MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE LELONG

Application des courants positifs fermes à la géométrie analytique

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 9-25
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__9_0>

Journées Géom. analyt. [1972, Poitiers]
Bull. Soc. math. France
Mémoire 38, 1974, p. 9-25.

APPLICATION DES COURANTS POSITIFS FERMES A LA GEOMETRIE ANALYTIQUE

par Pierre LELONG

INTRODUCTION. On donne ici un résumé et une bibliographie : on renvoie le lecteur aux deux articles que nous avons écrits l'un au Séminaire d'Analyse [7, g], l'autre au Colloque d'Analyse de Rio de Janeiro [7, i] pour plus de détails. On profitera par contre de cet exposé pour indiquer quelques problèmes ouverts et formuler des conjectures.

Soit M un ensemble analytique sur une variété analytique G connexe, dénombrable à l'infini, de dimension complexe n. Le courant d'intégration $t[M]$ sur M permet d'identifier la famille $\mathfrak{M}(G)$ des ensembles analytiques dans G à un ensemble $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ de courants (au sens de G. de Rham). Plus précisément il résultait déjà du travail (7a, 1957) :

Il existe une application injective Ψ de $\mathfrak{M}_p(G)$ des ensembles analytiques de dimension (complexe) pure p sur un sous-ensemble $\widetilde{\mathfrak{M}}_p(G)$ du cône $T_{p,f}(G)$ des courants positifs fermés dans G de dimension p.

Si $t \in \widetilde{\mathfrak{M}}_p(G)$ est donné, on obtient Ψ^{-1} par $M = \operatorname{supp} t$.

Le résultat précédent est la base d'une méthode efficace, car il est souvent plus agréable dans certaines questions de travailler sur $t[M]$ que sur M. Il en est ainsi quand on utilise des méthodes d'analyse fonctionnelle pour l'étude de problèmes de cohomologie à croissance, auxquels conduit en particulier l'étude métrique globale des ensembles analytiques : on fait intervenir d'abord les propriétés des courants positifs fermés. Sur de tels courants on peut effectuer les opérations de l'analyse, telle la régularisation par un produit de convolution, sans sortir du cône des courants positifs fermés. De plus l'algèbre des courants positifs fournit des mesures positives majorantes et des indicatrices de croissance dont le rôle est essentiel dans de tels problèmes.

Mais, en identifiant $\mathfrak{M}_p(G)$ à un sous-ensemble de $\widetilde{\mathfrak{M}}_p(G)$ du cône $T_{p,f}(G)$ des courants positifs fermés, on crée un problème nouveau. Comment caractériser les courants $t[M]$ dans $T_{p,f}(G)$? Le présent exposé est consacré à ce problème. On rappelle d'abord brièvement les résultats de P. Thie [12], J. King [6] qui à partir du nombre $\nu(a)$ -densité locale du courant appelée nombre de Lelong par ces auteurs- caractérisent les courants $t[M]$ c'est-à-dire $\widetilde{\mathfrak{M}}_p(G)$ dans $T_{p,f}(G)$.

Ensuite on donne des résultats dans une voie différente en montrant (pour les démonstrations cf [7, g]) que les ensembles analytiques irréductibles (cycles analytiques) sur G fournissent pour toutes les dimensions p , $0 \leqslant p \leqslant n-1$, <u>des génératrices extrémales du cône convexe</u> $T_{p,f}(G)$. Dans le cas $p = n-1$, si G est un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$ et si l'on a $H^2(G,\mathbb{C}) = 0$, le cône $T_{n-1,f}(G)$ est l'enveloppe convexe simplement fermée des $t[M]$, où M parcourt les cycles analytiques dans G . On notera $\mathcal{D}'^{o}(G)$ l'espace des courants dans G qui sont continus d'ordre zéro (c'est-à-dire qui se prolongent aux formes φ à coefficients continus à support compact) ; $\mathcal{D}'^{o}(G)$ sera muni de la topologie de la convergence simple sur les φ . Les bornés de $\mathcal{D}'^{o}(G)$ sont relativement compacts et $\widetilde{\mathcal{M}}_p(G)$ est fermé dans $\mathcal{D}'^{o}(G)$ ce qui donne une propriété de "famille normale" pour les ensembles analytiques d'aire localement bornée en utilisant un résultat de E. BISHOP [1].

Dans la dernière partie on donne des applications à l'étude métrique des ensembles analytiques dans $\mathbb{C}^n$ en rappelant les résultats de [7c] et ceux de H. SKODA [11]. Ces derniers s'appliquent à la représentation des ensembles analytiques dans $\mathbb{C}^n$ de dimension quelconque et d'ordre de croissance fini ou infini.

1. <u>Courants positifs</u> ; <u>courants positifs fermés</u>. On note $\mathcal{D}^{o}(G)$ l'espace des formes différentielles à support compact sur G , à coefficients continus. Soit $\alpha_s(x)$ une partition de l'unité continue, à support compact, supp α_s appartenant à une carte d'une famille dénombrable formant un recouvrement de G . On suppose que les $K_s = \text{supp}\,\alpha_s$ forment un recouvrement dénombrable, localement fini de G Dans la suite on ne considérera que des formes homogènes. La décomposition $\varphi = (\Sigma\, \alpha_s)\varphi = \Sigma\, \varphi_s$ identifie $\mathcal{D}^{o}(G)$ à $\oplus_s \mathcal{D}^{o}(K_s)$. On considérera sur $\mathcal{D}^{o}(G)$ la topologie limite inductive stricte, soit

$$\mathcal{D}^{o}(G) = \varinjlim \mathcal{D}^{o}(G_m) = \oplus\, \mathcal{D}^{o}(K_s) \quad , \text{ où } \quad G_m = \cup\, K_s \ , \ s \leqslant m$$

$\mathcal{D}^{o}(G_m)$ est l'espace de Banach des formes continues à support dans G_m , muni de la convergence uniforme des coefficients. Le dual de $\mathcal{D}^{o}(G)$ est alors l'espace $\mathcal{D}'^{o}(G)$ des courants continus d'ordre zéro sur G , et s'identifie à $\Pi_s \mathcal{D}'^{o}(K_s)$. Chaque $\mathcal{D}'^{o}(K_s)$ est lui-même le produit de N fois l'espace des mesures sur le compact K_s , si N est le nombre des coefficients de la forme-courant. Sur chacun des $\mathcal{D}'^{o}(K_s)$ on prendra la topologie de la convergence simple sur les formes de $\mathcal{D}^{o}(K_s)$ et on munira $\mathcal{D}'^{o}(G) = \Pi_s \mathcal{D}'^{o}(K_s)$ de la topologie produit (cf. [7, f]).

