MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GABRIEL RUGET

Complexe dualisant et résidus

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 31-34
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__31_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 31-34.

COMPLEXE DUALISANT ET RESIDUS.

par Gabriel RUGET

Dans [5] (voir aussi l'exposé de Ramis dans Agora Mathematica*), on explique comment généraliser le théorème de dualité de Serre en géométrie analytique complexe avec l'aide, pour tout espace analytique X , d'un complexe $K^{\bullet}_X$ baptisé complexe dualisant, qui remplace le faisceau des formes holomorphes de degré maximum utilisé dans le cas où X est une variété. Nous indiquerons brièvement ici comment, si X est une variété (ou plus généralement si X est cohérent en tant qu'espace analytique réel), on peut voir le complexe dualisant comme sous-complexe d'un complexe de courants sur X : par exemple, si X est une variété de dimension n , $K^{\bullet}_X$ est un sous-complexe de $'\mathcal{D}^{n,\cdot}$, muni de la différentielle $d''/2i\pi$. Cette interprétation est utile pour comprendre dans le cas le plus général la fonctorialité de $K^{\bullet}_X$ (étudiée dans [6], sous le nom de trace relative, dans le cas d'un morphisme propre).

L'outil essentiel est la théorie des résidus multiples de Herrera (voir l'exposé de Herrera dans ces mêmes journées). La démonstration pourrait comporter davantage d'algèbre, ou davantage d'analyse, mais nous l'avons voulue la plus économique.

Nous allons travailler dans le germe en un point d'une variété de dimension n , d'anneau structural $\mathcal{O}$. Commençons par un "rappel" sur le résidu de Grothendieck ([2], [1]) : soient ω une forme holomorphe de degré n $(\omega \in \Omega)$ et $f_1,\dots,f_n$ un système de n fonctions définissant le point-base (muni d'un anneau de nilpotents $A = \mathcal{O}/(f_1,\dots,f_n)$. Au symbole de Grothendieck $[\omega/f_1,\dots,f_n]$, on associe un élément de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(A,\Omega)$, ceci grâce à la résolution de Koszul de A fabriquée avec les f_i . Mais on peut aussi calculer cet Ext à l'aide de la résolution de Ω par le complexe de courants $'\mathcal{D}^{n,\cdot}$: on associe ainsi au symbole une classe de courants de type (n,n) , à support le point-base ; en fait, cette classe contient un courant particulier : celui qui s'écrit $\sum_i a_i\, \partial/\partial z^i\, \delta\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$, où z_j sont des coordonnées holomorphes, i des n-indices, et δ la masse de Dirac du point-base. C'est a_0 le résidu de Grothendieck du symbole $[\omega/f_1,\dots,f_n]$; en fait, tout le courant précité est intéressant, et c'est lui que généralise le

---

*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes (Paris, 14-20 juin 72) résidu multiple de Herrera dans le cas où le symbole $[\omega/f_1,\dots,f_p]$ comporte seulement p fonctions définissant une intersection complète dont nous noterons encore l'anneau A . Précisons ceci sous la forme d'un lemme (que nous ne démontrerons pas) :

LEMME 1. <u>L'application qui, au symbole</u> $[\omega/f_1,\dots,f_p]$, <u>associe le courant</u> $\text{Rés}_{f_1,\dots,f_p}(\omega/f_1,\dots,f_p)$, <u>est en fait une application de</u> $\text{Ext}^p_{\mathcal{O}}(A,\Omega)$ <u>dans</u> $'\mathcal{D}^{n,p}$ <u>compatible avec le calcul du Ext par la résolution</u> $\Omega \to {}'\mathcal{D}^{n,\cdot}$ (<u>différentielle</u> $d''/2i\pi$) ; <u>elle est en particulier injective</u>.

Supposons pour un instant que $f_1,\dots,f_p$ définissent un ensemble irréductible γ . On voit bien maintenant comment interpréter $H^p_\gamma(\text{Spec}\,\mathcal{O},\Omega)$ (notation de [2], ou [5]) comme un ensemble de courants de type n,p : H^p_γ est la limite pour les entiers q et les fonctions g non identiquement nulles sur γ de

$$\Gamma(D_g,\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(f_1^q,\dots,f_p^q),\Omega)) ;$$

un élément de ce dernier groupe peut être représenté par un "symbole"

$$(1/g^r)[\omega/f_1^q,\dots,f_p^q]$$

auquel on associe le courant $\text{Vp}_g\,\text{Rés}_{f_1,\dots,f_q}\left(\omega/g^r\, f_1^q \dots f_p^q\right)$, ce qui, comme dans le lemme 1, définit une application injective de $H^p_\gamma(\text{Spec}\,\mathcal{O},\Omega)$ dans $'\mathcal{D}^{n,p}$.

