MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE ROBERT

Sur l'axiomatique des systèmes générateurs, des rangs, Applications à certains problèmes combinatoires

Mémoires de la S. M. F., tome 14 (1968)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1968__14__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 14, 1968, 192 p.

Sur l'axiomatique des systèmes générateurs, des rangs, ...
Applications à certains problèmes combinatoires

par Pierre ROBERT (*)

Table des matières

(*) Thèse Sci. math. Rennes, 1966

Introduction

Ce travail reprend en partie la rédaction de ma thèse. Il contient des résultats obtenus depuis, notamment dans les chapitres I, II, III et V qui ont été entièrement refondus.

L'objet primitif de ce travail a été l'étude du problème de géométrie algébrique suivant :

Soient pour $i = 1,\dots, n$, $M_i = (x_i^j)$ n points de l'espace affine K^p sur le corps K et k un sous-corps de K. A quelles conditions peut-on choisir pour chaque point M_i une de ses coordonnées $x_i^{j(i)}$, de sorte que les n éléments de K ainsi choisis soient algébriquement libres sur k ?

La propriété :

$$\forall J \subset \{1,\dots, n\} \quad , \quad \mathrm{dimal}_k\, k\,(M_i \;/\; i \in J) \geq \mathrm{Card}\, J$$

s'est avérée nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, d'où l'intérêt d'étudier cette propriété combinatoire associée à la dimension algébrique dans le cas d'autres dimensions.

Dans BOURBAKI [C, II, 5] , § 5 , exercice 14, p. 108 et dans Commutative Algebra de P. SAMUEL et O. ZARISKI [L] , chap. I, § 21 et chap. II, § 12 et 17 , est définie la structure de φ-espace pour étudier les propriétés communes des espaces vectoriels, des extensions de corps et des p-bases, propriétés associées aux notions de parties libres, de bases et de dimension.

La première partie de ce travail a donc pour but d'étudier les espèces de structures qui peuvent être définies en partant des notions de parties libres, bases, rang ou dimension, fonctions génératrices, fermetures algébriques et sous-espaces. Le langage fonctoriel étant désormais classique (voir J. BENABOU [P] et C. EHRESMANN [R]), et les espèces de structures, qui seront définies, étant espèces de structure au sens de BOURBAKI [C, I, 4] , le chapitre I a pour objet de dégager les "bonnes" structures grâce aux équivalences et aux déductions, qui sont des cas particuliers d'isomorphismes fonctoriels. Deux espèces de structure sont ainsi mises en évidence :

a) La structure de $\mathcal{L}$-espace : ensemble E muni de $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}(E)$, de caractère fini (les éléments de $\mathcal{L}$ sont les parties libres).

b) La structure de φ-espace : $\mathcal{L}$-espace E tel que, pour toute partie finie X de E, les parties libres maximales incluses dans X ont toutes le même nombre d'éléments.

Les planches I et II résument les systèmes d'axiomes équivalents et les équivalences canoniques de structures pour les $\mathcal{L}$-espaces et les φ-espaces. La planche III est un diagramme commutatif contenant un certain nombre de foncteurs fondamentaux définis dans le chapitre I.

Voici un bref historique concernant ces questions : Hassler WHITNEY dans [11] a étudié pour les ensembles finis des systèmes d'axiomes équivalents pour les notions de rang, base, parties libres, parties liées et bases complémentaires. En 1948, Richard RADO a etendu la notion de rang aux ensembles infinis dans [10] . Les structures définies sont essentiellement équivalentes à celle de φ-espace. Récemment P. SAMUEL et O. ZARISKI dans Commutative Algebra ont étudié une structure équivalente définie à partir d'une fonction génératrice. Par ailleurs, l'étude des treillis géométriques ([E] , IIIe Partie) et d'une manière générale les recherches sur les fondements de la géométrie (voir E.ARTIN [A] et R. BAER [O]) ont conduits à définir des espèces de structure plus ou moins équivalentes en partant des notions de sous-variétés ou de sous-espaces. Indiquons en outre les articles de HAUPT, NOBELING et PAUL [3] et de Richard RADO [9] où sont introduits des systèmes d'axiomes équivalents à ceux des φ-espaces, et le livre de Marshall HALL [F] chapitre 20, où sont étudiées en détail les géométries projectives planes.

La notion de circuit (partie liée minimale), introduite par Hassler WHITNEY dans [11] , simplifiera beaucoup de démonstrations. Cette terminologie est issue de la théorie des graphes (les graphes planaires sont canoniquement munis d'une structure de φ-espace, voir [12]).

Le chapitre II consiste en l'étude de ces deux espèces de structures grâce aux morphismes qui ont été définis au chapitre I. Les structures image réciproque et somme directe existent toujours, par contre, pour les φ-espaces les structures produit ou quotient n'existent pas en général. La réduction d'un φ-espace associée à l'image réciproque permet de préciser les liens entre les φ-espaces et les treillis géométriques. Quelques énoncés sur le problème de représentation terminent ce chapitre.

Le chapitre III est un chapitre Charnière entre cette première partie et les problèmes combinatoires. L'on rencontre le mot "disjonction" en théorie des ensembles (sous-ensembles disjoints), en théorie des corps (disjonction linéaire ou algébrique)... . Ces disjonctions sont de deux types : la disjonction linéaire est de nature initiale, i.e. est liée à la notion de produit, alors que la disjonction algébrique est de nature finale, i.e. est liée à la notion de réunion ou somme. D'où deux types de disjonction :

a) La disjonction simple, qui contient les disjonctions ensembliste et algébrique. Après avoir étudié cette disjonction dans les $\mathcal{L}$-espace, et notamment y avoir analysé la propriété de translation, l'on démontre des propriétés particulières à la disjonction dans les φ-espaces, propriétés qui sont déjà combinatoires

b) La disjonction double, qui contient la disjonction linéaire.

La deuxième partie a pour objet la résolution de problèmes combinatoires, finis ou infinis, sur les φ-espaces, voire les $\mathcal{L}$-espaces. Les chapitres IV et V sont consacrés au :

Problème Etant donnée une famille de cardinaux $(a_i)_{i \in I}$, caractériser les familles $(X_i)_{i \in I}$ de parties d'un φ-espace E, pour qu'il existe une famille φ-disjointe (Y_i) incluse dans (X_i) (i.e. pour tout i, $Y_i \subset X_i$) et telle que pour tout i, $\dim \varphi\ (Y_i) = a_i$; et construire une telle famille (Y_i) quand elle existe.

Une condition nécessaire d'existence s'impose :

$$\forall J \subset I \quad , \quad \dim \varphi\ (X_J) \geq a_J \tag{1}$$

où l'on écrit : $X_J = \cup X_i \quad [i \in J]$ et $a_J = \sum a_i \quad [i \in J]$.

L'on dit qu'une famille (X_i) est de type (a_i) quand la condition (1) est réalisée.

Au chapitre IV l'on démontre :

1°) Si I est fini, toute famille (X_i) de parties d'un φ-espace E, de type (a_i) contient une famille φ-disjointe de type (a_i).

Quand les a_i sont finis, deux démonstrations sont données, d'où deux méthodes (suppressibilité et empilement) pour construire une famille disjointe incluse et de type (a_i)

Ce résultat a pour cas particuliers le théorème de KONIG-HALL et un théorème de Richard RADO (voir [10]).

2°) Le résultat 1°) est vrai dans un $\mathcal{L}$-espace E si et seulement si E est un φ-espace.

Les familles infinies sont étudiées au chapitre V. Voici les principaux théorèmes :

3°) Toute famille (X_i) de parties d'un φ-espace E, telle que pour tout i $\dim \varphi\ (X_i)$ soit finie, contient une famille φ-disjointe de type (a_i) si et seulement si :

$$\forall J \in \mathcal{F}\ (I) \quad , \quad \dim \varphi\ (X_J) \geq a_J$$

où $\mathcal{F}(I)$ est l'ensemble des parties finies de I.

Ceci généralise un théorème de Richard RADO (lemme 1 de [10])

4°) Toute famille dénombrable (X_i) telle que, pour tout i dim $\varphi(X_i)$ soit infinie, contient une famille disjointe (Y_i) telle que pour tout i,

$$\dim \varphi(Y_i) = \dim \varphi(X_i)$$

(Pour les familles telles que Card I $\geq \aleph_1$, cet énoncé est faux en général).

5°) Si l'on admet seulement l'axiome du choix, l'on a :

Soit pour une famille $(a_i)_{i \in I}$ de cardinaux infinis, L l'ensemble des a_i et les propriétés :

(a) Pour tout cardinal $\ell \in L$ tel que $\ell = \aleph_0$ ou ℓ soit singulier, l'on a : Card $\{i \mid a_i = \ell\} \leq \ell$

(b) Pour tout cardinal $\ell \in L$ tel que $\ell \neq \aleph_0$ et ℓ soit régulier, l'on a : Card $\{i \mid a_i = \ell\} < \ell$

(c) Toute partie X de L telle que :

$$\forall Y \subset X \quad , \quad \operatorname{Sup} Y \in X \cup \{\operatorname{Sup} X\}$$

vérifie $\operatorname{Ord}(X) < \omega_1$

(d) L'ensemble des cardinaux ℓ de L tels que :

$$\aleph_0 < \overline{\ell} < \ell \quad \text{et} \quad \operatorname{Sup} L \cap (]\leftarrow, \ell[) = \ell$$

où $\overline{\ell}$ est le cardinal de cofinalité de ℓ et $]\leftarrow, \ell[$ l'ensemble des cardinaux $< \ell$, a un cardinal strictement inférieur à $\aleph_2$.

Toute famille (X_i) de parties d'un φ-espace E telle que dim $\varphi(X_i)$ soit infinie pour tout i et telle que $(\dim \varphi(X_i))_{i \in I}$ vérifie les propriétés (a), (b), (c) et (d), contient une famille φ-disjointe (Y_i) telle que :

$$\text{pour tout } i \in I, \qquad \dim \varphi(Y_i) = \dim \varphi(X_i)$$

(Les conditions (a), (b), (c) et (d) sont restrictives, et seuls des cas marginaux signalés au passage, sont restés ouverts).

6°) Si l'on admet l'axiome du choix et l'hypothèse du continu généralisé, toute famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties d'un φ-espace E telle que, pour tout $i \in I$, $\dim \varphi(X_i)$ soit infinie, et telle que la famille $(\dim \varphi(X_i))_{i \in I}$ vérifie les propriétés (c), (d) et :

(a') $\forall \ell \in L$, $\text{Card}\{i \mid a_i = \ell\} \leq \ell$

contient une famille φ-disjointe (Y_i) telle que :

pour tout $i \in I$, $\dim \varphi(X_i) = \dim \varphi(Y_i)$.

Ce chapitre se termine par une étude complète des familles dénombrables.

Au chapitre suivant, après avoir examiné la manière dont peut s'échanger un élément d'une base donnée avec un autre élément pour obtenir une nouvelle base, l'on étudie les circuits généralisés, i.e. les ensembles $\mathscr{C}$ de circuits tels qu'il existe une partie libre L pour laquelle les circuits de $\mathscr{C}$ ont au plus un élément en dehors de L. Quand L est fixée, la correspondance galoisienne : $\mathscr{C} \longrightarrow \cup\mathscr{C} - L$ est un isomorphisme de l'ensemble des circuits généralisés définis par L sur $\mathfrak{P}(\varphi(L) - L)$ ordonnés par l'inclusion. D'où la fonction $L_X = \cup L_x$ $[x \in X]$. L'on a ainsi une généralisation des "Systèmes fondamentaux de circuits" de Hassler WHITNEY. Une propriété caractéristique combinatoire des circuits généralisés est exposée par le théorème 4. Des applications à des constructions de φ-espaces permettent d'améliorer un résultat de H. WHITNEY ([11], Appendice) concernant les φ-espaces $\mathbb{F}_2$-représentables. Avec ces techniques, l'on démontre alors :

Soit E un φ-espace et k un entier ≥ 1. Pour qu'une partie S de E admette une partition formée de k parties libres, il faut et il suffit que S vérifie l'une des propriétés équivalentes :

(P_k) Card $S \geq k$ et pour tout $X \in \mathfrak{F}(S)$, Card $X \leq k \cdot \dim \varphi(X)$

(P'_k) Card $S \geq k$ et pour tout sous-espace A de dimension finie,

Card $(A \cap S) \leq k \cdot \dim \varphi(A \cap S)$

Ayant démontré ce théorème sur les espaces vectoriels, M. RADO se demandait si une condition nécessaire et suffisante de représentabilité d'un φ-espace comme partie d'un espace vectoriel n'était pas la validité de ce théorème.

Le dernier chapitre est une théorie constructive des changements de base. Pour les définir, il a été nécessaire d'établir le lemme combinatoire de 7.1. L'importance des changements de base faibles est qu'on peut en démontrer l'existence pour tout ordinal dénombrable....

Plus précisément :

Soient X et L deux bases d'un φ-espace E, $\leq$ un bon ordre sur X. Si $\mathrm{Ord}\,(X, \leq) < \omega_1$, alors il existe au moins une injection u de X dans L telle que : $L - u(X) + X$ soit une base de E et $\forall x \in X$, $(L-u\,(]\leftarrow, x[)) \cup (]\leftarrow, x)$ soit une base de E.

Quelques considérations sur des notions plus fortes et des exemples sur les matrices montrent la complexité de ces questions.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur SAMUEL, mon directeur de thèse, pour les conseils avisés et les encouragements qu'il m'a constamment prodigués, et pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée. Ce travail lui doit beaucoup et je le prie d'accepter ma sincère gratitude, ainsi que Monsieur le Professeur BENZECRI, qui m'a engagé dans la recherche.

Je prie Monsieur le Recteur MARTIN et Monsieur le Doyen BOCLE, mes premiers maîtres, qui m'ont conseillés depuis mes débuts, d'agréer l'hommage de mon profond respect et de ma sincère reconnaissance.

J'exprime ma sincère gratitude à Messieurs les Professeurs GUERINDON et GLAESER, et à Monsieur BENABOU pour leur aide et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Enfin je ne saurais non plus oublier l'aide et les encouragements de Messieurs les Professeurs ANTOINE et METIVIER, ainsi que de tous ceux qui m'ont entouré au cours de mes études. Que tous veuillent bien croire à ma reconnaissance.

PLANCHE I

Equivalences des structures de $\mathcal{L}$-espace sur un ensemble E

	$\mathcal{L}$	r
$\mathcal{L}$	Ensembles des parties libres : $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(E)$; (L_1)	$r_{\mathcal{L}}(X) = \text{Max Card } Y \quad [Y \in \mathcal{L} \text{ et } Y \subset X]$
r	$\mathcal{L}_r = \{X \mid X \subset E \text{ et } \forall Y \in \mathcal{F}(X), \; r(Y) = \text{Card } Y\}$	rang r : $\mathcal{F}(E) \longrightarrow N$ vérifiant (R_1) et (R_2)
$\overline{\mathcal{L}}$	$\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{L}}} = \mathcal{P}(E) - \mathcal{L}$	$r_{\overline{\mathcal{L}}} = r_{\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{L}}}}$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \{X \mid X \subset E \text{ et } \forall Y \in \mathcal{C}, \; Y \not\subset X\}$	$r_{\mathcal{C}} = r_{\mathcal{L}_{\mathcal{C}}}$
$\mathcal{B}$	$\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \{X \mid X \subset E \text{ et } \exists B \in \mathcal{B}, \; X \subset B\}$	$r_{\mathcal{B}} = r_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}}}$
φ	$\mathcal{L}_{\varphi} = \{X \mid X \subset E \text{ et } \forall x \in X, \; x \notin \varphi(X-x)\}$ $\mathcal{L}_{\varphi} = \{X \mid X \subset E$ et il existe un ordre total sur X tel que $\forall x \in X, \; x \notin \varphi(\{y \mid y \in X \text{ et } y < x\})\}$	$r_{\varphi} = r_{\mathcal{L}_{\varphi}}$

	$\overline{\mathcal{L}}$	$\mathcal{C}$
$\mathcal{L}$	$\overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{L}} = \mathcal{P}(E) - \mathcal{L}$	$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{L}}}$
r	$\overline{\mathcal{L}}_r = \{X \mid X \subset E \text{ et } \exists Y \in \mathcal{F}(X), \; r(Y) < \text{Card } Y\}$	$\mathcal{C}_r = \{X \mid X \in \mathcal{F}(E) \text{ et } \forall x \in X, \; r(X-x) = r(X) = \text{Card } X - 1\}$
$\overline{\mathcal{L}}$	Ensemble des parties liées : $\overline{\mathcal{L}} \subset \mathcal{P}(E)$; $(\overline{L}_1)$	$\mathcal{C}_{\overline{\mathcal{L}}} = \text{Min } \overline{\mathcal{L}}$

	$\bar{\mathcal{L}}$	$\mathcal{C}$
$\mathcal{C}$	$\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{C}} = \{X \mid X \subset E$ et $\exists\, Y \in \mathcal{C}$, $X \supset Y\}$	Ensemble des circuits : $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$; (C_1)
$\mathcal{B}$	$\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{B}} = \{X \mid X \subset E$ et $\forall B \in \mathcal{B}$, $X \not\subset B\}$	$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_{\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{B}}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{B}}}$
φ	$\bar{\mathcal{L}}_{\varphi} = \{X \mid X \subset E$ et $\exists\, x \in X$, $x \in \varphi\,(X-x)\}$	$\mathcal{C}_{\varphi} = \{c / c \in \mathcal{P}(E)$ et $\forall x \in c$, $x \in \varphi(c-x)$ et $\forall y \in c, y \neq x$, $x \notin \varphi\,(c-x-y)\}$

	$\mathcal{B}$	φ
$\mathcal{L}$	$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \mathrm{Max}\ \mathcal{L}$	$\varphi_{\mathcal{L}}(X) = X \cup \{x \mid x \in E$ et $\exists\, Y \in \mathcal{L}$, $Y \subset X$ et $Y + x \notin \mathcal{L}\}$
r	$\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_{\mathcal{L}_r}$	$\varphi_r\,(X) = \{x \mid x \in E$ et $\exists\, Y \in \mathcal{P}(X)$ tel que $r(Y+x) = r(Y)\}$
$\bar{\mathcal{L}}$	$\mathcal{B}_{\bar{y}} = \mathcal{B}_{\mathcal{L}\bar{\mathcal{L}}}$	$\varphi_{\bar{\mathcal{L}}}\,(X) = X \cup \{x \mid x \in E$ et $\exists\, Y \notin \bar{\mathcal{L}}$, $Y \subset X$ et $Y + x \in \bar{\mathcal{L}}\}$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \mathcal{B}_{\mathcal{L}_{\mathcal{C}}}$	$\varphi_{\mathcal{C}}\,(X) = X \cup \{x \mid x \in E$ et $\exists\, Y \subset X$ tel que $Y + x \in \mathcal{C}\}$
$\mathcal{B}$	Ensemble des bases : $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$; (B_1) et (B_2)	$\varphi_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}}}$
φ	$\mathcal{B}_{\varphi} = \{B \mid B \subset E$ et $\forall x \in E$, $x \in \varphi(B)$ et $\forall x \in B$, $x \notin \varphi(B-x)$	fonction génératrice : $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$; $(G_1), (G_2), (G_3)$ et (G_5)

Sur les casiers diagonaux sont rappellées la définition de

$\mathcal{L}$ - espace relative à l'élément diagonal

PLANCHE I

PLANCHE II

Equivalence des structures de φ-espace sur un ensemble E .

II. 1 Systèmes d'axiomes équivalents définissant la structure de φ-espace

$\mathscr{L}$; (L_1) , (L_2)		$\mathscr{C}$; (C_1) , (C'_2)
r ; (R_1) , (R_3) $[\Rightarrow (R_2)]$		$\mathscr{C}$; (C_1) , (C''_2)
r ; (R_1) , (R'_3) $[\rightarrow (R_2)]$		$\mathscr{B}$; (B_1) , (B_2) et (B_3)
$\bar{\mathscr{L}}$; $(\bar{L}_1)$, $(\bar{L}_2)$		φ ; (G_1) , (G_2) , (G_3) et (G_6)
$\mathscr{C}$; (C_1) , (C_2)		$\mathscr{S}$ ensemble des sous-espaces ; $\{E\} \subset \mathscr{S} \subset \mathfrak{P}(E)$, treillis géométrique

II. 2. Formules de passage d'un système à l'autre.

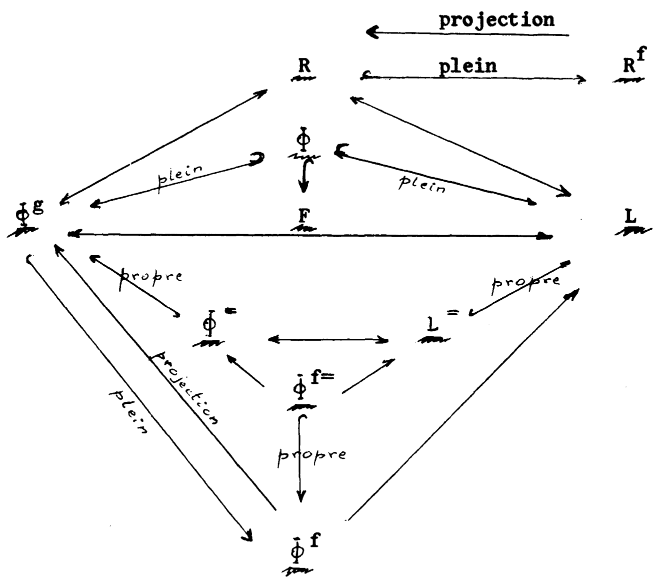
Outre les formules de la planche I (non diagonales) on a :

	$\mathscr{S}$	$\mathscr{S}$
$\mathscr{L}$	$\mathscr{S}_{\mathscr{L}} = \{A \mid A \subset E$ et $\forall x \in E-A$, $\forall Y \in \mathscr{F}(A)$, $(Y \in \mathscr{L} \Rightarrow Y+x \in \mathscr{L})\}$	$\mathscr{L}_{\mathscr{S}} = \mathscr{L}_{\varphi_{\mathscr{L}}}$
r	$\mathscr{S}_r = \{A \mid A \subset E$ et $\forall x \in E-A$, $\forall Y \in \mathscr{F}(A)$, $r(Y+x) = r(Y) + 1\}$	$r_{\mathscr{S}} = r_{\mathscr{L}_{\varphi_{\mathscr{S}}}}$
$\bar{\mathscr{L}}$	$\mathscr{S}_{\bar{\mathscr{L}}} = \{A \mid A \subset E$ et $\forall x \in E-A$, $\forall Y \in \mathscr{F}(A)$, $Y+x \in \bar{\mathscr{L}} \Rightarrow Y \in \bar{\mathscr{L}}\}$	$\bar{\mathscr{L}}_{\mathscr{S}} = \bar{\mathscr{L}}_{\mathscr{L}_{\varphi_{\mathscr{S}}}}$
$\mathscr{C}$	$\mathscr{S}_{\mathscr{C}} = \{A \mid A \subset E$ et $\forall x \in E-A$, $\forall Y \in \mathscr{F}(A)$, $Y+x \notin \mathscr{C}\}$	$\mathscr{C}_{\mathscr{S}} = \mathscr{C}_{\bar{\mathscr{L}}_{\mathscr{S}}} = \mathscr{C}_{\bar{\mathscr{L}}_{\mathscr{L}_{\varphi_{\mathscr{S}}}}}$
$\mathscr{B}$	$\mathscr{S}_{\mathscr{B}} = \mathscr{S}_{\mathscr{L}_{\mathscr{B}}}$	$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \mathscr{B}_{\mathscr{L}_{\varphi_{\mathscr{S}}}}$
φ	$\mathscr{S}_{\varphi} = \{A \mid A \subset E$ et $A \supset \varphi(A)\}$	$\varphi_{\mathscr{S}}(X) = \cap A$ $[A \in \mathscr{S}$ et $A \supset X]$

et $\mathscr{L}_{\varphi} = \{X \mid X \subset E$ et $\forall x \in X,\ \varphi(X-x) \subsetneq \varphi(X)\}$; $\bar{\mathscr{L}}_{\varphi} = \{X \mid X \subset E$ et $\exists\, x \in X,\ \varphi(X-x) = \varphi(X)\}$ $r_{\mathscr{L}}(X) = \text{Card } Y$ où Y est <u>une</u> partie libre maximale incluse dans X

PLANCHE III

Diagramme récapitulatif des principaux facteurs définis au chapitre I .



Ce diagramme est commutatif, les flèches représentant des foncteurs ensemblistes.

$\longleftrightarrow$ sont des isomorphismes

$\hookrightarrow$ sont des foncteurs d'inclusion, ou des foncteurs injectifs

Chap. I Axiomatique sur les parties libres et les parties ou familles génératrices

1.1. Introduction

Les notions de parties libres, rang, partie liée, circuit, fonctions génératrices, fermetures et treillis sont du langage courant de nombre de théories dans la Mathématique. L'objet de cette première section est de définir les structures naturelles obtenues en généralisant ces notions dont les cas particuliers sont bien connus et de comparer les diverses généralisations obtenues. Il se dégage de cette étude deux structures importantes :

1°) $\mathcal{L}$-espace : couple $(E, \mathcal{L})$ formé d'un ensemble E et d'une partie $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{P}(E)$, de caractère fini.

2°) φ-espace : couple (E, φ) formé d'un ensemble E et d'une fermeture φ, de caractère fini et vérifiant un axiome d'échange qui sera précisé.

Certaines des équivalences de structure qui sont présentées ont été étudiées par H. Whitney [11] pour les ensembles finis, R. Rado [10] pour les rangs, B. Jönsson [4] pour les fermetures et les treillis, ...

Voici quelques précisions sur le langage utilisé pour les équivalences de structures et de catégories

Pour éviter toute difficulté de logique, tous les ensembles considérés sont supposés appartenir à un même ensemble universel dans lequel on peut faire les opérations ensemblistes usuelles (voir C. Ehresmann [R], introduction, pp. VIII et IX), et $\underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$ est de la catégorie des applications entre ces ensembles.

Une catégorie ensembliste est alors un couple $(\underset{\sim}{C}, S)$ formé d'une catégorie $\underset{\sim}{C}$ et d'un foncteur fidèle S de $\underset{\sim}{C}$ dans $\underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$ appellé foncteur d'oubli. Un foncteur ensembliste de $(\underset{\sim}{C}, S)$ dans $(\underset{\sim}{C}', S')$ est alors un foncteur F de $\underset{\sim}{C}$ dans $\underset{\sim}{C}'$ covariant tel que $S = S' \circ F$. $(\underset{\sim}{C}, S)$ et $(\underset{\sim}{C}', S')$ sont dites isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme ensembliste de $\underset{\sim}{C}$ sur $\underset{\sim}{C}'$.

Si les objets de $\underset{\sim}{C}$ (resp. $\underset{\sim}{C}'$) sont des ensembles structurés par une espèce de structure $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$), $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalentes (au sens de Bourbaki [C, I, 4], §1, n° 7) si et seulement si $(I\,\underset{\sim}{C}, S)$ et $(I\,\underset{\sim}{C}', S')$

sont isomorphes ($I\underset{\sim}{C}$ sous-catégorie des isomorphismes de $\underset{\sim}{C}$). Voici en outre quelques propriétés :

1) Un foncteur ensembliste est déterminé par les transformés des objets (on en déduit aisément alors les transformés des morphismes).

2) Si F et G sont ensemblistes et si $F \circ G$ existe, $F \circ G$ l'est aussi.

3) Si F est ensembliste et inversible, alors F^{-1} est ensembliste.

Ces notions s'étendent aisément aux foncteurs ensemblistes contravariants.

Pour tout ensemble E, l'on écrit $\underset{\sim}{C}(E)$ l'ensemble ordonné des objets au-dessus de E : $A \geqslant B$ si et seulement si l'application identique de E est un morphisme de A dans B (si 1_E isomorphisme de A sur B entraîne $A = B$ sinon préordre seulement).

1.2.- Parties libres, rangs, parties liées, bases et circuits

1.2.1.- $\mathscr{L}$-espaces

Définition 1.- L'on appelle $\mathscr{L}$-espace tout couple $(E, \mathscr{L})$ formé d'un ensemble E et d'une partie $\mathscr{L}$ de $\mathfrak{P}(E)$, de caractère fini, i.e. vérifiant l'axiome * :

$$(L_1) \qquad (\forall X \in \mathfrak{P}(E)) \qquad ((X \in \mathscr{L}) \Longleftrightarrow (\forall Y \in \mathscr{F}(X)\ ,\ Y \in \mathscr{L}))$$

Les $X \in \mathscr{L}$ sont alors appellées des parties libres (ou $\mathscr{L}$-libres)

Si X est libre, toute partie de X est libre.

Exemples :

1°) Tout A-module à gauche M. L'on peut définir entre autres les ensembles de parties libres suivant :

1 a) $\mathscr{L}_o = \{X \mid X \subset M$ et $\forall x \in X\ ,\ x \notin \overline{X - \{x\}}\}$

où $\overline{X - \{x\}}$ est le sous-A-module engendré par $X - \{x\}$. Ce sont les parties libres classiques.

---

* $\mathscr{F}(X)$ est l'ensemble des parties finies de X

$\mathscr{F}_p(X)$ est l'ensemble des parties de cardinal p, de X

1 b) $\mathcal{L}_1 = \{X \mid X \subset M$ et $((\Sigma \lambda_x\, x[x \in X] = 0) \to (\forall x \in X,\ \lambda_x\, x = 0))\}$
où Σ est une combinaison A-linéaire.

Quand M est unitaire, $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_0$; mais $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0$ si et seulement si A/I est un corps où I est l'annulateur de M. (voir [C, II, 2] , n° 12 , p.45).

2°) Soit B sous-anneau de A, $\mathcal{L}_0$ (resp. $\mathcal{L}_1$) l'ensemble des parties X de A telles que ** :

$$\forall Y = \{y_1, \dots, y_n\} \in \mathcal{F}(X) \quad , \quad \forall f \in B\,[X_1, \dots, X_n]$$

$$f(y_1, \dots, y_n) = 0 \quad \text{entraîne} \quad f = 0$$

(resp. $\forall x \in X$, $\forall Y = \{y_1, \dots, y_n\} \in \mathcal{F}(X - \{x\})$, il n'existe pas de polynômes $f \in B\,[X_0, X_1, \dots, X_n]$ distingué en X_0 tel que : $f(x, y_1, \dots, y_n) = 0$ (l'on suppose ici que B a une unité e qui est le coefficient du terme de plus haut degré en X_0)).

Les parties dans $\mathcal{L}_0$ sont dites algèbriquement libres sur B, celles dans $\mathcal{L}_1$ intégralement libres sur B.

3°) De tout schema simplicial S (ou complexe simplicial) (voir[M], chap. I, 3.2., p. 37) on déduit canoniquement un $\mathcal{L}$-espace : soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des simplexes de S, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des parties X de S telles que :

$\forall Y \in \mathcal{F}(X)$, $(y)_{y \in Y}$ soit un simplexe.

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un $\mathcal{L}$-espace est dite libre si et seulement si les x_i sont distincts deux à deux et $\{x_i \mid i \in I\}$ est une partie $\mathcal{L}$-libre.

L'on désigne par $\underset{\sim}{L}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{L}$-espaces, et dont les morphismes sont les applications f de $(E, \mathcal{L})$ dans $(E', \mathcal{L}')$ telles que :

(h_1) toute famille (x_i) d'éléments de E telle que $(f(x_i))$ soit $\mathcal{L}'$-libre, est $\mathcal{L}$-libre

(on généralise ainsi la notion d'application linéaire).

** $B\,[X_1, \dots, X_n]$ est l'anneau des polynômes à n indéterminées $X_1, \dots, X_n$ sur B

1.2.2.- rang sur $(E, \mathscr{L})$. Rangs faibles.

L'application $r_{\mathscr{L}}$ (ou $r_{\mathscr{L}}$) qui à toute partie X finie de E associe le nombre entier :

$$r_{\mathscr{L}}(X) = r(X) = \mathrm{Max}\,(|Y|) \qquad [Y \in \mathscr{L} \quad \text{et} \quad Y \subset X] \qquad (1)$$

vérifie les axiomes * :

(R_1) $r(\emptyset) = 0$ et $\forall X \in \mathscr{F}(E)$, $\forall x \in E$, $r(X+x) = r(X) + h$ où $h = 0$ ou $h = 1$

(R_2) $\forall X \in \mathscr{F}(E)$, $\exists\, Y \in \mathscr{F}(X)$, $r(X) = r(Y) = |Y|$

Définition 2.- On appelle rang (resp. rang faible) sur un ensemble E toute application r de $\mathscr{F}(E)$ dans l'ensemble N des entiers naturels vérifiant les axiomes (R_1) et (R_2) (resp. (R_1)) ci-dessus.

Il résulte de l'axiome (R_1) que : $\forall x \in \mathscr{F}(E)$, $0 \leq r(X) \leq |X|$

L'on désigne par $\underset{\sim}{R}^f$ (resp. $\underset{\sim}{R}$) la catégorie dont les objets sont les ensembles (E , r) munis d'un rang faible (resp. rang) r, les morphismes de (E , r) dans (E' , r') étant les applications f de E dans E' qui diminuent le rang, i.e. telles que :

(h2) $\forall X \in \mathscr{F}(E)$, $r'(f(X)) \leq r(X)$

Théorème 1.- $(E , r) \longrightarrow (E, \mathscr{L}_r)$

$$\text{où} \quad \mathscr{L}_r = \{X \mid X \subset E \quad \text{et} \quad \forall Y \in \mathscr{F}(X) , r(Y) = |Y|\} \qquad (2)$$

définit un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{R}^f$ sur $\underset{\sim}{L}$ dont la restriction à $\underset{\sim}{R}$ est un isomorphisme de $\underset{\sim}{R}$ sur $\underset{\sim}{L}$. L'isomorphisme inverse est défini par la relation (1).

Démonstration : On vérifie que :

1°) E étant un ensemble donné, $r \longrightarrow \mathscr{L}_r$ défini par (2) est une application de $\underset{\sim}{R}^f(E)$ dans $\underset{\sim}{L}(E)$ qui n'est pas croissante en général, mais dont la restriction à $\underset{\sim}{R}(E)$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $\underset{\sim}{R}(E)$ sur $\underset{\sim}{L}(E)$, ce dernier point étant d'ailleurs une conséquence de :

---

* L'on écrit $|Y|$ au lieu de Card Y quand aucune confusion n'est à craindre avec une valuation.

2°) Si f est un $\underset{\sim}{R}^f$-morphisme de $(E\ ,\ r)$ dans $(E'\ ,\ r')$, f est un $\underset{\sim}{L}$-morphisme de $(E\ ,\ \mathscr{L}_r)$ dans $(E'\ ,\ \mathscr{L}_{r'})$ (réciproque fausse en général), mais f est un $\underset{\sim}{R}$-morphisme si et seulement si f est un $\underset{\sim}{L}$-morphisme

D'où la <u>correspondance galoisienne</u> :

<u>Corollaire 1.-</u> Soit E un ensemble $r \longrightarrow \mathscr{L}_r$ et $\mathscr{L} \longrightarrow r_{\mathscr{L}}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre de l'ensemble $\underset{\sim}{R}(E)$ ordonné par $r_1 \leq r_2$ si et seulement si $\forall X \in \mathfrak{F}(E)$, $r_1(X) \leq r_2(X)$, sur $\underset{\sim}{L}(E)$ ordonné par : $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$ (inclusion dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$).

<u>Corollaire 2.-</u> Les <u>espèces de structure</u> définies respectivement par :

$(E, \mathscr{L}, (L_1))$ et $(E, r, (R_1)$ et $(R_2))$ <u>sont équivalentes</u>.

L'énoncé du théorème 1 s'exprime aussi en disant que la <u>diagramme (I) est commutatif</u>, où I et I^{-1} sont les isomorphismes entre $\underset{\sim}{R}$ et $\underset{\sim}{L}$, F le foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{R}^f$ sur $\underset{\sim}{L}$, $P = I \circ F$ le foncteur <u>projection</u> de $\underset{\sim}{R}^f$ sur $\underset{\sim}{R}$ $(P \circ P = P)$ et $\hookrightarrow$ le foncteur d'inclusion de R dans $\underset{\sim}{R}^f$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, shift right, "I"'] \arrow[d, shift right] & & L \arrow[ll, shift right, "I^{-1}"'] \\ R^f \arrow[u, shift right] \arrow[rr, phantom, "="] & & R^f \arrow[u] \arrow[ull, "P"] \end{tikzcd}$$

(I)

En particulier notons le :

<u>Corollaire 3.-</u> Soit E un ensemble. $r \longrightarrow \hat{r} = r_{\mathscr{L}_r}$ est une <u>projection croissante</u> de $\underset{\sim}{R}^f(E)$ sur $\underset{\sim}{R}(E)$. $\hat{r}$ est appellé le rang associé au rang faible r.

<u>Prolongement du rang aux parties infinies</u> :

La formule (1) de 1.2.2. permet de prolonger r en une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans l'ensemble des cardinaux $\leq |E|$:

$$r(X) = \operatorname{Max} |Y| \quad \left[Y \subset X \quad \text{et} \quad Y \in \mathscr{L} \right] \tag{1'}$$

c'est le <u>prolongement canonique de r à $\mathfrak{P}(E)$</u>. Les propriétés (R_1) et (R_2) restent vraies en remplaçant $\mathfrak{F}(E)$ et $\mathfrak{F}(X)$ par $\mathfrak{P}(E)$ et $\mathfrak{P}(X)$ respectivement. Par contre la propriété : "une partie finie X est libre si et seulement si $r(X) = |X|$", n'est plus vraie pour les parties infinies.

<u>1.2.3.- Parties liées, circuits et bases d'un $\mathscr{L}$-espace</u>

<u>Définition 3.-</u> Soit E un $\mathscr{L}$-espace. On appelle <u>partie</u> (resp. <u>famille</u>) <u>$\mathscr{L}$-liée</u> (ou plus simplement <u>liée</u>) toute partie (resp. famille) non $\mathscr{L}$-libre. L'on appelle <u>circuit</u> toute partie $\mathscr{L}$-liée minimale et base toute partie $\mathscr{L}$-libre maximale.

$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{P}(E) - \mathcal{L}$ est l'ensemble des parties liées et vérifie :

$(\bar{L}_1)$ $\bar{\mathcal{L}} \subset \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ et $(\forall X \in \mathcal{P}(E))$ $((X \in \bar{\mathcal{L}}) \Longleftrightarrow (\mathcal{F}(X) \cap \bar{\mathcal{L}} \neq \emptyset))$

Alors toute partie liée contient une partie liée finie, donc une partie liée minimale. L'ensemble $\mathcal{C}$ des circuits vérifie :

(C_1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(E) - \{\emptyset\}$ et deux éléments distincts de $\mathcal{C}$ ne sont pas comparables (pour l'inclusion).

$\mathcal{L}$ étant de caractère fini est inductif pour l'inclusion (voir par exemple Bourbaki [C, I, 3] , §4, 5, p. 70), donc admet des éléments maximaux et toute partie libre est incluse dans une base. L'ensemble $\mathcal{B}$ des bases vérifie l'axiome :

(B_1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et deux éléments distincts ne sont pas comparables.

Cet axiome ne suffit pas pour reconstruire une $\mathcal{L}$ de caractère fini. En effet $\mathcal{B}$ est tel que, pour tout $X \subset E$,

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(X)$$

est inductif pour l'inclusion, et il est aisé de construire des $\mathcal{B}$ vérifiant (B_1) et ne possèdant pas cette dernière propriété. D'où la nécessité du second axiome :

(B_2) ($\mathcal{B}$ est de caractère fini) : $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{B}_X = \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}\}$ est inductif pour l'inclusion.

Il est aisé de vérifier que, sur un ensemble E quelconque, les structures suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{L}$ vérifiant (L_1)
2) r rang sur E
3) $\bar{\mathcal{L}}$ vérifiant $(\bar{L}_1)$
4) $\mathcal{C}$ vérifiant (C_1)
5)* $\mathcal{B}$ vérifiant (B_1) et (B_2)

---

* L'équivalence utilise le résultat suivant :
soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que : $\forall X \in \mathcal{L}$, $\forall Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y \in \mathcal{L}$

Alors $\mathcal{L}$ est inductive pour l'inclusion si et seulement si $\mathcal{L}$ est de caractère fini. (Démonstration aisée par récurrence transfinie pour la condition nécessaire) ces équivalences : $\mathscr{L}_r$, $\mathscr{L}_{\overline{\mathscr{L}}}$, $\mathscr{L}_{\mathscr{C}}$, $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}$, $r_{\mathscr{L}}$, $r_{\overline{\mathscr{L}}}$, ... étant explicitées sur la planche I.

Résumons les résultats les plus intéressants :

<u>proposition 1.-</u> Dans un $\mathscr{L}$-espace E, une partie est liée si et seulement si elle contient un circuit ; une partie est libre si et seulement si elle est incluse dans une base ; une partie finie X est un circuit si et seulement si :

$$\forall x \in X \quad , \quad r\,(X - x) \; = \; r\,(X) \; = \; |X| - 1$$

Les $\underset{\sim}{L}$-morphismes sont en outres caractérisés par l'une des conditions équivalentes :

(h_3) Si (x_i) est $\mathscr{L}$-liée , (f (x_i)) est $\mathscr{L}$'-liée

(h_4) Si (x_i) est un $\mathscr{L}$-circuit, (f (x_i)) est $\mathscr{L}$'-liée

<u>1.2.4.- Rangs réguliers. Axiomes de Régularités.</u>

L'on constate pour l'instant une analogie assez complète entre les notions définies sur un $\mathscr{L}$-espace et celles qui sont couramment utilisées dans un espace vectoriel par exemple. Cependant la propriété fondamentale du rang dans un espace vectoriel n'est pas vérifiée en général. Plus précisément :

<u>Définition 4.-</u> Un rang faible r sur un ensemble E est dit <u>régulier</u> s'il vérifie la propriété suivante :

$\forall X \in \mathscr{P}(E)$, toute partie libre incluse dans X et maximale a pour cardinal r (X).

Un $\mathscr{L}$-espace est dit régulier si $r_{\mathscr{L}}$ est régulier.

Tout rang faible régulier est un rang.

Si r est un <u>rang régulier</u>, pour calculer $r(X)$, il suffit de construire <u>une</u> partie libre maximale incluse dans X. Le rang de X est alors le cardinal de cette partie libre maximale.

<u>Théorème 2.-</u> Soit r un rang faible sur un ensemble E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(R R) r est un rang régulier

(R 3) $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $\forall Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $r(X \cup Y) = r(X) + 1$, $\exists\, y \in Y$ tel que $r(X+y) = r(X)+1$

(R'3) $\forall X \in \mathscr{P}(E)$,$\forall x \in E$ et $\forall y \in E$ tels que $r(X+x) = r(X+y) = r(X)$, on a $r(X+x+y) = r(X)$.

<u>Démonstration</u>

1°) Si r est un rang faible vérifiant (R'3) :

$\forall X \in \mathcal{F}(E)$, $\forall Z \in \mathcal{F}(X)$ tels que $\forall x \in X - Z$, $r(Z+x) = r(Z)$, on a $r(X) = r(Z)$ (raisonner par récurrence sur $|X - Z|$). En particulier pour toute partie libre maximale Z incluse dans X, $r(X) = r(Z) = |Z|$. Donc r est un rang régulier, et l'on démontre de même l'axiome (R_3).

2°) Si r est un rang faible vérifiant (R_3) :

Soit $X \in \mathcal{F}(E)$ et Y une partie libre maximale incluse dans X .

Alors si $r(X) > |Y|$, il existe $T \subset X - Y$ tel que $r(Y+T) = r(Y) + 1 = |Y| + 1$, donc il existerait $y \in T$ tel que $r(Y+y) = |Y| + 1$: $Y + y$ serait libre, ce qui contredit le caractère maximal de Y. Donc $r(X) = |Y| = r(Y)$ et r est un rang régulier.

3°) Si r est un rang régulier :

$\forall X \in \mathcal{F}(E)$, $\forall x \in E$, $\forall y \in E$ tels que $r(X+x) = r(X+y) = r(X)$, on a :

soit E une partie libre maximale incluse dans X : $r(X) = |Z| = r(Z)$.

Alors $r(Z+x) = r(Z+y) = r(X) = |Z|$, donc Z+x et Z+y sont liés , et Z est une partie libre maximale incluse dans $X + x + y$

D'où $r(X + x + y) = |Z| = r(X)$: r vérifie (R_3)

C Q F D

<u>Corollaire .-</u> Soit r un rang sur E, $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties r-libres et l'ensemble des parties r-liées. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(R R) r est un rang régulier

(L_2) $\forall X \in \mathcal{L}$, $\forall Y \in \mathcal{L}$ tels que $|X| = |Y| + 1$ soit fini, $\exists x \in X - Y$ tel que $Y + x \in \mathcal{L}$

$(\bar{L}_2)$ $\forall X \in \mathcal{F}(E)$, $\forall Y \in \mathcal{F}(E)$ tels que $|X| = |Y| + 1$ et $Y \notin \bar{\mathcal{L}}$, on a :

$$(\forall x \in X \ , \ Y + x \in \bar{\mathcal{L}}) \implies (X \in \bar{\mathcal{L}})$$

Voici maintenant d'autres systèmes d'axiomes équivalents :

Théorème 3.- Soit r un rang sur E et $\mathscr{C}$ l'ensemble des r-circuits , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(R R) $\quad r$ est un rang régulier

(C_2) $\quad \forall X \in \mathscr{C}$, $\forall Y \in \mathscr{C}$, $X \neq Y$, $\forall x \in X \cap Y$, $\exists Z \in \mathscr{C}$ tel que $Z \subset X \cup Y - \{x\}$

(C'_2) $\quad \forall X \in \mathscr{C}$, $\forall Y \in \mathscr{C}$, $\forall a \in X \cap Y$, $\forall x \in X - Y$, $\exists Z \in \mathscr{C}$ tel que $x \in Z$ et $Z \subset X \cup Y - \{a\}$

(C''_2) $\quad$ Toute partie $X \in \mathscr{P}(E)$ telle que $r(X) = |X| - 1$ contient un circuit et un seul

Démonstration

On vérifie comme ci-dessus : (R R) $\Longrightarrow$ (C_2) $\Longrightarrow$ (C'_2) $\Longrightarrow$ (R R) et $(C_2) \Longleftrightarrow (C'_2)$. Les seuls points délicats sont :

1°) $(C''_2) \Longleftrightarrow$ (R R) : Soit E vérifiant (C''_2). $F \in \mathscr{P}(E)$ est dite régulière si les parties libres maximales incluses dans F ont toutes même cardinal. Si toute $F \in \mathscr{P}(E)$ est régulière, r est régulier. Nous allons le démontrer par récurrence sur $|F|$. C'est trivial pour $|F| = 0$ et supposons le vrai pour $|F| \leq n-1$. Soit $F \in \mathscr{P}(E)$ avec $|F| = n$

Si $r(F) = n$ $\quad$ F est libre, donc régulière

Si $r(F) = n-1$ $\quad$ F contient un seul circuit, donc est régulière

Si $r(F) \leq n-2$, $\quad$ soit Y une partie libre maximale incluse dans F.