<u>Un courant</u> t <u>est dit positif sur</u> G s'il l'est sur chacune des cartes K_s , par rapport aux coordonnées locales $z_1,\dots,z_n$, c'est-à-dire s'il vérifie :

a) Il existe p' , $0 \leqslant p' \leqslant n$, tel que t soit homogène de type (p',p') , c'est-à-dire nul sur les formes $\varphi \in \mathcal{D}(K_s)$ homogènes qui ne sont pas de type (p,p); $p = n-p'$ sera appelé <u>la dimension complexe</u> de t .

b) Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ des formes linéaires à coefficients constants des dz_k <u>seuls</u> : $\alpha_k = \sum_1^n \alpha_k^j \, dz_j$. Alors

$$T(t,\alpha) = t \wedge (i\,\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1) \wedge \ldots (i\,\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p)$$

est une distribution positive, c'est-à-dire une mesure positive ; on a donc pour toute $f \geqslant 0$, continue, à support dans K_s : $T(t,\alpha)\,[f] \geqslant 0$.

Il est souvent commode de remarquer (cf. [7a, 7c]) qu'il existe une application bijective de l'ensemble des sous-espaces L^q de $\mathbb{C}^n$ sur les formes différentielles qui s'écrivent

$$\varphi = \left(\frac{i}{2}\right)^q (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1) \wedge \ldots (\omega_q \wedge \bar{\omega}_q) = \tau(L^q)$$

où les ω_s sont des formes linéaires des seuls dz_k , obtenues par une application $(dz_i, d\bar{z}_j) \to (\omega_k, \bar{\omega}_s)$ qui est unitaire dans $\mathbb{C}^n$ et telle que L^q soit défini par $\omega_{q+1} = \omega_{q+2} = \ldots = \omega_n = 0$. On a alors :

PROPOSITION 1. <u>Pour que</u> t , <u>homogène de type</u> $(n-p\ ,\ n-p)$ <u>soit un courant positif, il faut et il suffit que pour tout sous-espace complexe</u> L^p , <u>de forme associée</u> $\tau(L^p)$, <u>la distribution</u>

$$T(t,L^p) = t \wedge \tau(L^p) \tag{1}$$

<u>soit une mesure positive sur chaque carte</u> (cf. [7, c]).

2. <u>Propriétés des courants positifs</u>. Dans la suite on note d' (respectivement d'') les différentielles par rapport aux dz_i seuls (aux $d\bar{z}_j$ seuls). On note $T_p(G)$ les courants positifs de dimension p sur G , $T_{p,f}(G)$ l'ensemble de ceux qui sont fermés c'est-à-dire qui vérifient $t(d\varphi) = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^1(G)$. Rappelons les propriétés suivantes, où l'on suppose t_1 , t_2 positifs :

1) Soient $c_1 > 0$, $c_2 > 0$; on a $c_1\,t_1 + c_2\,t_2 \in T_p(G)$.

2) $t_1 + t_2 = 0$ entraîne $t_1 = 0$, $t_2 = 0$.

3) Un courant $t \in T_p(G)$ est continu d'ordre zéro, les distributions associées à ses coefficients sont des mesures ; t s'étend donc de $\mathcal{D}(G)$ à $\mathcal{D}^0(G)$, c'est-à-dire que $T_p(G)$ et $T_{p,f}(G)$ sont des sous-ensembles de $\mathcal{D}'^0(G)$.

4) Soit $t \in T_p(G)$ et φ une forme à coefficients continus, de type $(1,1)$, positive : $t \wedge \varphi$ appartient à $T_{p+1}(G)$.

<u>Exemples</u> : a) $\beta = \frac{i}{2} \Sigma\, dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{i}{2} d'\, d''\, ||z||^2$ est une forme positive ; si t appartient à $T_p(G)$, la mesure :

(2) $$\sigma = t \wedge \beta^p$$

est une mesure positive sur une carte de coordonnées locales.

b) Si V est plurisousharmonique dans G , on a $id'\, d''\, V \in T_{n-1}(G)$.

c) $\alpha_a = \frac{i}{2} d'\, d'' \log ||z-a||^2$ est une forme positive pour $z \neq a$. Soit $t \in T_p(G)$ alors, sur une carte, le produit

(3) $$\nu = \Pi^{-p}\, t \wedge \alpha_a^p$$

est une mesure positive, définie dans $\mathbb{C}^n - \{a\}$. Elle est appelée <u>mesure projective</u> relative au courant $t \in T_p(G)$ et au point a .

5) Si t est un courant positif et f un homéomorphisme analytique complexe (ou plus généralement une application analytique propre), le courant $t' = ft$ image de t par f , défini par

$$t'(\varphi) = t(f^*\varphi) \qquad z' = f(z)$$

est positif si t est positif ; $f^*\varphi$ désigne la forme obtenue à partir de φ en substituant z' et dz' en fonction de z et dz ; il en résulte que $T_p(G)$ est indépendant du système de cartes considéré sur G et de la partition α_s de l'unité.

6) Un courant $t \in T_p(G)$ admet une <u>mesure positive majorante</u> sur chaque K_s , c'est-à-dire qu'il existe μ_s sur K_s telle que l'on ait $|t(\varphi)| \leqslant \mu_s\, [||\varphi||(x)]$, où $||\varphi||$ désigne le sup des modules des coefficients de la forme $\varphi \in \mathcal{D}^{\circ}(K_s)$. On peut majorer $||t\alpha_s||$ au moyen des $||\mu_s||$ sur chaque K_s .

7) $T_p(G)$ et $T_{p,f}(G)$ sont des cônes <u>convexes saillants</u>. C'est une conséquence de 1) et du fait que $t_1 \in T_p(G)$, $- t_1 \in T_p(G)$ entraînent que les mesures (1) soient toutes nulles ; il en est alors de même des coefficients de t .