Il faut maintenant étudier $H^p_\gamma(\text{Spec}\,\mathcal{O},\Omega)$ lorsque γ , irréductible de codimension p , n'est plus intersection complète. Comme précédemment,

$$H^p_\gamma = \lim_g \Gamma(D_g,\mathcal{H}^p_{\{\overline{\gamma}\}}(\text{Spec}\,\mathcal{O},\Omega)) .$$

Pour un dénominateur g fixé, cherchons à envoyer $\Gamma(D_g,\mathcal{H}^p_{\{\overline{\gamma}\}})$ dans $\mathcal{D}^{n,p}$: nous pouvons choisir p fonctions $f_1,\dots,f_p$ définissant une intersection complète α dont γ est l'une des composantes $\alpha_1,\dots,\alpha_s$, telles de plus que g ne s'annule pas identiquement sur α , envoyer $\Gamma(D_g,\mathcal{H}^p_{\{\overline{\gamma}\}})$ dans $\Gamma(D_g,\mathcal{H}^p_{\{\overline{\alpha_1}\}\cup\dots\cup\{\overline{\alpha_s}\}})$, dont nous représentons les éléments par des symboles auxquels nous appliquons $\text{Vp}_g\,\text{Rés}_{f_1,\dots f_p}$. Reste à vérifier que le résultat ne dépend pas du système $f_1,\dots,f_p$ choisi (il y a un espoir, si le but que nous poursuivons est raisonnable, puisqu'on ne perd aucun renseignement en passant de

$$\Gamma(D_g,\mathcal{H}^p_{\{\overline{\gamma}\}}) \quad \text{à} \quad \Gamma(D_g,\mathcal{H}^p_{\{\overline{\alpha_1}\}\cup\dots\cup\{\overline{\alpha_s}\}})).$$

Soit donc $f'_1,\dots,f'_p$ un autre système tel que $f_1,\dots,f_p$. Grâce à un lemme que nous n'énoncerons pas, on ne perd aucune généralité à supposer que p quelconques fonctions parmi les f_i et les f'_i sont en position d'intersection complète géométrique. Appelons β le fermé de $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ défini par l'ensemble des f_i et f'_i. Les applications de $\Gamma(D_g, \mathcal{H}^p_{\overline{\{\gamma\}}})$ dans $\Gamma(D_g, \mathcal{H}^p_{\overline{\{\alpha_1\}}\cup\ldots})$ et $\Gamma(D_g, \mathcal{H}^p_{\overline{\{\alpha_1\}}\cup\ldots})$ transitent via $\Gamma(D_g, \mathcal{H}^p_\beta)$, qui peut être calculé par le procédé de Čech (voir [5]) : si $(\omega_{i_1,\ldots,i_j,i'_{j+1},\ldots,i'_p})$ est un cocycle associé à un élément de $\Gamma(D_g, \mathcal{H}^p_\beta)$ $(\omega_{i_1,\ldots,i_j,i'_{j+1},\ldots,i'_p}$ est une forme méromorphe ayant pour dénominateur un produit de puissances de g, de $f_{i_1},\ldots,f_{i_j}$ et de $f'_{i_{j+1}},\ldots,f'_{i_p})$, $\omega_{1,\ldots,p}$ et $\omega_{1',\ldots,p'}$ représentent les images de cet élément dans $\Gamma(D_g, \mathcal{H}^p_{\overline{\{\alpha_1\}}\cup\ldots})$ et $\Gamma(D_g, \mathcal{H}^p_{\overline{\{\alpha'_1\}}\cup\ldots})$ respectivement. Pour montrer que $Vp_g\, \mathrm{Rés}_{f_1,\ldots,f_p}\, \omega_{1,\ldots,p}$ et $Vp_g\, \mathrm{Rés}_{f'_1,\ldots,f'_p}\, \omega_{1',\ldots,p'}$ sont le même courant, montrons que tous les $Vp_g\, \mathrm{Rés}_{f_{i_1},\ldots,f_{i_j},f'_{i_{j+1}},\ldots,f'_{i_p}}\, \omega\ldots$ sont égaux. Oublions Vp_g, et appelons φ_i les fonctions f et f' réunies ; il suffit de vérifier que, par exemple

$$\mathrm{Rés}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1},\varphi_p}\, \omega_{1,\ldots,p-1,p} = \mathrm{Rés}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1},\varphi_{p+1}}\, \omega_{1,\ldots,p-1,p+1}\,.$$