$\forall x \in F-Y$ tel que $\{x\} \in \mathscr{L}$, $Y + x$ est lié, donc ($Y+x$ régulière),
$\exists y \in Y$, $Y - y + x \in \mathscr{L}$. $Y - y + x$ est libre maximale car :

ou bien $|Y| = |Y - y + x| = n-2$ et $r(F) = n-2$

ou bien $|Y| < n-2$ et si $Y - y + x + z \supsetneq Y - y + x$ et est libre, on contredit le fait que $Y + x + z$ soit régulière.

Alors Y et Z étant deux parties libres maximales de F, on peut passer de Y à Z en échangeant les éléments un par un, d'où $|Y| = |Z|$, et F régulière.

2°) $(C_2) \Longrightarrow (C'_2)$: Nous allons démontrer par récurrence sur $|X \cup Y|$ que $\forall x \in X \cap Y$, $\forall a \in X - Y$, $\exists Z \in \mathscr{C}$, $Z \subset X \cup Y - \{x\}$ et $a \in Z$, si $X \in \mathscr{C}$ et $Y \in \mathscr{C}$. C'est trivial si $|X \cup Y| = 0$, 1 ou 2 . Supposons le vrai si $|X \cup Y| \leq n-1$ et soit $X \in \mathscr{C}$, $Y \in \mathscr{C}$ tels que $|X \cup Y| = n$, $a \in X \cap Y$ et $x \in X - Y$.

S'il existe $Z \in \mathscr{C}$, $Z \subset X \cup Y - \{x\}$ tel que $|Z \cup X| < n$, il suffit de raisonner sur X et Z et d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

Sinon, tout $Z \in \mathscr{C}$ tel que $Z \subset X \cup Y - \{x\}$ vérifie : $Z \supset Y - X$.
Alors, d'après (C_2) il existe au moins un tel Z, et $\forall t \in Y - X$, il existe $T \in \mathscr{C}$, $T \subset Y \cup Z - \{t\}$

ou bien $x \in Z$

ou bien $x \notin Z$, alors $T \neq X$, $|X \cup T| < n$ et on a $Z' \subset X \cup T - \{a\}$ et $x \in Z'$ dans $X \cup T$

<u>Théorème 4.-</u> Soit r un rang sur E et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases. r est régulier si et seulement si $\mathcal{B}$ vérifie les axiomes (B_1), (B_2) et :
(B_3) $\forall B \in \mathcal{B}$, $\forall B' \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B' - B$, les seules bases contenant x et incluses dans $B + x$ sont de la forme $B - y + x$ où $y \in B_x$ partie finie non vide de B.

Alors toutes les bases de E ont même cardinal, et ce cardinal est appellé la dimension de E : le rang infini est lui-même régulier.

Si r est un rang régulier, pour toute base B, pour tout $x \in E$ tel que $\{x\} \in \mathcal{L}$ (donc $x \in B'$ pour une base B' au moins);

ou bien $x \in B$ et $B_x = \{x\}$ (l'échange doit être effectif).

ou bien $x \notin B$ et, d'après (C'_2) et (C''_2), $B + x$ contient un circuit et un seul C, et $B - y + x \in \mathcal{B}$ si et seulement si $y \in B_x = B \cap C$.

Réciproquement soit r un rang tel que $\mathcal{B}$ vérifie les axiomes (B_1), (B_2) et (B_3). Soient $F \in \mathcal{F}(E)$, X et Y parties libres maximales incluses dans F, et $Y - X = \{y_1, \dots, y_m\}$. Il existe $B^o \in \mathcal{B}$ tel que $X \subset B^o$ et $B' \in \mathcal{B}$ tel que $Y \subset B'$

Comme $X + y_1$ est liée, $B^o_{y_1} \cap (X - Y) \neq \emptyset$. Soit $x_1 \in B^o_{y_1} \cap (X-Y)$
$B^1 = B^o - x_1 + y_1 \in \mathcal{B}$ et il suffit d'itérer ceci avec $X^1 = X - x_1 + y_1$ et $Y^1 = Y$. Après m itérations, on a : $Y^m = Y$, $X^m = X - \{x_1, \dots, x_m\} + (Y-X)$ où les x_i sont tous différents, et $B^m = B^o - \{x_1, \dots, x_m\} + (Y - X) \in \mathcal{B}$

Or $B^m \supset X^m$, et Y étant libre maximale dans F, $X^m = Y$: $|X| = |Y|$.

Soient B et B' deux parties libres maximales incluses dans F. Si B

est fini, B' l'est aussi et $|B| = |B'|$ (raisonner sur des parties finies contenant B) ; si B est infini, alors $(B_x)_{x\in B'}$ est un recouvrement de B :
en effet pour tout $y\in B$,

ou bien $y \in B'$ et $B_y = \{y\}$

ou bien $y \notin B'$ et $B' + y$ est lié. L'ensemble des circuits inclus dans $B \cup B'$ et contenant y est non vide et ceux de ces circuits tels que $|C \cap B'|$ soit minimal, vérifie $|C \cap B'| = 1$. Donc $C \cap B' = \{t\}$ et $C = B_t + t$ contient y : $y \in B_t$. Alors(*) :

$$|B| \leq \sum |B_x| \quad [x\in B'] = |B'|$$

et inversant les rôles de B et B' , $|B| = |B'|$.

1.3.- Fonctions génératrices et parties libres

1.3.1.- Fonctions génératrices minces

Soit E un $\mathscr{L}$-espace. L'application φ (ou mieux $\varphi_{\mathscr{L}}$) de $\mathfrak{P}(E)$ dans lui-même, qui à tout $X \in \mathfrak{P}(E)$ associe :

$$(3) \qquad \varphi_{\mathscr{L}}(X) = \varphi(X) = \{x \mid x\in X \text{ ou } x\in E \text{ et } \exists Y \in \mathscr{L},\ Y\subset X \text{ et } Y + X \notin \mathscr{L}\}$$

vérifie les propriétés :

(G_1) (caractère fini) : $\forall X \in \mathfrak{P}(E)$, $\varphi(X) = \bigcup \varphi(Y) \quad [Y \in \mathscr{F}(X)]$

(G_2) $\forall X \in \mathfrak{P}(E)$, $X \subset \varphi(X)$

(G_3) (échange) : $\forall X \in \mathfrak{P}(E)$, $\forall x\in E$, $\forall y\in E$ tels que $y\notin\varphi(X)$,
si $y\in\varphi(X + x)$, alors $x\in\varphi(X + y)$

Mais en général φ n'est pas une fermeture (i.e. ne vérifie pas $\varphi \circ \varphi = \varphi$) . L'on se propose maintenant de définir les parties libres à partir des fonctions génératrices.

(*) Un résultat classique de la théorie des cardinaux infinis dit que si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de cardinaux telle que : il existe un cardinal infini a pour lequel :
$\forall i \in I$, $1 \leq a_i \leq a$ et $|I| \geq a$, alors $\sum a_i \ [i\in I] = |I|$

Définition 5.- L'on appelle fonction génératrice mince (en abrégé : f g m) d'un ensemble E dans un ensemble F (resp. sur un ensemble E) toute application φ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ (resp. dans lui-même) vérifiant l'axiome (G_1).

En particulier toute f g m est croissante.

exemples : 1) Soit M un A-module à gauche, $\varphi(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X. φ est une f g m sur M

qui vérifie (G_2) si M est un module unitaire

qui vérifie (G_2) et (G_3) si M est un espace vectoriel sur le corps A.

2) Soit . une loi de composition interne sur E et $A \subset E$. $\varphi(X) = A\,X$ (resp. $\varphi(X) = X.X$) est une f g m sur E.

3) Soit Φ une correspondance de E dans F . $X \longrightarrow \Phi(X)$ est une f g m de E dans F, en particulier quand Φ est le graphe d'une application.

Voici en outre la :

Proposition 2 : Tout produit fini de f g m est une f g m.

1.3.2. Parties et familles exactement libres d'une f g m.

Définition 6.- Soit φ une f g m de E dans F et $A \subset F$. On dit que X φ-engendre A, ou encore que X est un système générateur de A si $\varphi(X) = A$. En outre une partie X de E est dite exactement libre si X est un système générateur minimal de $\varphi(X)$. Sinon X est dite exactement liée. X est une base de A si $\varphi(X) = A$ et X est exactement libre.

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E φ-engendre A si $A = \varphi(\{x_i \mid i \in I\})$ elle est exactement libre s'il n'existe pas de sous-famille stricte qui engendre $\varphi(\{x_i \mid i \in I\})$; sinon elle est exactement liée.

L'ensemble $\mathcal{L}^e_\varphi$ des parties exactement libres est :

$$\mathcal{L}^e_\varphi = \{X \mid \subset E \text{ et } \forall x \in X, \quad \varphi(X - x) \subsetneq \varphi(X)\}$$

et $(x_i)_{i\in I}$ est exactement libre si et seulement si $\{x_i \mid i\in I\}$ l'est et les x_i sont distincts deux à deux.

φ est "caractérisée" par ses "valeurs" sur $\mathcal{L}^e_\varphi \cap \mathcal{F}(E)$:

$$\forall X \in \mathfrak{P}(E) \quad , \quad \varphi(X) = \cup\, \varphi(Y) \quad [Y \in \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{L}^e_\varphi\,]$$

$\mathcal{L}^e_\varphi$ n'est ni de caractère fini, ni même inductif en général. Cependant on a :

$$\emptyset \in \mathcal{L}^e_\varphi \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathcal{L}^e_\varphi \quad , \ \cup\, Y \quad [Y \in \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{L}^e_\varphi] = X$$

<u>exemple.-</u> Soit E un ensemble, $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{L}$. Alors pour tout $X \subset E$:

$$\forall X \in \mathfrak{P}(E),\ \varphi(X) = \mathrm{Sup}\ n-1[n \in \omega_0 \ \text{et}\ \exists (X_i)_{i\in n} \ \text{strictement croissante}$$

$$\text{telle que} \quad \forall i \in n \quad , \quad X_i \in \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{L}\,]$$

est une f g m de E dans $\omega_0 + 1$ et l'on a :

$$\mathcal{L}^e_\varphi \cap \mathcal{F}(E) = \mathcal{L}$$

En général $\mathcal{L}^e_\varphi$ n'est pas inductif. Il l'est cependant si et seulement si: il n'existe pas de familles $(X^m_n)^{m\in\omega_0}_{n\in\omega_0}$ d'éléments de $\mathcal{L}$ telles que :

$\forall m \in \omega_0$, $(X^m_n)_{n\in\omega_0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang,

$$\text{et} \ \cup\, X^m_n \quad [n \in \omega_0] \supsetneqq \ \cup\, X^{m+1}_n \quad [n \in \omega_0]$$

Alors dans ce cas :

$$\mathcal{L}^e_\varphi = \{X \mid X \subset E \quad \text{et} \quad \forall Y \in \mathcal{F}(X) \quad , \quad \exists Z \in \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{L} \quad , \quad Z \supset Y\}$$

φ n'est pas un rang faible en général.

<u>1.3.3. Diagonalisation d'une f.g.m.</u>

Il est bon de donner à tous les ensembles considérés un élément nul universel 0 et de supposer que $\varphi(\emptyset) \supset 0$ pour toute f g m φ.

Soit φ une f g m de E dans F et Φ une correspondance de E dans F.

$$\mathcal{L}^\Phi_\varphi = \{X \mid \forall x \in X \quad , \quad \Phi(x) \cap \varphi(x) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \Phi(x) \cap (\varphi(X) - \varphi(X-x)) \neq \emptyset\}$$

vérifie
$$\mathcal{L}_\varphi^\Phi \subset \mathcal{L}_\varphi^e$$

Si l'on prend $\Phi = \{(x,y) \mid x \in E \quad \text{et} \quad y \in \cup(\varphi(X) - \varphi(X-x)) \quad [X \subset E]\}$,

on a $\mathcal{L}_\varphi^\Phi = \mathcal{L}_\varphi^e$

Si Φ est une <u>application</u> de E dans F, alors $\mathcal{L}_\varphi^\Phi$ est de caractère fini.

On appelle <u>diagonale</u> de φ toute application σ de E dans F telle que $\mathcal{L}_\varphi^\sigma = \mathcal{L}_\varphi^e$ et $\sigma(x) = 0$ pour tout $x \in E$ tel que $\varphi(x) = \varphi(\emptyset)$. Une f g m φ est dite <u>diagonalisable</u> si elle admet une diagonale.

Or φ est diagonalisable si et seulement si :

$$\forall x \in E \ , \quad F_x = \cap\, (\varphi(Y) - \varphi(Y-x))\ [X \in \mathcal{L}_\varphi^e\ ,\ Y \in \mathcal{F}(X) \text{ et } x \in Y] \neq \emptyset$$

en particulier si $\varphi(x) = \varphi(\emptyset)$, pour tout $X \in \mathcal{L}_\varphi^e$, $x \notin X$. On pose alors $F_x = 0$. Toute application σ de E dans F telle que $\sigma(x) \in F_x$ pour tout $x \in E$ est une diagonale pour φ, et on les a toutes ainsi. En outre dans ce cas :

$\Psi = \sigma^{-1} \circ \varphi$ est une f g m sur E qui vérifie (G_1).

On a $\mathcal{L}_\Psi^e \subset \mathcal{L}_\varphi^e$, et si σ est <u>injective pour</u> $\{x \mid \sigma(x) \neq 0\}$,

$\mathcal{L}_\Psi^e = \mathcal{L}_\varphi^e = \mathcal{L}_\Psi^{1_E}$ est de caractère fini, 1_E est une diagonale pour Ψ et l'on a :

$$\mathcal{L}_\Psi^e = \{X \mid X \subset E \quad \text{et} \quad \forall x \in X \ , \ x \notin \Psi(X-x)\} = \mathcal{L}_\varphi^e$$

et

$$\forall X \subset E\ ,\ \Psi(X) \subset \{x \mid x \in X \text{ ou } x \in E \text{ et } \exists Y \in \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{L}_\varphi^e\ ,\ Y + x \notin \mathcal{L}_\varphi^e\}$$

l'inclusion étant stricte en général, sauf si Ψ vérifie (G_3).

Dans ce dernier cas, on dit que φ est injectivement diagonalisable.

<u>Théorème 5.-</u> Soit φ une f g m de E dans F telle que $\varphi(x) - \varphi(\emptyset)$ soit fini pour tout $x \in E$. Alors φ est diagonalisable (resp. injectivement) si et seulement si il existe un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(E)$ et cofinal à $\mathcal{F}(E)$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{F} \ , \quad \varphi|_X : \ \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(F) \qquad \text{(restriction de } \varphi)$$

soit diagonalisable (resp. injectivement).

La démonstration se fait en utilisant la limite projective :
Soit pour tout $X \in \mathcal{F}(E)$, Σ_X l'ensemble des diagonales de $\varphi|_X$.
Si $X \subset Y$ et $Y \in \mathcal{F}(E)$, $u_{XY} : \Sigma_Y \longrightarrow \Sigma_X$ où $u_{XY}(\sigma) = \sigma|_X$
(Σ_X , u_{XY}) $[X, Y \in \mathcal{F}(E)]$ est un système projectif d'ensembles finis et non vides, donc est non vide (voir [C, I, 3] , § 7 , n° 4 par exemple), et alors toute $\sigma \in \varprojlim (\Sigma_X , u_{XY})$ est diagonale de (E, φ, F). D'où le théorème 5 sachant que :

$$\varprojlim (\Sigma_X , u_{XY}) \quad [X, Y \in \mathcal{F}(E)] = \varprojlim (\Sigma_X , u_{XY}) \quad [X, Y \in \mathcal{F}]$$

On fait le même raisonnement pour les diagonales injectives.

1.3.4.- Fonctions génératrices.

Outre les propriétés (G_1), (G_2) et (G_3) de 1.3.1., une application φ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ peut vérifier les propriétés :

(G_4) 1_E est une diagonale pour φ , i.e. $\mathcal{L}_\varphi^{1_E} \supset \mathcal{L}_\varphi^{e}$

(G_5) $\forall X \in \mathcal{F}(E) - \mathcal{L}_\varphi^{1_E}$, $\varphi(X) = \cup\ \varphi\ (X-x) \quad [x \in X]$

(G_6) (fermeture) $\varphi \circ \varphi = \varphi$

<u>Définition 7.-</u> On appelle <u>fonction génératrice faible</u> (en abrégé : f g f) sur un ensemble E toute application φ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même qui vérifie les axiomes (G_1) et (G_2) . Une f g f est dite <u>échangiste</u> (resp. <u>diagonale</u> ; resp. <u>exacte</u>) si elle vérifie l'axiome (G_3)(resp. (G_4) ; resp. (G_5)) .
Une <u>fermeture</u> sur E est une f g f qui vérifie l'axiome (G_6).

L'on désigne par $\underset{\sim}{\Phi}^{f=}$ la catégorie dont les objets sont les couples (E,φ) où φ est une f g f sur E, et dont les morphismes de (E,φ) dans (E', φ') sont les applications f de E dans E' telles que :

$(H_1^=)$ $\quad f \circ \varphi = \varphi' \circ f$

$F : \quad (E , \varphi) \longrightarrow (E , \mathcal{L}_\varphi)$ où

(4) $\quad \mathcal{L}_\varphi = \{X \mid X \subset E \text{ et } \forall x \in X,\ x \notin \varphi\ (X-x)\} = \mathcal{L}_\varphi^{1_E}$

est un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{\Phi}^{f=}$ dans $\underset{\sim}{L}$.

D'où la sur-catégorie propre(*) de $\underset{\sim}{\Phi}^{f=}$: $\underset{\sim}{\Phi}^{f}$ où les morphismes de $(E\ ,\ \varphi)$ dans $(E'\ ,\ \varphi')$ sont les applications u de E dans E', morphismes de $(E\ ,\mathcal{L}_{\varphi})$ dans $(E\ ,\ \mathcal{L}'_{\varphi'})$. F s'étend alors en un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{\Phi}^{f}$ dans $\underset{\sim}{L}$ qui sera aussi noté F.

$$G\ :\quad (E\ ,\ \mathcal{L}) \longrightarrow (E\ ,\ \varphi_{\mathcal{L}}) \qquad \text{où } \varphi_{\mathcal{L}} \text{ est défini par } (3)$$

est un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{L}$ dans $\underset{\sim}{\Phi}^{f}$. Soit $G(\underset{\sim}{L}) = \underset{\sim}{\Phi}^{g}$

F et G induisent sur $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{g}$ des isomorphismes inverses l'un de l'autre : L'on écrit $\underset{\sim}{L}^{=} = F\ (\underset{\sim}{\Phi}^{f=}) = F\ (\underset{\sim}{\Phi}^{=})$.

<u>Définition 7'.-</u> On appelle <u>fonction génératrice</u> sur un ensemble E toute fonction génératrice faible φ sur E vérifiant l'une des propriétés équivalentes ci-dessous :

1) Il existe $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(E)$, de caractère fini telle que $\varphi_{\mathcal{L}} = \varphi$ (voir (3))

2) $\varphi_{\mathcal{L}_{\varphi}} = \varphi$ (voir (3) et (4))

3) φ est échangiste et exacte

4) : $\forall X \subset E\ ,\quad \varphi(X) = \cup\ \varphi(Y) \quad [Y \in \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{L}_{\varphi}]$, et φ est échangiste.

La structure d'ensemble muni d'une fonction génératrice est donc équivalente à celle de $\mathcal{L}$-espace. Voici quelques relations liant φ , $\mathcal{L}$,...

$$\forall X \subset E\ ,\quad \varphi_{\mathcal{C}}(X) = X \cup \{x \mid x \in E \text{ et } \exists Y \in \mathcal{F}(X)\ ,\ Y + x \in \mathcal{C}\}$$

$$\text{ou}\quad \varphi_{r}(X) = \{x \mid x \in E \text{ et } \exists Y \in \mathcal{F}(X)\ ,\ r(Y+x) = r(Y)\}$$

$$(\forall X \in \mathcal{L},\ \forall x \in E-X) \qquad ((X + x \in \mathcal{L}) \Longleftrightarrow (x \notin \varphi_{\mathcal{L}}(X)))$$

(*) La terminologie employée pour les catégories est :

1) $\underset{\sim}{C}$ sous-catégorie propre de $\underset{\sim}{C}'$ si et seulement si $\underset{\sim}{C}$ et $\underset{\sim}{C}'$ ont les mêmes objets.

2) $\underset{\sim}{C}$ sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{C}'$ si et seulement si pour tout couple (A,B) d'objets de $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{C}(A,B) = \underset{\sim}{C}'(A,B)$.

En particulier, $X \subset E$ est libre si et seulement si il existe un ordre total sur X tel que, pour tout $x \in X$, $x \notin \varphi\ (\,]\leftarrow\,,\,x[\,)$. Alors cette propriété est vraie pour tous les ordres totaux.

La planche I donne les équivalences complètes.

1.4.- Foncteurs de fermeture. Régularisation. Treillis des sous-espaces. φ-espaces

$\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{f<}$ (resp. $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{f=}$) est la catégorie dont les objets sont les couples (E,φ) où φ est f g f sur E, les morphismes de (E,φ) dans (F,ψ) étant les applications f de E dans F telles que :

$(H_1^{<})$ $\quad f \circ \varphi \subset \psi \circ f$ $\qquad$ (resp. $(H_1^{=})$ $\quad f \circ \varphi = \psi \circ f$)

$\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{g<}$ (resp. $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{g=}$) en est la sous-catégorie pleine "des fonctions génératrices",

$\underset{\sim}{F}^{<}$ (resp. $\underset{\sim}{F}^{=}$) en est la sous-catégorie pleine "des fermetures" ,

et $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{<}$ (resp. $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{=}$) en est la sous-catégorie pleine "des fonctions génératrices régulières".

$\underset{\sim}{F}$ (resp. $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}$) est la sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{f}$ dont les objets sont "les fermetures" (resp. "les fonctions génératrices régulières")

1.4.1.- Le foncteur de fermeture . φ-espaces .

$$P : \quad (E,\varphi) \longrightarrow (E,\omega_\varphi) \qquad \text{où} \qquad \omega_\varphi = \bigcup \varphi^n \qquad [n \in \omega_0]$$

(pour tout entier $n \geq 1$, φ^n est la n-ième itérée de φ)

est un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{f}$ sur $\underset{\sim}{F}^{<}$ tel que $P \circ P = P$

P projette $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{f=}$ sur $\underset{\sim}{F}^{=}$ et se réduit à l'identité sur $\underset{\sim}{F}^{<}$.

ω_φ est la fermeture la moins $\underset{\sim}{\bar{\Phi}}^{f<}$-fine sur E telle que $\varphi \subset \omega_\varphi$.

P est le foncteur de fermeture.

Remarque P n'est plus un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{\Phi}^f$ sur $\underset{\sim}{F}$

Toute fermeture φ est une f g f diagonale, mais n'est pas échangiste en général. Si elle est échangiste, alors $\mathscr{C}_\varphi$ est régulier (vérifier (C_2) par exemple). On a :

$$\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{F} \cap \underset{\sim}{\Phi}^g .$$

et on pose la:

Définition 8.- On appelle φ-espace; tout couple (E,φ) où φ est une fonction génératrice régulière sur E (i.e. $\mathscr{L}_\varphi$ est régulière).

Soit φ une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans lui-même. (E,φ) est un φ-espace si et seulement si φ vérifie les axiomes (G_1), (G_2), (G_3) et (G_6) , i.e. si et seulement si φ est une fermeture échangiste.

1.4.2.- Régularisation d'un $\mathscr{L}$-espace. Cloture

Même si (E,φ) est une fonction génératrice, (E, ω_φ) n'est pas en général un φ-espace. L'on va cépendant associer canoniquement à toute fgf φ sur E une fg régulière φR sur E ainsi :

Soit $\varphi_o = \varphi$ $\qquad \varphi_1 = \omega_{\varphi_o}$, $\varphi_2 = \varphi_{\mathscr{L}\varphi_1}$

....

et pour tout entier $n \geq 0$, $\qquad \varphi_{2n+1} = \omega_{\varphi 2n}$, $\varphi_{2n+2} = \varphi_{\mathscr{L}\varphi_{2n+1}}$

$$\text{et} \qquad \varphi R = \cup\, \varphi_n \qquad [n \in \omega_o]$$

où $\mathscr{L}_\varphi = \{X/X \subset E \quad \text{et} \quad \forall x \in X \ , \quad x \notin \varphi\,(X-x)\}$

et, $\forall X \in \mathfrak{P}(E)$, $\varphi_{\mathscr{L}}(X) = X \cup \{x/x \in E \quad \text{et} \quad \exists\, Y \in \mathscr{F}(X), \quad Y \in \mathscr{L} \quad \text{et} \quad Y+x \notin \mathscr{L}\}$

<u>φR est la fonction génératrice régularisée de φ</u>

Si $(E,\mathscr{L})$ est un $\mathscr{L}$-espace, $\mathscr{L}R = \mathscr{L}_{\varphi_{\mathscr{L}}R}$ est le <u>$\mathscr{L}$-espace régularisé</u> de $(E,\mathscr{L})$, d'où $\mathscr{C}R$ ...

Pour tout $X \subset E$, $\varphi R(X)$ est la φ-cloture de X

et $\omega_\varphi(X)$ est la fermeture de X

L'on a : $\omega_\varphi \subset \varphi R$ et $\omega_\varphi R = \varphi R$.

<u>Remarques</u>

1°) $(E,\varphi) \longrightarrow (E,\varphi R)$ ne définit pas un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{\Phi}^{f<}$ (resp. $\underset{\sim}{\Phi}^{f=}$) dans $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$ (resp. dans $\underset{\sim}{\Phi}^{=}$).

2°) φR n'est pas en général la structure de φ-espace la moins $\underset{\sim}{\Phi}^{f<}$-fine sur E telle que $\varphi \subset \varphi R$. Plus précisément, si ψ est une structure de φ-espace telle que $\varphi \subset \psi$, en général $\varphi R \not\subset \psi$

3°) Si $\varphi \subset \varphi'$ (resp. si $\mathscr{L}_{\varphi'} \subset \mathscr{L}_\varphi$) en général φR et $\varphi' R$ ne sont pas comparables dans $\underset{\sim}{\Phi}^{<}(E)$ (resp. dans $\underset{\sim}{\Phi}(E)$).

<u>1.4.3. Ensembles de sous-espaces et fermetures</u>

Soit φ une f g f sur E. L'on appelle sous-espace de E tout couple $(A/\varphi|_A)$ où $A \subset E$ et où $\varphi|_A$, restriction de φ à $\mathfrak{P}(A)$, est une application de $\mathfrak{P}(A)$ dans lui même.

L'ensemble $\mathscr{S} = T(E,\varphi)$ des sous-espaces est :

$$T(E,\varphi) = \{A/A \subset E \quad \text{et} \quad A = \varphi(A)\}$$

et vérifie :

$$T(E,\varphi) = T(E,\omega_\varphi) = \{\omega_\varphi(X) / X \subset E\} = \mathscr{S}$$

(S_1) $E \in \mathscr{S}$ et toute intersection d'éléments de $\mathscr{S}$ appartient à $\mathscr{S}$

(S_2) $\mathscr{S}$ est inductif pour l'inclusion

$\mathcal{S}$ est un treillis complet inductif pour l'inclusion et l'on a :

$$\wedge A_i = \cap A_i \qquad \text{et} \qquad \vee A_i = \omega_\varphi (\cup A_i)$$

le sous-espace engendré par X étant $\omega_\varphi(X)$.

E est élément universel et $\omega_\varphi(\emptyset)$ élément nul, mais les atomes ou points n'existent pas toujours, les sous-espaces de la forme $\omega_\varphi(x)$ pouvant être inclus les uns dans les autres suivant des chaines descendantes infinies .

Soit $\underset{\sim}{S}^{<}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(E,\mathcal{S})$ où $\mathcal{S} \subset \mathfrak{P}(E)$ vérifie les axiomes (S_1) et (S_2), les morphismes de $(E,\mathcal{S})$ dans $(E',\mathcal{S}')$ étant les applications f de E dans E' telles que :

$$\forall A' \in \mathcal{S}' \quad , \quad f^{-1}(A') \in \mathcal{S}$$

<u>Théorème 6 (Schmidt - P. Hall)</u> (*)

$F : (E,\varphi) \longrightarrow (E,T(E,\varphi))$ définit un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{\Phi}^{f<}$ sur $\underset{\sim}{S}^{<}$, et $G : (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (E, \varphi_{\mathcal{S}})$ où :

$$\forall X \in \mathfrak{P}(E) \quad , \quad \varphi_{\mathcal{S}}(X) = \cap A \quad [A \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad X \subset A]$$

définit un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{S}^{<}$ sur $\underset{\sim}{F}^{<}$. Soit F_0 la restriction de F à $\underset{\sim}{F}^{<}$, F_0 et G sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre $\underset{\sim}{F}^{<}$ et $\underset{\sim}{S}^{<}$

(*) Ce résultat a été démontré sous une forme un peu plus faible (équivalence de structures) par J. Schmidt [22] et P. Hall (non publié) (voir [Q], chap. II, 5., p. 81) .

Démonstration :

Il est aisé de démontrer que $\varphi_{\mathcal{I}}$ vérifie (G_2) et (G_6). L'on démontre que, pour tout $X \subset E$, $\varphi_{\mathcal{I}}(X) = \cup \varphi_{\mathcal{I}}(Y)$ $[Y \in \mathcal{F}(X)]$, par récurrence transfinie sur Card X. C'est trivial si X est fini. Supposant ceci vrai si Card $X < a$, soit $Z \subset E$ tel que Card$Z = a$. Alors il existe au moins une famille $(Z_i)_{i \in I}$ strictement croissante de parties de Z telles que :

$$\forall i \in I \quad , \quad \text{Card } Z_i < a \qquad \text{et} \qquad Z = \bigcup_i Z_i$$

Alors :

$$\varphi_{\mathcal{I}}(Z) = \bigcup_i \varphi_{\mathcal{I}}(Z_i) = \bigcup_i \bigcup_{Y \in \mathcal{F}(Z_i)} \varphi_{\mathcal{I}}(Y) = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}(X)} \varphi_{\mathcal{I}}(Y)$$

L'on vérifie aisément que F et G sont des foncteurs ensemblistes en remarquant que :

$$(f \circ \varphi \subset \varphi' \circ f) \iff (\varphi \circ f^{-1} \subset f^{-1} \circ \varphi')$$

Mais F n'est plus un foncteur ensembliste de $\underset{\sim}{\Phi}^f$ dans $\underset{\sim}{S}$, surcatégorie de $\underset{\sim}{S}^{<}$ obtenue en transportant les morphismes de $\underset{\sim}{F}$ (F est isomorphe au foncteur de fermeture).

Soit φ une f g f sur E. L'on pose :

$$\mathcal{L}_\varphi = \{X / X \subset E \quad \text{et} \quad \forall x \in X \ , \ x \notin \varphi(X-x)\}$$

et

$$\mathcal{L}_\varphi^< = \{X / X \subset E \text{ et il existe un ordre total sur } X \text{ tel que :}$$

$$\forall x \in X \quad , \quad x \notin \varphi\,(]\leftarrow, x[)\}$$

$\mathcal{L}_\varphi$ et $\mathcal{L}_\varphi^<$ sont de caractère fini et $\mathcal{L}_\varphi \subset \mathcal{L}_\varphi^<$

$r = r_{\mathcal{L}_\varphi^<}$ est le rang associé à φ

et $r_S = r_{\mathcal{L}_\varphi}$ est le rang symétrique associé à φ.

Soit $X \subset E$. $\varphi_X : Y \subset E \longrightarrow \varphi_X(Y) = \varphi(X \cup Y)$ est une f g f. Si φ est une fermeture, φ_X en est une aussi. L'on écrit r_X et $r\,S_X$ les rangs associés à φ_X.

(E,φ) est dit <u>semi-régulière</u> si, pour toute partie X de E, pour tout <u>sous φ_X-espace</u> A de E, pour toute partie $\mathscr{L}^{<}_{\varphi_X}$-libre maximale Y incluse dans A, on a $\text{Card } Y = r_X(A)$

L'on appelle <u>φ-base</u> de A toute partie Y $\mathscr{L}^{<}_{\varphi}$-libre maximale de A. Alors $\varphi(Y) = A$. Mais en général il existe des parties $\mathscr{L}^{<}_{\varphi}$-libre Z de A telles que $\varphi(Z) = A$. Z sera alors appellé une <u>base faible</u> de A.

L'on appelle <u>φ-base forte</u> de A toute partie X de A telle que $\varphi(X) = A$ et $\forall x \in X$, $\varphi(X-x) \subsetneq A$ (alors $X \in \mathscr{L}_{\varphi}$). Un sous-espace A n'admet pas en général de base forte. L'on a cependant la :

<u>Proposition 3</u> (*) Soit φ une fermeture sur E et A un sous-espace. Si A admet une base forte finie, toutes les bases fortes de A sont finies (mais $r\,S\,(A)$ peut être dénombrable). Si A admet une base forte infinie B, toutes les bases fortes de A sont infinies et ont pour cardinal $r\,S\,(A) = \text{Card } B$.

<u>démonstration</u> :

Soient L et M deux bases fortes de A. Si L est infinie, on a $\text{Card } M \geq \text{Card } L$. En effet, pour tout $\ell \in L$, il existe $M_\ell \in \mathscr{F}(M)$ tel que $\ell \in \varphi(M\ )$. Or ;

$$\forall \ell \in L \qquad L_o = \{h / h \in L \quad \text{et} \quad M_h = M_\ell\} \qquad \text{est fini .}$$

(*) Enoncé analogue à celui de [Q] , chap II , 5. , p. 82

En effet pour tout $m \in M_\ell$, il existe $L_m \in \mathcal{F}(L)$ tel que $m \in \varphi(L_m)$.

Donc L_{M_ℓ} est fini et $\varphi(L_{M_\ell}) \supset M_\ell$, d'où $\varphi(L_{M_\ell}) \supset \varphi(L_o)$,

$$\varphi(L_{M_\ell} \cup L_o) = \varphi(L_o) \qquad \text{et} \qquad L_o \subset L_{M_\ell}$$

Donc $\mathcal{F}(M)$ est infini et :

$$\text{Card } M = \text{Card } \mathcal{F}(M) \geq \mathcal{U}_o \times \text{Card } L = \text{Card } L$$

Comme Card M est infini, on a de même Card L $\geq$ Card M d'où égalité.

<u>Remarque</u> : En général si A est un sous-espace de (E,φ) ,

$rS(A) < r(A)$, même quand $r(A)$ est infini.

(E,φ) est un φ-espace si et seulement si $T(E,\varphi)$ est un treillis géométrique (voir [E], IIIe partie).

Inversement à tout treillis géométrique T correspond le φ-espace P(T) des points de T, où pour tout $X \subset P(T)$,

$$\varphi(X) \text{ est l'ensemble des points } x \leq \vee y \quad [y \in X].$$

(L'on verra au chapitre II, 2.4.1 les foncteurs canoniques qui lient ces structures).

<u>1.4.4.- Autres systèmes d'axiomes équivalents pour les φ-espaces</u>.

Voici des axiomes concernant les familles libres ou liées :

1°) <u>Axiomes de Steinitz-Van der Waerden</u>. (voir [I]et [J]) sont les axiomes des φ-espaces.

2°) <u>Axiomes de Haupt Otto, Nöbeling et Pauc.</u> (voir [3]) . Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles finies $(x_1,\ldots, x_n)$ d'éléments de E. On considère une partition $(\mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2)$ de $\mathcal{F}$, et on convient :

$(x_1,\dots, x_n) \in \mathcal{I}_1$ s'écrit $A\,[x_1,\dots, x_n]$ (parties liées) (abhängig)

$(x_1,\dots, x_n) \in \mathcal{I}_2$ s'écrit $\cup\,[x_1,\dots, x_n]$ (parties libres) (unabhängig)

avec les axiomes :

(K) si $x_1 = x_2$, on a $A\,[x_1,x_2]$

(I) si $A\,[x_1,\dots, x_n]$, alors pour tout $y \in E$, on a $A[x_1,\dots, x_n, y]$

(A) si $\cup\,[x_1 ,\dots,x_p]$, $A\,[x_1,\dots, x_p, y]$ et $A\,[x_1,\dots, x_p, z]$

on a $A\,[x_2,\dots, x_p, y, z]$.

3°) Axiomes de Rado (voir [9])

Soient E, $\mathcal{I}$ (comme en 2) et I une relation d'indépendance :

I application de $\mathcal{I}$ dans $\{0,1\}$ telle que :

1) - I est décroissante : $I(x_1,\dots, x_n) \geq I\,(x_1,\dots, x_n, x_{n+1})$

2) - I est commutative : $I(x_1,\dots, x_n) = I(x_{\sigma(1)} ,\dots, x_{\sigma(n)})$

$\forall \sigma \in n$!

3) - I est non reflexive : $I(x,x) = 0$

4) - I est distributive, i.e.

$$I\,(x_1,\dots, x_n)\ I(y_1,\dots, y_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} I(x_1,\dots, x_m, y_k)$$

1.4.5.- Principales propriétés des φ-espaces

(a) Toute partie libre maximale Y de A est appellée base de A. Toute base de A est une base de $\varphi(A)$

(b) (Théorème d'échange). Si $\varphi\,(Y) = A$ et si X est une partie libre de A, il existe $Y' \subset Y$ telle que $Y' \cap X = \emptyset$ et $Y' \cup X$ soit une base de A.

(c) Soit B une base de A. Toute base de A a même cardinal que B. Card B = $\dim_\varphi A = r_\varphi A$ est appellé la dimension de A. En outre, si Y φ-engendre A, Card Y $\geq \dim_\varphi A$; et si Y est une partie libre de A, Card Y $\leq \dim_\varphi A$; et quand $\dim_\varphi A$ est fini (resp. infini), l'égalité dans l'un ou l'autre de ces cas entraîne (resp. n'entraîne pas en général) que A soit une φ-base de A.

(d) Soit L une partie libre et $x \in E$. L + x contient un circuit et un seul : $L_x + x$; et une partie L' de L est telle que $x \in \varphi(L')$ si et seulement si $x \in \varphi(L)$ et $L' \supset L_x$.

(e) Si $(L_i)_{i \in I}$ est une famille de parties d'une partie libre L,

$$\varphi\,(\cap L_i) = \cap\, \varphi(L_i)$$

1.5.- Applications et exemples

1.5.1.- A-modules et groupes

Soit M un A-module à gauche unitaire et, pour tout $X \subset M$, $\varphi_o(X)$ le sous-A-module engendré par X

$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_{\varphi_o}$ est l'ensemble des parties libres usuelles, et φ_o R(X) est la clôture de X

Soit $\mathcal{L}_<$ l'ensemble des parties X de M telles qu'il existe un ordre total sur X pour lequel :

$$\forall x \in X \quad , \quad x \notin \varphi_o \quad (X_{]\leftarrow,\, x[})$$

(E, $\mathcal{L}_<$) est un $\mathcal{L}$-espace semi-régulier.

En effet $\mathcal{L}_<$ est de caractère fini (raisonner par limite projective de manière analogue au théorème 5 de 1.3.3.). Le fait que (E, $\mathcal{L}_<$) soit semi-régulier résulte du théorème de Jordan-Holder (voir par exemple Bourbaki [C,II,1], §6, n° 14, p. 85)

$$\forall X \in \mathcal{P}(M) \quad , \qquad r_{<}(X) = \text{long}\ (\varphi_o(X))$$

est définie même quand la longueur est infinie (voir Bourbaki [C,II,2] , §1, n° 10 , p. 30)

M est un espace vectoriel si et seulement si $\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_{<}$, et alors $(M, \mathcal{L}_o)$ est un φ-espace.

L'on a des résultats analogues pour les groupes à opérateurs.

1.5.2.- Ensembles ordonnés et treillis.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties X de E telles que (X, $\leq$ induit) soit totalement ordonné. $\mathcal{L}$ est de caractère fini et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des $\{x,y\}$ tels que x et y ne soient pas comparables.

$(E, \mathcal{L})$ est un <u>φ-espace</u> si et seulement si la relation "x et y ne sont pas comparables" sur E est <u>transitive</u>. $(E, \leq)$ est alors dit <u>régulier</u>.

1.5.3.- Corps

Soit K un corps, k un sous-corps de K et $\varphi(X)$ la <u>clôture algébrique de k(X) dans K</u> (voir [L] , vol I, chapitre II, § 12) . (K , φ) est régulière et l'on retrouve ici les propriétés classiques des parties algébriquement libres et du degré de transcendance.

Soit A un anneau unitaire et pour tout $X \subset E$, $\varphi_1(X)$ l'idéal bilatère engendré par X. Soit $\mathscr{L}_<$ défini comme en 1.5.1. pour φ_1. $(E, \mathscr{L}_<)$ est semi-régulier (voir A-module) .

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et pour tout $x \subset E$, $\varphi(X) = k^p(X)$. (k,φ) est un φ-espace (voir [L] , vol. I, chapitre II, § 17). Les bases sont alors appellées les p-bases.

1.5.4.- Les "Géométries".

Toute géométrie G est telle que l'ensemble de ses points soit canoniquement un φ-espace. En particulier :

a. Tout espace affine sur un corps K

b. Tout espace projectif sur un corps K

(voir [2], § 9, pp. 189-205 ou [E], III, chap. IV, pp. 354 à 373)

c. Toute géométrie plane affine, de translation ou non, desarguesienne ou non, pascalienne ou non (voir[E], III, chap V, pp. 318-353)

d. Toute géométrie plane projective (voir [F] , chap. 20, pp. 346-420).

Chap. II LES STRUCTURES DE $\mathscr{L}$-ESPACE ET DE φ-ESPACE

2.1.- Généralités. Comparaisons de Structures

2.1.1. Rappels sur les catégories de base.

L'on entend par $\mathscr{L}$-espace la donnée d'un ensemble muni de l'une des structures équivalentes de la planche I, et l'on désigne par $\underset{\sim}{L}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathscr{L}$-espaces et dont les morphismes de $(E,\mathscr{L})$ dans (E', φ') sont définis par l'une des propriétés équivalentes :

$$(h_1) \ , \ (h_2) \ , \ (h_3) \text{ ou } (h_4)$$

(L'on identifie ainsi les catégories $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{R}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^g$).

Pour differencier plusieurs structures on pourra employer des indices : ainsi $\mathscr{L}'_2$ est l'ensemble des parties φ'_2-libres de (E, r'_2).

Du point de vue des fonctions génératrices, il est naturel de définir la catégorie $\underset{\sim}{L}^=$ (resp. $\underset{\sim}{L}^{\leq}$) ayant pour objets les $\mathscr{L}$-espaces, les morphismes de (E,φ) dans (E', φ') étant les applications f de (E,φ) dans (E' , φ') telles que :

$$(h_1^=) \qquad f \circ \varphi = \varphi' \circ f$$

$$(\text{resp. } (h_1^{\leq}) \qquad f \circ \varphi \subset \varphi' \circ f \ )$$

On a

$$\underset{\sim}{L}^= \subset \underset{\sim}{L}^{\leq} \subset \underset{\sim}{L}$$

La première inclusion est évidente. Pour la seconde : si f est un $\underset{\sim}{L}^{\leq}$-morphisme de $(E,\mathscr{L})$ dans $(E',\mathscr{L}')$, soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E telle que $(f(x_i))$ soit $\mathscr{L}'$-libre. Alors les x_i sont distincts deux à deux et, considérant un bon ordre sur I :

$\forall i \in I \qquad f(x_i) \notin \varphi' (\{f(x_j)/ j \in I \text{ et } j < i\})$

donc $\qquad f(x_i) \notin f \circ \varphi (\{x_j / j \in I \text{ et } j < i\})$

et à fortiori $\qquad x_i \notin \varphi (\{x_j / j \in I \text{ et } j < i\})$

donc (x_i) est $\mathscr{L}$-libre.

De même l'on entend par φ-espace la donnée d'un ensemble muni de l'une des structures équivalentes de la planche II, et l'on désigne par $\underset{\sim}{\Phi}$ (resp. $\underset{\sim}{\Phi}^{=}$; resp. $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$) la sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{L}$ (resp. $\underset{\sim}{L}^{=}$; resp. $\underset{\sim}{L}^{<}$) dont les objets sont les φ-espaces. On a :

$$\underset{\sim}{\Phi}^{=} \subset \underset{\sim}{\Phi}^{<} \subset \underset{\sim}{\Phi}$$

<u>Propriétés caractéristiques des $\underset{\sim}{L}$-morphismes (resp. des $\underset{\sim}{\Phi}$ -morphismes)</u>

Une application f de $(E,\mathscr{L})$ dans $(E',\mathscr{L}')$ est un $\underset{\sim}{L}$-(resp. $\underset{\sim}{\Phi}$)-morphisme si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes:

(h_1) toute famille (x_i) telle que $(f(x_i))$ soit $\mathscr{L}'$-libre, est $\mathscr{L}$-libre

(h_2) $\qquad \forall X \in \mathscr{P}(E), \qquad r'(f(X)) \leq r(X)$

(h_3) Si (x_i) est $\mathscr{L}$-liée, $\quad (f(x_i))$ est $\mathscr{L}'$-liée

(h_4) $\qquad \forall C \in \mathscr{C} \quad , \quad (f(x))_{x \in C}$ est $\mathscr{L}'$-liée

(h_5) $\qquad \forall X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f_{|X}$ injective et $f(X)$ base de $f(E)$, $X \in \mathscr{L}$

(h_6) $\qquad \forall X \in \mathscr{C}$ tel que $f_{|X}$ injective, $f(X)$ contient au moins un circuit.