8) Une propriété essentielle est la <u>relation entre les mesures</u> σ <u>et</u> ν <u>définies par (2) et (3) dans un domaine de coordonnées</u> z_i , $\bar{z}_j$ <u>quand le courant</u> t <u>est simultanément positif et fermé</u>.

Soit $t \in T_{p,f}(G)$, et deux boules B_1 , B_2 données par $||z-a|| \leqslant r_1$, $||z-a|| \leqslant r_2$, $r_1 < r_2$, et $\sigma(a,r)$ la mesure σ portée par la boule <u>fermée</u> $||z-a|| \leqslant r$. On a

$$\nu(B_2-B_1) = \int_{B_2-B_1} \nu = \frac{p!}{\Pi^p} \left[\frac{\sigma(a,\, r_2)}{r_2^{2p}} - \frac{\sigma(a,\, r_1)}{r_1^{2p}} \right]$$

qui entraîne la propriété : soit $a \in \operatorname{supp} t$, et $t \in T_{p,f}(G)$; alors la <u>limite décroissante quand</u> $r \searrow 0$:

$$\nu(a) = \lim_{r=0} \frac{\sigma(a, r)}{\tau_p(1) r^{2p}}$$

<u>existe</u> ; $\tau_p(1)$ désigne la mesure de la boule unité de $\mathbb{C}^p$, cf. [7a]. Cette limite $\nu(a)$ est appelée par certains auteurs "nombre de Lelong" du courant t au point a. Elle s'explicite sous la forme $\nu(a) = \nu_a \, \delta(a)$ où $\delta(a)$ est la mesure de Dirac en a ; le coefficient ν_a est alors une fonction positive, semi-continue supérieurement de a.

3. <u>Caractérisation de l'ensemble</u> $\mathfrak{M}(G)$ <u>des courants</u> $t[M]$ <u>dans le cône</u> $T_{p,f}(G)$.

Des conjectures faites à la suite de [7a], notamment dans [7b] ont été vérifiées par des travaux récents.

a) Si M est un ensemble analytique, le nombre $\nu(a)$ relatif au courant $t[M]$, est un entier en tout point $a \in M$. Ce résultat de P. THIE montre de plus qu'on a (cf. [12]) :

$$\nu(a) = \Sigma q_i \, \nu_i$$

si le cône Γ se décompose en cônes irréductibles Γ_i, degré $\Gamma_i = \nu_i$, chaque q_i étant le degré de la projection de M sur Γ_i au voisinage du point a ; on a $\nu(a) = 1$ aux points ordinaires de M.

b) Réciproquement si $\nu(a)$ est entier pour tout $a \in \operatorname{supp} t$ (ou même presque partout pour la mesure σ), $t = t[M]$ est alors le courant d'intégration d'un ensemble analytique M, cf. J. King [6] et aussi F.R. Harvey et J. King [5]). Plus généralement si $\nu(a) \geqslant c(K) > 0$ pour tout compact $K \subset G$, alors M est la réunion (finie sur tout compact) d'ensembles analytiques M_i et l'on a $t = \Sigma c_i \, t[M_i]$.

c) Il est commode de considérer le cône $T_{p,f}(G)$ comme plongé dans $\mathcal{D}'^{\,o}(G)$ muni de la topologie de la convergence simple sur les $\varphi \in \mathcal{D}^o(G)$. Un borné B du cône $T_{p,f}(G)$ dans cette topologie a les propriétés suivantes :

(i) Il est relativement compact,

(ii) Il est aussi fortement borné, c'est-à-dire que les courants $t \in B$ sont bornés en norme. Pour celle-ci il est commode de prendre la norme de la mesure majorante $c_p \sigma$ où c_p est un coefficient numérique et σ la mesure positive définie par (2). En particulier si $t = t[M]$, σ n'est autre que l'aire de M. On aboutit ainsi à l'énoncé donné dans [7e], dont la démonstration utilise [1], THEOREME 1. Soit $\{M_n\}$ une suite d'ensembles analytiques sur G de dimension p en tous leurs points. Si les courants $t[M_n] = t_n$ convergent sur toute forme $\varphi \in \mathcal{D}^{\circ}(G)$, alors :

a) Les aires $\sigma_n(K)$ des M_n sur un compact $K \subset G$ sont bornées.

b) Il existe un ensemble analytique $N = \cup N_\alpha$, les N_α étant irréductibles dans G de manière qu'on ait

$$t = \lim t_n = \Sigma q_\alpha \, t[N_\alpha] \, , \tag{4}$$

les q_α étant des entiers positifs, et l'on a alors $N = \lim M_n$ au sens de la limite des ensembles.

En particulier si l'on a $t \in T_{p,f}(G)$, et $\operatorname{supp} t \subset M$, où M est un ensemble analytique de dimension p , alors, les M_i étant les composantes irréductibles de M dans G , il existe des $c_i \geqslant 0$ tels qu'on ait

$$t = \Sigma c_i \, t[M_i] \, . \tag{5}$$

De tels courants sont appelés chaînes analytiques. D'après le théorème de Harvey et King elles sont caractérisées dans $T_{p,f}(G)$ par le fait que sur tout compact $K \subset G$, il existe $c(K) > 0$, tel qu'on ait $\nu(a) \geqslant c(K)$ pour $a \in K \cap \operatorname{supp} t$. Celles qui sont à coefficients c_i entiers sont caractérisées par le fait que $\nu(a)$ est un entier $\geqslant 1$ pour $a \in \operatorname{supp} t$. Les conditions $t \in T_{p,f}(G)$, $\operatorname{supp} t \subset M$, M étant un ensemble irréductible de dimension p dans G entraînent $t = ct[M]$ pour un $c \geqslant 0$, donc que le nombre $\nu(a)$ demeure constant sur le support de t . L'application $\Psi : M \to t\,[M]$ de l'introduction est obtenue en prenant $t[M] = \Sigma t[M_i]$ c'est-à-dire $c_i = 1$ pour toutes les composantes M_i de M .

