{E}^n(X)$ . Ceci achève la démonstration de 4.5, et d'après 4.2, celle de la proposition 4.

#### 5. LE CAS D'UN ENSEMBLE SEMI-ANALYTIQUE.

Soient  $X$  une variété analytique réelle,  $Y$  un ensemble semi-analytique fermé de  $X$ , et  $U = X - Y$  l'ouvert semi-analytique complémentaire. Pour simplifier l'écriture, on écrit ici  $\mathcal{D}_q(U^\infty)$  pour  $\mathcal{D}_q(X/Y^\infty)$ , l'espace des courants de  $U$  prolongeables en courants de  $X$ . On montre maintenant que les flèches  $\mathcal{E}_U : H_q \mathcal{D}_q(U^\infty) \rightarrow H_q(U, \mathbb{C})$  sont des isomorphismes, ce qui démontre le théorème 1.2.



Utilisant la description locale des ouverts semi-analytiques de Łojasiewicz [6], et remplaçant la variété  $X$  par un ouvert assez petit qu'on désigne toujours par  $X$ , il existe des fonctions analytiques réelles  $f_{ij}$  sur  $X$  telles que

$$U = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \bigcap_{1 \leq j \leq \ell} \{f_{ij} > 0\}$$

5.1. Soient  $U_1$  et  $U_2$  des ouverts semi-analytiques de  $X$ , de réunion  $U$  et intersection  $u$ . D'après 3.2 et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (Y^\infty) & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (Y_1^\infty) \oplus \mathfrak{S} \cdot (Y_2^\infty) & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (Y^\infty) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (X) & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (X) \oplus \mathfrak{S} \cdot (X) & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (X) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (U^\infty) & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (U_1^\infty) \oplus \mathfrak{S} \cdot (U_2^\infty) & \rightarrow & \mathfrak{S} \cdot (u^\infty) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

on obtient l'exactitude de la ligne du bas, et le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_q \mathfrak{S} \cdot (U^\infty) & \rightarrow & H_q \mathfrak{S} \cdot (U_1^\infty) \oplus H_q \mathfrak{S} \cdot (U_2^\infty) & \rightarrow & H_q \mathfrak{S} \cdot (u^\infty) & \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & H_q(U, \mathfrak{C}) & \rightarrow & H_q(U_1, \mathfrak{C}) \oplus H_q(U_2, \mathfrak{C}) & \rightarrow & H_q(u, \mathfrak{C}) & \rightarrow \end{array}$$

5.2. Les flèches  $\mathfrak{C}_V$  sont des isomorphismes pour tout ouvert semi-analytique du type  $V = \bigcap_{1 \leq j \leq 1} \{f_j > 0\}$ .

En effet, soit  $Y$  l'ensemble analytique fermé  $Y = \bigcup \{f_j = 0\}$ . L'ouvert  $U = X - Y$  est réunion des 2 ouverts disjoints  $V$  et  $W = U \cap \bigcup \{f_j < 0\}$ .

D'après 5.1, on a les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H_q \mathfrak{S} \cdot (U^\infty) & \xrightarrow{\sim} & H_q \mathfrak{S} \cdot (V^\infty) \oplus H_q \mathfrak{S} \cdot (W^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(U, \mathfrak{C}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(V, \mathfrak{C}) \oplus H_q(W, \mathfrak{C}) \end{array}$$

$\mathfrak{C}_U$  étant un isomorphisme d'après 3.4, il en est de même de  $\mathfrak{C}_V$  (et  $\mathfrak{C}_W$ ).

5.3. Les flèches  $\mathcal{C}_U$  sont des isomorphismes pour tout ouvert semi-analytique du type  $U = \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ , où les  $V_i$  sont du type 5.2. Démonstration immédiate par récurrence sur  $k$ , en utilisant 5.1 et 5.2.

Tout ouvert semi-analytique étant localement de ce dernier type, le théorème 1.2 est démontré.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREDON (Glen E.). - Sheaf theory. McGraw-Hill, New-York, 1967.
- [2] HERRERA (Miguel) and LIEBERMAN (D.). - Residues and principal values on complex spaces. Math. Ann., 194, 1971, 259-294.
- [3] HIRONAKA (Heisuke). - The resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. Math., 79, 1964, 109-326.
- [4] KANTOR (Jean-Michel). - Opérateurs différentiels sur les singularités quotients. C.R. Acad. Sc. Paris; 273, 1971, 897-899.
- [5] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division. Studia Math., 8, 1959, 87-136.
- [6] ŁOJASIEWICZ (S.). - Ensembles semi-analytiques. IHES, Bures-sur-Yvette, 1965.
- [7] MALGRANGE (B.). - Ideals of differentiable functions. Tata Institute, Bombay 3, Oxford Univ. Press, 1966.

(Texte reçu le 25/XI/1972)

Université de Poitiers  
 Mathématiques  
 40, Avenue du Recteur Pineau  
 86022 - POITIERS

---