(h_7) $\qquad \forall X \in \mathscr{P}(E)$ tel que : $\exists\, x \in X,\ x \in \varphi(X-x);\ \exists\, y \in X\ ,\ f(y) \in \varphi'\ (f(X-y))$

Les équivalences sont aisées à vérifier

<u>Propriétés caractéristiques des $\underline{L}^{<}$-morphismes (resp. des Φ -morphismes).</u>

La notion suivante est souvent utile : Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un $\mathcal{L}$-espace est appellée un pseudo-circuit si :

$$\forall i \in I \qquad x_i \in \varphi \; (\{x_j \mid j \in I-i\})$$

En particulier une partie X de E est un <u>pseudo-circuit</u> si $(x)_{x \in X}$ en est un. Il est clair qu'alors, pour $X \subset E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) X est un pseudo-circuit
2) $\forall x \in X, \quad x \in \varphi \; (X-x)$
3) X est réunion de circuits

L'on désignera par $P\,\mathcal{C}$ ou $P(\mathcal{C})$ l'ensemble des $\mathcal{C}$-pseudo-circuits.

Une application f de $(E,\mathcal{L})$ dans $(E',\mathcal{L}')$ est un $\underline{L}^{<}$- (resp. $\Phi^{<}$-)morphisme si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes:

$(h_1^<)$ $\qquad f \circ \varphi \subset \varphi' \circ f$

$(h_1^< f)$ $\qquad \forall X \in \mathcal{P}(E) \;, \qquad f \circ \varphi(X) \subset \varphi' \circ f(X)$

$(h_2^<)$ $\qquad \varphi \circ f^{-1} \subset f^{-1} \circ \varphi'$

$(h_3^<)$ $\qquad \forall X \in \mathcal{C} \;, \qquad (f(x))_{x \in X}$ est un pseudo-circuit de E'

$(h_4^<)$ $\qquad \forall X \in \beta(E)$ tel que : $\forall x \in X, \; x \in \varphi(X-x)$, on a : $\forall y \in X,$
$y \in \varphi' \; (f\;(X-y))$ (comparer avec (h_7))

et (pour les φ-espaces seulement) :

$(h_5^<)$ $\qquad \forall A' \in \mathcal{F}' \;, \quad f^{-1}\,(A') \in \mathcal{F}$

Propriétés caractéristiques des $\underline{\Phi}^{=}$-morphismes

Une application f de $(E,\mathcal{L})$ dans $(E',\mathcal{L}')$ est un $\underline{\Phi}^{=}$-morphisme si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

$(h_1^{=})$ $\quad f \circ \varphi = \varphi' \circ f$

$(h_2^{=})$ $\quad \forall A' \in \mathcal{S}', \quad f^{-1}(A') \in \mathcal{S} \quad$ et $\quad \forall A \in \mathcal{S}, \quad f(A) \in \mathcal{S}'.$

L'on peut aussi les caractériser à l'aide des circuits. Les structures image réciproque et image directe permettront de préciser ces morphismes.

2.1.2.- Comparaisons de structures

L'ensemble $\underset{\sim}{L}(E)$ des structures de $\mathcal{L}$-espace sur E est ordonné (voir Bourbaki [C, I, 4], § 2, n° 2, p. 25) par l'une des propriétés équivalentes ci-dessous :

(0_0) $\quad \mathcal{L}$ est plus fine que $\mathcal{L}'$ (on note $\mathcal{L}' < \mathcal{L}$)

(0_1) $\quad \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$

(0_2) $\quad r' \leq r$

(0_3) $\quad \overline{\mathcal{L}} \subset \overline{\mathcal{L}}'$

(0_4) $\quad \forall C \in \mathcal{C}, \ \exists C' \in \mathcal{C}', \ C' \subset C$

(0_5) $\quad \mathcal{B}' \subset \mathcal{L}$

De même l'ensemble ordonné $\underset{\sim}{L}^{<}(E)$ est ordonné par l'une des propriétés équivalentes ci-dessous :

($0\ F_0$) $\mathscr{L}$ est <u>fortement plus fine</u> que $\mathscr{L}'$ (on note $\mathscr{L}' \ll \mathscr{L}$)

($0\ F_1$) $\varphi \subset \varphi'$

($0\ F_2$) $\forall X \subset \mathscr{C}$, X est réunion de $\mathscr{C}'$-circuits (i.e. $\mathscr{C} \subset P\,\mathscr{C}'$)

et, pour les φ-espaces seulement :

($0\ F\Phi$) $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$

L'ordre de $\underset{\sim}{L}^{=}$ (E) se réduit à l'égalité .

Si $\mathscr{L}$ est fortement plus fine que $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}$ est plus fine que $\mathscr{L}'$.

<u>Propriétés de l'ensemble ordonné $\underset{\sim}{L}(E)$.</u>

La structure la plus fine est caractérisée par :

$\mathscr{L} = \beta(E)$; $\mathscr{C} = \emptyset$; $\forall X \in \beta(E)$, $r(X) = \text{Card } X$ et $\varphi\ (X) = X$; $\beta = \{E\}$.

c'est la structure de <u>φ-espace discret</u> sur E.

La structure la moins fine est caractérisée par :

$\mathscr{L} = \{\emptyset\}$; $\mathscr{C} = \mathscr{F}_1(E)$; $\forall X \in \beta(E)$, $r(X) = 0$ et $\varphi(X) = E$; $\beta = \{\emptyset\}$

c'est la structure de <u>φ-espace grossier</u> sur E.

L'on démontre alors sans difficultés le :

<u>Théorème 1.-</u> $\underset{\sim}{L}(E)$ est un <u>treillis complet</u>. Plus précisément :

(1) $\wedge\ \mathscr{L}_i = \cap\ \mathscr{L}_i$; Si I est fini, $\bigvee_{i \in I} \mathscr{L}_i = \bigcup_{i \in I} \mathscr{L}_i$

et dans le cas général :

$$\vee\ \mathscr{L}_i = \{X \mid X \subset E \text{ et } \forall Y \in \mathscr{F}(X),\ \exists i \in I,\ Y \in \mathscr{L}_i\}$$

(2) $\forall X \in \mathscr{F}$ (E) , $(\bigvee_i r_i)\ (X) = \underset{i}{\text{Max}}\ r_i\ (X)$

et soit $\rho(X) = \underset{i}{\mathrm{Min}} \; r_i(X)$,

ρ est un rang faible, mais non un rang en général. Donc :

$$\underset{i}{\wedge} \; r_i = \hat{\rho} = r_{\mathscr{L}_\rho} \quad \text{(voir corollaire 3 du théorème 1 de 1.1.)}$$

(3) (*) $\wedge \mathscr{C}_i = \mathrm{MIN} \; (\underset{i}{\cup} \mathscr{C}_i)$ et $\vee \mathscr{C}_i = \mathrm{MIN} \; (\underset{i}{\cap} \bar{\mathscr{L}}_i) \cap \mathscr{I}(E)$

Ce treillis est distributif, mais non complémenté.

<u>Propriétés des ensembles ordonnés $\underset{\sim}{L}^{<}(E)$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}(E)$</u>

Pour ces ensembles ordonnés, la structure la moins fortement fine est la structure grossière, et la structure la plus fortement fine est la structure discrète.

L'on démontre aisément la :

<u>Proposition 1.-</u> $\underset{\sim}{L}^{<}(E)$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}(E)$ sont des <u>ensembles ordonnés inductifs pour leur ordre et pour leur ordre inverse.</u> Plus précisément, $(\mathscr{C}_i)$ étant une famille totalement ordonnée de $\mathscr{L}$-espaces (resp. φ-espaces), dans $\underset{\sim}{L}^{<}(E)$ et dans $\underset{\sim}{\Phi}^{<}(E)$ on a :

$$\bigvee \mathscr{C}_i = \vee \mathscr{C}_i \quad , \quad \bigwedge \mathscr{C}_i = \wedge \mathscr{C}_i \qquad (1)$$

$$P\,(\vee \mathscr{C}_i) = \cap \, P \; \mathscr{C}_i \quad \text{et} \quad P\,(\wedge \mathscr{C}_i) = \vee \, P \; \mathscr{C}_i \qquad (2)$$

$$\vee \; \varphi_i = \cup \; \varphi_i \quad \text{et} \quad \wedge \; \varphi_i = \theta \qquad (3)$$

(*) Si X est une partie d'un ensemble ordonné, l'on désigne par MIN (X) (resp. MAX (X)) l'ensemble des éléments minimaux (resp. maximaux) de X.

où

$$\forall X \subset E \quad , \qquad \theta(X) = \cup\ (\cap\ \varphi_i\ (Y)) \quad [Y \in \mathcal{I}\ (X)] \tag{4}$$

(en général $\cap\ \varphi_i$ ne vérifie pas (G_1)).

Ces ensembles ordonnés ne sont plus des treillis, les bornes supérieures ou inférieures n'existant plus en général, même pour deux éléments.

2.1.3. - Exemple fondamental : $\mathcal{L}_A$ ou $\mathcal{L}[A]$, r_A ... .

Théorème et définition 2.-

Soit $\mathcal{C}$ une structure de $\mathcal{L}$-espace sur E et $A \subset E$. Alors :

(a_1) $\quad \mathcal{C}_A = \mathcal{C}[A] = \mathcal{I}_1(A) \cup \mathrm{MIN}\ (\{C-A | C \in \mathcal{C}\} - \{\emptyset\})$

définit sur E une structure de $\mathcal{L}$-espace moins fine que $\mathcal{C}$ appellée la translatée de $\mathcal{C}$ par A et ayant les propriétés suivantes :

(a_2) $\quad \mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{[A]} = \{X | X \subset E\ ,\ X \cap A = \emptyset$ et $\forall C \in \mathcal{C},\ C \not\subset X \cup A$ ou $C \cap X = \emptyset\}$

(a_3) $\quad \forall X \in \mathcal{P}(E), \quad \varphi(A) \cup X \subset \varphi_A(X) \subset \varphi(A \cup X)$

(a_4) $\quad (\forall X \in \mathcal{P}(E)\ , \quad \varphi_A(X) = \varphi(A \cup X)) \iff (\mathcal{C}_{[A]} \ll \mathcal{C})$

(a_5) $\quad \forall X \in \mathcal{I}(E)\ , \quad r_A(X) \leq \mathrm{Min}\ (r\ (X \cup B) - r(B)) \qquad [B \in \mathcal{I}(A)]$

Si $\mathcal{C}$ est une structure de φ-espace, $\mathcal{C}[A]$ est aussi un φ-espace et alors $\mathcal{C}[A]$ est fortement moins fine que $\mathcal{C}$ et, outre (a_4), on a l'égalité dans (a_5).

Démonstration

(a_1) définit $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_A < \mathcal{C}$ est trivial. On utilisera $\mathcal{C}[A]$ pour éviter les indices inférieurs.

L'on vérifie (a_2) en démontrant d'abord que :

$$\mathcal{I}_A = \{X \mid X \subset E, \quad X \cap A \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \exists C \in \mathcal{C} \text{ tel que } C \subset X \cup A \text{ et } C \cap X \neq \emptyset\}$$

Il est en général difficile de calculer φ_A et r_A autrement que par les formules de la planche I. Cependant (a_3) et (a_5) donnent des bornes remarquables et (a_4) donne φ_A quand $\mathcal{C}_A$ est fortement plus fine que $\mathcal{C}$.

D'après $\varphi_{\mathcal{C}}$, $\varphi_A(\emptyset) = \varphi(A)$. D'où :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad , \quad \varphi_A(X) \supset \varphi(A) \cup X.$$

Soit maintenant :

$$\mathcal{C}_1 = \mathrm{MIN} \quad (\{C-A \mid C \in \mathcal{C}\} - \{\emptyset\}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_o = \{C \mid C \in \mathcal{C} \text{ et } C-A \in \mathcal{C}_1\}$$

on a :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E) \ , \quad \varphi_A(X) = A \cup X \cup \{x \mid x \in E \text{ et } \exists Y \in \mathcal{I}(A \cup X), \ Y + x \in \mathcal{C}_o\}$$

or $\mathcal{C}_o \subset \mathcal{C}$, donc : $\varphi_A(X) \subset \varphi\,(A \cup X)$

Si $\mathcal{C}_A \ll \mathcal{C}$, $\forall x \in \varphi(A \cup X) - A \cup X$, $\exists Y \in \mathcal{I}(A \cup X)$, $Y+x \in \mathcal{C}$. Comme $Y+x$ est réunion de circuits de $\mathcal{C}_A$, il existe $Z \in \mathcal{I}(Y)$ tel que $Z+x \in \mathcal{C}_A$. Donc $x \in \varphi_A(X)$ et $\varphi_A(X) \supset \varphi(A \cup X)$.

Si $\mathcal{C}_A \not\ll \mathcal{C}$, $\exists C \in \mathcal{C}$, $\exists x \in C$ tels que x n'appartienne à aucun $\mathcal{C}_A$-circuit inclus dans C. Donc :

$x \in \varphi\,(A \cup (C-x))$, mais $x \notin \varphi_A(C-x)$.

D'où (a_3) et (a_4)

En général $\varphi(X) \not\subset \varphi_A(X)$. On a d'ailleurs d'après (a_4) :

$$(\varphi \subset \varphi_A) \iff (\varphi \ll \varphi_A) \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E), \ \varphi_A(X) = \varphi(A \cup X)\ )$$

Avant de démontrer (a_5), il est bon d'énoncer les :

<u>Corollaire 1.-</u> Soient M et N deux parties libres d'un $\mathcal{L}$-espace E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $M \cup N \in \mathcal{L}$ et $M \cap N = \emptyset$

b) $M \in \mathcal{L}_N$ et $N \in \mathcal{L}$

c) $N \in \mathcal{L}_M$ et $M \in \mathcal{L}$

<u>Corollaire 2.-</u> Soit E un $\mathcal{L}$-espace, $A \subset E$ et B une base de A. Pour toute partition (M,N) de B, M est une $\mathcal{L}_N$-base de A. Réciproquement, si N est une partie libre de A et M une $\mathcal{L}_N$-base de A, $M \cap N = \emptyset$ et $M \cup N$ est une base de A.

Ces corollaires se démontrent sans difficultés à partir de la propriété (a_2). Démontrons (a_5) :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad , \quad \forall Z \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{L} \ , \ \exists\, Y \subset X \quad , \quad Y \in \mathcal{L}_Z \quad \text{tel que :}$$

$$r_Z(X) = \text{Card } Y = r_Z(Y)$$

et d'après le corollaire 1, $Y \cap Z = \emptyset$ et $Y \cup Z \in \mathcal{L}$, donc :

$$r\,(X \cup Z) \geq \text{Card } Y + \text{Card } Z = r_Z\,(X) + r(Z)$$

soit

$$r_Z(X) \leq r(X \cup Z) - r(Z)$$

Alors pour tout $B \in \mathcal{P}(A)$, considérant $Z \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(B)$ tel que $r(B) = \text{Card } Z$, on a :

$$r_B(X) \leq r_Z(X) \leq r(X \cup Z) - r(Z) \leq r(B \cup X) - r(B)$$

d'où

$$\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad , \quad r_A(X) \leq \text{Min}\,(r\,(B \cup X) - r(B)) \quad [B \in \mathcal{P}\,(A)]$$

(Il est aisé de vérifier que, si $A \subset A'$, $r[A] \geq r[A']$).

Σ $r(B \cup X) - r(B)$ n'est pas une fonction décroissante de B en général.

Soit maintenant $(E, \mathscr{C})$ un φ-espace. L'on va d'abord démontrer que $\mathscr{C}_A \ll \mathscr{C}$ en prouvant par récurrence sur Card (C-A) que tout $C \in \mathscr{C}$ est réunion de $\mathscr{C}_A$-circuits. C'est trivial si Card (C-A) = 0. Supposons le vrai si Card $(C-A) \leq n-1$ et soit $C \in \mathscr{C}$ tel que Card (C-A) = n.

Si $C-A \in \mathscr{C}_A$, C est trivialement réunion de $\mathscr{C}$-circuit. Sinon $C-A \notin \mathscr{C}_A$, donc : $\exists C' \in \mathscr{C}$ tel que $C'-A \subsetneq C-A$ et $C'-A \in \mathscr{C}_A$. Alors, $\forall x \in C$, si $x \in C \cap A$, $\{x\} \in \mathscr{C}_A$; si $x \in C'-A$, $C'-A \in \mathscr{C}_A$; si $x \in C-A$ et $x \notin C'-A$, il existe $a \in (C-A) \cap (C'-A) = C \cap C'-A$ et d'après l'axiome (C'_2), il existe $C'' \in \mathscr{C}$, $x \in C''$ et $C'' \subset C \cup C' - \{a\}$. Donc $C'' - A \subsetneq C-A$ et $x \in C''$. Par hypothèse de récurrence, C'' est réunion de $\mathscr{C}_A$-circuits, et en particulier il existe $C_x \in \mathscr{C}_A$ tel que $x \in C_x$ et $C_x \subset C'' - A$, donc $C_x \subset C-A$.

Comme $\mathscr{C}_A \ll \mathscr{C}$, d'après (a_4),

$$\forall X \in E, \quad \varphi_A(X) = \varphi(A \cup X)$$

et, φ étant une fermeture, φ_A est aussi une fermeture, donc (E, φ_A) est un φ-espace. On en déduit alors aisément le :

<u>Corollaire 3.-</u> Soit (E,φ) un φ-espace et $A \subset E$. Alors (E, φ_A) est un φ-espace, $\varphi \subset \varphi_A$ et $\varphi_A = \varphi_{\varphi(A)}$.

A et B étant deux parties de E, on a les propriétés :

a) $A \subset B \longrightarrow \varphi_A$ est fortement plus fine que φ_B

b) $\varphi(A) \subset \varphi(B) \Longleftrightarrow \varphi_A$ est fortement plus fine que φ_B

c) $\varphi(A) = \varphi(B) \Longleftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$

Ces propriétés sont fausses dans un $\mathcal{L}$-espace quelconque.

Soit (E,φ) un φ-espace, $A \subset E$ et $X \in \mathcal{F}(E)$. Si B est une base de A et B' une base de $B \cup X$ contenant B, alors B' est une base de $A \cup X$ et, d'après les corollaires 1, 2 et 3, $B' - B$ est une φ_A-base de X.

Donc : $r_A(X) = \text{Card } (B'-B)$

Si $r(A)$ est fini, on a $r_A(X) = r(X \cup A) - r(A)$

Sinon, B et B' sont infinies ; mais :

$\forall x \in X \quad , \quad \exists \, B'_x \in \mathcal{F}(B'), \qquad x \in \varphi(B'_x)$

donc $B'_o = \bigcup B'_x \quad [x \in X] \in \mathcal{F}(B') \qquad$ et $X \subset \varphi(B'_o)$.

En outre $\forall x \in B' - B \quad , \quad x \in X \, ,$ donc $B'_x \supset \{x\} \qquad : \; B'_o \supset B' - B$

Donc $B' - B$ est encore une φ_{B_o}-base de X
où $B_o = B'_o - (B' - B) \in \mathcal{F}(B)$

et $r_{B_o}(X) = \text{Card } (B' - B) = r_A(X) = r(X \cup B_o) - r(B_o)$

Donc

$$r_A(X) = \text{Min } (r(X \cup B) - r(B)) \qquad [B \in \mathcal{F}(A)]$$

et le :

<u>Corollaire 4.-</u> Soit (E,φ) un φ-espace et $A \subset E$.

$$\forall X \in \mathfrak{P}(E) \quad , \quad \varphi_A(X) = \varphi(A \cup X)$$

et

$$\forall X \in \mathcal{F}(E) \, , \quad \text{si } r(A) \text{ est fini,} \quad r_A(X) = r(X \cup A) - r(A)$$

sinon :

$$r_A(X) = \text{Min } (r(X \cup B) - r(B)) \qquad [B \in \mathcal{F}(A)]$$

où $r(X \cup B) - r(B) = r_B(X)$ est une fonction décroissante de B.

2.2.- Structures initiales dans les $\mathscr{L}$-espaces et dans les φ-espaces

2.2.1.- Images réciproques et structures induites

Soit E un ensemble , $(E', \mathscr{L}')$ un $\mathscr{L}'$-espace et f une application de E dans E'. La structure image réciproque par f de $(E', \mathscr{L}')$ dans $\underset{\sim}{L}$ est, si elle existe, le $\mathscr{L}$-espace $(E, \mathscr{L})$ tel que :

(I N) Pour tout $\mathscr{L}''$-espace $(E'', \mathscr{L}'')$, pour toute application g de E'' dans E, g est un $\underset{\sim}{L}$-morphisme si et seulement si f o g est un $\underset{\sim}{L}$-morphisme.

Or $(E, \mathscr{L})$ est la structure la moins fine sur E telle que f soit un morphisme, et f est un morphisme si et seulement si, pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $r(X) \geqslant r'(f(X))$.

Considérant alors $(E, \mathscr{L})$ telle que :

$$\forall X \in \mathscr{P}(E) \quad , \quad r(X) = r'(f(X))$$

on démontre aisément que :

a) si r' vérifie (R_1) (resp. (R_2) ; resp.(R_3)); il en est de même de r.

b) la propriété (I N) est réalisée par $(E, \mathscr{L})$

c) f est alors un $\underset{\sim}{L}^{<}$-morphisme et (I N) est réalisée dans $\underset{\sim}{L}^{<}$.

On a donc ainsi la structure image réciproque dans $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{L}^{<}$, et a fortiori dans $\underset{\sim}{\Phi}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$. D'où le :

Théorème 3 .-

Soit $(E', \mathscr{L}')$ un $\mathscr{L}'$-espace, E un ensemble et f une application de E dans E'. La structure image réciproque par f de $(E', \mathscr{L}')$ dans $\underset{\sim}{L}$ existe toujours : c'est le $\mathscr{L}$-espace $(E, \mathscr{L})$ défini par l'une des propriétés équivalentes :

(I R_1) $(\forall X\in \mathfrak{P}(E))\ ((X\in \mathcal{L}) \Longleftrightarrow ((f(x))_{x\in X}$ est $\mathcal{L}'$-libre))

(I R_2) $\forall X \in \mathcal{F}(E)$, $r(X) = r'(f(X))$ (on écrit : $r = r' \circ f$)

(I R_3) $\mathcal{C} = \{X \mid X\subset E,\ f_{|X}$ injective et $f(X)\in \mathcal{C}'\} \cup \{\{x,y\} \mid x\in E,\ y\in E,\ x\neq y$, et $f(x) = f(y)\notin \varphi'(\emptyset)\}$

(I R_4) $(\forall X\in\mathfrak{P}(E))\ ((X\in \mathcal{B}) \Longleftrightarrow ((f(x))_{x\in X}$ base de $f(X)$)

(I R_5) $\varphi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$

et, pour les φ-espaces seulement :

(I R_6) $\mathcal{S} = \{f^{-1}(A') \mid A'\in \mathcal{S}'\}$

Alors f est un $\underset{\sim}{L}^{<}$-morphisme et $(E,\mathcal{L})$ est aussi la structure image réciproque de $(E', \mathcal{L}')$ par f dans $\underset{\sim}{L}^{<}$.

Si $(E', \mathcal{L}')$ est un φ-espace, $(E,\mathcal{L})$ est un φ-espace et c'est la structure image réciproque dans $\underset{\sim}{\Phi}$ et dans $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$.

<u>Corollaire</u> : Soit $(E,\mathcal{L})$ un $\mathcal{L}$-espace et $A\subset E$. La <u>structure induite</u> $\mathcal{L}_{|A}$ de $(E,\mathcal{L})$ sur A existe toujours et on a (*) :

$\mathcal{L}_{|A} = \mathcal{L} \cap \mathfrak{P}(A)$; $r_{|A} = r_{|\mathcal{F}(A)}$; $\mathcal{C}_{|A} = \mathcal{C} \cap \mathcal{F}(A)$

$\mathcal{B}_{|A}$ est l'ensemble des bases de A.

et $\forall X \in\mathfrak{P}(A)$, $\varphi_{|A}(X) = \varphi(X) \cap A$.

Si $(E,\mathcal{L})$ est un φ-espace, $(A,\mathcal{L}_{|A})$ est un φ-espace (on a la même structure induite pour $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{L}^{<}$ et éventuellement $\underset{\sim}{\Phi}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$).

(*) Une convention usuelle consiste à écrire $f_{|X}$ la restriction de f à X.

2.2.2.- Existence de structures initiales quelconques.

Soit $(E_i, \mathscr{L}_i)$ une famille de $\mathscr{L}$-espaces, E un ensemble et pour tout i, f_i une application de E dans E_i. Il est aisé de démontrer que la structure initiale dans $\underset{\sim}{L}$ pour la famille $(E_i, \mathscr{L}_i, f_i)_{i \in I}$ existe toujours : c'est $(E, \underset{i}{\text{Max}} \; r_i \circ f_i)$

Les théorèmes 1 et 3 permettent de calculer $\mathscr{L}$...

Cependant, en général, les structures initiales n'existent plus dans $\underset{\sim}{L}^{<}$, $\underset{\sim}{\Phi}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$, cependant, la famille $(E_i, \mathscr{L}_i, f_i)$ étant fixée, on a toujours avantage à la résoudre d'abord dans $\underset{\sim}{L}$. Si l'on obtient une structure de φ-espace et si les f_i sont des $\underset{\sim}{\Phi}$(resp. $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$)-morphismes, on a alors la structure initiale dans $\underset{\sim}{\Phi}$ (resp. $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$).

2.2.3.- Structures produits

La structure produit existe toujours dans $\underset{\sim}{L}$, mais rarement dans $\underset{\sim}{\Phi}$.

<u>Voici une étude de la structure produit dans $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$.</u>

Soit $(E_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une famille de φ-espaces, $E = \prod_i E_i$ et pour tout $i \in I$, pr_i la projection de E sur E_i.

pr_i est un morphisme de (E,φ) dans (E_i,φ_i) pour tout $i \in I$ si :

$$\forall X \in \mathfrak{P}(E) \quad , \quad \varphi(X) \subset \bigcap_i \; pr_i^{-1} \circ \varphi_i \circ pr_i \,(X) = \sigma(X)$$

donc
$$\sigma(X) = \prod_{i \in I} \varphi_i \circ pr_i \,(X)$$

σ vérifie les axiomes (G_2) et (G_6), mais elle ne vérifie (G_1) (resp.(G_3)) que si et seulement si tous les φ-espaces (E_i,φ_i), sauf un nombre fini (resp. sauf un au plus), vérifient la propriété :

$$\forall x \in E_i \quad , \quad \varphi_i(x) = E_i \; .$$

Donc, sauf pour des cas triviaux, $\sigma \notin \Phi(E)$.

Soit maintenant (E,φ) un φ-espace tel que :

pour tout φ'-espace (E', φ'), pour toute application g de E' dans E, pour tout $i \in I$, $pr_i \circ g$ soit un morphisme. Alors :

$$g \circ \varphi' \subset \sigma \circ g$$

donc, si $\sigma \in \Phi(E)$, (E,σ) est la structure produit des (E_i , φ_i) ;
mais si $\sigma \notin \underset{\sim}{\Phi}(E)$, même si la borne inférieure des $\varphi \in \underset{\sim}{\Phi}(E)$ telles que $\varphi \subset \sigma$ existe, la structure produit n'existe pas en général.

2.3.- Structures finales dans les $\mathscr{L}$-espaces et dans les φ-espaces

2.3.1.- Images directes et structures quotients.

L'on démontre comme ci-dessus que, dans $\underset{\sim}{L}$, la structure image directe de $(E,\mathscr{L})$ par une application f de E dans E' existe toujours ; c'est $(E',\mathscr{L}')$ ainsi définie :

$$\mathscr{C}' = \{f(C) \mid C \in \mathscr{C} \quad \text{et} \quad f_{|C} \quad \text{injective}\}.$$

Cependant, si $(E,\mathscr{L})$ est un φ-espace, $(E',\mathscr{L}')$ n'est pas un φ-espace en général.

D'où de même la structure quotient dans $\underset{\sim}{L}(E)$.

Par contre dans $\underset{\sim}{L}^{<}$, $\underset{\sim}{\Phi}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$ les structures images directes et quotient n'existent pas en général.

2.3.2.- Existences de structures finales quelconques

Soit $(E_i, \mathcal{L}_i)$ une famille de $\mathcal{L}$-espaces, E un ensemble et pour tout i, g_i une application de E_i dans E. Il est aisé de démontrer que la structure finale dans $\underset{\sim}{L}$ pour la famille $(E_i, \mathcal{L}_i, g_i)$ existe toujours : c'est $(E, \wedge \mathcal{C}_i^o)$

$$\text{où} \qquad \forall i \in I \quad , \quad \mathcal{C}_i^o = \{g_i\,(C) \mid C \in \mathcal{C}_i \quad \text{et} \quad g_i|_C \text{ injective}\}$$

$$\text{et} \qquad \wedge \; \mathcal{C}_i^o = \mathrm{MIN}\;(\bigcup_i \mathcal{C}_i^o).$$

Cependant, en général, les structures finales n'existent plus dans $\underset{\sim}{L}^{<}$, $\underset{\sim}{\Phi}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$ et l'on a des propriétés analogues à celles de 2.2.2.

2.3.3.- Sommes directes et unions directes.

Si f est une application injective, la structure image directe d'un φ-espace par f est un φ-espace (l'axiome (C_2) "se transporte"), ce qui n'est plus vrai en général quand f n'est pas injective.

D'une manière générale, soit $(E_i, \mathcal{L}_i)$ une famille de $\mathcal{L}$-espaces, E un ensemble, et pour tout i, g_i une <u>injection</u> de E_i dans E, de sorte que $(g_i(E_i))_{i \in I}$ soit une <u>partition</u> de E. La structure finale pour $(E_i, \mathcal{L}_i, f_i)$ dans $\underset{\sim}{L}$ est appellée structure <u>somme directe</u> des $\mathcal{L}_i$ et l'on écrit $\bigoplus_i \mathcal{L}_i$. On a

$$\bigoplus_i \mathcal{C}_i = \{g_i\,(C) \mid C \in \mathcal{C}_i \quad \text{et} \quad i \in I\}$$

Toute somme directe de φ-espace est un φ-espace.

Si les E_i sont des parties de E et f_i l'inclusion canonique de E_i dans E, alors $\bigoplus_i \mathcal{L}_i$ est appellée l'<u>union directe</u> des $(E_i, \mathcal{L}_i)$ et l'on écrit $\biguplus_i \mathcal{L}_i$. On a :

$$\biguplus_i \mathcal{C}_i = \bigcup_i \mathcal{C}_i \qquad \text{(réunion dans } \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))\text{)}$$

L'on démontre alors aisément le :

Théorème 4.-

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition d'un $\mathscr{L}$-espace $(E,\mathscr{L})$ et pour tout $i \in I$, $(E_i, \mathscr{L}_i)$ structure de $\mathscr{L}$-espace sur E_i. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(U D) $E = \biguplus_i E_i$

(U D_1) $\mathscr{L} = \{X | X \subset E$ et $\forall i \in I$, $X \cap E_i \subset \mathscr{L}_i\}$

(U D_2) $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $r(X) = \Sigma\ r_i\ (X \cap E_i)$ $[i \in I]$

(U D_3) $\mathscr{C} = \bigcup_i \mathscr{C}_i$

(U D_4) $X \in \mathscr{B}$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $X \cap E_i \in \mathscr{B}_i$

(U D_5) $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $\varphi(X) = \bigcup_i \varphi_i\ (X \cap E_i)$

En outre $(E,\mathscr{L})$ est un φ-espace si et seulement si tous les $(E_i,\mathscr{L}_i)$ sont des φ-espaces.

Lors de la disjonction, on verra des propriétés plus précises, notamment pour les φ-espaces (voir chapitre III).

2.4.- Irréductibilités. Isomorphismes.

L'existence de structures image réciproque et somme directe permet de réduire un "φ-espace" de deux manières :

2.4.1. Première reduction associée à l'image réciproque.

La relation "$(E,\varphi) \ll (E',\varphi')$ si et seulement si il existe une application f de E dans E' telle que φ soit l'image réciproque par f de ψ" est une relation de <u>préordre</u> sur les φ-espaces.

Un φ-espace (E,φ) est dit <u>1-réduit</u> si tout φ-espace (E',φ') tel que $(E',\varphi') \propto (E,\varphi)$ est isomorphe à (E,φ).

<u>Proposition 2.-</u> Un φ-espace (E,φ) est 1-réduit si et seulement si il vérifie l'une des propriétés équivalentes (donc toutes):

(1) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ et $\varphi(x) = \{x\}$ pour tout x

(2) tout $X \subset E$ tel que Card $X \leq 2$ est φ-libre

(3) Les circuits de E ont tous au moins trois éléments.

Il est aisé de vérifier l'équivalence des propriétés (1), (2) et (3), et un φ-espace qui les vérifie est 1-réduit. L'on obtient ainsi tous les φ-espaces 1-réduits. En effet l'on va définir le <u>foncteur de 1-réduction</u> qui :

- à tout φ-espace (E,φ) non grossier associe canoniquement son 1-réduit (E_1, φ_1) tel que $(E_1, \varphi_1) \propto (E,\varphi)$

- à tout morphisme f de (E,φ) dans (E', φ') tel que $f^{-1}(\varphi'(\emptyset)) = \varphi(\emptyset) \underset{\neq}{\subset} E$ associe un morphisme f_1 de (E_1, φ_1) dans (E'_1, φ'_1).

Soit $\underset{\sim}{T}$ la catégorie dont les objets sont les treillis géométriques, les morphismes de T dans T' étant les applications f de T dans T' telles que, pour toute famille (x_i) d'éléments de T,

$$f(\vee x_i) = \vee f(x_i) \qquad \text{et} \qquad f(\wedge x_i) = \wedge f(x_i)$$

et, u étant le plus grand élément de T , f(u) est le plus grand élément de T'.

$F : (E,\varphi) \longrightarrow T(E,\varphi)$ treillis géométrique des sous-espaces de (E,φ) et $(f : (E,\varphi) \longrightarrow (F,\psi) \longrightarrow ("f^{-1}" : T(F,\psi) \longrightarrow T(E,\varphi))$ est un <u>foncteur</u> de $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$ dans $\underset{\sim}{T}^{*}$ (catégorie duale de $\underset{\sim}{T}$) (voir 2.1.1. $(h_1^{<}) \Longleftrightarrow (H_5^{<})$).

Soit $\underset{\sim}{T}_1$ la sous-catégorie de $\underset{\sim}{T}$ dont les objets sont les treillis géométriques ayant au moins <u>deux</u> éléments et dont les morphismes transforment le plus petit élément en le plus petit élément.

$G : T \longrightarrow (P(T), \varphi)$ où $P(T)$ est l'ensemble des points (*) de T et où, pour tout $X \subset P(T)$, $\varphi(X)$ est l'ensemble des points $x \leq \vee X$ et

$(u : T' \longrightarrow T) \longrightarrow (G\,u : x \longrightarrow Gu(x) = \wedge A' \; [A' \in T' \text{ et } u(A') \geq x])$

est un foncteur pleinement <u>fidèle</u> de $\underset{\sim}{T}_1^{*}$ dans $\underset{\sim}{\Phi}$

$G(\underset{\sim}{T}_1^{*}) \subset \underset{\sim}{\Phi}_1$ sous-catégorie <u>pleine</u> de $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$ <u>dont les objets sont les φ-espaces 1-réduits</u>.

En effet $(P(T), \varphi)$ est 1-réduit, et, si (E,φ) est 1-réduit, $G \circ F (E,\varphi) = (E_1, \varphi_1)$ où $E_1 = \{\{x\} \mid x \in E\}$ et $x \longrightarrow \{x\}$ est un isomorphisme de E sur E_1. Donc (E,φ) est objet de $\underset{\sim}{\Phi}_1$ si et seulement si tout $x \in E$ est de la forme $x = \{x_0\}$. Si l'on admet <u>l'axiome de fondation</u> (voir [Q], chapitre I), l'on sait que, en général, il existera des éléments $x \in E$ tels que aucun élément ne leur appartienne.

(*) Les points d'un treillis T ayant un plus petit élément 0 sont les éléments x de T tels que $x > 0$ et il n'existe aucun élément $y \in T$ tel que $0 < y < x$.

Soit $\underset{\sim}{\Phi}'^{<}$ la sous-catégorie de $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$

- dont les morphismes sont les morphismes non triviaux, i.e. les morphismes f de (E,φ) dans (F,ψ) tels que $f(E) \not\subset \psi(\emptyset)$. (Alors les φ-espaces grossiers sont isolés et perdent leurs unités)

- et dont les objets sont les φ-espaces non grossiers; et $\underset{\sim}{\Phi}^{e}$ la sous-catégorie propre de $\underset{\sim}{\Phi}'^{<}$ dont les morphismes sont les morphismes exacts, i.e. les morphismes f de (E,φ) dans (F,ψ) tels que $f^{-1}(\psi, (\emptyset)) = \varphi(\emptyset)$.

$\underset{\sim}{\Phi}_1$ est une sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{\Phi}'^{<}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{e}$

A tout morphisme non trivial f de (E,φ) dans (F,ψ) est associé le morphisme exact $p(f)$ de $(E,\varphi\,[f^{-1}(\psi(\emptyset))])$ dans (F,ψ) ayant même application sous-jacente, et, posant $p(E,\varphi) = (E,\varphi)$, p est une projection de $\underset{\sim}{\Phi}'^{<}$ sur $\underset{\sim}{\Phi}^{e}$, mais ce n'est pas un foncteur.

L'on démontre alors aisément que :

$F_1 = G \circ F$, foncteur de $\underset{\sim}{\Phi}^{e}$ dans $\underset{\sim}{\Phi}_1$ est le foncteur de 1-réduction :

a) $G \circ F\ (E,\varphi) = (E_1, \varphi_1)$ où :

$$E_1 = \{\varphi(x) \mid x \in E - \varphi(\emptyset)\} \tag{1}$$

$\pi : x \longrightarrow \varphi(x)$ application de $E-\varphi(\emptyset)$ sur E_1 est la projection canonique de E sur son 1-réduit , φ_1 est l'image directe de $(E-\varphi(\emptyset), \varphi$ induit) par π et

$$\varphi_1 = \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1} \tag{2}$$

En outre, il existe au moins une application f de E_1 dans E telle que $f \circ \pi = 1_{E_1}$ (f est une section de π) et toute section f est telle que (E_1, φ_1) soit l'image réciproque de (E,φ) par f.

b) $[u : (E,\varphi) \longrightarrow (E',\varphi')] \longrightarrow G \circ F(u) = u_1$

est tel que le diagramme ci-contre soit commutatif. Plus précisément

$$\begin{tikzcd} E-\varphi(\emptyset) \arrow[r, "u \text{ restreint}"] \arrow[d, "\pi"] & E'-\varphi'(\emptyset) \arrow[d, "\pi'"] \\ E_1 \arrow[r, "u_1"] & E'_1 \end{tikzcd}$$

$$u_1 = \pi' \circ u \circ \pi^{-1} \qquad (3)$$

c) à tout morphisme non trivial f est associé le morphisme 1-réduit $f_1 = G \circ F \circ P(f)$ (mais ce procédé n'est plus fonctoriel).

d) Réciproquement, soient (E,φ) et (E', φ') deux φ-espaces. Si $\varphi(\emptyset) \neq \emptyset$ et $\varphi'(\emptyset) = \emptyset$, il n'existe aucun morphisme de (E,φ) dans (E',φ').

Sinon, à toute application σ_0 de $\varphi(\emptyset)$ dans $\psi(\emptyset)$, à tout morphisme u_1 de (E_1,φ_1) dans (F_1, ψ_1), et à toute famille $(\sigma_x)_{x \in E_1}$ d'applications σ_x de $x-\varphi(\emptyset)$ dans $u(x) - \varphi'(\emptyset)$, correspond le morphisme exact de (E,φ) dans (F,ψ) :

$$y \longrightarrow f(y) = \begin{cases} \sigma_0(y) & \text{si } y \in \varphi(\emptyset) \\ u\ (\sigma_x(y)) & \text{si } y \in x-\varphi\ (\emptyset) \end{cases}$$

2.4.2.- Réduction associée à la somme directe ($\mathscr{L}$-espaces)

Un $\mathscr{L}$-espace $(E,\mathscr{L})$ est dit 2-irréductible s'il n'existe pas de partition de E en deux parties A et B telle que $(E,\mathscr{L})$ soit union directe de

$$(A, \mathscr{L}|_A) \text{ et } (B, \mathscr{L}_B).$$

Un $\mathscr{L}$-espace 2-irréductible est dit 2-réduit

Un φ-espace est dit 1-2-réduit s'il est à la fois 1-réduit et 2-réduit.

Soit la relation d'équivalence R sur le $\mathcal{L}$-espace E :

$$R\{x,y\} \Leftrightarrow (x=y) \text{ ou } \left(\begin{array}{l}\text{il existe n circuits } C_i \ i=1,..,n \text{ de E tels que :} \\ x\in C_1 \ , \ C_i\cap C_{i+1}\neq\emptyset \text{ pour } i=1,\dots,n-1 \text{ et } y\in C_n\end{array}\right)$$

Soit $E/R = I$ et $(E_i)_{i\in I}$ les classes d'équivalence de E suivant R. Alors (E_i) est une partition de E, et, si pour tout i $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}\cap\mathcal{J}(E_i)$, on a :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{C}_i$$

Donc $$E = \biguplus_i (E_i, \mathcal{C}_i) = \biguplus_i (E_i), \varphi|_{E_i})$$

et la :

<u>proposition 3.-</u> On appelle <u>composantes d'un $\mathcal{L}$-espace</u> $(E,\mathcal{L})$ les classes d'équivalence (E_i) $[i\in E/R]$ de E suivant la relation d'équivalence R. Alors E est union directe de ses composantes E_i munies de $\mathcal{L}$ induit et chaque composante est 2-irréductible.

En particulier :

a) $E_i = \{x\}$ si et seulement si $x\in\varphi(\emptyset)$ ou x n'appartient à aucun circuit.

b) un $\mathcal{L}$-espace est 2-irréductible si et seulement si on peut joindre deux éléments quelconques de E par une suite finie (non vide) de circuits consécutivement non disjoints.

c) un espace vectoriel, un corps K algébriquement clos (degré de transcendance) sont des φ-espaces irréductibles quand on leur enlève $\varphi(\emptyset)$.

2.4.3. Isomorphismes

Les catégories $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{L}^{=}$ (resp. $\underset{\sim}{\Phi}$ et $\underset{\sim}{\Phi}^{<}$) ont les mêmes isomorphismes :

Une application f de $(E,\mathcal{L})$ dans $(E',\mathcal{L}')$ est un isomorphisme si et seulement si f est une bijection et vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(1) $(X \in \mathcal{L}) \iff (f(X) \in \mathcal{L}')$

(2) $(X \in \mathcal{B}) \iff (f(X) \in \mathcal{B}')$

(3) $(X \in \mathcal{C}) \iff (f(X) \in \mathcal{C}')$

(4) $\forall X \in \mathfrak{P}(E)$, $f \circ \varphi(X) = \varphi' \circ f(X)$

et, pour les φ-espaces seulement :

(5) $(A \in T(E,\varphi)) \iff (f(A) \in T(E',\varphi'))$

Voici un résultat plus fin :

Un $\mathcal{L}$-espace est dit complet si toute partie libre finie est incluse dans un circuit.

Les $\mathcal{L}$-espaces complets sont les $\mathcal{L}$-espaces maximaux pour la relation d'ordre :

$$(E,\mathcal{L}) \leq (E,\mathcal{L}') \iff \mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$$

(L'ensemble $\Phi(E)$ des structures de $\mathcal{L}$-espace sur E est alors un ensemble ordonné inductif).

exemple : Un espace vectoriel, un A-module sont des $\mathcal{L}$-espaces complets.

Si $(E,\mathcal{L})$ est un $\mathcal{L}$-espace complet, et si f est une bijection de E sur $(E',\mathcal{L}')$, f est un isomorphisme si et seulement si on a :

(3 C) $(X \in \mathcal{C}) \implies (f(X) \in \mathcal{C})$

Cette propriété est l'analogue de théorèmes classiques en algèbre et en analyse : Si f est une bijection linéaire, son inverse est linéaire ; Si f est une bijection linéaire continue, son inverse est linéaire continue (si on a suffisamment de propriétés sur les espaces topologiques considérés).

2.5.- Le problème de la représentation

On appelle représentation de $(E,\mathscr{L})$ dans $(E',\mathscr{L}')$ toute injection f de E dans F telle que, f restreint à f(E) soit un isomorphisme de $(E,\mathscr{L})$ sur $(f(E), \mathscr{L}'|_{f(E)})$.
L'on dit encore que f est un isomorphisme de $(E,\mathscr{L})$ dans $(E',\mathscr{L}')$.

Etant donnée une classe C de $\mathscr{L}$-espace (resp. φ-espaces)

1°) A quelle condition tout $\mathscr{L}$-espace (resp. φ-espace) se représente-t-il dans au moins un objet de C ?

2°) Quels sont les $\mathscr{L}$-espaces (resp. φ-espaces) qui se representent comme parties d'un objet de C? Les caractériser de manière aussi simple que possible.