4. Applications. La méthode permet comme l'a montré F. R. Harvey une meilleure analyse des propriétés des ensembles analytiques. Considérons le théorème de Remmert-Stein : soit M un ensemble analytique de dimension pure p défini dans $G-A$, où A est un ensemble analytique et $\dim A \leqslant p-1$. Alors $\overline{M}$ est un ensemble analytique et prolonge M dans G . Une démonstration donnée par F.R. Harvey et B. Schiffmann ([9] et [5b]) montre d'abord que $t[M]$ se prolonge dans G comme courant $\tilde{t}$ positif fermé ; la propriété de $\nu(a)$ montre ensuite que $\tilde{t} = t[\tilde{M}]$, où $\tilde{M}$ est un ensemble analytique qui prolonge M .

On obtient ainsi les résultats de la "géométrie analytique" en spécialisant des résultats de la géométrie des courants positifs fermés.

5. Cycles analytiques et éléments extrémaux.

1. On a vu que le cône $T_{p,f}(G)$ des courants positifs fermés de dimension p dans G est un cône convexe saillant. Quelles sont alors ses génératrices extrémales ? Le problème général est ouvert. Mais on a la propriété suivante :

THEOREME 2. Sur une variété analytique complexe G, les cycles analytiques M de dimension p définissent des génératrices extrémales du cône $T_{p,f}(G)$.

En effet supposons M irréductible dans G. Alors la décomposition

$$t[M] = t_1 + t_2 \, , \qquad t_1 \, , \, t_2 \in T_{p,f}(G)$$

entraîne $t_1 + t_2 = 0$ au voisinage de tout point $x \notin M$. On en déduit $\operatorname{supp} t_1 \subset M$, $\operatorname{supp} t_2 \subset M$.

De plus t_1 et t_2 appartiennent à la classe des courants t, pour lesquels t et dt sont continus d'ordre zéro. Pour de tels courants t, $\operatorname{supp} t \subset W$, si W est une variété, entraîne que t soit un courant sur W c'est-à-dire appartienne à l'espace $\mathcal{D}'^{o}(W)$. Ici, t_1 et $\overset{o}{M}$ sont de dimension p tous deux. Montrons qu'on a $t_1 = c_1 \, t[M]$ au voisinage d'un point z_o de $\overset{o}{M}$.

On peut supposer que par un isomorphisme analytique complexe $z \to \xi$ on amène z_o à l'origine et M sur $\mathbb{C}^p(z_1 \ldots z_p)$, ce qui ne modifie pas les propriétés de t_1. On aura alors :

$$t_1(\varphi) = \int t_1 \, [\text{Rest } \varphi] = \int_{\mathbb{C}^p} h(\xi) \, \Psi\,(\xi) \, d\sigma_p$$

où Rest φ est la restriction de φ au sous-espace $\mathbb{C}^p$ supposé défini par $z_{p+1} = \ldots = z_n = 0$, $dz_{p+1} = \ldots = dz_n = 0$: Rest φ est de la forme $\Psi(\xi) d\sigma_p$; $dt_1 = 0$ entraîne que h soit constant ; ainsi t_1 a au voisinage de tout point $x \in \overset{o}{M}$ la valeur $c_1 \, t[\overset{o}{M}]$, $c_1 \geqslant 0$; c_1 est localement constant sur $\overset{o}{M}$, donc constant puisque $\overset{o}{M}$ est connexe. On achève la démonstration (cf. [7,f]) en remarquant que l'égalité $t_1 = c_1 \; t$ vérifiée sur G sauf aux points de $M' = M - \overset{o}{M}$ est vérifiée partout, t_1 et t étant des courants positifs fermés et M' de mesure nulle en dimension (réelle) $2p - 2$.

On a donc $t_1 = c_1 \, t[M]$, $t_2 = c_2 \, t[M]$, $c_1 + c_2 = 1$ et la génératrice $ct[M]$ est génératrice extrémale du cône $T_{p,f}(G)$, la décomposition $t[M] = t_1 + t_2$ dans $T_{p,f}(G)$ entraînant que t_1 et t_2 soient proportionnels à $t[M]$.

Par le même procédé on établit : si t est un élément extrémal de $T_{p,f}(G)$, $\operatorname{supp} t$ est un continu, c'est-à-dire n'est pas la réunion de deux ensembles fermés.

Pour $p = 0$, les éléments extrémaux sont les mesures de Dirac $\delta(a)$, $a \in G$, cf. [7, g].

D'une manière générale le théorème 2 pose le problème suivant. Pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, existe-t-il d'autres éléments extrémaux sur $T_{p,f}(G)$ que ceux donnés par les courants d'intégration sur les cycles analytiques ?

6. Etude du cas $p = n-1$, G domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$ et $H^2(G,\mathbb{C}) = 0$. L'opérateur

$$\theta = 2id'd''V = dd^cV \tag{6}$$

où $d^c = i(d''-d')$ établit alors une bijection linéaire entre le cône $T_{n-1,f}(G)$ et le cône $P_1(G) = P(G)/H(G)$, des fonctions plurisousharmoniques dans G : θ échange donc les génératrices extrémales de ces cônes saillants ; les deux cônes sont fermés si on plonge $P_1(G)$ dans $L^1_{loc}(G)$ et $T_{n-1,f}(G)$ dans $\mathcal{D}'^{\,o}(G)$; de plus $L^1_{loc}(G)$ est une topologie séparée sur $P(G)$. L'application θ est continue pour ces topologies (cf. [7,f] et [7,g]); si B est un borné fermé de $P(G)$, il est compact sur le cône $P(G)$ et il en est de même de sa projection sur $P_1(G)$; il donne un compact $B' = \theta(B)$ dans $T_{n-1,f}(G)$ et θ établit une bijection linéaire bicontinue entre B et B' .

On a montré dans [7, g, cf. théorème 2],

THEOREME 3. Si G est un domaine pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$, le cône convexe engendré sur les rationnels positifs par les fonctions $\log|f_i(z)|$, f_i holomorphe et irréductible dans G est dense sur $P(G)$ pour la topologie $L^1_{loc}(G)$.

Cet énoncé entraîne

THEOREME 4. Si G est un domaine pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ et vérifie de plus $H^2(G,\mathbb{C}) = 0$, le cône positif engendré par les sommes finies $\Sigma c_k\, t[M_k], c_k > 0$, M_k cycle analytique dans G de la dimension $n-1$, est dense sur le cône $T_{n-1,f}(G)$ pour la convergence simple des courants sur les formes.

Il en résulte :

COROLLAIRE. Sous les hypothèses du théorème 4 pour G , l'enveloppe convexe fermée (pour $\mathcal{D}'^{\,o}(G)$) des génératrices extrémales du cône $T_{n-1,f}(G)$, coïncide avec celui-ci.