Ceci se fait en utilisant la condition de cocycle pour le système d'indices $1,\ldots,p+1$, à laquelle on applique l'opération $\mathrm{Rés}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1},\varphi_p\,\varphi_{p+1}}$

Nous disposons donc, pour tout γ irréductible de codimension p, d'une application injective de $H^p_\gamma(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O},\Omega)$ dans ${}^{\circ}\mathcal{D}^{n,p}$. Reste à voir que ceci donne une application injective de $\coprod_\gamma H^p$ dans ${}^{\circ}\mathcal{D}^{n,p}$ (la somme en question n'est autre que la fibre au point-base du complexe dualisant), et que le bord du complexe dualisant commute avec cette injection et le bord $d''/2i\pi$ du complexe de courants. La première assertion résulte du lemme de pureté suivant (qui indique entre autres que le courant associé à un élément non nul de H^p_γ a exactement pour support γ) :

LEMME 3. <u>Soient</u> g, $f_1,\ldots,f_p$, h <u>des fonctions dont les</u> $p+1$ <u>premières et les</u> $p+1$ <u>dernières sont en position d'intersection complète géométrique</u> ; <u>soit de plus</u> ω <u>une forme holomorphe</u>. <u>Supposons que le courant</u> $Vp_g\, \mathrm{Rés}_{f_1,\ldots,f_p}(\omega/g\, f_1\ldots f_p)$ <u>(a priori à support dans</u> $\bigcap_i V(f_i)$) <u>induise</u> 0 <u>dans le complémentaire de</u> $V(h)$. <u>Alors, il était lui-même nul</u>.

Quant à l'assertion sur les différentielles, elle provient de ce que l'opération bord dans le complexe dualisant consiste à peu près à faire passer g du rang de dénominateur spécial au rang des f_i (c'est exactement ça si $\gamma \cap V(g)$ est irréductible), et de ce que $d''\, V_p = 2i\pi\, \mathrm{Rés}$.

Enfin, nous avons affirmé en introduction que, si X est cohérent comme ensemble analytique réel (par exemple si les composantes irréductibles de X sont normales), $K_X^\bullet$ pouvait encore se réaliser comme sous-complexe de $'\mathcal{D}_X^\bullet$. Pour voir ceci, on plonge X (localement) dans une variété V ; par définition, $K_X^\bullet = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, K_V^\bullet)$. A un élément de $K_X^\bullet$, est donc associé un courant de V annulé par l'idéal $\mathfrak{J}$ de X dans V ; à ce renseignement, joignons le

LEMME 4. <u>Si</u> $p \geqslant 1$, <u>et si</u> φ <u>est une fonction holomorphe s'annulant sur</u> $\bigcap_i V(f_i)$, <u>alors</u> :

$$\overline{\varphi}\, Vp_g\, \mathrm{Rés}_{f_1,\dots,f_p}(\omega/gf_1 \dots f_p) = 0 \quad ,$$

et un théorème de Malgrange [4] assurant que toute fonction différentiable sur V nulle sur X est combinaison de fonctions de $\mathfrak{J}$ et de $\overline{\mathfrak{J}}$: nous voyons bien que les éléments de $K_X^\bullet$ induisent des courants sur X (au sens de [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUM (P.F.) et BOTT(R.) . - On the zeroes of meromorphic vector fields, dans Essays on topology and related topics, publiés sous la direction de Haefliger et Narasimhan. Springer Verlag (1970).

[2] HARTSHORNE (R.) . - Residues and duality. Springer, Lecture notes in mathematics 20 (1966).

[3] HERRERA (M.) et LIEBERMAN (D.) . - Residues and principal values on complex spaces. Math. Ann., 194, 259-294 (1971).

[4] MALGRANGE (B.) . - Ideals of differentiable functions. Oxford University Press (1966).

[5] RAMIS (J.P.) et RUGET (G.) . - Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe. Publ. Math. I.H.E.S. 38, 77-91 (1970).

[6] RAMIS (J.P.), RUGET (G.) et VERDIER (J.L.) . - Dualité relative en géométrie analytique complexe. Inventiones Math., 261-283 (1971).

(Texte reçu en septembre 1972)

Univeristé PARIS VII
Mathématiques
11, Quai Saint Bernard
PARIS 5ème