Voici quelques réponses dans le cas des φ-espaces, quand C est la classe des espaces vectoriels.

a) Si (E,φ) se représente dans un espace vectoriel F sur k, alors (E,φ) se représente dans tout espace vectoriel F' sur k' tel que dim $F' \geq r(E)$ et k' contienne un sous-corps isomorphe à k, donc en particulier se represente dans $k^{(r(E))}$ espace vectoriel libre engendré par r(E) sur k. On dira alors que (E,φ) est k-représentable.

b) Soit E un φ-espace tel que Card $\varphi(\emptyset) \leq 1$. Si E est k-représentable, le φ-espace 1-réduit E_1 associé à E est k-représentable. Inversement si E_1

est k-représentable, alors E est k'-représentable pour tout corps k' contenant un corps isomorphe à k et tel que :

$$\text{Card } k' \geq a$$

où

$$a = (\text{Sup } (\text{Card } \varphi(x) - \varphi(\emptyset) \quad [x \in E]\ ) + 1 \qquad (1)$$

(ceci résulte de 2.4.1., d) en prenant pour σ_x des injections), le 1-réduit associé à un espace vectoriel est l'espace projectif de ses sous-espaces vectoriels de dimension 1).

c) Tout φ-espace E tel que Card $\varphi(\emptyset) \leq 1$ et tel que $T(E,\varphi)$ soit une <u>géométrie affine (*) de dimension ≥ 3</u> ou <u>une géométrie plane affine arguesienne</u> est k-représentable si et seulement si k contient un sous-corps isomorphe à un corps k_o défini <u>intrinsèquement</u> à partir de $T(E,\varphi)$ et

Card $k \geq a$ défini par (1).

(ce dernier point est une conséquence de [E], III, chapitre V, théorème 6, page 339 et chapitre VI, théorème 6, page 366). De même, de [E], III, chapitre VI, th. 9, p. 370 et de [F], chapitre 17, pages 366-375, il résulte un énoncé analogue à c) pour les <u>géométries projectives irréductibles de dimension ≥ 3 ou planes arguesiennes</u>.

Il est aisé de construire des exemples simples de φ-espaces qui ne peuvent se représenter dans un espace vectoriel en contredisant par exemple le théorème de Desargues.

(*) Au sens de [E], III, chapitres IV et V .

Le problème de représentation est ainsi ramené à un problème sur les 1-réduits. Il est aisé de le ramener à un problème sur les 1-2-réduits. Ce problème a fait l'objet de nombreuses recherches. Une bibliographie a été faite, dont voici quelques exemples :

[A] Artin E. est excellent sur les géométries affines et projectives.

[E] III déjà cité

[F] chapitre 17, pp. 311-420 est ce qu'il y a de mieux sur les géométries planes projectives et les liens entre la notion de géométrie plane et la notion de groupe.

[4] est une synthèse de propriétés concernant les treillis et plus spécialement les géométries. A noter au paragraphe 7 un exposé des problèmes résolus et des questions ouvertes, ainsi que de divers procédés mis en oeuvre pour les résoudre, la plupart concernant le problème de la représentation.

Chap. III LA THEORIE DE LA DISJONCTION

Initialement, l'un des buts de l'étude des φ-espaces a été de généraliser la notion de disjonction connue pour les parties d'un ensemble (famille de parties disjointes deux à deux) et pour deux corps intermédiaires (disjonction linéaire ou algébrique sur un corps de base), tout en gardant les notions de base, de dimension, ...

Rappelons qu'étant donné un corps k, un surcorps K et deux corps intermédiaires E et F, on dit que E et F sont linéairement (resp. faiblement linéairement ; resp. algébriquement) disjoints sur k si :

$\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $\forall Y \in \mathcal{P}(F)$
X et Y étant des parties libres de K considéré comme espace vectoriel sur k

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr] & \\ k \arrow[ur] \arrow[dr] & & K \\ & F \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(resp.: idem ; resp. : des parties algébriquement libres sur k),

On a : X est une partie libre de K, espace vectoriel sur F
et Y est une partie libre de K, espace vectoriel sur E
(resp. $X \cap Y = \emptyset$ et $X \cup Y$ est une partie libre de K, espace vectoriel sur k)
(resp. $X \cap Y = \emptyset$ et $X \cup Y$ est algébriquement libre sur k).

En 3.1, 3.2 et 3.3 est présentée une théorie de la disjonction qui contient les disjonctions ensembliste, faiblement linéaire et algébrique ; et en 3.4 une théorie de la disjonction double, qui contient la disjonction linéaire.

3.1.- Définitions et propriétés générales

3.1.1.- Définitions et notations.

Les notations suivantes seront couramment utilisées :

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Pour tout $J\subset I$, on écrit $X_J = \cup X_i\ [i\in J]$. On écrit $(Y_i)\subset(X_i)$ l'ordre produit sur $\mathfrak{P}(E)^I$ et on l'appelle encore inclusion :

(Y_i) est incluse dans (X_i) si et seulement si, pour tout $i\in I$, $Y_i\subset X_i$.

<u>Définition 1.-</u> Une <u>famille</u> $(X_i)_{i\in I}$ de parties d'un $\mathcal{L}$-espace E est dite <u>disjointe</u> (ou <u>$\mathcal{L}$-disjointe</u>) si pour toute famille (Y_i) incluse dans (X_i) telle que pour tout $i\in I$, Y_i soit $\mathcal{L}$-libre, on a la propriété :

(D) Y_I est $\mathcal{L}$-libre et les Y_i sont disjoints deux à deux

On dit encore que les X_i sont $\mathcal{L}$-disjoints, et, quand $I=\{1,\dots,n\}$ est fini, que $X_1,\dots,X_{n-1}$ et X_n sont $\mathcal{L}$-disjoints.

<u>Exemples</u> :

1) Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de sous-A-modules d'un A-module M (voir 1.2.1. pour $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$).

<u>1.a|</u> (M_i) est $\mathcal{L}_0$-disjointe si et seulement si le <u>sous-module N engendré par les M_i est</u> (isomorphe à la) <u>somme directe</u> (A-modules) <u>des M_i</u>

2) Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-anneaux d'un anneau commutatif et unitaire A et B un sous-anneau de A

2.a| $(A_i)_{i\in I}$ est $\mathscr{L}_0$-disjointe si et seulement si les A_i sont <u>algébriquement disjoints</u> sur B

2.b| $(A_i)_{i\in I}$ est $\mathscr{L}_1$-disjointe si et seulement si les A_i sont <u>intégralement disjoints</u> sur B.

3) Soit E un φ-espace discret. Une famille (X_i) de parties de E est disjointe si et seulement si les X_i sont sans élément commun deux à deux.

<u>3.1.2.- Propriétés élémentaires</u>

<u>1°) Caractère fini</u>

Si (X_i) est disjointe, toute (Y_i) incluse dans (X_i) est disjointe . Mieux :

$(X_i)_{i\in I}$ est disjointe si et seulement si $\forall J\in\mathscr{F}(I)$, $(X_i)_{i\in J}$ est disjointe et

$(X_i)_{i\in I}$ est disjointe si et seulement si $\forall (Y_i)$ telle que $\forall i\in I$, $Y_i\in\mathscr{F}(X_i)$, (Y_i) est disjointe.

et finalement

$(X_i)_{i\in I}$ est disjointe si et seulement si $\forall J\in\mathcal{F}(I)$ et $\forall(Y_i)$ telle que

$$\forall i\in I,\qquad Y_i\in\mathcal{F}(X_i)\ ,$$

$$(Y_i)_{i\in J}\ \text{est disjointe.}$$

2°) Cas triviaux

Si pour tout i, sauf peut-être un, $X_i\subset\varphi(\emptyset)$ (X_i) est trivialement disjointe.

Il est clair en outre que, pour qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ soit disjointe, il faut et il suffit que $(X_i)_{i\in J}$, où J est l'ensemble des $i\in I$ tels que $X_i\not\subset\varphi(\emptyset)$, soit disjointe.

Une famille $(X_i)_{i\in I}$ sera dite strictement disjointe si elle est disjointe et si pour tout i, $X_i\not\subset\varphi(\emptyset)$.

3°) Associativité et commutativité.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un $\mathcal{L}$-espace.

a) $(J_\ell)_{\ell\in L}$ étant une partition de I, $(X_i)_{i\in I}$ est disjointe si et seulement si $\forall\ell\in L$, $(X_i)_{i\in J_\ell}$ est disjointe

et $(X_{J_\ell})_{\ell\in L}$ est disjointe.

b) σ étant une bijection de I sur lui-même, $(X_i)_{i\in I}$ est disjointe si et seulement si $(X_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est disjointe.

3.1.3.- Liens avec la notion d'union directe

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille $\mathcal{L}$-disjointe de parties d'un $\mathcal{L}$-espace $(E,\mathcal{L})$. La condition (D) entraîne que :

$\forall Y\in\mathcal{P}(X_I)$ telle que, $\forall i\in I$, $Y\cap X_i\in\mathcal{L}$, $Y\in\mathcal{L}_I$

et $\forall i\in I$, $\forall j\in I$, $i\neq j$, on a $X_i\cap X_j\subset\varphi(\emptyset)$.

Donc $(X_i - \varphi(\emptyset))_{i \in I}$ est une partition (au sens large) de $X_I - \varphi(\emptyset)$ et :

$$(X_I - \varphi(\emptyset) \ , \mathscr{L} \text{ induit}) = \biguplus_{i \in I} (X_i - \varphi(\emptyset) \ , \mathscr{L} \text{ induit})$$

Il est immédiat de voir que cette condition suffit pour que (X_i) soit $\mathscr{L}$-disjointe, et l'on déduit alors du théorème 4 de 2.3.3. la :

<u>Proposition 1.-</u> Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un $\mathscr{L}$-espace E et pour tout $i \in I$, $Z_i = X_i - \varphi(\emptyset)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(D D) (X_i) est $\mathscr{L}$-disjointe

(D D_1) $(Z_I \ , \mathscr{L}_{|Z_I}) = \biguplus (Z_i \ , \mathscr{L}_{|Z_i})$ $[i \in I]$

(D D_2) $\forall C \in \ell$ tel que Card $C \geqslant 2$ et $C \subset X_I$, il existe au moins un $i \in I$ tel que $C \subset X_i$, et $\forall i \in I$, $\forall j \in I-i$, $X_i \cap X_j \subset \varphi(\emptyset)$

(D D_3) $\forall C \in \ell$ tel que Card $C \geqslant 2$ et $C \subset X_I$, il existe un $i \in I$ et <u>un seul</u> tel que $C \cap X_i \neq \emptyset$, et $\forall i \in I$, $\forall j \in I-i$, $X_i \cap X_j \subset \varphi(\emptyset)$

(D D_4) $\forall X \in \mathscr{F}(X_I)$, $r(X) = \sum r_i (X \cap X_i)$ $[i \in I]$

et alors, $\forall i \in I$, $X_i \cap \varphi(X_{I-i}) \subset \varphi(\emptyset)$

<u>3.1.4.- Dépendance entre $\mathscr{L}$ et la $\mathscr{L}$-disjonction</u>

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux structures de $\mathscr{L}$-espace sur un ensemble E. Si toute famille $\mathscr{C}$-disjointe est $\mathscr{C}'$-disjointe, alors :

a) $\forall x \in \varphi(\emptyset)$, (x,x) est $\mathscr{C}$-disjointe, donc $\mathscr{C}'$-disjointe : $x \in \varphi'(\emptyset)$ donc :

$$\varphi(\emptyset) \subset \varphi'(\emptyset) \qquad (1)$$

b) $\forall C' \in \mathscr{C}'$ tel que Card $C' \geqslant 2$, $(C', \mathscr{C}_{/C'})$ est un $\mathscr{L}$-espace 2-irréductible, sinon il existerait C'_1 et C'_2 tels que $(C', \mathscr{C}_{/C'}) = C'_1 \oplus C'_2$, et (C'_1, C'_2) serait $\mathscr{C}$-disjointe sans être $\mathscr{C}'$-disjointe. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \forall C' \in \mathscr{C}', \quad \forall x \in C', \quad \forall y \in C', \ x \neq y, \ \text{il existe } (C_i)_{i=1,\dots,n} \\ \text{famille de } \mathscr{C}\text{-circuits inclus dans } C' \text{ telle que :} \\ \quad x \in C_1, \ y \in C_n \ \text{ et pour } i = 1,\dots, n-1, \ C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset \end{array}\right\} \quad (2)$$

Il est aisé de voir que ces conditions suffisent. Donc :

<u>Pour que toute famille $\mathscr{C}$-disjointe soit $\mathscr{C}'$-disjointe, il faut et il suffit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ vérifient les propriétés (1) et (2) ci-dessus.</u>

Si $\varphi(\emptyset) = \varphi'(\emptyset)$, (2) entraîne $\mathscr{C}' \gg \mathscr{C}$, la réciproque étant fausse. En particulier une famille $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}_A$)-disjointe n'est pas en général $\mathscr{L}_A$ (resp. $\mathscr{L}$)-disjointe, même dans les φ-espaces.

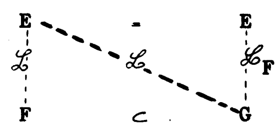
<u>Si toute famille $\mathscr{C}$-disjointe est $\mathscr{C}'$-disjointe et inversement, alors $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$.</u>

En effet, on aura alors $\varphi(\emptyset) = \varphi'(\emptyset)$, $\mathscr{C}' \gg \mathscr{C}$ et $\mathscr{C} \gg \mathscr{C}'$.

<u>3.1.5.- La propriété de translation</u>

On peut construire des familles disjointes de proche en proche par accumulation en utilisant un procédé de "translation" de $\mathscr{L}$:

Proposition 2.- Soient E, F, G trois parties d'un $\mathscr{L}$-espace. Si E et G sont $\mathscr{L}$-disjoints, alors E et F sont $\mathscr{L}$-disjoints et E et G sont $\mathscr{L}_F$-disjoints. La réciproque est vraie si $\mathscr{L}_F \ll \mathscr{L}$, ce qui est toujours le cas dans les φ-espaces.



Le début de l'énoncé se vérifie aisément. Réciproquement, si E et F sont $\mathscr{L}$-disjoints et si E et G sont $\mathscr{L}_F$-disjoints, alors :

a) $E \cap \varphi(F) \subset \varphi(\emptyset)$ et $E \cap G \subset \varphi(F)$, donc $E \cap G \subset \varphi(\emptyset)$

et b) $\forall C \in \mathscr{C}$ tel que Card $C \geqslant 2$ et $C \subset E \cup G$, on a :

$C \cap E \cap G \subset C \cap \varphi(\emptyset) = \emptyset$: $C \cap E \cap G = \emptyset$

Si $C \cap E = \emptyset$, $C \subset G$

Si $C \cap E \neq \emptyset$, alors "en général" $C \subset E \cup F$, donc $C \subset E$.

En effet, si $C \not\subset E \cup F$:

Quel que soit $C' \in \mathscr{C}_F$, $C' \subset C$, on a $C' \subset G$. En effet :

- ou bien C' n'a qu'un élément x', alors $x' \in \varphi(F)$ et $x' \notin \varphi(\emptyset)$ (sinon $C' \in \mathscr{C}$ et C et C' seraient comparables). Donc $x' \notin E$

- ou bien Card $C' \geqslant 2$. Alors il existe $C'' \in \mathscr{C}$ tel que $C'' - F = C'$. $C'' \cap F \neq \emptyset$, sinon C et C'' seraient comparables. Comme E et G sont $\mathscr{L}_F$-disjoints, si $C' \cap E \neq \emptyset$, $C' \subset E$, donc $C'' \subset E \cup F$ et on contredit le fait que E et F sont $\mathscr{L}$-disjoints ; donc $C' \cap E = \emptyset$ et $C' \subset G$.

Si $\mathscr{C}_F \ll \mathscr{C}$, tout $C \in \mathscr{C}$ est réunion de $\mathscr{C}_F$-circuits, donc $C \subset G$ et alors on contredit $C \cap E \neq \emptyset$ et $C \cap E \cap G = \emptyset$.

La condition la meilleure s'écrit :

$\forall C \in \mathscr{C}$, $C \subset E \cup G$, $C - G$ n'est pas $\mathscr{C}_F$-libre (1)

La proposition 2 est l'analogue pour la $\mathscr{L}$-disjonction de la proposition 7 de [C, II, 5] , § 2, 3, page 80 pour la disjonction linéaire (donc est vraie pour la disjonction algébrique).

En 3.2.4. sera énoncé un théorème général qui étend la proposition 2.

3.2.- Les théorèmes fondamentaux sur la disjonction dans les φ-espaces.

3.2.1.- Lemme préliminaire sur les $\mathscr{L}$-espaces

Lemme 1. $(Y_i)_{i\in I}$ étant une famille de parties d'un $\mathscr{L}$-espace E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(D) Y_I est libre et les Y_i sont disjoints deux à deux

(D_1) Pour tout $i \in I$, Y_i est $\mathscr{L}[Y_i']$ -libre où $Y_i' = Y_{I-i}$

(D_2) Il existe un ordre total sur I tel que, pour tout $i \in I$ Y_i est $\mathscr{L}[Y_i'']$ -libre où $Y_i'' = \cup Y_j$ $[j \in I$ et $j < i]$

(D_3) Pour tout ordre total sur I, pour tout $i \in I$, Y_i est $\mathscr{L}[Y_i'']$ -libre.

En effet, d'après le corollaire 1 du théorème 2 de 2.1.3, ce lemme est vrai quand I a deux éléments, et (D) entraîne (D_1) et (D_3).

Or (D_3) $\Longrightarrow$ (D_2) car tout ensemble peut être par exemple bien ordonné ; et (D_1) $\Longrightarrow$ (D_3) car, pour tout ordre total sur I, pour tout $i \in I$, $Y_i'' \subset Y_i'$, donc $\mathscr{L}[Y_i'] \subset \mathscr{L}[Y_i'']$. D'où (D) $\Rightarrow$ (D_1) $\Rightarrow$ (D_3) $\Rightarrow$ (D_2). Il reste à démontrer : (D_2) $\Longrightarrow$ (D) :

Ceci se démontre par récurrence sur Card I quand I est fini. Cette propriété étant vraie si Card I = 2, supposons la vraie pour Card $I \leq n-1$, et soit $I = \{1,\dots,n\}$ tel que :

$$\forall i \in I \quad , \quad Y_i \in \mathcal{L}[\cup Y_j \quad [j \in I \quad , \quad j < i]]$$

Alors $(Y_i)_{i \in I-n}$ vérifie (D_2), donc (D) et par hypothèse de récurrence :

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} Y_i \in \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \forall i \in I-n \quad , \forall j \in I-n \quad , i \neq j, \ Y_i \cap Y_j = \emptyset$$

En outre $Y_n \in \mathcal{L}[Y]$, et comme $Y \in \mathcal{L}$; $Y_n \cup Y \in \mathcal{L}$ et $Y_n \cap Y = \emptyset$

Donc $\bigcup_{i=1}^{n} Y_i \in \mathcal{L}$ et $\forall i \in I, \ \forall j \in I \quad i \neq j \qquad Y_i \cap Y_j = \emptyset$

Si I est infini et si (Y_i) vérifie (D_2), pour tout $J \in \mathcal{F}(I)$, $(Y_i)_{i \in J}$ vérifie (D_2) pour l'ordre total sur J induit par celui de I ; donc $(Y_i)_{i \in J}$ vérifie (D) , et $(Y_i)_{i \in I}$ aussi en vertu du "caractère fini" de (D) vis-à-vis de I.

C Q F D

3.2.2.- Applications aux φ-espaces

<u>Théorème 1.-</u> Pour qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties d'un φ-espace E soit φ-disjointe, il faut et il suffit que pour tout i, il existe <u>une φ-base</u> Y_i de $\varphi(X_i)$ telle que $(Y_i)_{i \in I}$ vérifie l'une des conditions équivalentes (D), (D_1), (D_2) ou (D_3). Dans ce cas, toute famille (X'_i) incluse dans (X_i) où les X'_i sont φ-libres possède ces propriétés.

Si $(X_i)_{i \in I}$ est φ-disjointe, toute famille (X'_i) incluse dans (X_i) où les (X'_i) sont φ-libres vérifie (D) par définition, donc aussi (D_1), (D_2) et (D_3) ; en particulier si pour tout i, X'_i est une φ-base de $\varphi(X_i)$ incluse dans X_i .

Réciproquement, s'il existe une famille $(Y_i)_{i \in I}$ vérifiant (D), (D_1), (D_2) ou (D_3) telle que pour tout i Y_i soit une φ-base de $\varphi(X_i)$, (Y_i) vérifie (D), (D_1), (D_2) et (D_3) d'après le lemme 1. Alors soit $(X'_i)_{i \in I}$ une famille de parties φ-libres incluse dans (X_i). Pour tout i, il existe Z_i φ-base de $\varphi(X_i)$, $X'_i \subset Z_i \subset X_i$. Nous allons démontrer que (Z_i) vérifie (D_1) :

$\forall i \in I$, Y_i est $\varphi[Y''_i]$-libre et Y''_i est φ-libre, donc Y''_i est $\varphi_{[Y_i]}$-libre.

Or pour tout i, $\varphi(Y_i) = \varphi(Z_i) = \varphi(X_i)$, donc $\varphi_{Y_i} = \varphi_{Z_i}$:

Y''_i est $\varphi_{[Z_i]}$-libre et comme Z_i est φ-libre, Z_i est $\varphi_{Y''_i}$ -libre.

Or pour tout i, $\varphi(Y_i) = \varphi(Z_i) = \varphi(X'_i)$, donc $\varphi_{[Y'_i]} = \varphi_{[Z'_i]}$ et Z_i est $\varphi_{[Z''_i]}$-libre : (Z_i) vérifie (D_1), donc (D) et a fortiori (X'_i) vérifie (D).

<u>Corollaire.- Pour qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ soit φ-disjointe il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée</u> :

(D'_0) <u>$(\varphi(X_i))_{i \in I}$ est φ-disjointe</u>

(D'_1) Pour tout $i \in I$, sauf peut-être un, il existe une φ-base de $\varphi(X_i)$ qui est $\varphi[X'_i]$-libre.

(D'_2) Il existe un ordre total sur I tel que, pour tout $i \in I$, il existe une φ-base de $\varphi(X_i)$ qui est $\varphi[X''_i]$-libre.

On obtient toutes les familles strictement φ-disjointes ainsi : Soit X une partie φ-libre d'un φ-espace E et $(X_i)_{i \in I}$ une partition (au sens strict) de X. Alors (X_i) est strictement φ-disjointe et toute famille incluse dans $(\varphi(X_i))_{i \in I}$ est φ-disjointe.

3.2.3.- La propriété de translation dans les φ-espaces.

Théorème 2 (La propriété de translation)

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un φ-espace E et pour tout $i\in I$, $(X_i^j)_{j\in J_i}$ une famille bien ordonnée de parties de X_i telles que : $\cup X_i^j \; [j\in J_i] = X_i$

(J_i bien ordonné et (X_i^j) croissante). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $(X_i)_{i\in I}$ est φ-disjointe

2) (*) $\forall (j_i)\in \prod\limits_{i\in I}^{d} J_i$, $(X_i^{j_i})_{i\in I}$ est $\mathcal{L}[\bigcup\limits_{i\in I} \bigcup\limits_{\substack{k\in J_i\\ k<j_i}} X_i^k]$ -disjointe

démonstration :

1) $\Longrightarrow$ 2) :

En effet, pour tout $(j_i)\in \prod\limits_{i\in I} J_i$, soit :

$$A = \bigcup_{i\in I} \cup X_i^k \quad [k\in J_i \text{ et } k<j_i] \quad ; \text{ et } X = \bigcup_{i\in I} X_i^{j_i}$$

Vérifions (D D_3) pour $(X_i^{j_i})_{i\in I}$ et $\mathcal{L}_{[A]}$:

(*) $\prod\limits_{i\in I}^{d} J_i = \{(j_i) \mid (j_i)\in \prod\limits_{i\in I} J_i$ et j_i est le premier élément de $J_i\}$ pour tout $i\in I$, sauf un nombre fini

On sait qu'alors, si I est bien ordonné, $\prod\limits_{i\in I}^{d} J_i$ est bien ordonné en considérant l'ordre lexicographique obtenu en prenant pour ordre total sur I l'ordre inverse du bon ordre donné (voir [21], chapitre II, 4.3, théorème 14, p. 65).

$\forall C \in \mathscr{C}[A]$ tel que Card $C > 2$ et $C \subset X$, $\exists C' \in \mathscr{L}$, $C' - A = C$.
Comme $A \subset X$, $C' \subset X$ et Card $C' \geq 2$, donc d'après (D D_3) pour (X_i), il existe un $i \in I$ et un seul tel que $C' \cap X_i \neq \emptyset$; et comme $C \subset C'$, il en est de même à fortiori pour C.

2) $\longrightarrow$ 1)

Si on considère un bon ordre sur I, $J = \prod^d J_i \quad [i \in I]$ est bien ordonné (*) et l'on va démontrer par récurrence transfinie (**) sur Ord J que, pour tout $\varphi \in \underset{\sim}{\Phi}(E)$, 2) $\Longrightarrow$ 1).

La propriété est triviale si Ord J = 0 ou 1. A supposer que l'on ait démontré que :

$\forall \varphi \in \underset{\sim}{\Phi}$ (E) , $\forall (X_i^j)$ telle que Ord $J < \lambda$, (X_i^j) vérifie 2) $\Longrightarrow$ (X_i) vérifie 1), soit alors (X_i^j) telle que Ord $J = \lambda$ et vérifiant 2) dans (E,φ).

<u>Si J n'a pas de plus grand élément</u>, i.e. si λ n'a pas de prédécesseur, pour tout $(j_i) \in J$, $(X_i^{j_i})_{i \in I}$ est $\mathscr{L}$-disjointe :

En effet soit pour tout $i \in I$, $J'_i = [\leftarrow , j_i]$ dans J_i

$J' = \prod^d J'_i \quad [i \in I]$ est fini, donc Ord $J' < \lambda$ et comme $((X_i^j) \; [j \in J'_i]) \; [i \in I]$ vérifie 2), a fortiori il vérifie 1) :

$(X_i^{j_i})_{i \in I}$ est $\mathscr{L}$-disjointe.

Donc, en vertu du caractère fini de la disjonction, $(X_i)_{i \in I}$ est $\mathscr{L}$-disjointe.

(**) En ne considérant, pour un ensemble E fixé, que les familles (X_i^j) telles que : $\forall i \in I$, (X_i^j) soit strictement croissante et $\forall i \in I, \forall i' \in I-i$, $X_i \cap X_{i'} \subset \varphi(\emptyset)$, tous les ord J possibles forment un ensemble. Soit Sup Ord $J = \alpha$; la récurrence transfinie se fait dans α.

Si J a un plus grand élément, i.e. si λ a un prédécesseur, pour tout $i \in I$, J_i a un plus grand élément, soit :

$$\text{Max } J_i = \beta_i \quad \text{et} \quad \text{Min } J_i = \alpha_i$$

La borne supérieure des éléments de $\prod^d J_i$ dans $\prod J_i$ existe et est (β_i), donc pour presque tout $i \in I$, sauf un nombre fini, on a $\beta_i = \alpha_i$, i.e. J_i n'a qu'un élément. Soit :

$\{i_1, \ldots, i_n\}$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $\text{Card } J_i \geq 2$, avec

$$i_1 < \ldots < i_n$$

- Soit pour $i \in I - i_1$, $J'_i = J_i$ et $Y_i = X^j_i$

et pour $i = i_1$, $J'_{i_1} = J_{i_1} - \beta_{i_1}$ et $Y_{i_1} = \bigcup X^j_{i_1}$ $[j \in J_{i_1}$ et $j < \beta_{i_1}]$,

et $\forall i \in I$, $\forall j \in J'_1$, $Y^j_i = X^j_i$

(X^j_i) vérifiant 2), (Y^j_i) vérifie 2) aussi, et comme

$$\text{Ord } (\prod^d J'_i) < \text{Ord } J = \lambda$$

$$(Y_i)_{i \in I} \text{ est } \varphi\text{-disjointe} \tag{1}$$

- Soit pour $i \in I - i_1$, $J''_i = J_i$, pour $i = i_1$, $J''_{i_1} = \{\beta_{i_1}\}$,

et $\forall i \in I$, $Z_i = X_i$ et $\forall j \in J''_i$, $Z^j_i = X^j_i$

(X^j_i) vérifiant 2) dans (E, φ), (Z^j_i) vérifie 2) dans $(E, \varphi\,[Y_{i_1}])$.

Or $\text{ord } (\prod^d J''_i) < \text{ord } J = \lambda$, donc

$$(X_i)_{i \in I} \text{ est } \varphi\,[Y_{i_1}]\text{-disjointe} \tag{2}$$

- D'après l'associativité de la disjonction, (1) et (2) entraînent :

$$(X_i)\ [i \in I - i_1] \quad \varphi\text{-disjointe} \tag{3}$$

$$X_I - i_1 \text{ et } Y_{i_1} \text{ soit } \varphi\text{-disjoints} \tag{4}$$

$$X_I - i_1 \text{ et } Y_{i_1} \text{ sont } \varphi\,[X_{i_1}]\text{-disjoints} \tag{5}$$

donc d'après la proposition 2 de 3.1.5 ,

$$X_{I - i_1} \quad \text{et} \quad X_{i_1} \quad \text{sont } \varphi\text{-disjoints} \qquad (6)$$

donc (associativité de (3) et (6)) , $(X_i)_{i \in I}$ est φ-disjointe

C.Q.F.D.

__Remarque__ 1) Les conditions : " $\forall (j_i) \in \prod^d J_i$ " sont __indépendantes__ en ce sens que, pour tout $(j_i) \in \prod^d J_i$, il existe des familles (X_i^j) telles que, $\forall (k_i) \in \prod^d J_i$, $(k_i) \neq (j_i)$, $(X_i^{k_i})_{i \in I}$ est $\mathscr{L}[\ ]$-disjointe et $(X_i^{j_i})_{i \in I}$ n'est pas $\mathscr{L}[\ ]$-disjointe alors que $(X_i)_{i \in I}$ n'est pas $\mathscr{L}$-disjointe.

__Remarque__ 2) Les conditions de __bons ordres__ sur les J_i sont __absolument nécessaires__. Il est en effet aisé de construire des contre-exemples (φ-espace) quand un ensemble J_i n'est plus bien ordonné.

L'intérêt de cette démonstration est qu'elle s'étend aux $\mathscr{L}$-espaces grâce à la proposition 2. D'où le :

__Corollaire.-__ Si E est un __$\mathscr{L}$-espace__; et si (X_i^j) est telle que :

$$\forall (j_i) \in \prod_i^d J_i \ , \ \forall (k_i) \in \prod_i^d J_i \ \text{tels que} \ \forall i \in I \ , \ j_i \leq k_i \ ,$$

$$\mathscr{L}\Big[\bigcup_{i \in I} \bigcup_{\substack{k \in J_i \\ k < k_i}} X_i^k\Big] \ll \mathscr{L}\Big[\bigcup_{i \in I} \bigcup_{\substack{k \in J_i \\ k < j_i}} X_i^k\Big]$$

Alors les propriétés 1) et 2) sont équivalentes pour (X_i^j)

3.2.4.- Application à la construction des bases et au calcul du rang dans un φ-espace

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un φ-espace et $\leqslant$ un ordre total sur I. On appelle segment de I toute partie S de I telle que, $\forall i \in S$, $\forall j \in I$ tels que $j < i$, on a $j \in S$. L'on note $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des segments de I sauf I lui-même. Alors on a le :

Théorème 3.-

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un φ-espace E et $\leqslant$ un ordre total sur I. Soit pour tout $S \in \mathcal{S}(I)$,

$$X^S = \bigcap_{i \in I-S} \varphi(X_{[\leftarrow, i]}) \quad \text{et} \quad Y_S \text{ une } r\,[X_S]\text{-base de } X^S .$$

Alors les Y_S sont disjointes deux à deux et $Y_{\mathcal{S}(I)}$ est une r-base de $\varphi(X_I)$ et on a :

$$r\,(X_I) = \sum r\,[X_S]\,(X^S) \qquad [S \in \mathcal{S}\,(I)] \tag{I}$$

Démonstration :

$\mathcal{S}(I)$ est totalement ordonné et il est immédiat de vérifier la propriété (D_2) du lemme 1 pour $(Y_S)_{S \in \mathcal{S}(I)}$ où $\mathcal{S}(I)$ est muni de l'ordre total ci-dessus. Donc les Y_S sont disjoints deux à deux et $Y = Y_{\mathcal{S}(I)}$ est libre.

Comme $Y \subset \varphi(X_I)$, $\varphi(Y) \subset \varphi(X_I)$. Réciproquement :

$\forall x \in \varphi(X_I)$, soit $S_o = \{i \mid i \in I \text{ et } x \notin \varphi\,(X_{[\leftarrow, i]})\} \in \mathcal{S}\,(I)$

$$S_o \subsetneqq I \qquad \text{et} \qquad x \in \varphi\,(Y'_{S_o} \cup X_{S_o}) \quad , \quad x \notin \varphi\,(X_{S_o}) \tag{1}$$

Si $x \in \varphi(Y_{S_o})$, $x \in \varphi(Y)$; Sinon $x \notin \varphi(Y_{S_o})$ (2)

donc $S_1 = \{i \mid i \in S_o \text{ et } x \notin \varphi\,(Y_{S_o} \cup X_{[\leftarrow, i]})\} \in \mathcal{S}\,(I)$

$$S_1 \subsetneq S_o \quad \text{et} \quad x \in \varphi\ (Y_{S_o} \cup Y_{S_1} \cup X_{S_1}) \tag{3}$$

$$x \notin \varphi\ (Y_{S_o} \cup X_{S_1}) \tag{4}$$

Si $x \in \varphi\ (Y_{S_o} \cup Y_{S_1})$, $x \in \varphi(Y)$; Sinon $x \notin \varphi\ (Y_{S_o} \cup Y_{S_1})$ (5)

On construit ainsi de proche en proche une suite strictement décroissante

$I \supsetneq S_o \supsetneq \dots \supsetneq S_P$ de segments de I

tels que

$$x \in \varphi\ (Y_{S_o} \cup Y_{S_1} \cup \dots \cup Y_{S_P} \cup X_{S_P})$$

mais $x \notin \varphi\ (Y_{S_o} \cup \dots \cup Y_{S_{i-1}} \cup Y_{S_{i+1}} \cup \dots \cup Y_{S_P} \cup X_{S_P})$ pour $i = 1,..,P$

Si $x \in \varphi\ (Y_{S_o} \cup \dots \cup Y_{S_P})$, $x \in \varphi(Y)$. Sinon, on considère

$$S_{P+1} = \{i \mid i \in S_P \quad \text{et} \quad x \notin \varphi\ (Y_{S_o} \cup \dots \cup Y_{S_P} \cup X_{[\leftarrow, i]})\}$$

$S_{P+1} \subsetneq S_P$ et :

pour $i = 1,\dots, P+1$, $x \notin \varphi\ ((\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{P+1} Y_{S_j}) \cup X_{S_{P+1}}$

Si $x \notin \varphi\ (\bigcup_{j=1}^{P+1} Y_{S_j})$, l'on peut itérer .

Or, on ne peut itérer indéfiniment ce processus, car sinon on aurait une suite $(S_P)_{P \in N}$ de segments strictement décroissante telle que si $S_\omega = \bigcap_{P \in N} S_P$ et $\psi = \varphi\ [X_{S_\omega}]$

$(Y_{S_P})_{P \in N}$ est ψ-disjointe et $Y' = \cup Y_{S_P}\ [P \in N]$ est ψ-libre

$x \in \psi(Y')$, mais pour tout $P \in N$, $x \notin \psi\ (Y' - Y_{S_P})$.

Soit $Y'_x + x$ le φ-circuit unique inclus dans $Y' + x$. Y'_x ne peut rencontrer qu'un nombre fini de Y_{S_p}, ce qui contredit le fait que $x \in \varphi(Y' - Y_{S_p})$ pour une infinité de Y_{S_p}.

D'où un entier p tel que $x \in \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{p} Y_{S_j}\right)$: $x \in \varphi(Y)$

Y est donc une base de $\varphi\ (X_I)$

C Q F D

En particulier quand I est bien ordonné, tous les segments différents de I sont de la forme $]\leftarrow, i[$ où $i \in I$

Si $S = \,]\leftarrow, i[\, = S_i$, $X^{S_i} = \varphi\ (X_{[\leftarrow, i]})$. On a alors le résultat plus précis suivant :

<u>Corollaire</u>

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un φ-espace E et $\leqslant$ un <u>bon ordre</u> sur I. Si pour tout $i \in I$, Y_i est une $\varphi\left[X_{[\leftarrow, i[}\right]$-base de X_i, alors les Y_i sont des parties disjointes deux à deux et <u>Y_I est une φ-base de X_I</u>, et on a :

$$r\ (X_I) = \sum_{i \in I} r\left[X_{]\leftarrow, i[}\right] (X_i) \qquad (I')$$

En particulier, si A et B sont deux parties de E, on a :

$$r\ (A \cup B) = r(A) + r[A](B) = r(B) + r[B]\ (A) \qquad (I'')$$

3.3.- Caractérisation des familles disjointes avec le rang (φ-espaces)

3.3.1.- Caractérisation par les sommes.

Théorème 4.-

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un $\mathscr{L}$-espace $(E,\mathscr{L})$, on a :

$$r\ (X_I) \leq \sum_{i \in I} r\ (X_i) \tag{II}$$

Si (X_i) est $\mathscr{L}$-disjointe, on a l'égalité.

Réciproquement, si $(E,\mathscr{L})$ est un φ-espace, si $r(X_i)$ est fini pour tout $i \in I$ et s'il existe une famille $(J_\ell)_{\ell \in L}$ de parties finies de I, cofinale à $\mathscr{F}(I)$ et telle que, pour tout $\ell \in L$,

$$r\ (X_{J_\ell}) = \Sigma\ r\ (X_i) \qquad [i \in J_\ell]$$

Alors (X_i) est φ-disjointe.

Démonstration

Si Y est une base de X_I telle que $r\ (X_I) = \text{Card } Y$ et si on considère un bon ordre sur I, on définit par récurrence transfinie sur $i \in I$, $Y_i = Y \cap X_i - Y_{[\leftarrow, i[}$. Alors $Y_I = Y$, les Y_i sont disjoints deux à deux et :

$$r\ (X_I) = \text{Card } Y = \Sigma \text{ Card } Y_i \quad [i \in I] \leq \Sigma\, r(X_i) \quad [i \in I].$$

D'où (II). Si (X_i) est $\mathscr{L}$-disjointe, soit pour tout $i \in I$ Y_i une base de X_i telle que $r(X_i) = \text{Card } Y_i$. $Y_I \in \mathscr{L}$ et les Y_i sont disjoints deux à deux. Donc :

$$r\ (X_I) \geq \text{Card } Y_I = \Sigma\ r\ (X_i) \quad [i \in I]$$

et l'égalité.

La réciproque résulte du fait que la disjonction est de caractère fini et du :

<u>Corollaire</u> . Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille <u>finie</u> de parties d'un φ-espace telle que pour tout $i \in I$, $r(X_i)$ soit finie. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) (X_i) est φ-disjointe

b) $r(X_I) = \sum r(X_i) \quad [i \in I]$

L'on a démontré a) $\Rightarrow$ b). Réciproquement, soit pour tout $i \in I$ Y_i une base de X_i. Alors Y_I engendre X_I et d'après b) :

$$r(X_I) = \text{Card } Y_I = \sum \text{Card } Y_i \quad [i \in I] .$$

Les conditions de finitude font que (Y_i) vérifie (D) , donc, d'après le théorème 1, (X_i) est disjointe.

<u>Remarque</u> : Si l'une des conditions de finitude exigée pour la réciproque n'est pas vérifiée, ou si $(E,\mathcal{L})$ n'est pas un φ-espace, la réciproque n'est plus vraie.

<u>3.3.2.- Caractérisation par translation de φ</u>

<u>Théorème 5.-</u> Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un $\mathcal{L}$-espace $(E,\mathcal{L})$.

a) $\forall i \in I \quad , \quad r\,(X_i) \geq r\,[X_{I-i}]\,(X_i)$ (III)

Si (X_i) est $\mathcal{L}$-disjointe, on a l'égalité dans (III).

Réciproquement, si pour tout $i \in I$, sauf peut-être un, $r(X_i)$ est **fini** et l'égalité est vérifiée dans (III), et si $(E,\mathcal{L})$ est un **φ-espace**, alors (X_i) est φ-disjointe.

b) Pour tout **ordre total** sur I,

$$\forall i \in I \quad , \quad r(X_i) \geq r\,[X_{[\leftarrow,i[}] \quad (X_i) \qquad \text{(IV)}$$

Si (X_i) est $\mathcal{L}$-disjointe, on a l'égalité dans (IV).

Réciproquement, si $(E,\mathcal{L})$ est un **φ-espace** et s'il existe **un** ordre total sur I tel que, pour tout $i \in I$, sauf peut-être le plus petit, $r(X_i)$ soit **fini** et on ait l'égalité dans (IV), alors (X_i) est φ-disjointe.

Démonstration

Les inégalités (III) et (IV) résultent de ce que, pour tout A, $r[A] \leq r$.

Si (X_i) est $\mathcal{L}$-disjointe, pour tout $i \in I$, X_i et X_{I-i} sont $\mathcal{L}$-disjoints, et, utilisant la propriété $(D\ D_3)$ par exemple, toute partie $\mathcal{L}$-libre de X_i est $\mathcal{L}[X_{I-i}]$-libre. Donc

$$r(X_i) = r\,[X_{I-i}] \quad (X_i)$$

et a fortiori $r(X_i) = r\,[X_{[\leftarrow,i[}] \quad (X_i)$ pour tout ordre total fixé a priori sur I.

Les réciproques résultent du corollaire du théorème 1, $(D'_1) \longrightarrow (D'_o)$ (resp. $(D'_2) \longrightarrow D'_o$). En effet, pour tout $i \in I$, soit Y_i une $r\,[X_{I-i}]$-base (resp. $r\,[X_{[\leftarrow,i[}]$-base) de X_i. Y_i est r-libre et fini, et comme $r(X_i) = \text{Card } Y_i$, Y_i est une r-base de X_i.

<u>Remarque</u> : La réciproque n'est plus vraie si l'une des conditions de finitude exigées n'est pas vérifiée, ou si $(E,\mathscr{L})$ n'est pas un φ-espace.

Voici en particulier un énoncé qui entraîne la proposition 10, p. 103, de Bourbaki [C, II, 5] , § 5.4 , :

<u>Corollaire</u> Soient A et B deux parties d'un $\mathscr{L}$-espace $(E,\mathscr{L})$. L'on a :

(1) $r(A \cup B) \leq r(A) + r(B)$

(2) $r[A](B) \leq r(B)$

(3) $r[B](A) \leq r(B)$

Si A et B sont $\mathscr{L}$-disjoints, on a l'égalité dans chacune de ces relations.

Réciproquement, si $(E,\mathscr{L})$ est un <u>φ-espace</u> :

a) Si l'égalité est vérifiée dans la relation (1) et si l'un des deux membres est fini, A et B sont φ-disjoints.

b) Si l'égalité est vérifiée dans la relation (2) et si r(B) est fini, A et B sont φ-disjoints.

3.4.- La disjonction dans une $\mathcal{L}$-algèbre

3.4.1.- Généralités

On appelle **$\mathcal{L}$-algèbre** la donnée sur une structure de $\mathcal{L}$-espace $(E,\mathcal{L})$ d'une loi de composition interne $(x,y) \longrightarrow x.y$ notée multiplicativement et telle que :

$$\forall C \in \mathcal{C} \quad , \forall x \in E \quad , \quad x.C \text{ et } C.x \text{ sont réunions de } \mathcal{C}\text{-circuits}$$

Alors on a : $\varphi(\emptyset).E = E.\varphi(\emptyset) \subset \varphi(\emptyset)$

Définition 2.-

Soit $(E, \mathcal{L}, .)$ une $\mathcal{L}$-algèbre et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. (X_i) est dite $\mathcal{L}$-.-disjointe (ou simplement 2-disjointe) si elle vérifie les propriétés suivantes :

a) $\forall \{i,j\} \in \mathcal{J}_2(I)$, $\forall x \in X_i - \varphi(\emptyset)$, $\forall y \in X_j - \varphi(\emptyset)$, $x.y = y.x$

b) $\forall \{i,j,k\} \in \mathcal{J}_3(I)$, $\forall x \in X_i - \varphi(\emptyset)$, $\forall y \in X_j - \varphi(\emptyset)$, $\forall z \in X_k - \varphi(\emptyset)$,

$$x(y\ z) = (x\ y)z$$

Alors, pour tout $J \in \mathcal{J}(I)$ et pour tout $(x_j) \in \prod_{j \in J} (X_j - \varphi(\emptyset))$, $\prod_{j \in J} x_j = \prod_J x_j$ ne dépend pas de la manière dont on le calcule (ordres et parenthèses).

c) Pour toute famille $(Y_i) \subset (X_i)$ telle que pour tout i , $Y_i \in \mathcal{L}$,

$$\forall J \in \mathcal{J}(I) \qquad (\prod_J x_j) \quad \left[(x_j) \in \prod_{j \in J} Y_j\right] \qquad \text{est } \mathcal{L}\text{-libre.}$$

exemple. Soit A une algèbre, B une sous-algèbre de A, pour tout $X \subset E$, $\varphi(X)$ le sous-B-module engendré par X et x.y la multiplication dans A. $(A, \mathcal{L}_\varphi, .)$ est une $\mathcal{L}$-algèbre et la $\mathcal{L}_\varphi$-.- disjonction entre deux sous-algèbres est la disjonction linéaire sur B entre ces sous-algèbres.

Propriétés élémentaires.

1°) Caractère fini : mêmes équivalences qu'en 3.1.2. 1°)

2°) Cas triviaux : Si $X_i \subset \varphi(\emptyset)$ pour tout $i \in I$, sauf peut-être un, (X_i) est trivialement 2-disjointe.

3°) Commutativité : $(X_i)_{i \in I}$ est 2-disjointe si et seulement si $(X_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est 2-disjointe quand σ est une bijection.

4°) Si (X_i) est 2-disjointe, pour tout $\{i,j\} \in \mathcal{P}_2(I)$, $r\,(X_i \cap X_j) \leq 1$

Proposition 3.- (Associativité de la 2-disjonction).