Conjectures. Il est conjecturé les résultats suivants :

a) dans la situation du théorème 3, les $c_i \log|f(z)|$ $c_i > 0$, f holomorphe et irréductible dans G , sont denses sur P(G) pour la topologie $L^1_{loc}(G)$.

b) cette conjecture, si elle est vérifiée, entraîne à son tour une simplification de l'énoncé du théorème 4 qui devient :

Avec les hypothèses du théorème 4 sur G , les génératrices extrémales déterminées par les courants d'intégration sur les cycles analytiques de la dimension n-1 sont denses sur le cône $T_{n-1,f}(G)$ pour la topologie $\mathcal{D}'^{\,o}(G)$.

Remarque. Un borné fermé convexe de $\mathcal{D}'^{\,o}(G) \cap T_{n-1,f}(G)$ est un compact convexe. Mais l'approximation de $t \in B$ par les sommes S fait intervenir un ensemble de cycles M_i pour lesquels les $t[M_i]$ constituent en général un ensemble non borné dans $T_{n-1,f}(G)$.

7. Application à la représentation globale des ensembles analytiques dans $\mathbb{C}^n$ avec conditions de croissance.

1. Dans la théorie des fonctions entières $f(z)$ d'une seule variable on trouve un grand nombre de résultats qui établissent un lien entre la croissance de $|f(z)|$ et le nombre $\nu(r)$ des racines de l'équation $f(z) = 0$ dans $|z| \leqslant r$. On compare en général $\nu(r)$ ou $N(r) = \int_0^r t^{-1} \nu(t)dt$ à $M(r) = \sup |f(z)|$ pour $|z| \leqslant r$, et les résultats obtenus depuis Weierstrass, E. Borel, J. Hadamard étudient la croissance de $N(r)$ quand $M(r)$ est donné. Pour un ensemble analytique M dans $\mathbb{C}^n$, de dimension p en tous ses points il existe toujours n+1 fonctions entières $F_j(z_1,\dots,z_n)$ telles que $M = [z \in \mathbb{C}^n ; F_j(z) = 0 , j = 1,\dots n+1]$. Mais certains résultats diffèrent profondément du cas classique $n = 1$, $p = 0$, même dans le cas d'un ordre de croissance fini.

Les résultats du cas classique $(p = 0 , n = 1)$ ne s'étendent qu'en partie au cas p quelconque $0 \leqslant p \leqslant n-1$.

Indicatrices de croissance. Nous prendrons pour un courant t positif, fermé de dimension p dans $\mathbb{C}^n$ les indicatrices qui résultent des mesures définies en (2) et (3) c'est-à-dire :

a) $\sigma(r)$ est la mesure σ portée par $\|z\| \leqslant r$. Dans le cas d'une donnée de Cousin $[f_s, U_s, f_s$ holomorphe dans $U_s]$, on a

$$t = i\pi^{-1} d'd''\log|f_s| = 1/2\pi \, dd^c\log|f_s| \ , \ d^c = i(d'' - d') \ .$$

Dans tous les cas, on fera correspondre à la donnée $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$ le courant $t[M]$ et l'indicatrice $\sigma(r)$ dite indicatrice trace qui est la mesure σ dans $\|z\| \leqslant r$, définie par (2).

b) En même temps que $\sigma(r)$ nous considérons l'indicatrice $\nu(r)$ (dite <u>indicatrice projective</u>) définie par

$$(6) \qquad \nu(r) = \nu(0) + \int_{0<||z||<r} \Pi^{-p}\, t \wedge \alpha_o^p = r^{-2p}\, \tau_p^{-1}(1)\, \sigma(r)$$

L'indicatrice $\nu(r)$ jouera le rôle essentiel.

DEFINITION. a) <u>Nous dirons que le courant</u> $t \in T_{p,f}(\mathbb{C}^n)$ <u>est d'ordre de croissance fini</u> $\rho \geq 0$ <u>si</u> $\limsup_{r \to +\infty} (\log r)^{-1} \log \nu(r) = \rho$. <u>Nous dirons qu'il est du type nul, moyen, maximal de cet ordre selon que</u> $\limsup_{r=\infty} r^{-\rho}\nu(r)$ <u>est nul, fini, ou infini</u>.

b) <u>Nous dirons qu'un ensemble analytique</u> M , <u>et plus généralement une donnée de Cousin ou une chaîne analytique à coefficients entiers positifs a les propriétés précédentes s'il en est ainsi de son courant d'intégration</u> $t[M]$.

a) Si $p = n-1$, et en particulier si M est précisé avec des multiplicités c'est-à-dire est une chaîne à coefficients entiers $\{M_i, n_i\}$ définie par une donnée de Cousin de zéros de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^n$, alors, comme on l'a montré dans [7,e], les deux principaux résultats de la théorie classique demeurent. D'une part la "quantité" des zéros définie par l'indicatrice $\nu(r)$ de M est majorée en fonction de $M(r) = \sup|f(z)|$, $||z|| \leq r$. Réciproquement si les zéros M sont donnés, d'ordre de croissance fini, il existe une fonction entière $F_o(z)$ dont la croissance a un caractère minimal et est majorée en fonction de $\nu(r)$; la précision obtenue dans [7, e] est aussi bonne dans ce cas $(p=n-1$, n quelconque$)$ que dans le cas classique $(n=1$, $p=0)$.

b) Si la codimension de M dépasse l'unité, un exemple récent (cf. [13]) montre qu'on ne peut majorer $\nu(r)$ en fonction seulement de la croissance des fonctions F_j qui donnent une représentation globale de M dans $\mathbb{C}^n$ comme ensemble des zéros communs aux F_j .

De plus, inversement, pour M donné, on ne sait si, pour une telle représentation de M les $F_j(z)$ doivent vérifier dans leur ensemble des conditions de croissance minimale. Ceci conduit à formuler deux problèmes, résolus si $p' = \text{codim } M = 1$, ouverts si $p' \geq 2$.

<u>Précisons alors deux problèmes ouverts si codimension</u> M <u>surpasse un</u> :

<u>Problème A</u>. Soient M , ensemble analytique donné de dimension pure p dans $\mathbb{C}^n$, et $\Psi(r)$ fonction convexe croissante de $\log r$. Existe-t-il une représentation de M

(7) $$M = [z \in \mathbb{C}^n \; ; \; F_j(z) = 0 \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1]$$

et un $r_o > o$, tels qu'on ait $h(r) = \sup \frac{1}{2} \log \sum_1^{n+1} |F_j(z)|^2$ pour $||z|| = r$, et $h(r) \leqslant \Psi(r)$ pour $r > r_o$, donc $h(r)$ de croissance arbitrairement lente ?

Exemple : si $\nu(r)$ est d'ordre 1, de type fini, existe-t-il une représentation (7) par des fonctions F_j d'ordre $\alpha < 1$? On conjecture ici que la réponse est négative, sauf pour une classe exceptionnelle d'ensembles M à définir.

De [11] on peut déduire une condition suffisante pour une réponse positive ; c'est qu'il existe une fonction plurisousharmonique V dans $\mathbb{C}^n$ qui vérifie les conditions :

1) le support singulier de $d'd''V$ est M , V est C^∞ dans $\mathbb{C}^n - \{M\}$;

2) e^{-V} est non sommable au voisinage des points de M .

3) on a $V(z) \leqslant C\, r^\alpha$ pour une constante $C > 0$ et $r > r_o$.

De même on peut poser le problème suivant :

Problème B. Etant donné un ensemble analytique M de dimension pure p , défini globalement dans $\mathbb{C}^n$ par des équations $F_j(z) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, existe-t-il un opérateur linéaire elliptique θ_p permettant de calculer l'aire σ de M à partir de $\theta_p[V(z)]$, où $V(z) = \frac{1}{2} \log \sum_1^{n+1} |F_j(z)|^2$?

Dans l'exemple cité (cf. [13]) l'ensemble analytique

$$M = [z \in \mathbb{C}^n \; ; \; F_1(z) = 0 \; , \; F_2(z) = 0]$$

est formé de points isolés en nombre $\nu(r)$ dans $||z|| \leqslant r$; $\nu(r)$ est d'ordre infini tandis que F_1 et F_2 sont des fonctions entières d'ordre de croissance fini.

L'étude "à croissance" des ensembles analytiques complexes dans $\mathbb{C}^n$ et de leur représentation ouvre ainsi des problèmes nouveaux. On va résumer ici les résultats déjà acquis en renvoyant pour les démonstrations à [7, e] et à [11].

8. Rappelons brièvement les résultats de [7, e] qui concernent le cas $p = n-1$ et $\nu(r)$ d'ordre fini. On se trouve en présence de deux problèmes à croissance qui sont en rapport étroit :

a) Résoudre avec des conditions de croissance dans $\mathbb{C}^n$ l'équation

(5) $$2i d'd''V = t$$

où t est un courant positif, fermé, d'indicatrice $\nu(r)$ d'ordre fini dans $\mathbb{C}^n$.

Existe-t-il une solution V (qui est alors nécessairement une fonction plurisousharmonique) pour laquelle $M(r) = \sup_{||z||=r} V(z)$ soit majoré en fonction de $\nu(r)$, en particulier d'ordre λ fini si ν est d'ordre λ ?

b) Soit $W = (U_s, f_s)$ une donnée de Cousin de zéros dans $\mathbb{C}^n$. L'indicatrice du courant d'intégration sur W étant $\nu(r)$, existe-t-il une fonction entière $F_o(z)$ telle que $W = [z \in \mathbb{C}^n ; F_o(z) = 0]$ et que la fonction plurisousharmonique $\log|F_o(z)|$ soit de croissance comparable à celle de $\nu(r)$ comme plus haut ?

La solution de a) fournit celle de b). Le problème a) est résolu dans [7, e] sous l'hypothèse $0 \notin \operatorname{supp} t$ avec la même précision que dans le cas classique $n=1$. A partir du noyau $h(a,z) = ||a-z||^{2-2n}$ des potentiels newtoniens dans $\mathbb{R}^{2n}$, on forme le noyau de genre l'entier $q \geqslant 0$:

$$e_n(a,z,q) = -||a-z||^{2-2n} + ||a||^{2-2n} + P_1(a,z) + \dots + P_q(a,z)$$

$$= - P_{q+1}(a,z) - P_{q+2}(a,z) \dots$$

où $P_s(a,z)$ est le polynôme homogène des z_j , $\bar{z}_j$ qui est dans le développement $h(a,\tau z) = \sum_m \tau^m P_m(a,z)$ le coefficient de τ^s , τ réel.

On dira alors que le courant $t \in T_{n-1,f}(\mathbb{C}^n)$ est de genre q , $(q \geqslant 0)$, si q est le plus petit entier tel que $\int_1^\infty r^{-q} \, d\,\nu(r)$ converge. La réponse aux problèmes précédents est alors donnée [7, e] par l'énoncé :

THEOREME 5. 1) <u>Soit</u> t <u>un courant positif fermé de dimension</u> $n-1$, <u>dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>et</u> $0 \notin \operatorname{supp} t$.

<u>Si</u> t <u>est d'ordre fini</u> λ , <u>une solution de (5) est donnée par</u> $I_q(z)$, <u>potentiel de</u> t <u>associé au noyau</u> $e_n(a,z,q)$ <u>de dimension</u> n , <u>du genre</u> q :

(8) $$V(z) = I_q(z) = k_n \int (t \wedge \beta_{n-1})_a \, e_n(a,z,q) = k_n \, \sigma_a[e_n(a,z,q)] ;$$

<u>la constante</u> k_n <u>vaut</u> $(4\Pi^n)^{-1}(n-2)\,!$ <u>pour</u> $k \geqslant 2$, <u>et</u> $k_1 = (2\Pi)^{-1}$; q <u>est le genre de</u> t , <u>c'est-à-dire le plus petit entier tel que</u> $\int_1^\infty r^{-q-2n+1} \sigma(r)dr$ <u>converge</u>. <u>Comme dans le cas classique on a</u> $q =$ <u>partie entière de</u> λ <u>si</u> λ <u>n'est pas entier</u> ; <u>si</u> λ <u>est entier on a</u> $q = \lambda$ <u>sauf si</u> $\int_1^\infty r^{-q+1-2n} dr$ <u>converge ce qui implique que le courant soit du type nul de l'ordre</u> λ .