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'une $\mathcal{L}$-algèbre $(E,\mathcal{L},.)$ et $(J_\ell)_{\ell \in L}$ une partition de I. Alors considérons les propriétés suivantes :

(1) $(X_i)_{i \in I}$ est 2-disjointe

(2) $\forall \ell \in L$, $(X_i)_{i \in J_\ell}$ est 2-disjointe

et (*) $(\pi\ X_i\ [i \in J_\ell])_{\ell \in L}$ est 2-disjointe

L'on a toujours (1) $\Longrightarrow$ (2). La réciproque (2) $\longrightarrow$ (1) est vraie quand :

$$\forall (i,j) \in \mathcal{P}_2(I),\ \forall k \in I-\{i,j\}\ ,\ \forall x \in X_i-\varphi(\emptyset),\ \forall y \in X_j-\varphi(\emptyset),\ \forall z \in X_\ell-\varphi(\emptyset)$$

$$x\,(y\,z) = (x\,y)\,z$$

ce qui est toujours vérifié quand . est associative.

(*) $\pi\, X_i\ [i \in I] = \{\underset{J}{\pi}\ x_j \mid J \in \mathcal{P}(I)\ ,\ J \neq \emptyset \text{ et } (x_j) \in \prod_{j \in J} X_j\}$

3.4.2.- La disjonction dans une φ-algèbre

Définition 3.- L'on appelle φ-algèbre toute $\mathcal{L}$-algèbre régulière $(E, \mathcal{L}, .)$, i.e. telle que :

a) La multiplication soit associative, commutative et tout élément $x \in E-\varphi(\emptyset)$ est régulier.

et b) $\forall x \in E-\varphi(\emptyset)$, $\forall X \in \mathcal{J}(E)$, l'on a :

$$x.X \in \mathcal{C} \iff X \in \mathcal{C} \iff X.x \in \mathcal{C}$$

exemple.- Soit A une algèbre intègre sur un corps K. A est une φ-algèbre pour:

- $\varphi(X)$ sous-espace vectoriel engendré par X
- la multiplication dans A.

Soit $(\bar{E}, .)$ le symetrisé de E pour la multiplication, et G l'ensemble des éléments inversibles de $\bar{E}$. $G \cap E \supset E - \varphi(\emptyset)$.

Soit

$$\bar{\mathcal{C}} = \{x^{-1} X \mid X \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad x \in \bar{E} - \varphi(\emptyset)\}$$

$\bar{\mathcal{C}}$ vérifie (C_1) et (C_2) , $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}}|_E$ et :

$(\bar{E}, \bar{\mathcal{C}}, .)$ est une φ-algèbre unitaire telle que tout élément $x \notin \varphi(\emptyset)$ soit inversible. C'est la φ-algèbre symetrisée de $(E, \mathcal{C}, .)$.

Remarque : Si l'algèbre est unitaire, l'unité $\mathcal{C} \notin \varphi(\emptyset)$, sauf si $\varphi(\emptyset) = E$.

Soit $A = (E, \varphi, .)$ une φ-algèbre. L'on appelle sous-algèbre de A toute partie B de A telle que :

$A = \varphi(A)$ et A stable pour la multiplication.

Toute intersection de sous-algèbre est une sous-algèbre, d'où la fermeture ω:

$X \longrightarrow \omega(X)$ sous-algèbre engendré par X

3.4.3.- Propriété fondamentale de la disjonction dans une φ-algèbre.

Les propriétés élémentaires ont été vues en 3.4.1.

Lemme 2.- Soient X et X' deux parties d'une φ-algèbre $(E,\varphi,.)$. Pour que X et X' soient deux disjointes il faut et il suffit qu'il existe une φ-base B de X et une φ-base B' de X' telles que la famille :

$$(b.b') \quad [(b,b') \in B \times B'] \quad \text{soit } \varphi\text{-libre.}$$

Démonstration.

La condition est nécessaire par définition. Réciproquement, les propriétés en jeu étant de caractère fini, il suffit de démontrer que :

si $r(X)$ et $r(X')$ sont finies, et si B (resp. B') est une φ-base de X (resp. X') telle que (b,b') $[(b,b') \in B \times B']$ soit φ-libre, on a :

$$\forall Y \in \mathcal{L}, \ Y \subset X, \quad \forall Y' \in \mathcal{L}, \ Y' \subset X',$$
$$(y.y') \quad [(y,y') \in Y \times Y'] \quad \text{est } \varphi\text{-libre.}$$

Soit Z (resp. Z') une φ-base de X (resp. X') contenant Y (resp. Y') .

$\text{Card } Z = \text{Card } B = r(X)$, $\text{Card } Z' = \text{Card } B' = r(X')$

Or, il est aisé de démontrer que,

si A_1 engendre A et si B_1 engendre B,

$A_1 . B_1$ engendre $A.B$

Donc : $\varphi(Z.Z') = \varphi(B.B') = \varphi(X.X')$

donc $r(Z.Z') = r(B.B') = \text{Card } B \times \text{Card } B'$

et comme $\quad \mathrm{Card}\ Z.Z' \leqslant \mathrm{Card}\ Z \times \mathrm{Card}\ Z'$,

$$(z.z') \quad [(z,z') \in Z \times Z'] \quad \text{est libre ,}$$

et a fortiori

$$(y.y') \quad [(y,y') \in Z \times Z']$$

C Q F D

Théorème 6.- Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'une φ-algèbre A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(2 D_1) (X_i) est 2-disjointe

(2 D_1) $(\varphi(X_i))_{i \in I}$ est 2-disjointe

(2 D_2) Pour tout $i \in I$, il existe une base B_i de X_i telle que $(B_i)_{i \in I}$ soit 2-disjointe.

Les propriétés (2 D_1) $\Longrightarrow$ (2 D) et (2 D) $\longrightarrow$ (2 D_2) résultent trivialement des définitions. La propriété (2 D_2) $\Longrightarrow$ (2 D_1) se démontre par récurrence sur Card I quand I est fini en utilisant le lemme 2 et l'associativité de la 2-disjonction, puis en utilisant le caractère fini de la 2-disjonction quand I est infini.

Remarque : Si X et Y sont 2-disjoints, en général $\omega(X)$ et $\omega(Y)$ ne le sont pas. Ainsi dans l'algèbre k [x] des polynomes à une indéterminée x sur un corps k, $X = \{x,x^2\}$ et $Y = \{x^3 , x^6\}$ sont 2-disjoints, mais $\omega(X) = x\,k[x]$ et $\omega(Y) = x^3\,k\,[x]$ ne sont pas 2-disjoints.

Théorème 7.- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-algèbre d'une φ-algèbre.

$$A = \prod_{i \in I}^{d} A_i = \bigcup_{J \in \mathcal{F}(I)} \Big(\prod_{i \in J} A_i\Big)$$

est la sous-algèbre engendrée par les A_i et (*) l'on a :

$$r(A) \leq \prod_{i \in I}^{d} r(A_i) \qquad (1)$$

Si les (A_i) sont disjoints, on a l'égalité dans (1).

Réciproquement, si I et les $r(A_i)$ sont <u>finis</u> et si la sous-algèbre A engendrée par les A_i a pour rang :

$$r(A) = \prod_{i \in I} r(A_i) \quad ,$$

alors $(A_i)_{i \in I}$ est 2-disjointe.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4. La réciproque n'est plus vraie en général quand I ou l'un au moins des $r(A_i)$ est infini.

L'on a ici une propriété classique de la disjonction linéaire (voir Bourbaki [C; II, 5,] §2, n°3 ,P. 78 à 81).

<u>3.4.2.- 2-disjonction unitaire</u>

<u>Théorème 8.-</u> Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'une φ-algèbre unitaire non grossière, d'unité e. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*) Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux

et $\prod_{i \in I}^{d} a_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \;\middle|\; \forall i \in I \;,\; x_i \in a_i \text{ ou } x_i = 0 \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour un nombre fini d'élément} \right\}$

ne dépend que de Card a_i . C'est donc, par abus de langage, un cardinal.

(2 D U) $\quad (X_i \cup \{e\})$ est 2-disjointe

(2 D U_1) $\quad (\varphi_{\{e\}} (X_i))$ est 2-disjointe

(2 D U_2) $\quad$ Pour tout $i \in I$, il existe une φ-base B_i de $X_i \cup \{e\}$ telle que $e \in B_i$ et $(B'_i) = (B'_i - \{e\})$ vérifie la propriété :

(D U) $\quad (\prod_{i \in J} b_i) \left[(b_i) \in \cup \prod_{i \in J} B'_i \quad [J \in \mathcal{F}(I)] \right]$ est libre

Démonstration

L'on a (2 D U) $\Longleftrightarrow$ (2 D U_1) d'après le théorème 6. Nous allons démontrer que (2 D U_2) $\Longleftrightarrow$ (2 D U) :

(2 D U_2) $\Longrightarrow$ (2 D U) :

Soit (X_i) une famille vérifiant (2 D U_2) et (B_i) incluse dans $(X_i \cup \{e\})$ telle que pour tout i $e \in B_i$ et $(B'_i) = (B_i - \{e\})$ vérifie la propriété (D U). Alors, pour tout $J \in \mathcal{F}(I)$,

$$(\prod_{i \in J} B_i) \left[(b_i) \in \prod_{i \in J} B_i \right] = (\prod_{i \in H} b_i) \left[(b_i) \in \cup \prod_{i \in H} B'_i \quad [H \subset J] \right]$$

donc, est libre d'après (D U). Par conséquent $(B_i)_{i \in I}$ est 2-disjointe et $(X_i \cup \{e\})$ est 2-disjointe d'après le théorème 6.

(2 D U) $\Longrightarrow$ (2 D U_2) se démontre de manière analogue.

Corollaire 1.-

Soit (X_i) une famille de parties d'une φ-algèbre $(E, \varphi, .)$ et $(\bar{E}, \bar{\varphi}, .)$ la φ-algèbre symetrisée de $(E, \varphi, .)$, dont l'unité est e. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(2 D U) $\quad (X_i \cup \{e\})$ est 2-disjointe dans $(\bar{E}, \bar{\varphi}, .)$

(2 D U_3) $\quad$ Pour tout $i \in I$, il existe une φ-base B_i de X_i (resp. si $(E, \varphi, .)$ est unitaire, il existe une $\varphi_{\{e\}}$-base B_i de X_i) telle que (B_i) vérifie la

propriété (D U) ci-dessus.

<u>Définition 4.-</u> Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties d'une φ-algèbre est dite <u>2-disjointe unitairement</u> si elle vérifie la propriété (2 D U_3).

<u>Corollaire 2.-</u> Si $(X_i)_{i \in I}$ est 2-disjointe et si (Y_i) est incluse dans (X_i) et vérifie :

$$\forall i \in I \quad , \quad Y_i \text{ est une } \varphi\text{-base} \quad (\text{resp. si } E \text{ est unitaire une } \varphi_{\{e\}}\text{-base})$$

de X_i , (Y_i) vérifie la propriété (D U).

<u>Corollaire 3.-</u> Si (X_i) est 2-disjointe unitairement, (X_i) est $\mathscr{L}[e]$-disjointe.

Si la φ-algèbre est unitaire, φ_e désigne la translatée de φ par $\{e\}$, et si la φ-algèbre n'est pas unitaire, $\varphi_e = \varphi_A$ où :

$$A = \bar{\varphi}(e) \cap E = \{x | x \in E \text{ et } \exists y \in E - \varphi(\emptyset) \ , \ \{yx \ , \ y\} \in \mathscr{C}\} \cup \varphi(\emptyset) \ .$$

Ce corollaire résulte des théorèmes 1 et 8 sachant que, dans (D U),

$$\left(\prod_{i \in J} b_i\right) \quad \left[(b_i) \in \bigcup \prod_{i \in J} B'_i \quad [J \in \mathscr{I}_1(I)]\right]$$

est la famille somme des familles $(b_i)_{i \in B'_i}$

<u>Remarque 1.-</u>

La 2-disjonction unitaire est strictement plus forte que la 2-disjonction.

<u>exemple</u> : Soit $k[x]$ l'algèbre des polynomes à une indéterminée sur un corps k. $H \subset N$ et $K \subset N$ (N ensemble des entiers naturels)

$$X = \{x^p \mid p \in H\} \qquad \text{et} \qquad Y = \{x^p \mid p \in K\}$$

X et Y sont 2-disjoints si et seulement si l'application $(p,q) \longmapsto p+q$ de $H \times K$ dans N est injective.

L'on vérifiera aisément par exemple que :

$X = \{x, x^3\}$ et $Y = \{x^2\}$ sont 2-disjoints ,

mais qu'ils ne sont pas unitairement 2-disjoints.

__Remarque 2.__ Même si X et Y sont unitairement disjoints dans $(\bar{E}, \bar{\varphi}, .)$, $X \cup X^{-1}$ et $Y \cup Y^{-1}$ ne sont pas 2-disjoints en général.

(considérer par exemple $X = \{1,x\}$ et $Y = \{1,x^2\}$ dans l'exemple ci-dessus).

__Remarque 3.__ La 2-disjonction unitaire est strictement plus forte que la $\mathcal{L}[e]$-disjonction. En effet dans l'exemple ci-dessus, X et Y sont $\mathcal{L}[e]$-disjoints si et seulement si $H \cap K \subset \{0\}$.

__Remarque 4.-__ Si X et Y sont 2-disjoints unitairement, en général X et $\omega(Y)$ ne sont même pas 2-disjoints.

Chapitre IV Existence de familles disjointes incluses dans une famille finie donnée.

4.1.- Notations et terminologie générales

E étant un φ-espace et I un ensemble d'indices, on utilisera couramment les notations suivantes :

1°) Les lettres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,... désignent des familles de cardinaux, et si $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$, pour tout $J \subset I$, on note :

$$\underline{a_J = \Sigma\, a_i\ [i \in J]} \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathcal{A}_J = (a_i)_{i \in J}}$$

2°) $(X_i)_{i \in I}$, (Y_i), (Z_i) désignent des familles de parties de E et pour tout $J \subset I$, $X_J = \cup\, X_i \quad [i \in J]$.

On note $\underline{(Y_i)_{[i \in I]} \subset (X_i)\ [i \in I]}$ l'ordre produit sur $(\mathcal{P}(E))^I$, et $\underline{\mathcal{A} \leq \mathcal{B}}$ l'ordre produit sur les familles de cardinaux indiciées par I ($\mathcal{A}$ inférieure ou égale à $\mathcal{B}$ si et seulement si $a_i \leq b_i$ pour tout i).

On a vu que si $(X_i)_{i \in I}$ contient une famille φ-disjointe (Y_i) telle que $\dim \varphi\ (Y_i) = a_i$ pour tout i, on a :

$$\forall J \subset I \qquad \dim \varphi\ (X_J) \geq a_J$$

Définition 1.- Une <u>famille</u> $(X_i)_{i \in I}$ est dite <u>de type</u> $\underline{\mathcal{A}} = (a_i)_{i \in I}$ si elle possède la propriété suivante :

$$\boxed{P_{\mathcal{A}} \ : \ \forall J \subset I \ , \ \dim_\varphi \varphi(X_J) \geq a_J}$$

Si $a_I > \dim E$, il n'existe aucune famille de type $\mathcal{A}$. Par la suite on supposera la condition $a_I \leq \dim E$ réalisée.

Soit $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ et J l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$, il est clair que $(X_i)_{i \in I}$ est de type $\mathcal{A}$ si et seulement si $(X_i)_{i \in J}$ est de type $\mathcal{A}_J$.

Comme $a_I \leq \dim_\varphi E$, $a_i \leq \dim E$ pour tout i. Si $\mathcal{N}_E$ est l'ensemble des cardinaux inférieurs ou égaux à dim E, $\mathcal{A} \in (\mathcal{N}_E)^I$, de sorte que les familles de cardinaux qui nous sont utiles appartiennent à un ensemble.

Une famille φ-disjointe $(X_i)_{i\in I}$ est de type $\mathcal{A} = (a_i)$ si et seulement si pour tout i $\dim \varphi (X_i) \geq a_i$ (Cf. 3.3, théorème 4). On constate par ailleurs que : si $(X_i)_{i\in I}$ est de type $\mathcal{A}$, toute famille (Y_i) contenant (X_i) est de type $\mathcal{A}$; (X_i) est de type $\mathcal{B}$ pour toute $\mathcal{B}$ inférieure ou égale à $\mathcal{A}$, et pour tout $J \subset I$, $(X_i)[i\in J]$ est de type $\mathcal{A}_J$.

En particulier,toute famille contenant une famille φ-disjointe de type $\mathcal{A}$ est elle-même de type $\mathcal{A}$. C'est la réciproque quand I ou les a_i sont finis qui est l'objet de ce chapitre : <u>étant donné une famille de type $\mathcal{A}$, existe-t-il une famille φ-disjointe, incluse, de type $\mathcal{A}$, et si oui en construire une</u>.

4.2.- Cas de familles finies de cardinaux finis.

Dans ce paragraphe nous allons démontrer <u>dans le cas où les cardinaux a_i sont tous finis</u> le théorème suivant :

<u>Théorème 1.-</u> Toute famille finie de type $\mathcal{A}$ contient une famille φ-disjointe de type $\mathcal{A}$.

On indiquera dans le prochain paragraphe comment résoudre ce problème en pratique. Enfin le cas où les a_i sont quelconques sera étudié au paragraphe 4.4.

Le théorème 1 est une généralisation du théorème de König-Hall (voir [B], chap. 10, page 92) qui traite le cas d'un ensemble, i.e. φ-espace discret, I fini et les a_i tous égaux à 1 (*) .

M. Rado dans [9] a également démontré un cas particulier du théorème 1 : les a_i tous égaux à 1 et $(X_i)_{i \in I}$ famille de parties d'un ensemble muni d'une structure équivalente à celle de φ-espace.

Soit (X_i) $[i \in I]$ une famille de type $\mathcal{A} = (a_i)$. Pour trouver une solution c'est-à-dire une famille (Y_i) φ-disjointe, de type $\mathcal{A}$ et incluse dans (X_i), nous allons donner deux procédés : l'un consiste à supprimer des éléments aux X_i tout en ayant des familles de type $\mathcal{A}$, afin d'obtenir une famille (Y_i) de type $\mathcal{A}$ et telle que dim φ $(Y_i) = a_i$ pour tout i. Il en résulte que dim φ $(Y_I) = a_I$ (voir 3.3 théorème 4), donc (Y_i) est φ-disjointe (voir 3.3. , corollaire du théorème 4). Dans le second procédé on part de la famille (∅) et on construit des familles φ-disjointes (Y_i), chaque Y_i étant une partie libre de X_i, en ajoutant des éléments aux Y_i. Le théorème 1 étant trivial si Card I = 1, on supposera Card I ≥ 2.

a) - Démonstration par suppressibilité

Remarquons d'abord que $(X_i)_{i \in I}$ étant de type $\mathcal{A} = (a_i)$, toute famille (Z_i) incluse dans (X_i) telle que :

$$\dim \varphi\,(Z_i) = \dim \varphi\,(X_i) \quad \text{si} \quad \dim \varphi\,(X_i) < a_I$$

$$\text{et} \quad \dim \varphi\,(Z_i) \geq a_I \quad \text{si} \quad \dim \varphi\,(X_i) \geq a_I$$

est de type $\mathcal{A}$; on peut donc réduire (X_i) à une famille incluse (Z_i) de type $\mathcal{A}$ et telle que dim φ $(Z_i) \leq a_I$ pour tout i. Il nous suffit donc de démontrer le

---

(*)- J'ai résolu ce problème alors que j'ignorais le théorème de König-Hall et les travaux de M. Rado.

L'intérêt de ce § 1 est avant tout sa nouveauté, d'abord en ce qui concerne la généralité du résultat, mais surtout dans la manière de traiter ce problème en travaillant avec des méthodes constructives, et en étudiant certaines propriétés. Voici quelques références pour les questions de priorité scientifique concernant la "genèse" de ce théorème :

- König O. et Valko S. [S]
- Hall P. [1]
- Rado R. [9] et [10]

et enfin Robert P. [14].

théorème 1 quand les $\dim\varphi(X_i)$ sont finis, ce que nous allons faire par récurrence sur a_I.

Le théorème 1 est trivial pour $a_I = 0$. Supposons le vrai pour $a_I \leqslant n-1$, et soit (X_i) $[i\in I]$ une famille de type $\mathcal{A} = (a_i)$ où $a_I = n$ et où les $\dim\varphi(X_i)$ sont finis. Nous allons démontrer que :

$(\mathbb{R}\,\mathcal{A})$: $\left[\begin{array}{l}\text{Pour tout } i\in I \text{ tel que } \dim\varphi(X_i) > a_i \text{, il existe } (Z_j)\ [j\in I] \text{ de} \\ \text{type } \mathcal{A} \text{ telle que : } Z_j = X_j \quad \forall j\in I-\{i\} \text{ et } Z_i\subset X_i, \\ \dim\varphi(Z_i) < \dim\varphi(X_i).\end{array}\right.$

Soit en effet $i\in I$ tel que $\dim\varphi(X_i) > a_i$

<u>ou $a_i = 0$</u> : il suffit de prendre $Z_i = \emptyset$

<u>ou $a_i = 1$</u> : Soit T_i une base de $\varphi(X_i)$ incluse dans X_i. Il nous suffit de démontrer qu'il existe un élément x de T_i "suppressible", i.e. tel qu'on peut prendre $Z_i = T_i - \{x\}$. Il est aisé de voir que $x\in T_i$ est suppressible si et seulement si : $\forall J\subset I-\{x\}$, $\dim\varphi(X_J\cup(T_i-\{x\}))\geq a_J+1$. Comme $\dim\varphi(X_i) = \mathrm{Card}\, T_i > 1$, soient x et y deux éléments distincts de T_i. Si x et y sont non suppressibles, il existe $J\subset I-\{i\}$ et $H\subset I-\{i\}$ tels que :

$\dim\varphi(X_J\cup(T_i-\{x\})) < a_J+1$ et $\dim\varphi(X_H\cup(T_i-\{y\})) < a_H+1$.

Or $\dim\varphi(X_J)\geq a_J$, donc $\dim\varphi(X_J\cup(T_i-\{x\})) = \dim\varphi(X_J) = a_J$ et $T_i-\{x\}\subset\varphi(X_J)$. De même $\dim\varphi(X_H) = a_H$ et $T_i-\{y\}\subset\varphi(X_H)$. D'où $\dim\varphi(X_{J\cup H}) = a_{J\cup H}$ ($\forall i\in J\cup H$, $\dim\varphi(X_i) = a_i$), et $T_i\subset\varphi(X_{J\cup H})$, de sorte que $\dim\varphi(X_{J\cup H}\cup X_i) = a_{J\cup H} < a_{J\cup H} + a_i$: (X_i) ne serait pas de type $\mathcal{A}$. <u>L'un des deux éléments x et y est donc suppressible.</u>

<u>ou $a_i\geq 2$</u> : Soit $\mathcal{B} = (b_j)$ et $\mathcal{C} = (c_j)$ ou $b_j = c_j$ $\forall j\in J-\{i\}$ et $b_i = a_i - 1\geq 1$, $c_i = 1$. Comme $b_I = n-1$, il existe une famille disjointe (U_j) incluse dans (X_j) telle que $\dim\varphi(U_j) = b_j$ pour tout j dans I. Dans E considéré come ψ-espace où $\psi = \varphi_{U_i}$, (X_j) est de type $\mathcal{C}$: soit $J\subset I$, ou $i\notin J$ et $\dim_\psi\psi(X_J)\geqslant\dim_\psi\psi(Y_J) = b_J = c_J$, ou $i\in J$ et

$\dim_\psi\psi(X_J) = \dim_\varphi\varphi(X_J) - \dim_\varphi\varphi(U_i)\geq a_J + 1 - a_i\geq c_J$.

(c.f. 3.3. théorème 4 et son corollaire). Comme $C_I\leqslant n-1$, $\exists(V_j)\subset(X_j)$,

(V_j) ψ-disjointe et $\dim_\psi \psi(V_j) = c_j$ $\forall j \in I$. Soit pour tout j W_j une ψ-base de $\psi(V_j)$ incluse dans V_j. En posant $T_j = W_j$ si $j \neq i$ et $T_i = W_i \cup U_i$, (T_j) $[j \in I]$ est φ-disjointe, de type $\mathcal{A}$ et incluse dans (X_j). Il nous suffit donc de prendre $Z_i = T_i$ dans $R_{\mathcal{A}}$.

Remarquons ici que l'hypothèse de récurrence ne nous sert pas pour $a_i = 0$ et $a_i = 1$, et sert à trouver une solution directement ((Z_i) est de type $\mathcal{A}$ et φ-disjointe) quand $a_i \geq 2$.

Par au plus $\sum (\dim \varphi (X_i) - a_i)$ $[i \in I]$ opérations de suppression comme celle indiquée dans $R_{\mathcal{A}}$, on obtient une famille $(Y_i)_{i \in I}$ de type $\mathcal{A}$ et telle que $\dim_\varphi \varphi(Y_i) = a_i$ pour tout i. (Y_i) est donc solution (c.f. 3.3. corollaire du théorème 4).

b) - Démonstration par empilement

Le première démonstration qui repose sur la suppressibilité de certains éléments exige en pratique beaucoup de vérifications d'inégalités. Il sera souvent plus aisé d'ajouter des éléments les uns après les autres, en faisant des permutations quand besoin est.

$(R'_{\mathcal{A}})$ Soit (X_i) $[i \in I]$ une famille de type $\mathcal{A} = (a_i)$ $[i \in I]$, on a : soit (Y_i) $[i \in I]$ φ-disjointe, où chaque Y_i est une partie libre de X_i et $\text{Card } Y_i \leq a_i$. Pour tout $i \in I$ tel que $\text{Card } Y_i < a_i$, il existe (Z_j) φ-disjointe, où chaque Z_j est une partie libre de X_j et $\text{Card } Z_j = \text{Card } Y_j$ si $j \neq i$, et $Z_i \supset Y_i$, $\text{Card } Z_i > \text{Card } Y_i$.

Il est clair que, partant de la famille $(\emptyset)$, par au plus a_I opérations comme celle indiquée dans $R'_{\mathcal{A}}$ on construit une solution pour (X_i).

Soit en effet $i \in I$ tel que $\text{Card } Y_i < a_i$. Si $X_i \not\subset \varphi(Y_I)$, il suffit de prendre $Z_j = Y_j$ $\forall j \in I - \{i\}$ et $Z_i = Y_i \cup \{x\}$ où $x \in X_i$, $x \notin \varphi(Y_I)$. Mais en général $X_i \subset \varphi(Y_I)$. On considère alors les suites récurrentes :

$K_o = I - \{i\}$, $I_o = K_o \cup \{i\} = I$, $Y^o = \cup U_i \; [i \in I_o]$

$K_1 = \{j / j \in K_o, \; X_j \subset \varphi(Y^o)\}$, $I_1 = K_1 \cup \{i\}$, $Y^1 = \cup Y_i \; [i \in I_1]$

... ...

$K_p = \{j / j \in K_{p-1}, \; X_j \subset \varphi(Y^{p-1})\}$, $I_p = K_p \cup \{i\}$, $Y^p = \cup Y_i \; [i \in I_p]$

... ...

D'où les suites décroissantes : $K_o \supset K_1 \supset \ldots \supset K_{p-1} \supset K_p \supset \ldots$

et $Y^o \supset Y^1 \supset \ldots \supset Y^{p-1} \supset Y^p \supset \ldots$

Pour tout entier $p > 0$ tel que $X_i \subset \varphi\,(Y^p)$, on a $Y^{p+1} \neq Y^p$. En effet si $Y^{p+1} = Y^p$, $K_{p+1} = K_p$ (si $Y_j = \emptyset$, $j \in K_q$ $\forall q \geq 0$; si $Y_j \neq \emptyset$, (Y_j) étant disjointe, les Y_j sont mutuellement disjoints), donc :

$$\forall j \in I_p = I_{p+1} \;,\; X_j \subset \varphi\,(Y^p) \;:\; \varphi\,(X_{I_p}) \subset \varphi\,(Y^p)$$

on aurait donc dim $\varphi\,(X_{I_p}) < \sum a_i \; [i \in I_p]$, (X_i) ne serait donc pas de type $\mathcal{A}$. Si $X_i \subset \varphi\,(Y^p)$ pour tout $p \geq 0$, on aurait une suite infinie strictement décroissante de parties de I : (K_p). Or I est fini, donc il existe un entier q tel que : $X_i \subset \varphi(Y^p)$ si $0 \leq p < q$ et $X_i \not\subset \varphi\,(Y^q)$. Les suites finies (Y^p) $0 \leq p \leq q$ et (K_p) $0 \leq p \leq q$ sont donc strictement décroissantes. Nous allons démontrer que :

$\forall x \in X_i - \varphi\,(Y^q)$, $\exists\, i(q-1) \in K_{q-1} - K_q$, $\exists\, e_{q-1} \in Y_{i(q-1)}$,

$\forall \varepsilon_{q-1} \in X_{i(q-1)} - \varphi(Y^{q-1})$, $\exists\, i(q-2) \in K_{q-2} - K_{q-1}$, $\exists\, e_{q-2} \in Y_{i(q-2)}$,

— — — — — — — — — —

$\forall \varepsilon_{q-k} \in X_{i(q-k)} - \varphi(Y^{q-k})$, $\exists\, i(q-k-1) \in K_{q-k-1} - K_{q-k}$, $\exists\, e_{q-k-1} \in Y_{i(q-k-1)}$,

— — — — — — — — —

$\forall \varepsilon_o \in X_{i(o)} - \varphi(Y^o)$, en posant :

$Z_i = Y_i \cup \{x\}$, $Z_{i(k)} = (Y_{i(k)} - \{e_k\} \cup \{\varepsilon_k\}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq q-1$, et $Z_j = Y_j$ pour les autres indices, on obtient une famille demandée pour $\mathbb{R}'\mathcal{A}$.

En effet, comme $X_i \not\subset \varphi(Y^q)$, soit $x \in X_i - \varphi(Y^q)$. Considérant E comme ψ-espace où $\psi = \varphi_{Y^q}$, $\{x\}$ est ψ-libre. Or $Y^{q-1} - Y^q$ est une ψ-base de $\psi(Y^{q-1}) = \varphi(Y^{q-1})$, on peut échanger x et un élément e_{q-1} de $Y^{q-1} - Y^q$ pour obtenir une autre ψ-base de $\psi(Y^{q-1})$, et les Y_j étant mutuellement disjoints, il existe i(q-1) unique, $i(q-1) \in K_{q-1} - K_q$ tel que $e_{q-1} \in Y_{i(q-1)}$. Comme $i(q-1) \notin K_q$, $X_{i(q-1)} \not\subset \varphi(Y^{q-1})$, et il est alors clair que : $\forall \varepsilon_{q-1} \in X_{i(q-1)} - \varphi(Y^{q-1})$

(Z_j) $[j \in I_{q-1}]$ est φ-disjointe, Card $Z_i >$ Card Y_i et $Z_i \supset Y_i$, Card Z_j = Card Y_j pour $j \neq i$ et les Z_i sont des parties φ-libres de X_i. On démontre de manière absolument identique que (Z_j) $[j \in I_{q-k}]$ est φ-disjointe,... par récurrence sur k : On suppose la propriété vraie jusqu'à l'entier $k (0 \leq k \leq q-1)$, on raisonne dans E considéré comme ψ_K-espace où $\psi_k = \varphi_A$ et $A = (\bigcup Z_j \; [j \in I_{q-k}]) - \{\varepsilon_{q-k}\}$, et on échange x et ε_{q-k}, X_i et $X_{i(q-k)}$, q et q-k, q-1 et q-k-1 dans la démonstration ci-dessus.

4.3.- Application à la résolution pratique du cas fini

Voici d'abord le résultat obtenu dans le cas fini :

Corollaire 1.- $\mathcal{A} = (a_i)$ $[i \in I]$ étant une famille finie de cardinaux finis et I_1 l'ensemble des i tels que $a_i \neq 0$ pour qu'une famille (X_i) $[i \in I]$ de parties d'un φ-espace contienne une famille φ-disjointe (Y_i) $[i \in I]$ telle que $\dim \varphi(Y_i) = a_i$ pour tout i, il faut et il suffit que :

$$\boxed{\text{Pour tout } J \subset I_1, \quad \dim \varphi(X_J) \geq a_J} \qquad (1)$$

Remarquons que les conditions (1) quand J décrit l'ensemble des parties non vides de l'ensemble I des i tels que $a_i > 0$ sont indépendantes : soit J une telle partie, il existe des familles (X_i) qui vérifient $\dim \varphi(X_K) \geq a_K$ pour toute partie K différente de J et telles que $\dim \varphi(X_J) < a_J$ (à partir d'une famille disjointe (Z_i) de parties libres Z_i telles que Card $Z_i = a_i$, en considérant $x \in Z_J$ et en prenant $X_i = Z_J - \{x\}$ si $i \in J$, $X_i = Z_i$ si $i \notin J$, (X_i) vérifie bien dim φ $(X_K) \geq a_K$ pour $K \subset I$ et $K \neq J$, et cependant on a dim $\varphi(X_J) = a_J - 1 \leq a_J$). La condition dim $\varphi(X_\emptyset) \geq 0$ est toujours vérifiée. On ne peut donc espérer écrire moins de conditions dans le corollaire.

Maintenant voici comment en pratique on peut résoudre ce problème. Les processus indiqués se programment aisément sur machine dans les cas où E est un φ-espace discret, ou un espace affin de dimension finie sur un corps fini.

Soit (X_i) $[i \in I]$ la famille à étudier dont on veut trouver une famille φ-disjointe (Y_i) incluse où dim φ $(Y_i) = a_i$ pour tout i. Pour tous les indices i tels que $a_i = 0$, on prend $Y_i = \emptyset$ et on les enlève de I. Puis on remplace chaque X_i pour une base Z_i de $\varphi(X_i)$ incluse dans X_i. (Z_i) est de type $\mathcal{A}$ car pour tout $J \subset I$, $\varphi(Z_J) = \varphi(X_J)$.

On se ramène ainsi systématiquement à des familles de parties libres de type $\mathcal{A}$ telles que $a_i > 0$ pour tout i.

Voici d'abord deux méthodes qui permettent d'obtenir une solution en itérant toujours le même calcul.

a) (suppressibilité).

Soit (X_i) $[i \in I]$ famille de parties libres, de type $\mathcal{A} = (a_i)$ $(a_i > 0)$. On pose $I = \{1, \ldots, n\}$ et on range les X_i de façon que Card $X_i - a_i$ croisse avec i. Pour les X_i tels que Card $X_i > a_I$ on ne garde qu'une partie ayant a_I éléments.

Posons $X_1 = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Si $p = a_1$ on pose $Y_1 = X_1$. Sinon $p > a_1$ et on vérifie pour x_1 les 2^{n-1} inégalités :

Pour tout $J \subset I - \{1\}$ dim $\varphi(X_J \cup (X_1 - \{x_1\})) \geq a_J + a_1$.

Dès que l'une de ces inégalités n'est pas satisfaite, x_1 n'est pas suppressible et on le garde dans X_1. Si elles sont toutes vérifiées, x_1 est suppressible et on l'enlève de X_1. On obtient ainsi une famille où X_1 ou bien a p-1 éléments, ou bien a un élément x_1 non suppressible, cette famille étant toujours de type $\mathcal{A}$. On fait la même chose pour x_2 avec la famille obtenue, puis pour $x_3, \ldots$ On s'arrête dès que ou bien on a a_1 éléments non suppressibles, ou bien il ne reste que a_1 éléments dans X_1 et on pose Y_1 l'ensemble de ces a_1 éléments. Comme (X_i) $[i = 2,\dots, n]$ est de type $\mathcal{A}_{I - \{1\}}$ dans E considéré comme φ_{Y_1}-espace, il ne reste qu'à itérer la méthode pour $(X_i)_{i \geq 2}$.

<u>On justifie ce processus de la manière suivante</u> : On sait d'après le théorème 1 qu'il existe une famille (Y_i) de parties libres $Y_i \subset X_i$, disjointe, et Card $Y_i = a_i$ pour tout i. Si $x \notin Y_1$, x est suppressible, de sorte que l'on a au plus a_1 éléments non suppressibles (ceux de Y_1). S'il y en a a_1, ils forment Y_1 de manière unique. S'il n'y en a que $b_1 < a_1$, Y_1 contient ces éléments et $a_1 - b_1$ éléments suppressibles (on a $C_{p-b_1}^{a_1-b_1}$ manières de les choisir dans X_1).

b) - <u>(empilement)</u>

Comme en a) on range les X_i $i = 1,\dots, n$ de façon que Card $X_i - a_i$ croisse avec i. Puis on prend Y_1^1 partie de X_1 ayant a_1 éléments. On construit (Y_1^2 , Y_2^2) disjointe où chaque Y_i^2 est une partie libre de X_i ayant a_i éléments comme indiqué en 2 b). Supposons que l'on ait ainsi construit de proche en proche (Y_j^{i-1}) $[j = 1, 2,\dots, i - 1]$ disjointe où les Y_j^{i-1} sont des parties libres de X_j ayant a_j éléments. Pour obtenir (Y_j^i) $[j = 1, 2,\dots, i]$ on construit Y_i^i élément par élément par la méthode qui nous a servi à démontrer $R'_{\mathcal{A}}$. A mesure que l'on ajoute des éléments pour former Y_i^i , on doit en général modifier les Y_j^{i-1} et on barre dans chaque X_j les éléments qui ont dû être enlevés à un Y_j^{i-1} à un moment ou à un autre (<u>ce sont des éléments suppressibles au sens de a) ci-dessus</u>), <u>la suite</u> K_p $0 \leq p \leq q$ <u>s'allonge et un indice j donné ne peut passer de</u> K_p <u>qu'à un</u> K_r <u>où</u> $r \geq p$ (en effet pour tout entier p, Y^p croit, donc K_p aussi, mais comme on a toujours $X_i \subset \varphi(Y^p)$ pour $p < q$, la suite est toujours strictement décroissante Quand $X_i \subset \varphi(Y^q)$, on ne peut qu'allonger la suite des K_i).

c)- <u>remarques</u>

1°) Il n'est pas nécessaire de vérifier d'abord que $(X_i)_{i \in I}$ est de type $\mathcal{A}$, mais si on le fait, on note les parties J telles que dim $\varphi(X_J) = a_J$ et on ordonne celles-ci suivant Card J croissant : (J_k) $[k = 1,\dots, p]$.

On résoud (X_i) $[i \in J_1]$, puis on raisonne dans E considéré comme φ_1-espace où $\varphi_1 = \varphi_A$ et $A = \cup X_i$ $[i \in J_1]$. Puis on résoud (X_i) $[i \in J_2 - J_1 \cap J_2]$ et on raisonne dans E considéré comme φ_2-espace où $\varphi_2 = \varphi_{1\,B}$ et $B = \cup X_i$ $[i \in J_2 - J_1 \cap J_2]$ $(\varphi_2 = \varphi_C$ où $C = \cup X_i$ $[i \in J_1 \cup J_2])$... . On obtient en fin de compte une solution partielle (Y_i) $[i \in \cup J_k$ $[k=1,\dots,p]]$ dont on sait qu'elle se prolonge en une solution pour (X_i). On est alors ramené au cas général en raisonnant dans E considéré comme φ_p-espace.

2°) La méthode par suppressibilité est avantageuse quand les dim $\varphi(X_i)$ sont voisins des a_i car on a alors des chances de supprimer rapidement assez d'éléments. Au contraire plus les dim $\varphi(X_i)$ sont grands et voisins de a_I, mieux la seconde méthode est heureuse, car on construit rapidement des familles disjointes incluses de type $\mathcal{B}$ = (bi) où $a_I - b_I$ est petit, la difficulté est reportée sur les derniers éléments (le cas le plus favorable est évidemment celui où dim $\varphi(X_i) \geq a_I$ pour tout i. Les constructions par la seconde méthode se font alors sans permutation).

3°) Si on a une famille (X_i) dont on ne sait si elle est de type $\mathcal{A}$ ou non (vérifier quand même dim $\varphi(X_i) \geq a_i$ et dim $\varphi(X_I) \geq a_I$), on peut cependant essayer l'une des méthodes a) et b) ci-dessus. Si les calculs aboutissent, c'est que (X_i) est de type $\mathcal{A}$ et on a une solution, sinon c'est que (X_i) n'est pas de type $\mathcal{A}$, et il faut alors modifier $\mathcal{A}$ (diminuer certains a_i, en augmenter d'autres...) si on veut des solutions "au mieux", i.e. telles que $\mathcal{A}$ soit maximale.

4.4.- Propriétés générales des familles de type $\mathcal{A}$. Applications

4.4.1.- Distributivité des familles de type $\mathcal{A}$.

La remarque qui suit le corollaire nous permet d'affirmer que la propriété pour une famille (X_i) d'être de type $\mathcal{A}$ n'est pas associative (i.e. (J_ℓ) $\ell \in L$ étant une partition de I, si (X_i) $[i \in I]$ est de type $\mathcal{A}=(a_i)[i \in I]$, (X_i) $[i \in J_\ell]$ est de type $\mathcal{A}_{J\ell}$ pour tout ℓ et $(X_{J\ell})$ $[\ell \in L]$ est de type $\mathcal{B} = (b_\ell = a_{J\ell})$; mais la réciproque est fausse). On a cependant la propriété de "distributivité" suivante :

Soit (X_i) $[i \in I]$ une famille de type $\mathcal{A} = (a_i)$ et pour tout i $a_i = \sum b_\ell$ $[\ell \in L_i]$. Soit de plus L l'ensemble somme des L_i et pour tout ℓ dans L $Y_\ell = X_{i(\ell)}$ où $i(\ell)$ est l'indice $i \in I$ unique tel que $\ell \in L_{i(\ell)}$. Il est alors aisé de vérifier que :

$$\boxed{\text{"}(X_i)\ [i \in I] \text{ est de type } \mathcal{A} = (a_i)\text{"} \Longleftrightarrow \text{"}(Y_\ell)\ [\ell \in L] \text{ est de type } \mathcal{B} = (b_\ell)\text{"}}$$

Résoudre (X_i) et résoudre (Y_ℓ) sont donc deux problèmes équivalents. Voici comment on passe des solutions de (X_i) à celles de (Y_ℓ) et réciproquement : (X'_i) étant une solution de (X_i), soit pour tout i X''_i une base de $\varphi(X'_i)$ incluse dans X'_i. Comme Card $X''_i = p_i \geq a_i$, il existe

$$C_{p_i}^{a_i} \times (a_i\,!) / \pi(b_\ell\,!) \quad [\ell \in L_i]$$

partitions (Y'_ℓ) $[\ell \in L_i]$ de X''_i telles que Card $Y'_\ell = b_\ell$ pour tout ℓ dans L_i, et (Y'_ℓ) $[\ell \in L]$ est solution pour (Y_ℓ). Inversement si (Y'_ℓ) $[\ell \in L]$ est une solution de (Y_ℓ), (Y'_{L_i}) $[i \in I]$ est une solution pour (X_i).

Notons que la propriété de distributivité permet de se ramener systématiquement à des familles de type $\mathcal{C} = (c_k)$ où $c_k = 1$ pour tout k. Mais la résolution de ces systèmes est en général beaucoup plus longue que celle du système demandé. On a d'ailleurs toujours avantage à diminuer le nombre d'éléments de la famille, c'est-à-dire à utiliser la distributivité en sens inverse.

4.4.2.- Familles réduites.

Soit (X_i) $[i \in I]$ une famille de type $\mathcal{A} = (a_i)$. La relation sur I : $R\,\{i\,,\,j\}$ si et seulement si $\varphi(X_i) \subset \varphi(X_j)$ est une relation de <u>préordre</u>. Soit ρ l'équivalence associée, $I_o = I/\rho$ est ordonné par la relation d'ordre quotient. On note α, β, γ les éléments de I_o, i.e. les classes d'équivalences de I suivant ρ et $X_\alpha = \cup X_i$ $[i \in \alpha]$.

<u>La famille (X_α) $[\alpha \in I_o]$ est dite réduite de (X_i)</u>

il est clair que :

"(X_i) $[i \in I]$ est de type $\mathcal{A} = (a_i)$" $\Longleftrightarrow$ "(X_α) $[\alpha \in I_o]$ est de type $\mathcal{A}' = (a_\alpha)$".

(on obtient ici une propriété plus forte que la distributivité).

<u>De toute solution (Y_α) de (X_α) on déduit une solution de (X_i) de la manière suivante</u> : Soit $\alpha \in I_o$ et E considéré comme Ψ-espace où $\Psi = \varphi_C$ et $C = \cup Y_\beta$ $[\beta \in I_o - \{\alpha\}]$. Pour tout i dans α, $\Psi(Y_\alpha) \subset A = \Psi(X_i)$. Soit donc Z_1 partie Ψ-libre de X_1 ayant a_1 éléments, Z_2 partie Ψ_{Y_1}-libre de X_2 ayant a_2 éléments,... (où $\alpha = \{1, 2, \dots\}$). $(Z_i)_{i \in \alpha}$ est Ψ-disjointe et Z_α est Ψ-libre, et en remplaçant Y_α par Z_α dans la famille (Y_β), on a encore une solution pour (X_α). A partir de cette solution on fait comme ci-dessus avec un second élément de I_o,... d'où en fin de compte une famille $(Z_i)_{i \in I}$ telle que (Z_α) $[\alpha \in I]$ est solution pour (X_α) et (Z_i) $[i \in \alpha]$ est solution pour (X_i) $[i \in \alpha]$ d'où (associativité de la disjonction) $(Z_i)_{i \in I}$ solution pour (X_i).

4.5.- Cas de familles finies de cardinaux quelconques

Soit $\mathcal{A} = (a_i)$ $[i \in I]$ une famille finie de cardinaux. $L = \{e_2, \dots, e_n\}$ étant l'ensemble des cardinaux infinis a_i de I rangés dans l'ordre croissant, soit I_o (resp. I_1 ; resp. I_k où $k = 2, \dots, n$) l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $a_i = o$ (resp. a_i fini non nul ; resp. $a_i = e_k$). On obtient ainsi la partition (I_k) $[k = 0, 1, \dots, n]$ de I.

Il est clair qu'une famille (X_i) $[i \in I]$ est de type $\mathcal{A} = (a_i)$ si et seulement si :

$$\forall J \subset I_1 \text{ , } \dim \varphi(X_J) \geq a_J$$

et $\forall i \in I$, a_i infini, $\dim \varphi(X_i) \geq a_i$

<u>ces conditions étant bien entendu indépendantes</u> (voir début de 4.3).