2) <u>En particulier si</u> $t = \{i\Pi^{-1} d'd'' \log|f_s|\}$ <u>résulte d'une donnée de Cousin dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>une solution minimale du problème de Cousin à croissance est donnée par la fonction entière</u> $F_o(z)$ <u>déterminée par</u>

(9) $$\log|F_o(z)| = 2\Pi \; I_q(z)$$

Alors toute solution du problème de Cousin s'écrit $F(z) = F_o(z)G(z)$ où $G(z)$ est de la forme $e^{g(z)}$, g entière.

3) Les solutions (8) et (9) sont majorées en fonction de l'indicatrice $\nu(r)$ par

(10) $$I_q(z) \leqslant A(n,q)r^q \left[\int_o^r u^{-q-1} \nu(u)du + r \int_r^\infty u^{-q-2} \nu(u)du \right] .$$

La solution $I_q(z)$ est du même ordre λ que $\nu(r)$. Elle est caractérisée par cette propriété et le fait que ses dérivées d'ordre $m \leqslant E(\lambda)$ s'annulent à l'origine.

Si λ est entier et $q = \lambda-1$, elle est d'ordre de croissance λ, de type nul et est déterminée par le fait que les dérivées d'ordre $m \leqslant \lambda-1$ s'annulent à l'origine.

Dans le cas du problème de Cousin, $F_o(z)$ est déterminée à la multiplication près par un nombre de module un.

Signalons l'existence de "théorèmes de Lindelöf" utiles dans le cas exponentiel (cf. [7, e]).

9. Les résultats précédents publiés en Notes en 1953 n'ont été rédigés en détail par nous qu'en 1964 [7, e] après [7, a] qui donnait la notion de courant positif. Le point essentiel est que le potentiel I_q qui est par construction une fonction $\mathbb{R}^{2n}$-sousharmonique est une fonction plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$.

Récemment (1972), H. Skoda [11] a donné une méthode qui prolonge la nôtre, mais l'étend considérablement. L'idée est d'étudier systématiquement le "défaut de plurisousharmonicité" des potentiels newtoniens $(t \wedge \beta_p)_a * ||z-a||^{-2p}$ où $t \in T_{p,f}(\mathbb{C}^n)$; en fait on devra pour obtenir la convergence subsitituer à la mesure $t \wedge \beta_p$ son produit par une fonction $\eta(a)$ à support compact. La méthode de Skoda permet de traîter aussi bien le cas de l'ordre de croissance fini ou infini, pour p quelconque, $0 \leqslant p \leqslant n-1$, c'est-à-dire que le résultat sera applicable à des ensembles analytiques M dans $\mathbb{C}^n$ de codimension quelconque, mais le résultat est atteint au prix d'une certaine relaxation des conditions posées.

Si $t \in T_{p,f}(\mathbb{C}^n)$ est donné, d'indicatrice $\nu(r)$, on déterminera une fonction V, plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$ telle que le support singulier (et non plus le support) de $d'd''V$ soit contenu dans le support de t. En particulier si $t = t[M]$ et $\dim M = p$, M sera le support singulier de $d'd''V$. La construction de V est faite dans [11] en construisant des potentiels

(11) $$V_j(z) = -\int ||z-a||^{-2p}\,[t\wedge \beta_p\, \eta_j(a)]_a\ ,$$

η_j étant C^∞ à support compact. On "recolle" de tels potentiels, par une partition $\mathcal{e}_j$ de l'unité ; $U(z) = \Sigma\, \mathcal{e}_j\, V_j(z)$ n'est pas plurisousharmonique, mais on majore son "défaut de plurisousharmonicité" en donnant une minoration :

(12) $$\Sigma \frac{\partial^2 U}{\partial z_p \partial \bar z_p}\, a_p \bar a_q = h(u,a) \geqslant - C(\varepsilon)\,(1+r)^{-2}\,\nu[(1+5\varepsilon)\,(1+r)]\,||a||^2\ .$$

en fonction de ν . Le second membre est une forme du vecteur a à <u>coefficients continus</u>. On construit une fonction plurisousharmonique W continue dans $\mathbb{C}^n$ de manière que

$$V = U + W$$

soit plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$, et soit continu en dehors de supp t . La fonction de relaxation W est choisie continue, de croissance juste suffisante pour que sa plurisousharmonicité compense le défaut donné par le second membre de (12).

Si on modifie la construction faite par H. Skoda dans [11], en remplaçant dans (12) ν par $\nu * \alpha_\varepsilon$, où α_ε est une approximation C^∞ de la mesure de Dirac, de support $||z|| < \varepsilon$, on obtient dans (12) un second membre qui est une forme à coefficients C^∞ . On a alors :

THEOREME 6. <u>Etant donné un courant</u> t <u>positif fermé de dimension</u> p <u>dans</u> $\mathbb{C}^n$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$, <u>d'indicatrice</u> $\nu(r)$, <u>il existe une fonction plurisousharmonique</u> V <u>qui est</u> C^∞ <u>hors du support singulier de</u> t , <u>et qui pour</u> $\varepsilon > 0$, $d > 0$ <u>donnés arbitrairement vérifie pour</u> $r > r_0$ <u>l'une (au choix) des majorations suivantes</u> :

(a) $V(z) \leqslant C(\varepsilon) r^2\, \sigma(r+\varepsilon)$, $r = ||z||$,

(b) $V(z) \leqslant C(\varepsilon)\, \log^2 r\ \nu(r+\varepsilon r)$

(c) $V(z) \leqslant C(\varepsilon,d)\,(1+r)^d \int_1^{1+r} u^{-d-1}\,\nu(u+\varepsilon u)\,du$

(d) Si $0 \notin$ supp t et $\int_0^\infty r^{-2}\,\nu(r)\,dr < \infty$, on peut prendre

$$V(z) \leqslant C(\varepsilon)\Big[\int_0^{r+\varepsilon} u^{-1}\,\nu(u)\,du + (r+\varepsilon)\int_{r+\varepsilon}^\infty u^{-2}\nu(u)\,du\Big]$$

$C(\varepsilon)$ est une constante qui dépend de ε , n et t .

<u>Cas où</u> $t = t[M]$. Si t est le courant d'intégration sur un ensemble analytique M , en utilisant la méthode de Hörmander-Bombieri, H. Skoda construit (cf. [11]) $n+1$ fonctions entières distinctes $F_j(z_1,\ldots,z)$ telles que M soit exac-

tement l'ensemble défini par les équations $F_j = 0$, et que les $\log|F_j(z)|$ vérifient pour $||z||$ assez grand l'une quelconque des majorations précédentes.

En particulier si $\nu(r)$ est borné, les F_j sont des polynômes et M est algébrique d'après (d).

Le théorème obtenu montre ainsi l'existence d'au moins une représentation globale de M sous la forme $F_j = 0$ par des fonctions entières dont la croissance est majorée à partir de celle de l'indicatrice ν de M .

10. L'étude locale du potentiel d'un courant $t \in T_{p,f}(\mathbb{C}^n)$ montre encore (cf. [11]) que si, au voisinage de z_o , η_j vaut 1, on a la propriété suivante, si $c>0$:

a) $\Psi = \exp(-\frac{n}{pc} V_j)$ <u>est non sommable au voisinage de</u> z_o si $\nu(z_o) \geq c$.

b) Ψ <u>est sommable au voisinage de</u> z_o <u>si</u> $\nu(z_o) < (1 - \frac{p}{n})c$.

La méthode de construction des F_j à partir de la fonction plurisousharmonique V fait appel au résultat de Hörmander-Bombieri : soit Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$, V une fonction plurisousharmonique dans Ω , $z_o \in \Omega$ un point tel que e^{-V} soit sommable au voisinage de z_o . Il existe une fonction F holomorphe dans Ω telle que l'on ait $F(z_o) = 1$ et que

$$\int_\Omega |F(z)|^2 \exp[-V(z)] \, (1+||z||^2)^{-n-2} \beta_n < \infty \tag{13}$$

où β_n est l'élément de volume de $\mathbb{C}^n$. En un point z_1 , au voisinage duquel e^{-V} est non sommable, on a nécessairement $F(z_1) = 0$. Cette méthode avait déjà permis à E. Bombieri de montrer [2] que pour $t \in T_{n-1,f}(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble $\nu(a) \geq c > 0$, $a \in \operatorname{supp} t$, est contenu dans un ensemble analytique. Le travail [11] va plus loin et, utilisant l'étude locale, H. Skoda établit :

THEOREME 7. <u>Soit</u> E_c <u>l'ensemble des points</u> $a \in \operatorname{supp} t$, $t \in T_{p,f}(G)$ <u>où l'on a</u> $\nu(a) \geq c$, $c>0$, G <u>étant un domaine de</u> $\mathbb{C}^n$. <u>Il existe un ensemble analytique</u> M <u>dans</u> G , <u>de dimension</u> $\leq p$, <u>qui contient</u> E_c <u>et qui est contenu dans</u> $E_{c'}$, <u>avec</u> $c' = (1 - \frac{p}{n})c$: $E_c \subset M \subset E_{c'}$.

La démonstration du théorème 7 utilise l'étude locale des courants positifs fermés, mais aussi (13). Le théorème 7 complète les énoncés du § 3 concernant le nombre $\nu(a)$ que nous avons donnés au début de cet exposé. Toutefois il ne détermine pas la structure des ensembles fermés E_c sur le support d'un courant positif fermé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (E.) . - Conditions for the analyticity of certain sets. Michigan Math. J., p. 289-304 (1964).

[2] BOMBIERI (E.) . - Algebraic values of meromorphic maps. Inv. Math. t. 10, P. 267-287 (1970) et t. 11, p. 163-166 (1970).

[3] DOLBEAULT (P.) . - Ann. Math., t. 64, p. 84-130 (1956).

[4] FRENKEL (J.) et NORGUET (F.) . - Sur la cohomologie à coefficients complexes des variétés de Stein. C. R. Ac. Sci. Paris, p. 2988-2989 (1963).

[5] HARVEY (F. R.) et KING (J.) . - On the structure of positive currents, Inventiones Math., t. 15, p. 47-52 (1972).

[5b] HARVEY (F. R.) . - A result on extending positive currents (à paraître dans Rice University Studies).

[6] KING (J.) . - The currents defined by analytic varieties. Acta Math., t. 127, p. 184-220 (1971).

[7] LELONG (P.) . - a) Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. de France, t. 85, p. 239-262 (1957).

- b) Propriétés métriques des ensembles analytiques complexes, Séminaire P. Lelong, 6è année, n° 2 (1965-1966). Paris, Institut Henri Poincaré (1966).

- c) Plurisubharmonic functions and positive differential forms, Gordon and Breach édit., New-York (1967).

-d) Notes aux C. R. Ac. Sci. Paris, t. 237, p. 691-693, p. 865-867 et p. 1379.

- e) Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbb{C}^n$. J. Anal., Jérusalem, t. 12, p. 365-406 (1964).

- f) Topologies sur les courants positifs fermés. Séminaire Pierre Lelong, Lecture-Notes Springer n° 275, p. 27-68 (1971).

- g) Eléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés. Séminaire d'analyse Pierre Lelong, Lecture-Notes Springer (1972).

- h) Fonctions entières de type exponentiel dans $\mathbb{C}^n$. Annales Institut Fourier, t. 16, fasc. 2, p. 269-328 (1966).

- i) Ensembles analytiques et courants positifs fermés. Compte-rendus du Colloque d'Analyse fonctionnelle de Rio de Janeiro (1972). Actualités Hermann, Paris (1973).

[8] de RHAM (G.) . - Variétés différentiables, Hermann, Paris (1960).

[9] SCHIFFMAN (B.) . - On the removal of singularities of analytic sets. Mich. Math. J., t. 15, p. 111-120 (1968).

[10] SERRE (J. P.) . - Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, p. 57-68 (1953).

[11] SKODA (H.) . - Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. de France, t. 100, p. 353-408 (1972).

[12] THIE (P.) . - The Lelong number in a point of a complex analytic set, Math. Ann., t. 172, p. 269-312 (1967).

[13] CORNALBA (M.) et SHIFFMAN (B.) . - A counterexample to the "Transcendental Bezout Problem", Ann. of Math., 96, p. 402-406 (1972).

Texte reçu le 5/3/1973

Université PARIS VI
Mathématiques
11, Quai Saint Bernard
PARIS Vè