Soit (X_i) une famille de type $\mathcal{A}$. Pour $k = o, 1, \dots, n$ on note $J_k = \cup I_r$ $[r \leq k]$. (X_i) $[i \in J_1]$ contient une famille disjointe (Y_i) $[i \in J_i]$ telle que $r(Y_i) = a_i$. Dans E considéré comme Ψ^1-espace où $\Psi^1 = \varphi_A$, $r^1 = r_A$ et $A = \cup Y_i$ $[i \in J_1]$, comme $r(A)$ est finie, pour $k = 2, \dots, n$ et $i \in I_k$,

$r^1(X_i) \geq a_i$ (c.f. 3.3. corollaire 1 du théorème 3 par exemple). Il va être démontré ci-dessous (théorème 2) qu'il existe une famille ψ^1-disjointe $(Z_i)[i \in I_2]$ incluse dans (X_i) $[i \in I_2]$ telle que $r^1(Z_i) = \ell_2$ pour tout i. En prenant pour tout i dans I_2 une ψ^1-base Y_i de $\psi^1(Z_i)$ incluse dans Z_i on obtient une famille (Y_i) $[i \in I_2]$ φ-disjointe telle que Y_{I_2} et Y_{J_1} sont φ-disjoints, donc (associativité) (Y_i) $[i \in J_2]$ est φ-disjointe. On itère de même pour I_3 en raisonnant dans E considéré comme ψ^2-espace sachant que $\psi^2 = \varphi_B$, $B = \cup Y_i$ $[i \in J_2]$ et $r(B) = \ell_2 < \ell_3$. Ayant itérer n-2 fois ce procédé on obtient (Y_i) $(i \in I)$ φ-disjointe, de type $\mathcal{A}$ et incluse dans (X_i) $[i \in I]$. En particulier on a démontré le résultat suivant qui précise le théorème 1 :

<u>Corollaire 2.- Soit $\mathcal{A} = (a_i)$ $[i \in I]$ une famille finie de cardinaux. Pour qu'une famille (X_i) $[i \in I]$ de parties d'un φ-espace contienne une famille disjointe (Y_i) $[i \in I]$ telle que dim $(Y_i) = a_i$ pour tout i, il faut et il suffit que :</u>

Pour tout $J \subset I^f$,	$r(X_J) \geq a_J$
Pour tout i tel que a_i soit infini,	$r(X_i) \geq a_i$

<u>ces inégalités étant indépendantes.</u>

Il reste à démontrer le :

<u>Théorème 2.-</u> Soit a un cardinal infini et I un ensemble fini. Pour qu'une famille (X_i) $[i \in I]$ de parties d'un φ-espace contienne une famille <u>φ-disjointe</u> <u>(Y_i) $[i \in I]$</u> telle que <u>dim $\varphi(Y_i) = a$</u> pour tout i, il faut et il suffit que :

<u>pour tout i</u> <u>dim $\varphi(X_i) \geq a$</u> .

Voici d'abord un lemme qui généralise aux φ-espaces une propriété classique des parties d'un ensemble.

Lemme 1.- Soit a un cardinal infini, M et N deux parties d'un φ-espace E telles que $M \cup N$ soit φ-libre, card M = card $N = a$ et card $M \cap N < a$. Pour toute partie X de E telle que $\dim \varphi(X) = a$, on a la relation :

$$r_M(X) + r_N(X) = a \qquad (2)$$

Démonstration du lemme 1

Soit Y une φ_M-base de X. D'après le théorème 2 de 2.1.4. , on a :

$$\text{Card } Y = r_M(X) \leq r(X) = a$$

Si Card $Y = a$, la relation (2) est vérifiée. Sinon on a Card $Y < a$, donc :

$$r_Y(M) = r_Y(N) = r_Y(X) = a$$

Soit alors M_1 une φ_Y-base de M

et N_1 une $\varphi_{Y \cup M_1}$-base de N

$M_1 \cap N_1 = \emptyset$ et $M_1 \cup N_1$ est φ_Y-libre (voir 3.2.), donc X et N_1 sont φ_Y-disjointes $(X \subset \varphi_Y(M_1))$ et on a :

$$r_{Y \cup N_1}(X) = r_Y(X) = a$$

Or Y est une $\varphi_{M \cup N_1}$-base de X, et comme $N' = N - M \cap M$ est la φ_M-base de N, $N_1 \subset N'$, $N' - N_1$ est $\varphi_{M \cup N_1}$-libre , et comme

$$\varphi_{M \cup N_1}(N' - N_1) = \varphi(M \cup N) \subset \varphi_{M \cup N_1}(X),$$

$$\text{Card } (N' - N_1) \leq \text{Card } Y < a$$

Or Card $(M \cap N) < a$, donc : Card $(N - N_1) < a$

et $\quad r_{Y \cup N_1}(X) = a = r_{Y \cup N}(X) \leq r_N(X)$

d'où $\quad r_N(X) = a$

Démonstration du théorème 2.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, a étant un cardinal infini, l'on démontre :

$$(\mathrm{R}_a)\ \begin{cases} (Y_i)_{i\in I} \text{ étant une famille finie telle que } r(Y_i) \geq a \text{ pour tout } i, \text{ on a :} \\ \forall i\in I\ ,\ \exists T\subset Y_i \text{ telle que : } r(T) = a \text{ et } \forall j\in I\ ,\ r_T(Y_j) = r(Y_j)\ . \end{cases}$$

En effet soit $i\in I$, Z_i une φ-base de Y_i et $n = \mathrm{Card}\ I$. Comme $\mathrm{Card}\ Z_i \geq a$, il existe une famille $(T_m)_{m=1,\dots,n}$ de parties disjointes deux à deux de Z_i telles que $\mathrm{Card}\ T_m = a$ pour tout m. D'après le lemme 1, pour tout $j\in I$, il existe au plus un m_j tel que $r_{T_m}(Y_j) < a$. On peut donc choisir T parmi les T_m.

En appliquant (R_a) Card I-fois et en ne considérant que des parties libres, on construit aisément une famille (Y_i) disjointe, incluse dans (X_i) et telle que $r(Y_i) = a$ pour tout i .

4.6.- Non-extension de ces résultats aux $\mathscr{L}$-espaces

L'on peut essayer d'étendre le théorème 1 aux $\mathscr{L}$-espaces. Déjà M.Rado dans [9] a démontré que les axiomes imposés à sa structure sont nécessaires et suffisants pour la validité du théorème 1. Voici le résultat général :

Théorème 3 (Rado).- Soit E un $\mathscr{L}$-espace pour que toute famille de type $\mathscr{A}$ (pour le rang $r_{\mathscr{L}}$) contienne une famille $\mathscr{L}$-disjointe de type $\mathscr{A}$, <u>il faut et il suffit</u> que $(E,\mathscr{L})$ soit un $\mathscr{L}$-espace régulier, i.e. un φ-espace.

Démonstration :

La condition suffisante résulte du théorème 1 .

La condition est nécessaire car si $(E,\mathscr{L})$ n'est pas régulier :

$$\exists X \in \mathscr{L} \quad , \quad \exists Y \in \mathscr{L} \text{ tels que } \operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y + 1 = n$$

et $$\forall x \in X - Y \quad , \quad Y + x \notin \mathscr{L} \qquad (2)$$

Alors (X,Y) est de type $(1, n-1)$, mais (X,Y) ne contient aucune famille disjointe, et de type $(1, n-1)$.

Chap. V Existence de familles disjointes incluses dans des familles infinies de parties d'un φ-espace.

Suivant en cela Bourbaki [C, I, 3] , l'on admet comme seuls axiomes logiques l'axiome du choix (sous sa forme usuelle) et l'axiome de l'infini. Sauf mention expresse dans l'énoncé du théorème, les résultats énoncés sont indépendants de l'hypothèse du continu généralisé érigé en axiome de la théorie des ensembles par J.P. Cohen (voir par exemple [16] et [17]).

L'on utilisera en 5.2. des raisonnements sur les limites projectives dont certaines parties sont analogues à ceux qui sont exposés dans Bourbaki [C, I, 3] , § 6 , exercice 29 et [C, III, 1] , Appendice, page 137 de la troisième édition.

Une étude systématique des différents cas possibles pour une famille dénombrable et le principe de l'étude générale de l'une d'elles terminent ce chapitre.

5.1.- Généralités

Soit $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in I}$ une famille de cardinaux. Alors

$$L = \{a_i \mid i \in I\} = L_{\mathcal{A}} \quad , \quad L^{\omega} = \{a_i \mid i \in I \text{ et } a_i \text{ infini}\} = L^{\omega}_{\mathcal{A}}$$

est un ensemble bien ordonné par l'ordre naturel des cardinaux et pour tout $\ell \in L$, l'on pose :

$$I_{\ell} = \{i \mid i \in I \quad \text{et} \quad a_i = \ell\} = I^{\mathcal{A}}_{\ell}$$

$(I_{\ell})_{\ell\in L}$ est une partition de I, et l'on pose $I_{\ell} = \emptyset$ si ℓ est un cardinal qui n'est pas dans L. On écrit en outre :

$$I^f = \{i \mid i \in I \quad \text{et} \quad a_i \text{ fini non nul}\} = I^f_{\mathcal{A}} \quad , \quad \mathcal{A}^f = (a_i)_{i \in I^f}$$

$$I^\omega = \{i \mid i \in I \quad \text{et} \quad a_i \text{ infini}\} = I^\omega_{\mathcal{A}} \quad , \quad \mathcal{A}^\omega = (a_i)_{i \in I^\omega}$$

$$I^o = I_o = I^o_{\mathcal{A}}$$

et $\quad a_{\mathcal{A}} = \text{Min } a_i \quad [i \in I \quad \text{et} \quad a_i \text{ infini}]$

Ces notations seront utilisées sans rappels, en précisant $\mathcal{A}$ quand ce sera nécessaire.

Contrairement au cas fini, en général une famille infinie de type $\mathcal{A}$ ne contient pas une famille disjointe de type $\mathcal{A}$. Voici deux exemples typiques :

Exemple 1.- Soit $\mathcal{A}$ telle que Card $I^f \geq a_{\mathcal{A}}$. E étant un ensemble tel que Card $E = a_I$ et $(E_i)_{i \in I}$ une partition (sens large) de E telle que pour tout $i \in I$ Card $E_i = a_i$, considérons la famille $(X_i)_{i \in I}$ définie par

$$\begin{cases} \forall i \in I_{a_{\mathcal{A}}} \quad , \quad X_i = F \quad \text{où } F \subset E_{I^f} \quad \text{et} \quad \text{Card } F = a_{\mathcal{A}} \\ \forall i \in I - I_{a_{\mathcal{A}}} \quad , \quad X_i = E_i \end{cases}$$

E étant φ-espace discret, $(X_i)_{i \in I}$ est de type $\mathcal{A}$ et ne peut contenir aucune famille disjointe de type $\mathcal{A}$.

Exemple 2.- Soit $\mathcal{A}$ une famille telle que pour un cardinal infini $\ell \in L$ on ait : Card $I_\ell > \ell$. E étant un ensemble tel que Card $E = a_I$ et $(E_i)_{i \in I}$ une partition (au sens large) de E telle que pour tout $i \in I$, Card $E_i = a_i$, prenons $X \subset E$ telle que Card $X = \ell$, $Y \subset E$ telle que Card Y = Card I_ℓ , et σ une bijection de I_ℓ sur Y. La famille $(X_i)_{i \in I}$ où :

$$\forall i \in I_\ell \quad , \quad X_i = X \cup \{\sigma(i)\}$$

$$\forall i \in I - I_\ell \quad , \quad X_i = E$$

est de type $\mathcal{A}$ dans le φ-espace discret E, mais ne contient aucune famille disjointe de type $\mathcal{A}$.

On peut donc particulariser les familles $\mathcal{A}$ de la manière suivante :

<u>Définition 1.-</u> Une famille $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ est dite <u>lisse</u> si elle vérifie la propriété :

(LIS) $\quad \forall\ \ell \in L^{\omega}$, $\mathrm{Card}\ I_{\ell} < \ell$ $\quad$ et $\quad \sum_{0 < m < \ell} \mathrm{Card}\ I_m < \ell$

$\mathcal{A}$ est dite <u>faiblement lisse</u> si

(LISf) $\quad \mathrm{Card}\ I^f < a_{\mathcal{A}}$ $\quad$ et $\quad \forall\ \ell \in L^{\omega}$, $\mathrm{Card}\ I_{\ell} \leq \ell$

$\mathcal{A}$ est dite <u>rugueuse</u> si elle n'est pas faiblement libre.

Si $\mathcal{A}$ est faiblement lisse, pour tout $J \subset I$, si $J \cap I^{\omega} \neq \emptyset$, $a_J = \mathrm{Sup}\ a_i\ [i \in J]$. Donc pour tout $\ell \in L^{\omega}$:

$$\sum_{0 \leq m \leq \ell} \mathrm{Card}\ I_m \leq \ell$$

Toute famille lisse est donc faiblement lisse

Si (X_i) est de type $\mathcal{A}$, on a :

$$(\forall i \in I^{\omega}\ ,\ r(X_i) \geq a_i) \quad \text{et} \quad (\forall J \in \mathfrak{P}(I^f_{\mathcal{A}})\ ,\quad r(X_J) \geq a_J) \tag{1}$$

inversement, $\mathcal{A}$ étant fixée, toute famille (X_i) vérifiant (1) est de type $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\forall J \subset I^{\omega} \quad , \quad a_J = \mathrm{Sup}\ a_i \quad [i \in J^{\omega}]$$

i.e. si et seulement si :

$$\forall\ \ell \in L^{\omega}_{\mathcal{A}} \quad , \quad \mathrm{Card}\ I^{\mathcal{A}}_{\ell} \leq \ell \tag{2}$$

Les exemples 1 et 2 montrent que, <u>en général, une famille de type $\mathcal{A}$ rugueuse ne contient pas de famille disjointe de type $\mathcal{A}$</u>.

Il va être démontré ci-après que :

Si $\mathcal{A}$ est lisse (resp. si $\mathcal{A}$ est faiblement lisse et si l'on admet l'hypothèse du continu généralisé), et si en outre :

(CF) (*) $\forall X \subset L^{\omega}$ tel que " $\forall Y \subset X$, $\operatorname{Sup} Y \in X \cup \{\operatorname{Sup} X\}$ ", on a $\alpha(X) < \omega_1$

et $\operatorname{Card}\{\ell \mid \ell \in L^{\omega}, \mathcal{U}_0 < \bar{\ell} < \ell$ et $\operatorname{Sup} L^{\omega}]\leftarrow, \ell[= \ell\} < \mathcal{U}_2$

et L^{ω} est de caractère final dénombrable au plus, alors toute famille (X_i) de type $\mathcal{A}$ telle que :

$\forall i \in I^f$, $r(X_i)$ soit fini

contient une famille φ-disjointe de type $\mathcal{A}$.

Le problème consistant à chercher si toute famille de type $\mathcal{A}$ faiblement lisse contient une famille disjointe de type $\mathcal{A}$ sans utiliser l'hypothèse du continu généralisé est laissé ouvert, ainsi que celui qui consiste à généraliser le résultat ci-dessus aux familles ne vérifiant pas la propriété (CF).

En 5.2. l'on étudie les familles $\mathcal{A}$ de cardinaux finis, puis en 5.3. est explicitée la séparation naturelle entre cardinaux finis et cardinaux infinis. Les familles de cardinaux infinis font l'objet de 5.4. et en 5.5. une discussion générale des familles dénombrables termine ce chapitre.

5.2.- Familles $\mathcal{A}$ de cardinaux finis

Il est deux cas où l'on peut conclure à l'existence d'une famille disjointe incluse de type $\mathcal{A}$:

- celui où $r(X_i)$ est fini pour tout i
- celui où $r(X_i)$ est infini pour tout i sauf un nombre fini et où les a_i non nuls sont égaux à 1.

5.2.1.- Cas où les X_i sont tous de rang fini.

L'on va démontrer le :

(*) Si $a = \mathcal{U}_\alpha$, l'on désigne par $\omega_{\bar{\alpha}}$ le caractère final de ω_α et $\bar{a} = \mathcal{U}_{\bar{\alpha}}$.

<u>Théorème 1.-</u> Une famille $(X_i)_{i \in I}$ telle que $r(X_i)$ soit fini pour tout i, est de type $\mathcal{A} = (a_i)$ si et seulement si :

$$\forall J \in \mathcal{F}(I) \quad , \quad r(X_J) \geq a_J \tag{4}$$

et alors elle contient une famille φ-disjointe de type $\mathcal{A}$.

<u>a) Démonstration par limite projective</u>

Soit $(X_i)_{i \in I}$ de type $\mathcal{A} = (a_i)$ où $r(X_i)$ est fini pour tout i. Prenons alors pour chaque $i \in I$ une base Z_i de X_i incluse dans X_i , (Z_i) est de type $\mathcal{A}$, $(Z_i) \subset (X_i)$ et Z_i est <u>fini</u> pour tout i .

Considérons alors pour toute partie J de I l'ensemble G_J des familles (Y_i) incluses dans (Z_i) , disjointes et telles que $r(Y_i) = \text{Card}\,(Y_i) = a_i$ pour tout i.

Si $J \subset K \subset I$

$$f_{JK} \quad : \quad (Y_i)_{i \in K} \longrightarrow (Y_i)_{i \in J}$$

est une application de G_K dans G_J .

Il est clair que (G_J , f_{JK}) $[J, K \in \mathcal{F}(I)]$ est un système projectif d'ensembles et que :

$$G_I = \varprojlim \quad (G_J , f_{JK}) \qquad [J, K \in \mathcal{F}(I)]$$

Or d'après (4) pour tout $J \in \mathcal{F}(I)$, G_J est fini et non vide, donc $G_I \neq \emptyset$ (voir Bourbaki [C, I, 3] , 2ème édition, § 7, n° 4, Théorème 1 et exemple 1.)

Voici un raisonnement élémentaire qui permet de démontrer que $G_I \neq \emptyset$.

1°) L'on restreint d'abord les G_J de façon à rendre les restrictions des f_{JK} surjectives :

$$\forall J \in \mathcal{F}(I) \quad , \text{ soit } \quad G_J^o = G_J$$

$$G_J^1 = \bigcap f_{JK} \; (G_K^o) \quad [K \in \mathcal{F}(I) \quad \text{et} \quad K \supset J]$$

......

$$G_J^n = \bigcap f_{JK} \; (G_K^{n-1}) \quad [K \in \mathcal{F}(I) \quad \text{et} \quad K \supset J]$$

......

d'où la suite indéfiniment décroissante :

$$\forall J \in \mathcal{F}(I) \quad , \quad G_J = G_J^o \supset G_J^1 \supset \dots \supset G_J^{n-1} \supset G_J^n \supset \dots$$

on démontre aisément par récurrence sur $n \geq 0$ que :

$$G_J^n \neq \emptyset \qquad \text{pour tout} \quad J \in \mathcal{F}(I)$$

G_J étant fini, la suite est stationnaire et

$$F_J = \bigcap_n G_J^n \neq \emptyset$$

et la restriction g_{JK} de f_{JK} à F_J est une surjection de F_J sur F_K telle que :

$$\varprojlim \; (G_J \; , \; f_{JK}) = \varprojlim \; (F_J \; , \; g_{JK})$$

Le fait que les g_{JK} sont surjectives est insuffisant pour démontrer que la limite projective n'est pas vide (voir [C, I, 3], § 1, exercice 32).

2°) En utilisant le théorème de Zorn, l'on démontre $G_I \neq \emptyset$. En effet $\mathcal{E}$ l'ensemble des familles $(Y_i)_{i \in K}$ telles que $K \subset I$ et pour tout $J \in \mathcal{F}(K)$, $(Y_i)_{i \in J} \in F_J$. $\mathcal{E}$ ordonné par la relation :

$$((Y_i)_{i \in K} \leq (Z_j)_{j \in L}) \iff (K \subset L \quad \text{et} \quad \forall i \in K, \quad Y_i = Z_i)$$

est inductif. On démontre alors aisément que tout élément maximal de $\mathcal{E}$ est un élément de C_I .

b) Démonstration par suppressibilité.

Comme en a) l'on raisonne sur (Z_i). L'on va d'abord démontrer que :

$(\mathbb{R}_{\mathcal{A}})$ Pour tout $i \in I$ tel que Card $Z_i > a_i$, il existe un x dans Z_i suppressible, i.e. tel que la famille $(T_j)_{j \in I}$, où $T_j = Z_j$ si $j \neq i$ et $T_i = Z_i - x$, vérifie :

$$\forall J \in \mathcal{F}(I) \quad , \quad r(T_J) \geq a_J \tag{4'}$$

Soit en effet $i \in I$ tel que Card $Z_i > a_i$.
$x \in Z_i$ est suppressible si et seulement si :

$$\forall J \in \mathcal{F}(I-i) \quad , \quad r(Z_J \cup (Z_i - x)) \geq a_J + a_i$$

i.e. si et seulement si pour tout $J \in \mathcal{F}(I-i)$, x est suppressible dans $(Z_j)_{j \in J+i}$

Or Z_i est fini et si $x \in Z_i$ n'est pas suppressible, il existe $J_x \in \mathcal{F}(I-i)$ tel que x ne soit pas suppressible dans $(Z_j)_{j \in J_x + i}$. Posant $K = J_Z + i$, à fortiori tout $x \in Z_i$ n'est pas suppressible dans $(Z_j)_{j \in K}$, ce qui contredit le fait que $(Z_j)_{j \in K}$ soit de type $\mathcal{A}_K$. D'où $(\mathbb{R}_{\mathcal{A}})$.

Considérons maintenant un bon ordre sur I (si I est dénombrable, on ordonne I suivant le type d'ordre ω_0 et l'on raisonne par récurrence infinie classique). L'on construit par récurrence transfinie sur i une famille $(Y_i)_{i \in I}$ telle que Card $Y_i = a_i$ pour tout $i \in I$ et telle que :

$$\forall i \in I \quad , \quad F_i = (Y_j^i)_{j \in I} \quad \text{où} \quad \begin{cases} Y_j^i = Y_j & \text{si } j \leq i \\ \text{et } Y_j^i = Z_j & \text{si } j > i \end{cases}$$

vérifie (4'), en appliquant $(R_{\mathcal{A}})$.

Alors $(Y_i)_{i\in I}$ vérifie aussi (4'), et comme Card $Y_i = a_i$ pour tout $i \in I$, $(Y_i)_{i\in I}$ est disjointe (voir 3.3. théorème 4).

c) Indépendance des conditions (3).

Les conditions $r(X_J) \geq a_J$ quand $J \in \mathcal{F}(I)$ sont indépendantes si les a_i sont > 0 :

Soit en effet $(Y_i)_{i\in I}$ une famille disjointe de parties libres telles que Card $Y_i = a_i$ pour tout i, et soit $J \in \mathcal{F}(I)$. Si l'on prend $x \in Y_J$ et si l'on considère

$$X_i = Y_J - x \quad \text{si} \quad i \in J$$

$$\text{et} \quad X_I = Y_J \cup Y_i \quad \text{si} \quad i \in I - J$$

l'on obtient une famille $(X_i)_{i\in I}$ qui vérifie $r(X_K) \geq a_K$ pour tout $K \in \mathcal{F}(I)$ sauf pour $K = J$.

5.2.2.- Cas où les X_i sont presque tous de rang infini.

Soit $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in I}$ une famille de cardinaux finis non nuls et (X_i) une famille de parties d'un φ-espace E. Alors $\mathcal{B} = (b_i)$ où $b_i = r(X_i)$ pour tout i est telle que :

pour $K = I^f_{\mathcal{B}}$, $(X_i)_{i\in K}$ contienne $(Y_i)_{i\in K}$ φ-disjointe, de type $\mathcal{A}^K$, vérifiant $r(Y_K) = a_K$.

Si K est fini, $r(Y_K) = a_K$ est fini

Si K est infini, $r(Y_K) = a_K =$ Card K, et alors si en outre Card $K \geq a_{\mathcal{B}}$, l'on a vu en 5.1. exemple 1 que $(X_i)_{i\in I}$ ne contient pas en général de famille disjointe de type $\mathcal{A}$.

Par contre si Card $K < a_{\beta}$, considérant E comme ψ-espace où $\psi = \varphi_{Y_K}$, pour tout $i \in I_{\beta}^{\omega}$, $r_{\varphi}(X_i) = r_{\psi}(X_i) = t_i$ est infini, et alors il est raisonnable d'emettre la <u>conjecture suivante</u> :

Soient $\mathcal{A} = (a_i)$ une famille de cardinaux finis non nuls et (X_i) une famille de parties d'un φ-espace, ayant toutes un rang infini. Comme pour toute partie infinie J de I, a_J = Card J :

$$(X_i) \text{ est de type } \mathcal{A} \text{ si et seulement si } (X_i) \text{ est de type } 1 \qquad (*)$$

et dans ce cas (X_i) contient une famille disjointe de type $\mathcal{C}$ pour toute famille $\mathcal{C} = (c_i)$ de cardinaux finis non nuls telle que :

$$\sum (c_i - 1) \leq \operatorname{Min} (r(X_i)) \qquad (5)$$

Voici un exemple de familles $\mathcal{C}$ et (X_i) de type 1 ne vérifiant pas (5) et telle que (X_i) ne puisse contenir de famille disjointe de type $\mathcal{C}$:

<u>exemple 3</u> : Soit $\mathcal{C} = (c_i)_{i \in I}$ une famille infinie de cardinaux finis non nuls telle que $c = \sum (c_i - 1)$ soit infini et $> \aleph_0$. Soit alors E un ensemble de cardinal celui de I, σ une bijection de I sur E et $X \subset E$ telle que Card $X < c$ et Card X infini

Posant pour tout $i \in I$, $X_i = \sigma(i) \cup X$, (X_i) est une famille de type 1 et $\mathcal{C}$ qui ne peut contenir de famille disjointe de type $\mathcal{C}$.

(*) On identifie le cardinal a et la famille $\mathcal{A} = (a_i)$ telle que $a_i = a$ pour tout i.

5.3.- Réduction de l'étude d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ quelconque.

Quand on se donne a priori une famille $(X_i)_{i\in I}$ de parties d'un φ-espace E, on peut chercher quel est l'ensemble $\mathcal{H}'$ des familles $\mathcal{A} = (a_i)$ telles que (X_i) soit de type $\mathcal{A}$, ou mieux quel est l'ensemble $\mathcal{H}$ des familles $\mathcal{A} = (a_i)$ telles que (X_i) contienne une famille φ-disjointe (Y_i) de type $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des familles (Y_i) φ-disjointes, incluses dans (X_i). <u>$\mathcal{S}$ est inductive,</u> donc admet des éléments maximaux et $(Y_i) \to (\dim \varphi\ (Y_i))$ est <u>une application de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{H}$.</u> Cependant $\mathcal{H}$ <u>n'est pas inductive</u> en général.

<u>Exemple .-</u> Soit E φ-espace discret de cardinal infini a et $(X_i)_{i\in I}$ famille de parties de E telle que : card $I > a$ et $X_i = E$ pour tout $i \in I$. Il est clair que $\mathcal{H}$ contient toutes les familles $\mathcal{A}^J = (a_i^J)_{i\in I}$ où $a_i^J = 0$ si $i \notin J$, $a_i^J = a$ si $i \in J$ et card $J = a$; mais si a^+ est le successeur de a et si card $J = a^+$, $\mathcal{A}^J \notin \mathcal{H}$, bien que borne supérieure d'éléments de $\mathcal{H}$ (Notons que ceci peut se produire également quand $(\dim \varphi\ (X_i))_{i\in I}$ est lisse).

5.3.1.- Si $r(X_i)$ est fini pour tout $i \in I$.

En convenant que $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in I_1}$ est fini si et seulement si $b_i = 0$ pour tout i sauf un nombre fini, i.e. si et seulement si $b_I < \aleph_0$, et en désignant par $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ l'ensemble des "parties finies" de $\mathcal{A}$, i.e. des $\mathcal{B} = (b_i) \leq \mathcal{A} = (a_i)$ telles que $b_i = 0$ pour tout $i \in I$ sauf un nombre fini d'indices i pour lesquels $b_i = a_i$, alors il résulte du corollaire du théorème 1 que :

<u>$\mathcal{H}$ est de caractère fini</u> et <u>$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$</u>

Donc : <u>$\mathcal{H}$ est inductif</u> et admet des éléments maximaux.

On démontre alors que :

- toute $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$ est inférieure ou égale à $(r\ (X_i))_{i\in I}$
- $\mathcal{H}$ admet un seul élément maximal $\mathcal{M}$ si et seulement si $(r(X_i))_{i\in I} \in \mathcal{H}$,

i.e. si et seulement si (X_i) est φ-disjointe ; et dans ce cas $\mathcal{A} = (r(X_i))$

- pour une $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) - $\mathcal{A}$ est maximale dans $\mathcal{H}$

b) - Il existe une (Y_i) φ-disjointe, incluse dans (X_i) et telle que dim φ $(Y_i) = a_i$ pour tout $i \in I$ et Y_I φ-engendre $\varphi(X_I)$.

En outre dans ce cas, toute (Z_i) φ-disjointe, incluse dans (X_i) et de type $\mathcal{A}$ est telle que Z_I φ-engendre $\varphi(X_I)$ et dim $\varphi(Z_i) = a_i$ pour tout i ; en particulier $a_I = \dim \varphi\ (X_I)$.

Les constructions faites en 4.2. et 5.2. permettent alors de construire $\mathcal{S}$, d'où $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ (il suffit d'en connaître les éléments maximaux).

5.3.2.- Si pour certains $i \in I$, $r(X_i)$ est infini

Soit $\mathcal{B} = (r(X_i))$ et $I^o = I^o_{\mathcal{B}} \ldots$.

On peut négliger systématiquement $(X_i)_{i \in I^o}$, de sorte que l'on suppose $I^o = \emptyset$ par la suite .

On résoud $(X_i)_{i \in I^f}$ comme dans 5.3.1. d'où $\mathcal{H}_f$ et $\mathcal{S}_f$.
On indiquera ci-après comment résoudre $(X_i)_{i \in I^\omega}$, d'où $\mathcal{H}_\omega \subset \mathcal{H}'_\omega$ et $\mathcal{S}_\omega$.
Alors deux cas se présentent :

a) - ou bien $\forall i \in I^\omega$, $r(X_{I^f}) < r(X_i)$ et alors :

et
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{S}_f + \mathcal{S}_\omega \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_\omega \end{array}}$$

où ces notations ont le sens suivant :

$\forall (Y_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}$, $(Y_i)_{i \in I^f} \in \mathcal{S}_f$ et $(Y_i)_{i \in I^\omega} \in \mathcal{S}_\omega$ d'où $\longrightarrow$.

Réciproquement ,

$\forall (Y_i)_{i \in I^f} \in \mathcal{S}_f$, $\forall (Y_i)_{i \in I^\omega} \in \mathcal{S}_\omega$ en général $(Y_i)_{i \in I} \notin \mathcal{S}$,

mais on peut <u>modifier</u> $(Y_i)_{i \in I^\omega}$ de façon qu'en fin de compte $(Y'_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}$ où $Y'_i = Y_i$ $\forall i \in I^f$. Mieux, on peut le faire de manière que $\dim \varphi\,(Y'_i) = \dim \varphi\,(Y_i)$; signalons cependant que, si certains $\dim \varphi\,(Y_i)$ pour $i \in I^\omega$ sont $< \sum \dim \varphi(Y_i)$ $[i \in I^f]$, il peut être nécessaire de changer complètement ces Y_i (sinon il suffit de prendre Y'_i $\varphi_{Y_{I^f}}$-base de $\varphi\,(Y_{I^f} \cup Y_i)$, incluse dans Y_i). D'où la seconde égalité et $\Leftarrow$.

b) - ou bien : $\exists\, i \in I^\omega$, $\dim \varphi\,(X_{I^f}) \geq \dim \varphi\,(X_i)$.

<u>dans ce cas $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_\omega$ l'inclusion étant stricte en général.</u>

Nous verrons sur un exemple (au 5.5. quand I est dénombrable) comment on peut mener cette étude. Signalons qu'il est bon en général de se ramener à a) en restreignant les X_i pour $i \in I$, (ou $i \in I^\omega$). De toute façon on peut toujours raisonner dans (E,ψ) où $\psi = \varphi_{X_{I^f}}$ et y résoudre $(X_i)_{i \in I^\omega}$, en passant aux ψ-bases (qui sont φ-libres), et en accolant $(Y_i)_{i \in I^\omega} \in \mathcal{S}_f$ on a alors une solution pour I. D'où

$$\boxed{\mathcal{S} \Leftarrow \mathcal{S}_1 \text{ (pour } \varphi) + \mathcal{S}_\omega \text{ (pour } \varphi_{X_{I^f}})}$$

5.3.3.- Réduction de (X_i)

La relation : $i \prec j$ si et seulement si $\varphi(X_i) \subset \varphi(X_j)$ définit un <u>préordre</u> sur I, et si ρ est la relation d'équivalence canoniquement associée, soit $L = I/\rho$, $(X_\ell)_{\ell \in L}$ où $X_\ell = \varphi(X_i)$ $\forall i \in \ell$:

<u>"(X_i) est de type (a_i)" $\Longleftrightarrow$ "(X_ℓ) est de type (a_ℓ)"</u>

où $a_\ell = \sum_{i \in \ell} a_i$, et on passe facilement de $\mathcal{S}'$ (pour (X_ℓ)) à $\mathcal{S}$ (pour (X_i)) et inversement (on "transporte" les partitions de cardinaux finis ou infinis représentées par les sommes cardinales).

On peut donc toujours se ramener à l'étude des familles (X_i) telles que $\varphi(X_i) \neq \varphi(X_j)$ pour tout $i \neq j$. De telles familles sont dites <u>réduites</u> (c'est la généralisation de la notion de réduction vue quand I est fini en 4.4).

5.4.- Familles $\mathcal{A}$ de cardinaux infinis

5.4.1.- La topologie sur I et le théorème fondamental

Soit $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux infinis.

L'application qui à toute partie J de I associe :

$\overline{J} = \{i \mid i \in I$ et $\exists K \subset J$ tel que $\operatorname{Sup} a_j [j \in J] = a_i\}$

est une fermeture topologique, qui définit la topologie $\mathcal{C}_I = \mathcal{C}_I^{\mathcal{A}}$ sur I.

$\pi : i \longrightarrow a_i$ est une application de I dans l'ensemble E_a des cardinaux inférieurs ou égaux à $a = a^{\mathcal{A}} = \operatorname{Sup} a_i \; [i \in I]$, qui se restreint au but en une surjection π_o de I sur L.

Par $\mathcal{L} \doteq (\ell)_{\ell \in L}$, L est muni comme ci-dessus d'une topologie $\mathcal{C}_L^{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_L$, et $\mathcal{C}_I$ est <u>l'image réciproque par π_o</u> de $\mathcal{C}_L$ (au sens de [C, II, 1], § 2, 3, exemple I, p. 30).

De même pour tout cardinal a, E_a est muni de la topologie $\mathcal{C}_a$, et, si $L \subset E_a$, $\mathcal{C}_L$ est <u>induite par $\mathcal{C}_a$</u> sur L, et $\mathcal{C}_I$ est l'image réciproque par π de $\mathcal{C}_a$:

$$\forall J \subset I, \qquad \overline{J} = \pi^{-1}\overline{(\pi(J))} = \pi_o^{-1}\overline{(\pi_o(J))}$$

<u>Etude sommaire de la topologie $\mathcal{C}_a$</u>

Une partie X de E_a est fermée si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes :

1) $\quad \forall Y \subset X, \quad \operatorname{Sup} Y \in X$

2) $\quad \forall b \in E_a, \quad \operatorname{Sup} \ell [\ell \in X$ et $\ell < b] \in X$

Or, pour tout $\ell \in E_a$, $[\mathcal{U}_o, \ell]$ et $[\ell, a]$ sont fermés ; donc :

$\forall \ell \in E_a$, $\forall m \in E_a$, $\ell < m$, $]\ell, m[$ est ouvert

et $[\ell, m]$ est fermé.

et

$\forall \ell \in E_a - a$, $([\mathcal{U}_o, \ell],]\ell, a])$ est une partition de E_a en deux ensembles à la fois ouverts et fermés, donc $\mathcal{E}_a$ est totalement discontinue. En particulier $\{\ell\}$ est fermé, mais n'est ouvert que si ℓ a un prédécesseur.

$\mathcal{E}_a$ est compacte : on vérifie qu'elle est séparée. Soit en outre $(X_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E_a telle que :

$\forall J \in \mathcal{F}(I)$, $\bigcap X_i\ [i \in J] \neq \emptyset$

Alors $a^J = \mathrm{Max}\ (\bigcap X_i [i \in J])$ existe pour tout $J \in \mathcal{F}(I)$

et $a = \mathrm{Min}\ a^J\ [J \in \mathcal{F}(I)]$ est atteint pour un $J \in \mathcal{F}(I)$

au moins : $a = a^J$. Comme

$\forall K \in \mathcal{F}(I)$, $K \supset J$, $a \leqslant a^K \leqslant a^J$, $a^K = a^J = a$

donc $a \in \bigcap X_i [i \in I]$ et l'axiome (C'') de [C, II, 1], § 9, 1.

Définition.- Soit $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux et L^ω l'ensemble des cardinaux infinis. On appelle caractère fermé de $\mathcal{A}$ (resp. de L^ω) le plus petit ordinal α tel que :

pour tout $M \subset L^\omega$ tel que $M \cup \{\mathrm{Sup}\ M\}$ fermé, on a : $\mathrm{Ord}(M) < \alpha$

et l'on écrit $CF(\mathcal{A})$ (resp. $CF(L^\omega)$) le caractère fermé de $\mathcal{A}$ (resp. L^ω).

On appelle caractère ouvert de $\mathcal{A}$ (resp. de L^ω), l'ordinal :

$$C\ O\ (\mathcal{A}) = C\ O\ (L^\omega) = \mathrm{Ord}\ (O(L^\omega))$$

où (*) : $O(L^\omega) = \{\ell \mid \ell \in L,\ \mathcal{U}_o < \bar{\ell} < \ell$ et $\mathrm{Sup}\ m\ [m \in L$ et $m < \ell] = \ell\}$

(*) Si $a = \mathcal{U}_\alpha$, l'on désigne par $\omega_{\bar{\alpha}}$ le caractère final de ω_α et $\bar{a} = \mathcal{U}_{\bar{\alpha}}$.

Soit $\lambda = \text{Sup}\ (\text{Ord}\ M)\ \left[M \subset L^{\omega} \text{ et } M \cup \{\text{Sup}\ M\} \text{ fermé}\right\}$.
Si la borne supérieure est atteinte, $CF(\mathcal{A}) = \lambda + 1$; sinon, $CF(\mathcal{A}) = \lambda$.

Si L^{ω} est fini, $CF(\mathcal{A}) = \text{Ord}\ (L^{\omega})$

Si L^{ω} est infini, $Cf(\mathcal{A}) \geqslant \omega_0$, mais $CF(\mathcal{A})$ peut être un ordinal infini absolument quelconque $\leqslant \text{Ord}(L^{\omega}) + 1$.

<u>Le but de ce paragraphe est de démontrer le</u> :

<u>Théorème 2.-</u> Si $\mathcal{A} = (a_i)$ est une famille <u>lisse</u> (resp. si l'on admet l'<u>hypothèse du continu généralisé</u> et si $\mathcal{A}$ est une famille <u>faiblement lisse</u>), et si $\mathcal{A}$ vérifie la propriété :

(CF) $\qquad CF(\mathcal{A}) < \omega_1$ et $CO(\mathcal{A}) < \omega_2$.

Alors toute famille de parties d'un φ-espace E, de type $\mathcal{A}$, et telle que $r(X_i)$ soit fini avec a_i, contient une famille φ-disjointe de type $\mathcal{A}$.

Ce théorème résulte de 5.3 et du :

<u>Corollaire.-</u> Toute famille (X_i) de <u>parties de rang infini</u> d'un φ-espace E telle que $(r(X_i))$ soit lisse (resp. telle que $(r(X_i))$ soit faiblement lisse et si on admet l'hypothèse du continu généralisé) et telle que en outre $(r(X_i))$ vérifie la propriété (CF), contient une famille disjointe (Y_i) telle que : $\forall i \in I$, $r(X_i) = r(Y_i)$

Toute famille dénombrable de cardinaux infinis est faiblement lisse et vérifie la propriété (CF). En outre, on verra au lemme 4 que l'hypothèse du continu généralisé n'est plus nécessaire quand pour le cardinal dénombrable, et pour les a_i non dénombrables, la famille est lisse. D'où le résultat <u>indépendant de l'hypothèse du continu généralisé</u> :

<u>Théorème 3.-</u> Toute famille dénombrable (X_i) telle que $r(X_i)$ soit infini pour tout i contient une famille disjointe (Y_i) telle que :

$$\forall i \in I \qquad r(Y_i) = r(X_i)$$

Pour démontrer le corollaire et le théorème 3, l'on va d'abord établir quelques lemmes de théorie des ordinaux et des cardinaux, puis l'on utilisera une récurrence transfinie sur L pour construire (Y_i).

5.4.2.- Applications et familles fortes

Soit $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux infinis.
Une famille $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ est dite $\mathcal{A}$-forte si elle vérifie :

(FC_1) $\quad \forall i \in I, \quad \aleph_0 \leq b_i < a_i$ ou $a_i = \aleph_0 = b_i$

et

(FC_2) $\quad \forall \ell \in L_{\mathcal{A}}, \quad \forall J \subset \cup I_m\ [m < \ell]$ tel que $\operatorname{Sup} a_i\ [i \in J] = \ell$

on a $\quad \operatorname{Sup} b_i\ [i \in J] = \ell$

et

(FC_3) Si $L_{\mathcal{A}}$ n'a pas de plus grand élément, $\forall J \subset I$ tel que $\{a_i | i \in J\}$ soit cofinal à $L_{\mathcal{A}}$, $\{b_i | i \in J\}$ est cofinal à $L_{\mathcal{A}}$

La famille $\mathcal{A}$ est dite <u>forte</u> s'il existe au moins une famille $\mathcal{B}$ qui est $\mathcal{A}$-forte.

Un <u>ordinal</u> α est dit <u>fort</u> si la famille $(\aleph_\nu)_{\nu \in \alpha}$ est forte, i. e. s'il existe une application f de α dans lui-même ayant les propriétés :

(FO_1) $\quad f(o) = o$ et pour tout $\xi \in \alpha - \{0\}$, $f(\xi) < \xi$

et

(FO_2) $\quad \forall \xi \in \alpha + 1, \ \forall O \subset \xi$ cofinal à ξ, $f(O)$ est cofinal à ξ.

Une telle application f est dite <u>α-forte</u>. Cette définition se transporte à un ensemble <u>E bien ordonné</u>, d'où E fort et f <u>E-forte</u>.

<u>Lemme 1.-</u> Un ordinal α est fort si et seulement si $\alpha < \omega_1$, i.e. si et seulement si α est fini ou dénombrable

<u>démonstration</u>

a) <u>ω_1 n'est pas un ordinal fort</u>.

En effet s'il existe une application f ω_1-forte de ω_1 dans lui-même , soit $\alpha_1 = 1$,

$$\alpha_2 = \operatorname{Min} \xi \quad [\forall \eta \in \omega_1 - \xi \ , \ f(\eta) > \alpha_1] \qquad (*)$$

...

$$\alpha_n = \operatorname{Min} \xi \quad [\forall \eta \in \omega_1 - \xi \ , \ f(\eta) > \alpha_{n-1}]$$

...

Daprès (F 0_1) et (F 0_2), α_n existe pour tout $n \in \omega$ et :
$\alpha_1 < f(\alpha_2) < \alpha_2 < f(\alpha_3) < \ldots$
donc $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ est strictement croissante, et :

$$\forall \alpha \in \omega_1 \ , \ \text{si} \ f(\alpha) \leq \alpha_n \ , \quad \alpha < \alpha_{n+1}$$

On en déduit par récurrence transfinie sur α que tout $\alpha \in \omega_1$ est inférieur à un α_n au moins. $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ serait donc cofinal à ω_1 , d'où la contradiction (ces raisonnements sont identiques à ceux de [C, I, 3] , §6, exercice 23).

b) Si $(\alpha_\nu)_{\nu \in \alpha}$ <u>est une famille d'ordinaux forts > 0, indiciée par un ordinal fort, alors</u> $\sum_{\nu \in \alpha} \alpha_\nu$ <u>est un ordinal fort</u>.

(*) $\omega_1 - \xi$ est une difference ensembliste ici

En effet soit $\beta = \sum_{\nu \in \alpha} \alpha_\nu = \beta_\alpha$ et $\forall \nu \in \alpha,\ \beta_\nu = \sum_{\lambda \in \nu} \alpha_\lambda$

Alors, $\forall \nu \in \alpha$, $\mathrm{Ord}\,([\,\beta_\nu\,,\,\beta_{\nu+1}[\,) = \alpha_\nu$

et $([\,\beta_\nu\,,\,\beta_{\nu+1}[\,)_{\nu \in \alpha}$ est une partition de β

Donc : $\forall \lambda \in \beta$, $\exists\, \nu \in \alpha$, ν unique tel que $\lambda \in [\,\beta_\nu\,,\,\beta_{\nu+1}[$
on écrit $\nu(\lambda)$ cet ordinal.

Soit f^α une application α-forte et pour tout $\nu \in \alpha$, soit f_ν une application $[\,\beta_\nu\,,\,\beta_{\nu+1}[$ -forte. Alors l'application f de β dans lui-même définie par :

$\forall \lambda \in \beta$, ou $\lambda > \beta_{\nu(\lambda)}$ et $f(\lambda) = f_{\nu(\lambda)}(\lambda)$

ou $\lambda = \beta_{\nu(\lambda)} \neq 0$ et $f(\lambda) = \beta_{f^\alpha(\nu(\lambda))}$

est une application β-forte.

$(F\,O_1)$ est trivialement vérifié. Démontrons $(F\,O_2)$:

$\forall \lambda \in \beta + 1$, $\forall O \subset \lambda$, O cofinal à λ

<u>ou bien</u> $\lambda > \beta_{\nu(\lambda)}$ et $O' = O \cap (\,]\,\beta_{\nu(\lambda)}\,,\,\lambda\,[\,)$ est cofinal à λ, donc $f(O') = f_{\nu(\lambda)}(O')$ est cofinal à λ , et à fortiori $f(O)$

<u>ou bien</u> $\lambda = \beta_{\nu(\lambda)}$ où $\nu(\lambda) \in \alpha + 1$ et $\nu(\lambda)$ a un prédecesseur.
Alors soit $U_\lambda = \,]\,\beta_{\nu(\lambda)-1}\,,\,\beta_{\nu(\lambda)}\,[$. $O'' = O \cap U_\lambda$ est cofinal à λ , i.e. à U_λ et $f(O'') = f_{\nu(\lambda)-1}(O'')$ est cofinale à U_λ , i.e. à λ , donc a fortiori $f(O)$

<u>ou bien</u> $\lambda = \beta_{\nu(\lambda)}$ où $\nu(\lambda) \in \alpha + 1$ et $\nu(\lambda)$ n'a pas de prédecesseur.

Alors soit $O_1 = \{\nu / \nu \in \nu(\lambda)$ et $\beta_\nu \in O\}$

et $O_2 = \{\nu / \nu \in \nu(\lambda)$ et $O \cap (]\beta_\nu , \beta_{\nu+1}) \neq \emptyset\}$.

O_1 ou O_2 est cofinal à $\nu(\lambda)$

Si O_1 est cofinal à $\nu(\lambda)$:

$$\mathrm{Sup}\ f(O) \geq \mathrm{Sup}\ f(\beta_\nu)\ [\nu \in O_1] \geq \mathrm{Sup}\ \beta_{f^\alpha(\nu)}\ [\nu \in O_1] \geq \beta_{\nu(\lambda)}$$

Si O_2 est cofinal à $\nu(\lambda)$:

$\forall \nu \in O_2$, $\exists\ \gamma_\nu \in O \cap (]\beta_\nu , \beta_{\nu+1}[)$ et

$$\mathrm{Sup}\ f(O) \geq \mathrm{Sup}\ f(\gamma_\nu)\ [\nu \in O_2] \geq \mathrm{Sup}\ f(\beta_\nu)\ [\nu \in O_2] \geq \beta_{\nu(\lambda)}$$

et comme $f(O) \subset \beta_{\nu(\lambda)} = \lambda$, $f(O)$ est cofinal à λ .

c) <u>Tout ordinal dénombrable est fort</u>

Tout ordinal fini est trivialement fort. ω est fort car

$$\begin{cases} f(n) = n-1 & \text{si } n > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

est ω -forte.

Il est alors aisé de démontrer par récurrence transfinie dénombrable que tout ordinal dénombrable α est fort.

Supposons en effet que tout $\beta < \alpha$ soit fort et α dénombrable.

Si α a un prédécesseur $\alpha-1$, $\alpha = (\alpha-1) + 1$

Si α n'a pas de prédécesseur, le caractère final de α est ω , et l'on peut construire une famille cofinale à α ainsi :

soit $n \longrightarrow \xi_n$ une bijection de ω sur α et soit :

$$\eta_1 = \xi_1$$

....

$$\eta_n = \text{Min } (\xi_k) \ [\xi_k > \eta_{n-1}] = \xi_{f(n)}$$

....

$(\eta_n)_{n\in\omega}$ est strictement croissante et cofinale à α

(voir {0) , Livre I, chap. II , 39, page 83). D'où :

$$\alpha = \sum_{n\in\omega} \text{Ord } (\eta_{n+1} - \eta_n) \qquad \text{en posant } \eta_o = 0$$

Donc α est toujours somme d'ordinaux forts >0, indiciée par un ordinal fort, et d'après b) α est fort.

d) <u>Les ordinaux</u> $\alpha \geqslant \omega_1$ <u>ne sont pas forts</u>

En effet tout ordinal inférieur à un ordinal fort est lui-même fort, d'où le résultat en utilisant a).

e) <u>Construction d'applications fortes</u>.

exemple d'application ω^ω-forte :

$$f\ (p\,\omega + q) = \begin{cases} (p-1)\,\omega & \text{si } q = 0 \\ p\,\omega + q \dot{-} 1 & \text{si } q \geq 1 \end{cases} \qquad (p \in \omega \text{ et } q \in \omega)$$

$f\ (\omega^2) = \omega$, $f(\omega^2 + \alpha) = \omega^2 + f(\alpha)$ si $0 < \alpha < \omega^2$

....

$f(\omega^n) = \omega^{n-1}$, $f(\omega^n + \alpha) = \omega^n + f(\alpha)$ si $0 < \alpha < \omega^n$

....

$f\ (\omega^\omega) = \omega$ ...

D'une manière générale soit α un ordinal et

$$\alpha_\omega = \{ \xi / \xi \text{ ordinal et } \omega^\xi < \alpha \}$$

Si g est une application α_ω-forte, on construit une application f α-forte ainsi :

$$\forall \lambda \in \alpha \ , \text{ soit } \lambda = n_1 \omega^{\xi_1} + \dots + n_p \omega^{\xi_p}$$

la décomposition polynomiale de λ (voir [C, I, 3] , §6, exercice 12, page 100) où n_i sont des entiers > 0, p est un entier > 0 et $\xi_1, \dots, \xi_p$ sont des ordinaux ≥ 0 strictement décroissants. Alors :

$$f(\lambda) = n_1 \omega^{\xi_1} + \dots + n_{p-1} \omega^{\xi_{p-1}} + (n_p - 1) \omega^{\xi_p} + \omega^{g(\xi_p)}$$

C Q F D

lemme 2.- Soit $\mathcal{A}$ une famille de cardinaux infinis.

Si $C\ F(\mathcal{A}) > \omega_1$, $\mathcal{A}$ n'est pas forte

Si $C\ F(\mathcal{A}) < \omega_1$ et $C\ O(\mathcal{A}) < \omega_2$, $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ est forte, et soit

$$L = \{ a_i \ / \ i \in I \} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} = (\ell)_{\ell \in L} \ .$$ Alors il existe

$\mathcal{C} = (C_\ell)_{\ell \in L}$ $\mathcal{L}$-forte telle que pour tout $\ell \in L$,

$$\text{Card} (\{ m \ / \ m \in L \ , \ m > \ell \text{ et } C_m < \ell \}) < \text{Min} (\aleph_2 , \ell)$$

Démonstration

a) $\mathcal{A} = (a_i)$ est forte si et seulement si $\mathcal{L} = (\ell)_{\ell \in L}$ est forte

S'il existe $\mathcal{B} = (b_i)$ $\mathcal{A}$-forte, soit pour $\ell \in L$ $i(\ell) \in I_\ell$. Alors $\mathcal{C} = (b_{i(\ell)})_{\ell \in L}$ est $\mathcal{L}$-forte.

Inversement si $\mathcal{L}$ est forte, il existe $\mathcal{C} = (C_\ell)$ $\mathcal{L}$-forte ; donc si l'on pose pour tout $i \in I$, $\ell(i)$ tel que $i \in I_{\ell(i)}$,

$$\mathcal{B} = (C_{\ell(i)})_{i \in I} \quad \text{est } \mathcal{A}\text{-forte.}$$

b) Si $\mathcal{L}$ est forte, $CF(\mathcal{A}) \leq \omega_1$

En effet si $\mathcal{L}$ est forte, il existe $\mathcal{B} = (b_\ell)_{\ell \in L}$ $\mathcal{L}$-forte et si $CF(\mathcal{A}) > \omega_1$, il existe $M \subset L$ tel que $M \cup \{\text{Sup } M\}$ soit fermé et $\text{Ord } M = \omega_1$ (donc M non fermé).

Soit $\nu \longrightarrow m_\nu$ l'isomorphisme canonique de ω_1 sur M

$$f : \nu \longrightarrow f(\nu) = \text{Sup } \lambda \quad [\lambda \in \omega_1 \quad \text{et} \quad m_\lambda \leq b_{m_\nu}]$$

où l'on convient $\text{Sup } \lambda \; [\lambda \in \emptyset] = 0$, est une application ω_1-forte

En effet $f(0) = 0$ et pour tout $\nu \in \omega_1 - \{0\}$,

$$m_{f(\nu)} \leq b_{m_\nu} < m_\nu \quad , \quad \text{donc} \quad f(\nu) < \nu$$

En outre :

$$\forall \xi \in \omega_1 + 1 \quad , \quad \forall 0 \subset \xi \quad , \quad 0 \text{ cofinal à } \xi \quad ,$$

On a $\quad \text{Sup } m_\lambda \; [\lambda \in 0] = m_\xi \quad (m_{\omega_1} = \text{Sup } M)$

donc $\quad \text{Sup } b_{m_\lambda} \; [\lambda \in 0] = m_\xi$

et $\quad \text{Sup } f(0) = \text{Sup } \lambda \; [\lambda \in \omega_1 \text{ et } \exists \nu \in 0 \, , \, m_\lambda \leq b_{m_\nu}] = \xi$

D'où la contradiction car ω_1 n'est pas un ordinal fort.

c) Si $CF(\mathcal{L}) < \omega_1$ et $CO(\mathcal{L}) < \omega_2$, $\mathcal{L}$ est forte.

Soient $S(L)$ l'ensemble des $a \in L$ tels que :

$a = \text{Min } L$ ou $\text{Sup } \ell \quad [\ell \in L \quad \text{et} \quad \ell < a] \quad < a$ (1) ,

$R(L)$ l'ensemble des $a \in L$, a sans prédecesseur , $\bar{a} > \mathcal{U}_0$ (*) et tel que :

$$\text{Sup } \ell \quad [\ell \in L - S(L) \quad \text{et} \quad \ell < a] \quad < \quad a \qquad (2)$$

et $\quad I(L) = S(L) \cup R(L)$

L'on peut alors définir $L_0 = I(L)$, $L_1 = I(L - L_0)$, ... ,

$$L_\nu = I\,(L - \bigcup_{\lambda \in \nu} L_\lambda) \quad ,\ldots$$

et l'on note γ le plus petit ordinal tel que $L_\gamma = \emptyset$

$(L_\nu)_{\nu \in \gamma}$ est alors une partition de L.

Soit $b = \text{Sup } L$. Dans l'ensemble E_b des cardinaux infinis $\leq b$, un cardinal $a \in L$ est de trois types possibles :

<u>type I</u> : $a = \mathcal{U}_0$ ou a a un prédécesseur. Alors $a \in S(L)$ et $a \in L_0$.

<u>type II</u> : a n'a pas de prédécesseur et $\bar{a} = \mathcal{U}_0$.

Si a n'a pas de prédécesseur <u>dans L</u> , ou plus généralement si l'on a (1), $a \in L_0$; sinon $a \in L_v$ pour $v > 0$.

Soit M une partie fermée de L telle que $\text{Ord } M = \omega^\nu + 1$, et $\lambda \longrightarrow m_\lambda$ l'isomorphisme canonique de $\omega^\nu + 1$ sur M. Pour tout $\lambda \in \omega^\nu + 1$, λ sans prédécesseur, m_λ est de type II. En outre on a $\text{Sup } M = \text{Max} M \in L^\nu$, $\quad C\,F(\mathcal{L}) > \omega^\nu$, d'où , posant $\gamma - = \text{Sup } \lambda \quad [\lambda \in \gamma]$, on a :

$$\omega^{\gamma-} \leq C\,F\,(\mathcal{L}) \leq \omega^{(\gamma-)+1}$$

et en particulier $\qquad \gamma < \omega_1$

Soit $a \in L$, de type I ou de type II. Il existe $\nu \in \gamma$ tel que $a \in L_\nu$ et, dans $L^\nu = L - \bigcup_{\lambda \in \nu} L_\lambda$, on a :

$$a- = \operatorname{Sup} \ell \ [\ell \in L_\nu \text{ et } \ell < a] \leq \operatorname{Sup} \ell \ [\ell \in L^\nu \text{ et } \ell < a] < a$$

Donc $a- < a$ et il n'existe pas de cardinal $\ell \in L_\nu$ tel que : $a- < \ell < a$.
En particulier $a-$ est le prédécesseur de a dans L_ν, s'il existe

<u>type III</u> a n'a pas de prédécesseur et $\overline{a} > \mathcal{U}_0$

<u>type III a</u> : a n'est pas limite dans L, i.e. a a un prédécesseur a-
sinon $a \in L_\nu$ et il résulte de (2) dans L^ν que , soit :

$$a- = \operatorname{Sup} \ell \ [\ell \in L^\nu - S(L^\nu) \text{ et } \ell < a]$$

on a : $a- < a$

et $N = \,]a-, a[\, \cap L^\nu = \,]a-, a[\, \cap L_\nu$

vérifie $C\,F(N) \leq \omega_0$, ou mieux $\overline{N} \cap L = N$. L'on exprime encore ceci en disant que N est discret pour la topologie $\mathcal{C}_0$ définie sur L par la fermeture :

$$M \longrightarrow \overline{M} = \{m \,/\, m \in L \text{ et } \exists\, N \subset M, \operatorname{Card} N \leq \mathcal{U}_0 \text{ et } \operatorname{Sup} N = m\}$$

Alors on définit :

$$a+ = \operatorname{Sup} \ell \ [\ell \in R(L^\nu) \text{ et } [a-, \ell] \cap L^\nu \text{ est } \mathcal{C}_0 \text{ discrète}]$$

On a $a- < a \leq a+$.

Il résulte de (1) dans L^ν que N est cofinal à a .

<u>type III b</u> : Si $a+ \in R(L^\nu)$, $a- < a \leq a+$ et :

$$N_a = \,]a-, a+] \cap L^\nu = \,]a-, a+] \cap L_\nu \text{ est } \mathcal{C}_0\text{-discret .}$$

type III c : Si $a+\notin R(L^{\nu})$, $a- < a < a+$ et :

$N_a = \ ]a-, a+[\ \cap L^{\nu} = \ ]a-, a+[\ \cap L_{\nu}$ est $\mathcal{C}_0$-discret,

Dans les deux cas pour tout $\lambda \in \Upsilon$, $\lambda > \nu$, on a $L_{\lambda} \cap N_a = \emptyset$.

L'on désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des N_a où $a \in \bigcup_{\nu\in\Upsilon} R(L_{\nu})$.

c1) Toute famille $\mathcal{L}_0 = (\ell)_{\ell\in N}$ où N est $\mathcal{C}_0$-discret et Card $N < \omega_2$ est forte.

Ceci se démontre aisément par récurrence transfinie sur $\alpha = \text{Ord } N$, en considérant une famille $(\alpha_{\nu})_{\nu\in\omega_{\beta}}$ strictement croissante et cofinale à α d'ordinaux de α (c'est trivial si α a un prédécesseur), et en utilisant un procédé analogue à celui de la démonstration du lemme 1, b) , sachant que, $\nu \longrightarrow \ell_{\nu}$ étant l'isomorphisme de α sur N, $(\ell_{\alpha_{\nu}})_{\nu\in\omega_{\beta}}$ est forte. En effet, c'est trivial si $\omega_{\beta} = \omega_0$. Si $\omega_{\beta} = \omega_1$, comme on peut toujours choisir les α_{ν} de caractère final dénombrable au plus, il suffit de prendre :

$$\forall \nu \in \omega_1 \quad , \quad m_{\nu} = \text{Sup } \ell_{\alpha_{\lambda}} \quad [\lambda \in \nu]$$

N étant $\mathcal{C}_0$-discrète, $(m_{\nu})_{\nu\in\omega_{\beta}}$ est $(\ell_{\alpha_{\nu}})_{\nu\in\omega_{\beta}}$ -forte

Remarque : Un raisonnement identique à celui du lemme 1, démonstration, a) permet de démontrer qu'une famille $\mathcal{L}_0 = (\ell)_{\ell\in N}$ où N est $\mathcal{C}_0$-discret, mais $\mathcal{C}_1$-fermé, où $\mathcal{C}_1$ est la topologie définie par la fermeture :

$$X \longrightarrow \overline{X} = \{x / x \leq \text{Sup } X \text{ et } \exists\, Y \subset X \ , \ \text{Sup } Y = x \text{ et } cf(X) = \omega_1\} \cup X$$

ou cf (X) est le caractère final de X.

(Remplacer ω_1 par ω_2 et ω_0 par ω_1 dans les raisonnements, la suite $(\alpha_n)_{n\in\omega_1}$ serait alors cofinale à ω_2).

c_2] Construction d'une famille $\mathcal{L}$-forte

Soit f une application γ-forte et pour tout $N \in \mathcal{N}$, une famille $(c_\ell(N))_{\ell \in N}$ $(\ell)_{\ell \in N}$-forte

Soit alors $\ell \in L$: $\ell \in L_\lambda$

Si ℓ est de type I, $c_\ell = \ell-$

Si ℓ est de type II, soit $N_\ell =]\ell-, \ell] \cap L$. L'on peut faire pour N la partition $(N_{\ell,\nu})_{\nu \in \lambda+1}$, comme pour L ; l'on a $\mathrm{Min}\ N_{\ell,\lambda} = \ell$ et l'on pose :

$$c_\ell = \mathrm{Min}\quad N_{\ell,f(\lambda)}$$

Si ℓ est de type III a, l'on pose $c_\ell = \ell-$

Si ℓ est de type III b ou III c, l'on pose $c_\ell = c_\ell(N)$

où $N \in \mathcal{N}$ est tel que $\ell \in N$, quand ℓ n'est pas borne supérieure dans N_a .

(F c_1) est trivialement vérifié

Vérifions (F c_2) : $\forall\, \ell \in L$, $\forall O \subset\ ]\leftarrow, \ell[\ \cap L$ tel que $\mathrm{Sup}\ O = \ell$, a-t-on $\mathrm{Sup}\ c_\ell\ [\ell \in O] = \ell$? ℓ ne peut être que de type II ou III.

$\ell \in L_\nu$ et $O' = O \cap\ ]\ell-, \ell[$ est cofinal à ℓ : $O' \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \nu} L_\lambda$

Si ℓ est de type II :

ou bien il existe $\lambda \in \nu$ tel que $O \cap L_\lambda$ soit cofinal à ℓ et deux cas :

1°) il existe une famille strictement croissante $(\ell_n)_{n \in \omega}$ de cardinaux de type I, II ou III a dans $O \cap L_\lambda$ telle que $\mathrm{Sup}\ \ell_n = \ell$.

Alors $\ell_n \leq c_{\ell_{n+1}}$ pour tout n, et $\mathrm{Sup}\ c_{\ell_n} = \ell$

2°) il existe une famille strictement croissante $(\ell_n)_{n \in \omega}$ de cardinaux de type III b ou III c telle que $\mathrm{Sup}\ \ell_n = \ell$.

A partir d'un certain rang tous les ℓ_n sont de type III c et situés dans un $N \in \mathcal{N}$,
$\ell = \ell_n +$, donc Sup c_{ℓ_n} (N) $= \ell$

ou bien pour tout $\lambda \in \nu$, $0 \cap L_\lambda$ n'est pas cofinal à ℓ .

Alors il existe une suite strictement croissante $(\nu_n)_{n \in \omega}$ telle que Sup $\nu_n = \nu$,
et une suite strictement croissante $(\ell_n)_{n \in \omega}$ telle que $\ell_n \in L_{\nu_n}$ pour tout n
et Sup $\ell_n = \ell$.

Comme $\ell_n < \ell_{n+1}$ et $\nu_n < \nu_{n+1}$, on a $\ell_{\overline{n+1}} \leq \ell_{\overline{n}}$,

et comme la suite $(\ell_{\overline{n}})_{n \in \omega}$ ne peut décroître indéfiniment, à partir d'un rang p, on a $\ell_{\overline{n}} = \ell_{\overline{p}} = \ell -$ pour tout $n \geqslant p$, donc pour tout $n \in \omega$,

$$\ell_n = \text{Min } (N_{\ell, \nu_n})$$

et f étant γ-forte, on a :

$$\text{Sup } \ell_n = \ell \Rightarrow \text{Sup } c_{\ell_n} = \ell$$

<u>Si ℓ est de type III</u> :

Alors $\ell \in L_\nu$ et, comme Card $\nu \leq \aleph_0$, il existe $\lambda \in \nu$ tel que Sup $0 \cap L_\lambda = \ell$, et en outre $0' = 0 \cap L_\lambda \cap \,]\ell - , \ell[$
Sup $0' = \ell$

Or, pour tout $n \in 0'$, $m_n = \text{Min}\{m/m \in N_n \text{ et } m > n\}$ est tel que

$$c_n\ (N_\ell) < n < m_n \qquad \text{et} \qquad c_n\ (N_\ell) < c_n < m_n$$

donc $\ell = \text{Sup } m_n\ [n \in 0'] = \text{Sup } n\ [n \in 0'] = \text{Sup } c_n\ (N_\ell)\ [n \in 0'] = \text{Sup } c_n\ [n \in 0']$

C Q F D

c_3] <u>Pour tout $\ell \in L$, $c_\ell = \{m/m \in L,\ m > \ell \text{ et } c_m < \ell\}$ a pour cardinal $\aleph_1$ au plus</u>

En effet soit $\ell \in L_\nu$. Si $\lambda \in \nu$, $c_\ell \cap L_\lambda = \emptyset$.

Si $\lambda \geq \nu$:

il existe au plus un $m > \ell$ de type I, II ou III a dans L_λ tel que $m^- < \ell$, donc tel que $f(\ell) < \ell$ éventuellement.

il existe au plus un $N \in \mathcal{N}$, $N \subset L_\lambda$ tel que $N =]a,b[\cap L_\lambda$ ou $N =]a,b] \cap L_\lambda$ et $a \leq \ell \leq b$.

Donc Card $(c_\ell \cap L_\lambda) \leq \mathcal{U}_1$

D'où Card $c_\ell \leq \mathcal{U}_1$ pour tout ℓ

En outre on peut toujours choisir $c_\ell \geq \mathcal{U}_1$ pour tout $\ell > \mathcal{U}_1$, d'où le résultat du lemme 2.

Conjecture : Il est fortement probable que le lemme 2 puisse être etendu au cas où $C\,F\,(\mathcal{A}) = \omega_1$.

5.4.3. - Autres lemmes préliminaires

Soit E un ensemble de cardinal infini a et $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$ (E) vérifiant :

(S E P) $\forall X \in \mathcal{H}, \ \forall Y \in \mathcal{H}, \ X \neq Y, \ \text{Card } X = \text{Card } Y = a$ et $\text{Card }(X \cap Y) < a$.

Le cardinal :

$$a^s = \text{Sup } (\text{Card } \mathcal{H}) \quad [\mathcal{H} \in \mathcal{E}]$$

est appellé le <u>degré de séparabilité de a</u>.

Il est aisé de vérifier que cette borne supérieure est atteinte quand a^s n'est pas un cardinal inaccessible, et le fait que $a^r = a$ entraîne $a^s \geq a$.

<u>lemme 3.-</u> Pour tout cardinal infini a, $a^s \geq a$. En outre, pour tout cardinal a tel que :

$$\text{Sup } 2^b \ [b < a] \leq a \qquad , \text{ on a } \qquad a^s = 2^a > a.$$

C'est en particulier toujours le cas si l'on admet l'hypothèse du continu généralisé, et alors la borne supérieure est toujours atteinte.

<u>Démonstration</u> : Soit $a = \aleph_\alpha$ un cardinal infini tel que

$$\text{Sup } 2^b \ [b < a] \leq a$$

Alors $E = \bigcup 2^\lambda \ [\lambda \in \omega_\alpha]$ est un ensemble de cardinal :

$$\text{Card } E = \sum_{\lambda \in \omega_\alpha} 2^{\text{card}(\lambda)} = \sum_{b < a} 2^b = a$$

Considérons alors pour toute $f \in 2^{\omega_\alpha}$, l'ensemble H_f des restrictions de f aux $\lambda \in \omega_\alpha$. Alors $\mathcal{H} = \{H_f \ / \ f \in 2^{\omega_\alpha}\}$ vérifie la propriété (S E P) pour E, donc

$$a^s \geq 2^a$$

Comme on a trivialement $a^s \leq 2^a$: $\qquad a^s = 2^a$

Si on admet l'hypothèse du continu généralisé, pour tout cardinal infini a, Sup 2^b $[b < a]$ = a , donc $a^s = 2^a = a+$ successeur de a.

__lemme 4.-__ Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un φ-espace E telle que, a étant un cardinal infini on a :

$$\forall i \in I \quad , \quad r(X_i) \geq a \quad \text{et} \quad \text{Card } I < a^s$$

Alors il existe une famille $(Y_i)_{i \in I}$ disjointe, incluse dans (X_i) telle que $r(Y_i) = a$ pour tout i.

Cette propriété est encore vraie si Card I = a quand a n'a pas de prédécesseur

__Démonstration__

a) __Si a est régulier et Card I < a^s , toute famille__ $(X_i)_{i \in I}$ __telle que__ $r(X_i) \geq a$ __pour tout i, contient une famille φ-disjointe de type a__.

Soit $a = \mathcal{U}_\alpha$ et Card I = $\mathcal{U}_\beta < a^s$. L'on considère I = ω_β $(\beta \leq \alpha)$. D'où $(X_\lambda)_{\lambda \in \omega_\beta}$

L'on va construire par récurrence transfinie sur $\lambda \in \omega_\beta$ une partie T_λ de cardinal a de X_λ , de sorte que :

$$(T_\nu)_{\nu \in \lambda+1} \quad \text{soit disjointe}$$

et

$$\forall \nu \in \omega_\beta \quad , \quad \nu > \lambda \qquad r\left[\bigcup_{\mu \leq \lambda} T_\mu\right] (X_\nu) \geq a$$

Soit $\lambda \in \omega_\beta$ et supposons que l'on ait défini T_μ pour $\mu \in \lambda$ ayant les propriétés ci-dessus. En vertu du caractère fini de la disjonction, $(T_\nu)_{\nu \in \lambda}$ est disjointe. En outre, comme a est régulier et Card λ < Card I $\leq$ a, en vertu du lemme 5 ci-dessus, si $\quad r' = r\left[\bigcup_{\mu\in\lambda} T_\mu\right]$,

$\forall \nu \in \omega_\beta$, $\nu \geq \lambda$, $r'(X_\nu) \geq a$

En particulier il existe une partie r'-libre Z de cardinal a de X_λ . Soit alors $\mathcal{H}$ une partie de $\mathfrak{P}(Z)$, vérifiant (S E P) et telle que Card $\mathcal{H}$ > Card I . Or pour tout $\nu \in \omega_\beta$, $\nu > \lambda$, il existe au plus un $T \in \mathcal{H}$ tel que

$$r'_T\ (X_\nu) < a$$

(il n'en existe certainement pas si $r(X_\nu) > a$), en vertu du lemme 1 du chapitre IV , et l'on a :

$$\mathrm{Card}\ (\omega_\beta) < \mathrm{Card}\ \mathcal{H}$$

donc :

il existe $T \in \mathcal{H}$ tel que pour tout $\nu \in \omega_\beta$, $\nu > \lambda$, on ait $\quad r'_T\ (X_\nu) \geq a$

Il suffit donc de choisir $T_\lambda = T$

D'où $(T_\lambda)_{\lambda\in\omega_\beta}$ disjointe, de type a, incluse dans (X_λ).

b) <u>Si a n'a pas de prédécesseur, toute famille</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>telle que</u> <u>$r(X_i)$ = Card I = a pour tout i, contient une famille disjointe de type a.</u>

Si $a = \aleph_0$, ceci résulte du lemme 3 et de a) car $a^s = 2^a > a$.

Si $a > \aleph_0$, $a = \aleph_\alpha$ où α n'a pas de prédécesseur, et, ω_β étant le caractère final de α $(\omega_\beta \leq \alpha)$, il existe une famille $(a_\nu)_{\nu\in\omega_\beta}$ strictement croissante de cardinaux $< a$ telle que Sup $a_\nu\ [\nu\in\omega_\beta] = a$.

De même il existe une famille $(I_\nu)_{\nu \in \omega_\beta}$ strictement croissante de parties de I telles que $\text{Card}\ I_\nu = a_\nu$ pour tout ν, et telle que

$$\bigcup I_\nu \quad [\nu \in \omega_\beta] = I .$$

Soit en outre pour tout $\nu \in \omega_\beta$, b_ν le successeur de a_ν.

L'on va construire par récurrence transfinie sur $\lambda \in \omega_\beta$ une famille (Y_i^λ) $[i \in I_\lambda]$ disjointe et telle que :

$$\forall i \in I_\lambda \quad , \quad Y_i^\lambda \subset X_i \quad , \quad Y_i^\lambda \text{ libre et } \text{Card}\ Y_i^\lambda = b_\lambda$$

et $\bigcup Y_i^\lambda$ $[i \in I_\lambda]$ soit $r\left[\bigcup_{\mu \in \lambda} \bigcup_{i \in I_\mu} Y_i^\mu\right]$ -libre.

En effet supposons ces familles construires pour tout $\lambda \in \mu$.

Alors :

$$r\left(\bigcup_{\lambda \in \mu} \bigcup_{i \in I_\mu} Y_i^\mu\right) \leq \sum_{\mu \in \lambda} a_\nu \cdot b_\nu = \sum_{\mu \in \lambda} b_\nu < b_\lambda < a$$

donc si $r' = r\left[\bigcup_{\mu \in \lambda} \bigcup_{i \in I_\mu} Y_i^\mu\right]$

$$\forall i \in I \quad , \quad r'(X_i) = r(X_i) \geq a$$

Or b_μ est régulier et $\text{Card}\ \mu < \text{Card}\ \omega_\beta \leq a$, donc d'après a), il existe :

$(Y_i^\mu)_{i \in I_\mu}$ disjointe telle que

$$\forall i \in I_\mu \quad , \quad Y_i^\mu \subset X_i \quad , \quad Y_i^\mu \ r'\text{-libre et } \text{Card}\ Y_i^\mu = b_\mu .$$

Donc $\bigcup Y_i^\mu$ $[i \in I_\mu]$ est r'-libre

Il est clair alors que :

(Y_i^λ) $\left[(i,\lambda) \in \bigcup_{\lambda \in \omega_\beta} I_\lambda \times \lambda\right]$ est r-disjointe, et pour tout $i \in I$,

$$Y_i = \bigcup Y_i^\lambda \quad \left[\lambda \in \omega_\beta \qquad \text{et} \qquad i \in I_\lambda\right]$$

Y_i est libre et Card $Y_i = a$; et on a $(Y_i)_{i \in I}$ r-disjointe, de type a, incluse dans (X_i)

C Q F D

__lemme 5.-__ Soit a un cardinal infini , $(X_i)_{i \in I}$ une famille disjointe de parties libres d'un φ-espace E telles que $r(X_i) \leq a$ pour tout i, et X une partie de rang a .

Si

$$r\ [X_I]\ (X) < a \qquad \text{et} \qquad \text{Card } I \leq a$$

on a au moins l'une des trois situations suivantes :

(A) $\exists\, i \in I$ et $\exists\, Y_i \subset X_i$ tel que $r\ [X_I - Y_i]\ (X) = a$

(B) $\exists\, J \subset I$ tel que Card $J = \bar{a}$ et $\exists\,(Y_i)_{i \in J} \subset (X_i)_{i \in J}$ tels que :

(1) $\forall i \in J$, $r(Y_i) < \bar{a}$; les $r(Y_i)$ sont distincts entre eux ; et

$$\text{Sup } r(Y_i)\ [i \in J] = a$$

(2) $r\ [X_I - Y_J]\ (X) = a$

En outre si on tronque J pour tout $b < a$ en :

$J_b = \{i \mid i \in J$ et $r(Y_i) > b\}$, la famille $(Y_i)\ [i \in J_b]$ vérifie aussi les propriétés (1) et (2).

(C) $\exists\, J \subset I$ tel que Card $J = a$ et $\exists\,(x_i)_{i \in J} \in (X_i)_{i \in I}$ tel que

$$r\ [X_I - \{x_i \mid i \in I\}]\ (X) = a$$

et pour tout $K \subset J$ tel que Card $(J - K) < a$, $(x_i)_{i \in K}$ a ces propriétés.

Démonstration :

L'on peut supposer que X est libre.

Soit Z une $r[X]$-base de X_I et Y une $r[X_I]$-base de X. $X \cup Z$ et $X_I \cup Y$ sont deux bases de $X_I \cup X$, et :

$$X \cap Z = X_I \cap Y = \emptyset \quad . \text{ Donc :}$$

$$\text{Card } (X \cup Z) = \text{Card } (X_I \cup Y) \quad , \text{ et comme } \text{Card } Y < a ,$$

$$\text{Card } (X - Y) = \text{Card } (X_I - Z) = \text{Card } X = a$$

Toute partie c de $X_I - Z$ est une $r[(X_I - c) \cup Z \cup Y]$-base de X.

Donc :

$$r [X_I - c] \;(X) \geq r [Y \cup Z \cup (X_I - c)] \;(X) = \text{Card } c$$

et :

<u>Pour toute partie c de $X_I - Z$ telle que $\text{Card } c = a$, on a $r [X_I - c] \;(X) \geq a$.</u>

Comme $\text{Card } (X_I - Z) = a$, on a trois cas :

1°) S'il existe $i \in I$ tel que $\text{Card } (X_i - Z) = a$, on a la situation (A).

2°) Sinon, pour tout $i \in I$, $\text{Card } (X_i - Z) < a$; mais si

$J = \{ i \;/\; i \in I \text{ et } X_i - Z \neq \emptyset \}$ est tel que $\text{Card } J = a$,

on a la situation (c) (prendre $x_i \in X_i - Z$ ...)

3°) Enfin si : $\forall i \in I$, $\text{Card } (X_i - Z) < a$ et $\text{Card } J < a$, alors :

$$a = \sum_{i \in J} \text{Card } (X_i - Z)$$

donc a est singulier, $\text{Card } J \geq \bar{a}$ et $\sup_{i \in J} (\text{Card } (X_i - Z)) = a$ et il est alors aisé d'expliciter la solution (B).

<u>C Q F D</u>

5.4.4.- Démonstration du théorème 2

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un φ-espace E telle que $r(X_i) = a_i$ soit infini pour tout $i \in I$, et telle que $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in I}$ soit faiblement lisse (resp. soit lisse, en admettant l'hypothèse du continu généralisé) et vérifie (C F).

Soit $\alpha = \mathrm{Ord}\,(L)$ et $\nu \longrightarrow \ell_\nu$ l'isomorphisme de α sur L. Pour tout $\nu \in \alpha$, on note I_ν (resp. J_ν) l'ensemble des $i \in I$ tels que $r\,(X_i) = \ell_\nu$ (resp $< \ell_\nu$) et $J'_\nu = J_\nu \cup I_\nu$.

Comme $\mathcal{L} = (\ell_\nu)_{\nu\in\alpha}$ vérifie (C F) , il existe une famille $\mathcal{M} = (m_\nu)_{\nu\in\alpha}$, $\mathcal{L}$-forte.

Nous allons construire par récurrence transfinie sur $\nu \in \alpha$ une famille (Z_i^ν) $[i \in J'_\nu]$ disjointe, où chaque Z_i^ν est une partie libre de X_i telle que :

$$\mathrm{Card}\ Z_i^\nu = r(X_i) = a_i = \ell_{\tau(i)}$$

ces familles vérifiant :

$\forall \nu\in\alpha$, $\forall i \in J_\nu$, $(Z_i^\lambda)_{\tau(i)\leq\lambda\leq\nu}$ est décroissante et

$\mathrm{Card}\ (\bigcap_{\tau(i)\leq\lambda<\nu} Z_i^\lambda - Z_i^\nu)$ est nul pour presque tout i, sauf $\mathrm{Min}\ (\mathcal{U}_1\ ,\ m_{\tau(i)})$ au plus où il est égal à $m_{\tau(i)}$.

a) D'après le lemme 4, il existe une famille (Z_i^o) $[i \in I_o]$ disjointe telle que, pour tout $i \in I_o$, Z_i^o soit une partie libre de X_i et $\mathrm{Card}\ Z_i^o = \ell_o$

b) Supposons que l'on ait construit ces familles pour $\lambda \in \nu$

b_1 <u>Alors si ν n'a pas de prédécesseur</u> :

$\forall i \in J_\nu \quad , \quad T_i = \cap Z_i^\lambda \quad [\tau(i) \leq \lambda < \nu]$

est une partie libre de X_i telle que :

$$\text{Card } (Z_i^{\tau(i)} - T_i) \leq m_{\tau(i)} \quad \text{et} \quad \text{Card } T_i = a_i$$

et $(T_i)_{i \in J_\nu}$ est disjointe.

Considérons sur I_ν un bon ordre de type β, naturel si I_ν est fini, <u>initial</u> si I_ν est infini ; et soit $\xi \longrightarrow i_\xi$ l'isomorphisme de β sur I_ν. Il est alors aisé de construire par récurrence transfinie sur ξ une famille

$$(\,(T_i^\xi)_{i \in J_\nu}\,)_{\xi \in \beta}$$

telle que

$\forall i \in J_\nu \quad , \quad (T_i^\xi)_{\xi \in \beta}$ soit décroissante ,

$\forall \xi \in \beta \quad , \quad T_i \supset T_i^\xi$ et $\text{Card } (T_i - T_i^\xi) \leq \text{Card } \xi \times m_{\tau(i)}$;

et $\forall \eta \in \xi + 1 \quad , \quad r\,[\bigcup_{j \in J_\nu} T_j^\xi]\,(X_{i_\eta}) = \ell_\nu$

en utilisant le lemme 5 pour chaque ξ.

En outre, en prenant soin de ne diminuer plus avant T_i^ξ que si $\text{Card } \xi < m_{\tau(i)}$, et même de ne jamais diminuer T_i^ξ si $i \in J'_1$, on obtient pour tout $i \in J_\nu$:

$$Z_i^\nu = \cap\, T_i^\xi \qquad [\xi \in \beta]$$

telle que : $\text{Card } (T_i - Z_i^\nu) \leq m_{\tau(i)}$, donc $\text{Card } Z_i^\nu = \ell_{\tau(i)}$

Alors $(Z_i^\nu)_{i \in J_\nu}$ est disjointe, et, soit $r' = r[\cup Z_i^\nu\ [j \in J_\nu]]$:

$\forall i \in I_\nu \quad , \quad r'(X_i) = \ell_\nu = a_i$.

b$_2$| Si ν a un prédécesseur $\nu - 1$:

$$r\ (\cup z_i^{\nu-1}\ [i \in J_\nu]) = \sum_{\lambda \in \nu} \ell_\lambda \operatorname{Card} I_\lambda = \ell_{\nu-1}$$

Soit $r' = r\ [\cup z_i^{\nu-1}\ [i \in J_\nu]]$; comme $\ell_\nu > \ell_{\nu-1}$, on a :

$$\forall i \in I_\nu \quad , \quad r'\ (X_i) = \ell_\nu$$

L'on pose : $\forall i \in J_\nu \quad , \quad z_i^\nu = z_i^{\nu-1}$

b$_3$| Dans les deux cas, il suffit d'appliquer le lemme 4 dans le r'-espace E.
L'on obtient une famille r'-disjointe

$(z_i^\nu)_{i \in I_\nu}$ telle que pour tout $i \in I_\nu$, z_i^ν soit une partie r'-libre de X_i , de cardinal ℓ_ν , d'où :

$$(z_i^\nu) \quad [i \in J'_\nu]$$

c| Construction de la solution : Soit pour tout $i \in I$

$$z_i = \cap z_i^\nu \quad [\tau(i) < \nu < \alpha]$$

$(z_i)_{i \in I}$ est disjointe et pour tout $i \in I$, z_i est une partie libre de X_i .
En outre, si on a choisi $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-forte vérifiant la condition du lemme 2, on a :

$$\forall \nu \in \alpha \quad , \quad \operatorname{Card} \{\lambda / \lambda > \nu \quad \text{et} \quad m_\lambda \geq \ell_\nu\} \leq \mathcal{U}_1$$

Donc pour tout $i \in I$:

ou bien $i \in J'_1$ et $z_i = z_i^{\tau(i)}$: $\operatorname{Card} z_i = a_i$

ou bien $i \in I - J'_1$ et :

$$\operatorname{Card}\ (z_i^{\tau(i)} - z_i) \leq \mathcal{U}_1 \cdot m_{\tau(i)} < a_i$$

donc $\operatorname{Card} z_i = a_i$.

5.5. - Familles dénombrables quelconques.

On déduit des théorèmes 1 et 2, et de la réduction de l'étude d'une famille (X_i) quelconque les corollaires suivants :

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de parties d'un φ-espace E, et N (resp. K ; resp. I') l'ensemble des $i \in I$ tels que $\dim \varphi\,(X_i) = \aleph_0$ (resp. $< \aleph_0$; resp. $> \aleph_0$) :

Corollaire 1.- Toute solution sur $I - I'$ se prolonge en une solution sur I, i.e. pour toute $(a_i)_{i \in I - I'}$ et toute $(Z_i)_{i \in I-I'}$ φ-disjointe où $Z_i \subset X_i$ et $\dim \varphi(Z_i) = a_i$, il existe $(Z_i)_{i \in I}$ φ-disjointe, incluse dans (X_i) et telle que $\dim \varphi(Z_i) = \dim \varphi(X_i)$ pour les i restant.

Corollaire 2.- Si l'une des conditions "$N = \emptyset$" ou "K est fini" est réalisée, alors (X_i) contient (Y_i) φ-disjointe telle que $\dim \varphi(Y_i) = \dim \varphi(X_i)$ pour tout $i \in I - K$ et $\dim \varphi\,(Y_i) = a_i$ pour $i \in K$, si et seulement si :

$$\text{pour tout } J \text{ fini, } J \subset K, \ \dim \varphi\,(X_J) \geq a_J$$

Corollaire 3.- Si Card $K = \aleph_0$ et $N \neq \emptyset$, soit $(a_i)_{i \in K}$ telle que pour tout J fini, $J \subset K$, $\dim \varphi\,(X_J) \geq a_J$. Soit, de plus, $(Y_i)_{i \in K}$ φ-disjointe où $Y_i \subset X_i$ et $\dim \varphi(Y_i) = a_i$ (c.f. théorème 1).

En posant $Y = Y_K$ et H l'ensemble des $i \in N$ tels que $\dim_Y \varphi_Y(X_K) < \aleph_0$;

a) $(Y_i)_{i \in K}$ se prolonge en une solution pour I si et seulement si $H = \emptyset$;

b) Si $H \neq \emptyset$, il n'existe de solution sur I que si $\dim_Y \varphi_Y\,(X_K) = \aleph_0$;

c) Si $H \neq \emptyset$ et $\dim_Y \varphi_Y(X_K) < \aleph_0$, soit $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in K \cup H}$, où les a_i pour $i \in H$ sont finis suffisamment grands [ainsi pour $a_H > \dim_Y \varphi_Y\,[X_{H \cup K}]$), alors (X_i) est de type $\mathcal{A}$ et ne contient aucune famille φ-disjointe de type $\mathcal{A}$.

Ces corollaires résolvent le cas dénombrable dans sa généralité. Il reste uniquement à étudier le cas où $I' = \emptyset$, Card $K = \aleph_0$ et $N \neq \emptyset$:

$(X_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de (E,φ) telle que : I admet une partition (I^1 , I_1) ; I^1 étant dénombrable, telle que
$\dim \varphi\ (X_i) < \aleph_0$ pour $i \in I^1$ et
$\dim \varphi\ (X_i) = \aleph_0$ pour $i \in I_1$

choisissant une solution "maximale" (Y_i) de $(X_i)_{i \in I^1}$,
$\varphi(Y_{I^1}) = \varphi(X_{I^1})$ et il nous suffit d'étudier "exactement comme $(X_i)_{i \in I}$ " la famille $(X_i)_{i \in I_1}$ dans E considéré comme $\varphi_{X_{I^1}}$-espace (on prend $\varphi_{Y_{I^1}}$ si (Y_i) n'est pas maximale). On se ramène de proche en proche à l'étude d'une famille $((X_i)_{i \in I_\lambda})_{0 \leq \lambda < v}$ de familles de type ci-dessus ... où v est un ordinal dénombrable.

Chap. VI Un théorème d'échange ; circuits généralisés ; Application a une conjecture de Rado

6.1. - Le théorème d'échange pour un élément.

Problème : Soit A un sous φ-espace de E, B une base de A et $x \in A - B$. A quelle condition existe-t-il $y \in B$, et quels sont tous les $y \in B$ tels que : $B' = B - y + x$ soit une nouvelle base de A ; et en outre que deviennent les B_z quand $z \in A$.

Voici d'abord quelques propriétés de la fonction L_x définie au paragraphe 1.4.3.

Soit L une partie libre de (E,φ) :

a) M étant une seconde partie libre et $x \in \varphi(L) \cap \varphi(M)$, on a les équivalences logiques :

$$\boxed{(L_x = M_x) \Longleftrightarrow (L_x \subset M) \Longleftrightarrow (M_x \subset L) \Longleftrightarrow (x \in \varphi(L \cap M))}$$

b) (M,N) étant une partition de L, considérons E comme ψ-espace où $\psi = \varphi_N$. On sait qu'alors M est une ψ-base de $\varphi(L)$, et l'on a :

$$\boxed{\forall z \in \varphi(L) \ , \ M_z \ (\text{pour } \psi) = M \cap L_z \ (\text{pour } \varphi)}$$

Ces propriétés se vérifient aisément sur les circuits et en utilisant les résultats sur φ_A vus en 2.1.3.

Théorème 1.- Soient L une partie libre de (E,φ), $y \in L$ et $x \in \varphi(L)$, alors on a l'équivalence :

$$\boxed{(L' = L - y + x \ \text{ est } \varphi\text{-libre}) \Longleftrightarrow (y \in L_x)}$$

et en outre dans ce cas :

a) L' est une φ-base de $\varphi(L)$

b) Pour tout $z \in \varphi(L) = \varphi(L')$, on a :

$$\boxed{(L_z = L'_z) \Longleftrightarrow (y \notin L_z) \Longleftrightarrow (x \notin L'_z) \Longleftrightarrow (z \in \varphi(L-y) = \varphi(L' - x))}$$

c) Pour tout $z \in \varphi(L)$ tel que $y \in L_z$, on a :

$$\boxed{L'_z = (L_x \cup L_z - K) + x \quad \text{où} \quad y \in K \quad \text{et} \quad K \subset L_x \cap L_y}$$

L'on verra ci-dessus que ce théorème est vrai (avec la même généralité) dans les espaces vectoriels. Voici d'abord un corollaire qui résoud le problème posé ci-dessus :

<u>Corollaire .-</u> <u>Soit B une base d'un sous-espace A de (E,φ)</u>. <u>Etant donnés $x \in A - B$ et $y \in B$, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(1) - <u>$B' = B - y + x$ est une base de A</u>

(2) - <u>$y \in B_x$</u>

<u>En outre dans ce cas, pour $z \in \varphi(L)$ on a</u> :

a) - <u>$(y \notin B_z) \Longleftrightarrow (B'_z = B_z) \Longleftrightarrow (z \in \varphi\ (B-y))$</u>

b) - <u>$(B_z = \{y\}) \Longleftrightarrow (B'_z = B_x - y + x) \Longleftrightarrow (z \in \varphi(Y) - \varphi(\emptyset))$</u>

c) - <u>Si $y \in B_z$, $B'_z = (B_x \cup B_z - K) + x$ où $y \in K$ et $K \subset B_x \cap B_z$</u>

Autrement dit, étant donné $x \in A$ et B base de A $(x \notin B)$, on ne peut échanger x avec un élément de B pour obtenir une nouvelle base de A que d'un <u>nombre fini de manières</u>, i.e. en choisissant un élément quelconque de B_x. Les équivalences précisent les cas où : a) B_z est inchangé ; et b) B_z est changé "comme dans un circuit". On retrouve en particulier le théorème 5 de 1.2.5.

<u>Démonstration</u> : Nous allons d'abord démontrer que L' est une φ-base de $\varphi(L)$ si et seulement si $y \in L_x$. En effet si L' est φ-base de $\varphi(L)$, L' est libre, donc $x \notin \varphi(L-y)$ et comme $x \in \varphi(L)$, $y \in L_x$. Inversement si $y \in L_x$, $x \notin \varphi(L-y)$, et considérant E comme Ψ-espace où $\Psi = \varphi_{L-y} = \varphi_{L'-x}$, $\{y\}$ est une Ψ-base de $\varphi(L)$, donc $\{x\}$ aussi : $L - y + x$ est une φ-base de $\varphi(L)$.

Soit maintenant $x \in \varphi(L)$ et $y \in L_x$. $L' = L - y + x$ est une φ-base de $\varphi(L)$, et pour tout $z \in \varphi(L)$.

- $y \notin L_z$ si et seulement si $z \in \varphi(L-y)$, i.e. si et seulement si $L_z = L'_z$.

D'où les équivalences b) en remarquant la symétrie entre L et L', sachant que $L'_y = L_x - y + x$.

- Si $y \in L_z$,

1°) - $(y \in L_z) \Longleftrightarrow (x \in L'_z)$ d'après les équivalences b)

2°) - On a : $L'_z \cap (L - L_x) = L_z \cap (L - L_x)$.

3°) - Soit $M = L_x - (L_x \cap L_z) + y$ et $N = L - M$.

On a $M_z = M \cap L_z = \{y\}$ (pour $\psi = \varphi_N$), donc $\{y , z\}$ est un ψ-circuit (on suppose $y \neq z$, sinon c) est trivial). Or $M_x = M$, donc $M' = M - y + x$ est une ψ-base de $\varphi(L)$. Comme $\{y,z\}$ est un ψ-circuit, $M'_z = M'_y = M'$, donc

$$L'_z \supset M' = (L_x - L_x \cap L_z) + x .$$

D'où c) : $L'_z = (L_x \cup L_z - K) + x$ où $K \subset L_x \cap L_z$ et $y \in K$.

C.Q.F.D.

<u>On ne peut espérer obtenir un résultat meilleur</u> (<u>i.e. préciser K</u>) <u>sans hypothèses supplémentaires. Nous allons le démontrer dans le cas des espaces vectoriels</u> :

<u>Exemple</u> : Soients $L = \{\ell_o , \ell_1, \dots, \ell_p\}$ une partie libre ayant p+1 éléments d'un espace vectoriel E sur un corps k, et :

(1) $x = \sum_{i=o}^{p} \lambda_i \ \ell_i$ où les λ_i sont tous dans $k' = k - \{o\}$

(2) $y = \ell_o$ et $z = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \ \ell_i$ où $q \leq p$ et les $\mu_i \in k'$

(le corps k, les entiers p et q tels que $0 \leq q \leq p$ et (λ_i), (μ_i) variant, on a ici le cas le plus général (à un isomorphisme près) concernant les espaces vectoriels, quand on néglige ce qui se passe en dehors de L_x).

Alors $L_x = L$, $L_z = \{y = \ell_o, \ell_1 , \dots, \ell_q\}$ et L et $L' = \{x, \ell_1, \dots, \ell_p\}$ sont deux bases du sous-espace vectoriel F engendré par L. On se propose de déterminer L'_z, p, q, (λ_i) et (μ_i) étant des paramètres.

L' étant une base de F, z s'écrit de manière unique :

(3) $z = \nu_o x + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \ell_i$ où les $\nu_i \in k$

Des relations (1), (2), (3) on tire :

$$z = \sum_{i=o}^{q} \mu_i \ell_i = \nu_o \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i \right) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \ell_i$$

et, d'après l'unicité de la décomposition de z en combinaison linéaire des ℓ_i :

$$\begin{cases} \nu_o \lambda_o = \mu_o & \\ \nu_o \lambda_o + \nu_i = \mu_o & \text{pour } i = 1,\dots, q \\ \nu_o \lambda_i + \nu_i = o & \text{pour } i = q+1,\dots, p \end{cases}$$

Or $\lambda_o \mu_o \neq o$, donc $\nu_o \neq o$ et $x \in L'_z$; et pour $i = q+1, \dots, p$, $\nu_i = \nu_o \lambda_i \neq o$: $\{e_{q+1}, \dots, e_p\} \subset L'_z$.

Donc :

$$\underline{L'_z = \{x, e_{q+1}, \dots, e_p\} \cup \{\ell_i \ / \ i \in \{1,\dots, q\} \text{ et } \mu_i \lambda_o - \mu_o \lambda_i \neq o\}}$$

sachant que $\nu_i = \mu_i - \nu_o \lambda_i = \frac{1}{\lambda_o} (\mu_i \lambda_o - \mu_o \lambda_i)$ pour $i = 1,\dots, q$

D'où :

$$L'_z = (L_x \cup L_z - K) + x$$

où $K = \{y\} \cup \{\ell_i \ / \ i \in \{1,\dots, q\} \text{ et } \mu_i \lambda_o - \mu_o \lambda_i = o\} \subset L_x \cap L_z$

Mais il est bien clair que, $0 \leq q \leq p$ étant donnés, <u>pour tout $J \subset \{1,\dots, q\}$, il existe des couples $((\lambda_i), (\mu_i))$ tels que $K = J$</u>.

En conclusion, <u>le théorème 1 est vrai sans amélioration dans les espaces vectoriels</u> : d'un autre point de vue, on peut dire que le théorème 1 sur les espaces vectoriels s'étend sans changement aux φ-espaces.

6.2.- Circuits généralisés ; La fonction L_X ; Bases d'un circuit généralisé.

6.2.1.- Définitions

Définition 1.-

a) Etant donné un ensemble $\mathscr{C}$ de circuits de (E,φ) , on appelle base de $\mathscr{C}$ toute partie libre L de E telle que chacun des circuits de $\mathscr{C}$ ait au plus un élément hors de L.

b) On appelle circuit généralisé (on écrit c.g. en abrégé) de (E,φ) tout ensemble $\mathscr{C}$ de circuits admettant au moins une base. $\mathscr{C}$ est dit propre si tous ses éléments ont au moins deux éléments ; sinon il est dit impropre.

$\{\{x\}/\ x\in\varphi(\emptyset)\}$ est un c.g., et toute partie libre L de E en est une base. Aussi ne considérera-t-on que des circuits ayant au moins deux éléments par la suite.

Des résultats de 1.4.3. on déduit que :

Tout c.g. $\mathscr{C}$ de base L dans (E,φ) est de la forme :

$$\boxed{\mathscr{C} = \{L_x + x\ /\ x\in N\}} \qquad (1)$$

où N est l'ensemble des éléments des circuits de $\mathscr{C}$ qui ne sont pas dans L. En outre l'application qui à tout circuit de $\mathscr{C}$ associe son élément en dehors de L (i.e. dans N) est une bijection de $\mathscr{C}$ sur N.

D'où la "correspondance Galoisienne" :

Théorème 2.- Soit L une partie libre de (E,φ). L'ensemble $\mathcal{E}_L$ des c.g. de base L est un sous-treillis du treillis des parties de $\mathcal{P}(E)$ et l'application :

$$\mathscr{C} \longrightarrow N = \{x\ /\ \exists\ c\in\mathscr{C}\ ,\ x\in c - L\} = \Big(\bigcup_{c\in\mathscr{C}} C\Big) - L$$

est un isomorphisme (de treillis) de $\mathcal{E}_L$ sur $\mathcal{P}(\varphi(L) - L)$, les circuits généralisés propres correspondant aux parties de $\varphi(L) - (L \cup \varphi(\emptyset))$.

La correspondance inverse est :

$$N \longrightarrow \mathscr{C} = \{L_x + x \ / \ x \in N\}$$

6.2.2.- La fonction L_X .

Voici maintenant un théorème qui précise les relations entre $\mathscr{C}$ et N. Il se présente comme une extension des propriétés de la fonction L_x .

Théorème 3.- Soit L une partie libre de (E,φ). Pour tout $A \subset \varphi(L)$, il existe une partie libre minimale $L(A)$ et une seule de L telle que $A \subset \varphi(L(A))$. Cette application $X \longrightarrow L(X)$ de $\mathfrak{P}(\varphi(L))$ dans $\mathfrak{P}(L)$ est aussi définie par :

$$(1) \qquad \boxed{L(A) = \cap L' \qquad [L' \subset L \quad \text{et} \quad A \subset \varphi(L')]}$$

$$\text{et} \qquad (2) \qquad \boxed{L(A) = L_A = \cup L_x \qquad [x \in A]} \qquad (*)$$

$x \longrightarrow L_x$ est un homomorphisme de treillis de parties, et en particulier pour toute famille (A_i) de parties de $\varphi(L)$, $L(\cap A_i) = \cap L(A_i)$ et $L(\cup A_i) = \cup L(A_i)$; mais ce n'est un isomorphisme que si $\varphi(L) = L$.

L'existence de $L(A)$ définie par (1) résulte de 1.4.3.

Alors $\forall x \in A$, $x \in \varphi(A) \subset \varphi(L(A))$, donc $L_x \subset L(A)$ et $L_A \subset L(A)$; inversement $A \subset \varphi(L_A)$, donc $L(A) \subset L_A$; d'où l'égalité (2). Le reste du théorème 3 résulte alors aisément de (2).

Comme d'après (1), $L(A) = L(\varphi(A))$, on a le :

(*) - On utilisera indifféremment L_A ou $L(A)$, surtout pour éviter les indices de second ordre.

<u>Corollaire 1.-</u> <u>Pour tout $A \subset \varphi(L)$, $L_A = L\varphi(A)$.</u> En outre, si A et B sont deux parties de $\varphi(L)$, on a :

$$\varphi(A) \subset \varphi(B) \implies L(A) \subset L(B)$$

et $$\varphi(A) = \varphi(B) \implies L(A) = L(B)$$

<u>mais les réciproques sont fausses.</u>

Soit B une φ-base de $\varphi(A)$, $L_B = L_A$, et comme $A \subset \varphi(L_A)$, $\dim \varphi(A) \leq \dim \varphi(L_A) = \text{card } L_A$.

Si $A \subset \varphi(\emptyset)$, $L_A = \emptyset$ et $\dim \varphi(A) = \text{card } L_A = 0$

Si $\dim \varphi(A) = \text{card } B$ est infinie :

$\text{Card } L_A = \text{Card } L_B \leq \sum \text{Card } L_x \ [x \in B] = \text{Card } B$

donc $\dim \varphi(A) = \text{Card } L_A$. D'où le :

<u>Corollaire 2.-</u> Pour tout $A \subset \varphi(L)$, <u>$\text{Card } L(A) \geq \dim \varphi(A)$</u> (3) .
<u>$L(A)$ est fini si et seulement si $\dim \varphi(A)$ l'est, et on a l'égalité dans (3) quand $\dim \varphi(A)$ est nulle ou infinie.</u>

Notons qu'en général l'inégalité est stricte dans (3) quand $\dim \varphi(A)$ est finie non nulle.

<u>Corollaire 3.-</u> Soit L une partie libre de (E,φ) et $A \subset \varphi(L)$.

a) M étant une seconde partie libre telle que $A \subset \varphi(M)$, on a :

$$\boxed{(L_A = M_A) \iff (L_A \subset M) \iff (M_A \subset L) \iff (A \subset \varphi(L \cap M))}$$

b) (M,N) étant une partition de L et considérant E comme ψ-espace où $\psi = \varphi_N$, M est une ψ-base de $\varphi(L)$ et l'on a :

$$\boxed{M_A \ (\text{pour } \psi) = M \cap L_A \ (\text{pour } \varphi)}$$

6.2.3.- Bases d'un circuit généralisé.

Jusqu'ici L est fixé et on étudie les $\mathscr{C}$ admettant L comme base. On se propose maintenant d'étudier le problème suivant :

Etant donné un ensemble $\mathscr{C}$ de circuits de E, quelles sont toutes les bases de $\mathscr{C}$, et en particulier à quelle condition $\mathscr{C}$ est-il un c.g. ?

On suppose toujours $\mathscr{C}$ propre

On déduit aisément des définitions ci-dessus le :

Lemme 1.- Soit $\mathscr{C}$ un ensemble de circuits de (E,φ). Si L est une base de $\mathscr{C}$, $L \cap \overline{\mathscr{C}}$ (où $\overline{\mathscr{C}} = \cup C \; [C \in \mathscr{C}]$) est une base minimale de $\mathscr{C}$. Inversement toute base L_o de $\mathscr{C}$ incluse dans $\overline{\mathscr{C}}$ est une base minimale de $\mathscr{C}$ et toute partie libre L contenant L_o est une base de $\mathscr{C}$.

Il nous suffit donc d'étudier les bases de $\mathscr{C}$ incluses dans $\overline{\mathscr{C}}$. On démontre alors le :

Lemme 2.- Soient $C_1,\ldots, C_n$ n circuits distincts de (E,φ) et $\mathscr{C} = \{C_1,\ldots, C_n\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathscr{C}$ est un circuit généralisé

b) pour $k = 2,\ldots, p$, $\dim \varphi \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i \right) = \mathrm{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i \right) - k$

b') " " " " " $\geq$ " "

c) $\forall J \subset \{1,\ldots, n\}$, $\dim \varphi (C_J) = \mathrm{Card}\, C_J - k$

c') $\forall J \subset \{1,\ldots, n\}$, $\dim \varphi (C_J) \geq \mathrm{Card}\, C_J - k$

et dans ce cas l'ensemble des bases de $\mathscr{C}$ incluses dans $\overline{\mathscr{C}}$ est

$$\boxed{\mathscr{B} = \{ \overline{\mathscr{C}} - \{e_1,\ldots, e_n\} \;/\; \text{pour } i = 1,\ldots, n,\; \ell_i \in C_i - \bigcup_{j \neq i} C_j\} \neq \emptyset}$$

où $\overline{\mathscr{C}} = C_1 \cup \ldots \cup C_n$.

<u>a) $\Rightarrow$ c)</u>. Car si $\mathscr{C}$ est un c.g., soit L une base de $\mathscr{C}$, incluse dans $\overline{\mathscr{C}}$. Or $C_i \to \ell_i \in C_i - L$ est une bijection de $\mathscr{C}$ sur $N = \overline{\mathscr{C}} - L$, donc pour $i = 1,..,n$ et pour tout $j \neq i$, $\ell_i \notin C_j$, et $L = \overline{\mathscr{C}} - \{\ell_i,\dots,\ell_n\} \in \mathscr{B}$. De plus, $\forall J \subset \{1,\dots,n\} = I$

$L_J = \bigcup_{i \in J} L_{\ell_i} = C_J - \{\ell_i \,/\, i \in J\}$ est une φ-base de $\varphi(C_J)$; d'où c).

Inversement, si $L \in \mathscr{B}$, L φ-engendre $\varphi(\overline{\mathscr{C}})$ et Card L = Card C_I - Card I = dim $\varphi(C_I)$, donc L est une φ-base de $\varphi(C_I)$: L est une base de $\mathscr{C}$. D'où la fin du lemme 2.

<u>c) $\Rightarrow$ b)</u> : il suffit de prendre $J = \{1,\dots,k\}$ où $k = 2,\dots,p$.
Il est clair que b) $\to$ b'), c) $\to$ c') et c') $\to$ b').

<u>b' $\to$ a)</u> se démontre par récurrence sur l'entier n.
Ceci est trivial si $n = 1$.

Supposons la propriété vraie jusqu'à n-1 et soit $\mathscr{C} = \{C_1,\dots,C_n\}$ vérifiant b'). $\mathscr{C}' = \{C_1,\dots,C_{n-1}\}$ vérifie aussi b'), donc $\mathscr{C}'$ est un c.g., et $\mathscr{C}' = \{L'_{\ell_i} + \ell_i \,/\, \ell_i \in N'\}$ où L' est une base de $\mathscr{C}'$ incluse dans $\overline{\mathscr{C}'}$ et $N' = \overline{\mathscr{C}'} - L' = \{\ell_1,\dots,\ell_{n-1}\}$.

Comme :

$$\dim \varphi(\overline{\mathscr{C}}) \geq \text{Card } \overline{\mathscr{C}} - n = \text{Card } (\overline{\mathscr{C}} - \overline{\mathscr{C}'}) + (\text{Card } \overline{\mathscr{C}'} - n+1) - 1 ,$$

$$\dim \varphi(\overline{\mathscr{C}}) \geq \dim \varphi(\overline{\mathscr{C}'}) + [\text{Card } (\overline{\mathscr{C}} - \overline{\mathscr{C}'}) - 1]$$

et comme $\overline{\mathscr{C}'} \subset \overline{\mathscr{C}}$, Card $(\overline{\mathscr{C}} - \overline{\mathscr{C}'}) \geq 1$: $\overline{\mathscr{C}} \supsetneq \overline{\mathscr{C}'}$. Soit alors $\ell_n \in C_n - \overline{\mathscr{C}'}$, et $L = L' \cup (C_n - \ell_n)$: L est une base de $\mathscr{C}$, d'où a).

Nota : La condition $\dim \varphi(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \text{Card } \bigcup_{i=1}^{n} C_i - n$ <u>n'est pas suffisante en général</u>

<u>(quand $n \geq 3$)</u> <u>pour que $\mathscr{C}$ vérifie a)</u>.

<u>Théorème 4.-</u> Soit $\mathscr{C} = (C_i)_{i\in I}$ une famille de circuits de (E,φ) ($i \longrightarrow C_i$ étant une <u>injection</u>). Les propriétés suivantes sont <u>équivalentes</u>:

a) - $\mathscr{C}$ est un circuit généralisé

b) - $\exists(\ell_i)_{i\in I}$ telle que : $\forall i\in I,\ \ell_i \in C_i - C_{I-i}$, et $\overline{\mathscr{C}} - \{\ell_i \ / \ i\in I\}$ est libre

c) - $\forall K \in \mathscr{F}(I)$, $\dim \varphi\,(C_K) = \mathrm{Card}\ C_K - \mathrm{Card}\ K$

c') - $\forall K \in \mathscr{F}(I)$, $\dim \varphi\,(C_K) \geq \mathrm{Card}\ C_K - \mathrm{Card}\ K$

où on note pour tout $K\subset I$, $C_K = \cup C_i \ [i\in K]$ et $\overline{\mathscr{C}} = C_I$.

En outre quand l'une de ces propriétés est vérifiée (donc toutes) l'ensemble des bases de $\mathscr{C}$ incluse dans $\overline{\mathscr{C}}$ est :

$$\boxed{\mathscr{B} = \{\overline{\mathscr{C}} - \{\ell_i \ / \ i\in I\} \ / \ \forall i\in I\ ,\ \ell_i\in C_i - C_{I-i}\} \neq \emptyset\ .}$$

<u>Une partie libre L est une base de $\mathscr{C}$ si et seulement si $L\cap\overline{\mathscr{C}}$ en est une</u>. <u>En particulier toute base de $\mathscr{C}$ contient</u> :

$$\boxed{B_0 = \cup\,(C_i\cap C_j) \quad [\{i,j\}\in \mathscr{F}_2\,(I)]}$$

Si $\mathscr{C}$ est un c.g., tout $\mathscr{C}'\subset\mathscr{C}$ est aussi un circuit généralisé (prendre la même base), en particulier les $\mathscr{C}'$ finis ; d'où d'après le lemme 2, a) $\Longrightarrow$ c) , a) $\Longrightarrow$ c') et c') $\Longrightarrow$ c). On démontre comme au lemme 2 que a) $\Longrightarrow$ b) et que toute base de $\mathscr{C}$, incluse dans $\overline{\mathscr{C}}$, appartient à $\mathscr{B}$.

<u>c) $\Longrightarrow$ a)</u>. D'après c), pour tout $K\in\mathscr{F}(I)$, $\mathscr{C}^K = \{C_i \ / \ i\in K\}$ possède la propriété c) du lemme 2, donc $\mathscr{C}^K$ est un c.g. et pour tout $i\in K$, il existe $\ell_i\in C_i - C_{K-i}$. Or pour tout $i\in I$, C_i est fini, donc il existe $\ell_i\in C_i - C_{I-i}$, et $L = \overline{\mathscr{C}} - \{\ell_i \ / \ i\in I\}\in\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{C}$. En effet pour tout $M\in\mathscr{F}(L)$, il existe $K\in\mathscr{F}(I)$ tel que $M\subset C_K - \{\ell_i \ / \ i\in K\}$. Or $C_K - \{\ell_i / \ i\in K\}$ est une base de $\mathscr{C}^K$, donc libre, et à fortiori M aussi : L est φ-libre, donc base de $\mathscr{C}$. D'où a) et le reste du théorème 4 (en utilisant aussi le lemme 1).

On a démontré en particulier le :

Corollaire.- La propriété "$\mathscr{C}$ est un circuit généralisé" est de caractère fini, i.e. $\mathscr{C}$ est un circuit généralisé si et seulement si tout $\mathscr{C}' \in \mathscr{F}(\mathscr{C})$ en est un.

6.2.4.- Propriétés caractéristiques des circuits généralisés possibles. Applications.

La notion de circuit généralisé admet pour cas particulier celle de "système fondamental de circuits" de H. Whitney dans [11]. Voici comment sont faits les c.g. quand φ varie :

Soit (E,φ), $\mathscr{C} = \{B_x + x \,/\, x \in E - B\}$ où B est une φ-base de E est un φ-circuit généralisé maximal (φ - c.g.m.), et cette propriété est en fait indépendante de φ : $\mathscr{C}$ est un ψ - c.g. si et seulement si $\mathscr{C}_\psi \supset \mathscr{C}$ et $\mathscr{F}(B) \cap \mathscr{C}_\psi = \emptyset$ et dans ce cas B est une ψ-base de E, $\mathscr{C}$ un ψ-c.g.m., et tout ψ-circuit $X \notin \mathscr{C}$ est tel que Card $(X-B) \geq 2$.

La donnée d'un φ - c.g.m. $\mathscr{C}$ fournit déjà de bons renseignants sur la structure (E,φ) ; mais en général il y a de nombreuses structures (E,ψ) telles que $\mathscr{C}$ soit un ψ - c.g.m. . Il est intéressant d'essayer de construire une ψ canoniquement associée à $\mathscr{C}$.

Mieux, la donnée de $\mathscr{C}$ est en fait indépendante de φ : étant donné un ensemble E, on dit que $\mathscr{C}$ est un c.g.p. (c.g. possible ou en puissance) de E si $\mathscr{C}$ est un ensemble de parties finies de E de la forme :

$$\boxed{\mathscr{C} = \{B_x + x \,/\exists B \subset E \text{ , } x \in E - B \text{ et } (B_x)_{x \in E-B} \text{ famille de parties finies de } B\}}$$

Soit alors $\varphi \in \Phi(E)$ tel que $\mathscr{C}$ soit un φ-c.g.m. (il en existe). Utilisant l'axiome (C''_2) des circuits, si $x, y \in E - B$ sont tels que $B_x \cap B_y \neq \emptyset$, $\forall z \in B_x \cap B_y$, $(B_x \cup B_y - z) \cup \{x,y\}$ est réunion de circuits, d'où en particulier un ou plusieurs circuits C tels que : $\{x,y\} \in C$ et $C \subset (B_x \cup B_y - z) \cup \{x,y\}$.
On peut très bien vérifier (C''_2) en n'introduisant qu'un circuit $(B_x \circ B_y) \cup \{x,y\}$.

D'une manière générale, posons :

$$\mathcal{C}_{\circ} = \{C / C \in \mathcal{F}(E) \text{ et } \exists X \in \mathcal{F}(E - B) \text{ tel que } C = X \cup (\Sigma^1 B_x \; [x \in X])\}$$

où $\Sigma^1 B_x \; [x \in X]$ est l'ensemble des z appartenant à un nombre impair de B_x quand x décrit X. Alors $\mathcal{C}_{\circ}$ vérifie (C_1) et (C_2), et définit sur E une structure de θ-espace tel que $\mathcal{C}$ soit un θ-c.g.m.

Voici une autre manière de construire θ canoniquement :

Soit $\mathcal{C}$ un c. g. p. sur E et B une base de $\mathcal{C}$. σ étant la bijection $x \longrightarrow \ell_x$ de B sur la base canonique $(\ell_x)_{x \in B}$ de l'espace vectoriel libre $k^{(B)}$ engendré par B sur k, on prolonge σ en une application (non injective en général) f de E dans $k^{(B)}$ telle que :

$$x \in E - B \longrightarrow f(x) = \Sigma \; \lambda_x^y \; e_y \quad [y \in B_x] \tag{1}$$

où $\forall x \in E - B$, $\forall y \in B_x$, $\lambda_x^y \in k - \{0\}$ (prendre les $\lambda_x^y = 1$ par exemple). $\sigma(\mathcal{C})$ est un $\varphi_\circ$ - c. g. m. du $\varphi_\circ$ -espace $k^{(B)}$ associé à la structure d'espace vectoriel, et l'image réciproque φ de $\varphi_\circ$ par f est alors telle que $\mathcal{C}$ soit un φ-c. g. m. .

Quand k est grand, on a beaucoup de manières de choisir f, d'où en général beaucoup de $\varphi \in \Phi$ (E), représentables (pour une extension de k), telles que $\mathcal{C}$ soit un φ-c. g. m. ; mais si $k = \mathbb{F}_2$ n'a que deux éléments f est entièrement déterminée, d'où canoniquement la structure de θ-espace sur E.

Remarque 1.- Quand on considère les c. g. p. $\mathcal{C}$ sur E tels que $x \longrightarrow B_x$ soit une injection de E dans $\mathcal{F}$(B) (y compris $B_x = \{x\}$ si $x \in B$), on obtient ainsi toutes les $\varphi \in \Phi$ (E) qui sont $\mathbb{F}_2$-représentables. On constate donc que la propriété pour $\mathcal{C}_\varphi$:

$$\forall \{x_1, \ldots, x_n\} \; \varphi - \text{c.g.}, \quad \Sigma^1 x_i \; [i = 1, \ldots, n] \quad \text{est un } \varphi\text{-circuit},$$

caractérise les φ $\mathbb{F}_2$-représentables, et cette propriété est vraie si et seulement si elle l'est pour toute partie finie d'un φ - c. g. m. $\mathcal{C}$ tel que $x \longrightarrow B_x$ soit injective.

D'une manière générale les c. g. p. $\mathcal{C}$ sur E définissent canoniquement (E,θ) k-représentable où k est un corps de caractéristique 2 ayant un cardianl suffisamment grand.

On améliore ainsi le résultat de H. Whitney [11] appendice.

Remarque 2.- Des procédés comme ceux du type (1) permettent de transformer le problème de k-représentation de (E,φ) en l'étude d'un système d'équations (au sens le plus général, i.e. $f \neq 0$, $f = 0$, f_1 ou $f_2 = 0$ ...) ayant en général plus d'inconnues (les λ_x^y) que d'équations. On sait cependant que de tels systèmes n'ont pas toujours de solution.

6.3.- Un algorithme pour résoudre une conjecture de Rado

Dans une communication au Congrès de Stockolm (1962), M. Rado a présenté un théorème sur les espaces vectoriels, théorème dont la démonstration n'a pu jusqu'ici s'étendre aux "φ-espaces" (i.e. aux "matroids" au sens de H.Whitney, c. f. [11]) . M. Rado conjecturait alors l'une des deux éventualités suivantes : ou bien ce théorème n'est pas vrai sur les φ-espaces, et sa validité constitue un axiome supplémentaire qui nous rapproche des axiomes des φ-espaces représentables dans un espace vectoriel, ou bien on peut étendre ce théorème aux φ-espaces.

Le but de ce paragraphe est de lever définitivement ce doute en démontrant le (*) :

Théorème 5.- Soit E un φ-espace, pour qu'une partie S de E admette une partition formée de k parties φ-libres, où k est un entier >0, il faut et il suffit que : S vérifie l'une des propriétés équivalentes :

$$\boxed{(P_k) : \text{ Pour tout } X \in \mathcal{P}(S), \ |X| \leq k.r(X) \text{ et } |S| \geq k}$$

(P'_k): Pour tout sous-espace A, $|A \cap S| \leq k.r\,(A \cap S)$ et $|S| \geq k$

où r est le rang sur E associé à φ.

(*) - Après cette communication, M. R. Rado a également trouvé un raisonnement sur les espaces vectoriels qui s'étend aux "matroids".

Les conditions (P_k) et (P'_k) sont équivalentes. En effet :

$(P_k) \Longrightarrow (P'_k)$ trivialement

inversement si (P'_k) est vérifiée, pour tout $X \in \mathcal{F}(S)$,

$$|X| \leq |\varphi(X) \cap S| \leq k.r(\varphi(X) \cap S) = k.r(X)$$

d'où (P_k)

La condition (P_k) est nécessaire car, si $(S_i)_{i=1,\dots,k}$ est une partition de S en $k > 0$ parties libres S_i, pour tout $X \in \mathcal{F}(S)$,

$$|X| = \Sigma\, |X \cap S_i| \; [i = 1,\dots, k] \leq k. \;\; (\mathrm{Max}\, |X \cap S_i| \; [i = 1,\dots, k]\,).$$

et comme $r(X) \geq |X \cap S_i|$ pour tout i (car S_i est φ-libre), $|X| \leq kr(X)$.

La difficulté essentielle est la réciproque.

Comme pour le problème de disjonction, la démonstration que nous allons donner est essentiellement constructive.

La réciproque est connue quand $k = 1$, car S est libre si et seulement si : $\forall X \in \mathcal{F}(S)$, $|X| \leq r(X)$ (alors $|X| = r(X)$).

Nous supposons donc désormais $k \geq 2$, et démontrons le :

Lemme 3.- Soit S une partie finie d'un φ-espace E et k un entier ≥ 2. Si S vérifie (P_k), pour toute famille $(X^i)_{i\in I}$ de parties libres X_i telle que $\underline{\cup}\, X^i\; [i \in I] \subsetneq S$ (*) et $I = \{1,\dots, k\}$, il existe une famille $(Y^i)_{i\in I}$ de parties φ-libres Y^i telle que :

$$\underline{\cup}\, X_i \; [i \in I] \subsetneq \underline{\cup}\, Y_i \; [i \in I] \subset S \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I \;\; \varphi(X^i) \subset \varphi(Y^i)$$

(*) - Pour une famille $(X_i)_{i\in I}$ de parties de E, le terme $\underline{\cup}\; X_i\; [i \in I]$ désigne $\cup\, X_i\; [i \in I]$ et implique que les X_i sont disjoints deux à deux.

En itérant $|S|$ -fois au plus le procédé du lemme 3 à partir de (ϕ), on obtient la réciproque du théorème 5 quand S est fini.

Voici comment on construit (Y^i) à partir de (X^i) :

<u>Soit $S \subset E$, $k \geq 2$, $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ et $(X^i)_{i \in I}$ une famille de parties libres de E telle que $\bigcup X^i \; [i \in I] \subsetneq S$.</u>

Posant $S_o = S - (\bigcup X^i \; [i \in I]) = A_o$. S'il existe $i_o \in I$ tel que $S_o \not\subset \varphi(X^{i_o})$, pour tout $x_o \in S_o - \varphi(X^{i_o})$, la famille $(Y^j)_{j \in I}$ où $Y^j = X^j$ si $j \in I - i_o$ et $Y^{i_o} = X^{i_o} + x_o$ répond au lemme 1 sans autres hypothèses sur S et les X^i. Il ne reste donc à étudier que le cas où :

$$\boxed{(a_o) : S_o \subset A \quad \text{où } A = \bigcap \varphi(X^i) \; [i \in I]}$$

Soit alors pour tout $i \in I$, $A_i = X^i(S_o)$. S'il existe $i_1 \in I$ tel que $A_{i_1} \not\subset A$, soit $i_o \in I$ ($i_o \neq i_1$ nécessairement) tel que $A_{i_1} \not\subset \varphi(X_{i_o})$:

$$\forall x_1 \in A_{i_1} - \varphi(X^{i_o}), \quad \exists\, x_o \in S_o \quad \text{tel que} \quad x_1 \in X^{i_1}_{x_o}$$

donc $Y^{i_1} = X^i_{x_o} - x_1 + x_o$ est φ-libre (théorème 1),

$Y^{i_o} = X^{i_o} + x_1$ est φ-libre ($x_1 \not\in \varphi(X^{i_o})$), et posant $Y^j = X^j$ pour $j \in I - \{i_o, i_1\}$, on a (Y^j). Il ne reste donc à étudier que le cas où (a_o) et

<u>(a_1) : $\forall i \in I$, $A_i = X^i(S_o) \subset A$</u>

D'une manière générale, pour tout entier $q \geq 0$, soit I_q l'ensemble des $\alpha = (i_1, \ldots, i_q) \in I^q$ tels que $i_k \neq i_{k+1}$ pour $k = 1, \ldots, q-1$, donc $I_o = \{\delta\}$ et $I_1 = I$; et pour tout $\alpha = (i_1, \ldots, i_q) \in I_q$, et tout entier k tel que $0 \leq k \leq q$, soit $\alpha^k = (i_1, \ldots, i_k)$ et $\alpha^o = o$.

<u>Supposons alors que S et (X^i) vérifient</u> :

pour $q = o, 1, \ldots, p-1$, on a (*)

(*) Il s'agit ici de composition de fonctions L_X. On écrira de même par la suite $\alpha(k) = \alpha^k \ldots i(k) = i_k$ quand aucune confusion ne sera à craindre.

(a_q) : $\forall \alpha = (i_1, \dots, i_q) \in I_q$, $A_\alpha = X^{i_q} \circ X^{i_{q-1}} \circ \dots \circ X^{i_1} (S_o) \subset A$

où $A = \cap \varphi(X_i)$ $[i \in I]$.

En vertu des hypothèses successives $(a_o), (a_1) \dots (a_{p-1})$

A_α est défini par récurrence ainsi :

pour $q = 0, 1, \dots, p-1$; pour $k = 1, \dots, q$ et $\forall \alpha \in I_q$:

$A_o = S_o$ et $A_\alpha k = X^{i_k} (A_\alpha k-1)$.

Alors soit pour tout $i \in I$, et pour tout entier q, $0 \leq q \leq p$:

$$A_i^q = \cup A_\alpha \quad [\alpha = (i_1, \dots, i_{q-1}, i) \in I_q] \qquad (A_i^o = A_o)$$

$$\text{et} \quad A^q = \cup A_i^q \quad [i \in I] = \cup A_\alpha \quad [\alpha \in I_q]$$

Nous allons démontrer que :

$$\boxed{A^1 \subsetneqq A^2 \subsetneqq \dots \subsetneqq A^{p-1} \subsetneqq A^p}$$

1°) Démontrons que $A^1 \subset A^2 \subset \dots \subset A^p$. Ceci résulte du fait que, pour tout $i \in I$,

$$A_i^1 \subset A_i^2 \subset \dots \subset A_i^p$$

En effet en vertu du théorème 3 et de son corollaire 2, pour tout $(j,i) \in I_2$, $X^i \circ X^j (S_o) \supset X^i (S_o)$, donc $A_i^1 \subset A_i^2$.

D'une manière générale, $A_i^q \subset A_i^{q+1}$ car pour tout $\alpha = (i_1, \dots, i_{q-1}, i) \in I_q$, soit $\beta = (i_1, \dots, i_{q-1}, j, i) \in I_{q+1}$ tel que $i \neq j \neq i_{q-1} \neq i$

on a $A_\alpha \subset A_\beta$ quand I a trois éléments au moins. Quand I n'a que deux éléments : $I = \{1,2\}$, I_q n'a que les deux éléments $\alpha_q = (1, 2, 1, \dots)$ et $\beta_q = (2, 1, 2, \dots)$ et il est alors aisé de démontrer par récurrence sur q que : $A_{\alpha_q} \subset A_{\beta_{q+1}}$ et $A_{\beta_q} \subset A_{\alpha_{q+1}}$

2°) Supposons maintenant que pour un entier r, $1 \leq r \leq p-1$, on ait $A^r = A^{r+1}$. Alors pour tout $i \in I$, $A_i^r = A_i^{r+1}$. Donc pour tous i,j dans I, $i \neq j$,

$$\varphi\ (A_i^r) = \varphi\ (A_j^r) = U$$

U est un sous-espace ayant les A_i^r pour bases et $U \supset S_o$. Comme S est fini, $V = U \cap S$ est fini et :

$$|V| = k.r\ (V) + |S_o| > k.r\ (V)$$

ce qui contredit le fait que S vérifie (P'_k)

Donc on a bien une suite strictement croissante.

Conclusion :

Comme S est fini et vérifie (P_k), la propriété (a_p) ne peut être vraie pour tout entier $p \geq 0$.

Donc il existe un entier $p \geq 0$ tel que :

et $\begin{cases} (a_q) & \text{est vraie pour} \quad q = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1 \\ (a_p) & \text{n'est pas vraie.} \end{cases}$

Construction de (Y_i) (L'on suppose $p \geq 1$)

Comme (a_p) n'est pas vérifiée,

$\exists\ \alpha = (i\ (1)\ ,\ldots,\ i(p)\ ) \in I_p$ et $\exists\ i\ (p+1) \in I$ tels que :

$$A_\alpha \not\subset \varphi\ (X^{i(p+1)})$$

Alors :

$$\forall x^p \in A_\alpha - \varphi\ (X^{i(p+1)}) \quad , \quad x^p \in X^{i(p)}$$

$$\forall x^{p-1} \in A_{\alpha(p-1)} \quad \text{tel que} \quad x^p \in X^{i(p)}\ (x^{p-1})$$

$$\forall x^k \in A_{\alpha(k)} \quad \text{tel que} \quad x^{k+1} \in X^{i(k+1)}\ (x^k)$$

pour $k = p-1\ ,\ p-2\ ,\ldots,\ 0$

on obtient une suite $(x^o, x^1, \ldots, x^p)$ telle que pour $k = 1, \ldots, p$, $x^k \in X^{i(k)}$ et $x^o_o \in S_o$

Considérons maintenant le processus d'échanges <u>successifs</u> dans les X^i où on fait passer x^p de $X^{i(p)}$ dans $X^{i(p+1)}$. D'où :

$$T_p^{i(p)} = X^{i(p)} - x^p \quad , \quad T_p^{i(p+1)} = X^{i(p+1)} + x^p$$

$$\text{et} \quad T_p^i = X^i \quad \text{pour } i \in I - \{i(p), i(p+1)\}$$

Puis par récurrence descendante, pour $k = p, p-1, \ldots, 1$

$$T_k^{i(k)} = T_{k+1}^{i(k)} - x^k \quad , \quad T_k^{i(k+1)} = T_{k+1}^{i(k+1)} + x^k$$

et $$T^i_p = X^i \quad \text{pour } i \in I - \{i(k), i(k+1)\}$$

Et finalement :

$$T_o^{i(1)} = T_1^{i(1)} + x^o \quad \text{et} \quad T_o^i = T_1^i \quad \text{pour } i \in I - i(1)$$

est telle que <u>$(Y^i) = (T_o^i)$ est solution</u>

En effet on vérifie par récurrence descendante sur k que :
pour $k = p, p-1, \ldots, 0$:

$$\forall x \in A^{k'-1} \quad , \quad T_k^{i(q)}(x) = X^{i(q)}(x)$$

(utiliser le théorème 1 et les $\varphi_A k$)
et en particulier pour $k = p, p-1, \ldots, 1$
$x^k \in A^k - A^{k-1}$

Donc les T_k^j sont bien des parties libres

C.Q.F.D.

<u>Remarque 1.-</u> Quand S vérifie (P_k), la suite $A^1 \subset \ldots \subset A^q \subset \ldots$ est strictement croissante tant qu'on peut la définir, et, au fur et à mesure de la construction, elle ne peut que s'allonger, un élément x de A^q ne pouvant passer que à A^{q+k} où $k > 0$.

Remarque sur cet algorithme fini.

Soit S une partie finie vérifiant $(\mathbb{P}_k)$ où k entier ≥ 2. Quand on utilise l'algorithme indiqué, on construit sans permutation :

X^1 φ-base de $\varphi(S)$ incluse dans S

X^2 φ-base de $\varphi(S - X^1)$ incluse dans $S - X^1$

X^p φ-base de $\varphi(S - \bigcup_{i=1}^{p-1} X^i)$ incluse dans $S - \bigcup_{i=1}^{p-1} X^i$

pour p = 1, 2, ..., k

On obtient ainsi sans permutation : $X = \bigcup_{p \in I} X^p \subset S$

Si on a de la chance, $X = S$ et l'algorithme n'est pas nécessaire ; mais en général $X \subsetneq S$. Cependant X est une fraction assez grande de S que nous allons essayer de minorer. En effet d'après $(\mathbb{P}_k)$:

$k\ |X^1| \geq |S|$ et de manière générale,

pour $p \in I$,

$$k\ |X^p| = k.r\ (S - \bigcup_{i=1}^{p-1} X^i) \geq |S| - \sum_{i=1}^{p-1} |X^i| \qquad (1)$$

Soit alors pour tout $p \in I$, $|X^p| = b_p\ |S|$: b_p est un rationnel ayant $|S|$ comme dénominateur, et $0 < b_p \leq 1$. Comme $|X| = |S|\ (b_1 + \ldots + b_k)$; il nous suffit de minorer $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$.

(1) s'écrit : $b_1 \geq 1/k, \ldots, b_p \geq 1/k\ (1 - \sum_{i=1}^{p-1} b_i), \ldots$

donc

$$b_2 \geq 1/k\ (1 - 1/k)\ ,\quad b_3 \geq 1/k\ (1 - 1/k)^2\ ,\ldots$$

et on démontre aisément par récurrence sur $p=1,\ldots, k$ que

$$b_p \geq 1/k\ (1 - 1/k)^{p-1} \qquad (2)$$

donc

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq 1 - (1 - {}^1/_k)^k$$

Or la fonction $(1 - {}^1/_x)^x$ croît quand x augmente $(x \geq 2)$ et quand x tend vers $+\infty$, elle tend vers ${}^1/_\ell$, d'où le résultat :

l'algorithme indiqué permet d'obtenir sans permutations $X = \bigcup X^i \; [i \in I]$ telle que :

$$\boxed{|X| \geq (1 - (1 - {}^1/_k)^k) \; |S|}$$

Si $k = 2$, on obtient ainsi au moins les 7/8-ième de S, quand k augmente, on en a une fraction qui va en diminuant, mais toujours supérieure à $A - {}^1/_\ell \geq 0{,}63$.

Cas où S est infini.

Soit S une partie infinie de E,S vérifiant (P_k). $\forall T \in \mathcal{F}(S)$, l'ensemble PL(T) des partitions $(T_i)_{i \in I}$ de T en k parties libres est non vide $(I = \{1, \dots, k\})$ et soient $T \subset U \in \mathcal{F}(S)$. $(U_i) \in PL(U) \longrightarrow (U_i \cap T) \in PL(T)$ est une application f_{TU} de PL(U) dans PL(T), le système $(PL(T), f_{TU})[T \in \mathcal{F}(S)]$ est un système projectif d'ensembles, et il nous suffit de démontrer que :

$$PL(S) = \text{lim proj.} \; (PL(T), f_{TU}) \; [T \in \mathcal{F}(S)] \neq \emptyset \, .$$

Nous avons déjà rencontré au chapitre V un problème analogue. La démonstration se fait de la même manière ainsi :

On se ramène à une limite projective surjective en sorte que :

$$PL(S) = \text{lim proj} \; (QL(T), g_{TU}) \quad [T \in \mathcal{F}(S)]$$

où $QL(T) \subset PL(T)$ et g_{TU} est la restriction de f_{TU} à QL(T) en procédant de la même manière :

$$\forall T, \; PL^1(T) = \cap f_{TU} \quad (PL(U)) \quad [U \in \mathcal{F}(S), \; U \supset T] \neq \emptyset$$

d'où un système projectif $(PL^1(T), f^1_{TU})$ où f^1_{TU} est la restriction de f_{TU}.

Puis $PL^2(T)$, ... et $QL(T) = \cap PL^n(T) \quad [n \geq 1] \neq \emptyset$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des familles $(X^i)_{i \in I}$ de parties de S telles que : $\forall T \in \mathcal{F}(S)$, $(X^i \cap T)_{i \in I} \in QL(T)$ (alors les X^i sont libres et $\cup S_i \; [i \in I] \subset S$). $\mathcal{S}$ ordonné par inclusion $((X^i) \subset (Y^i))$ est inductif, et (théorème de Zorn) <u>tout élément maximal $(M^i)_{i \in I}$ de $\mathcal{S}$ est tel que</u>

<u>$\cup M^i \; [i \in I] = S$, i. e. $(M^i) \in PL(S)$.</u>

En effet si $M = \cup M^i \subsetneq S$, soit $x \in S - M$. Pour tout $U \in \mathcal{F}(M)$, l'ensemble I_U des $i \in I$ tels que $U \cap S_i + x$ soit libre n'est pas vide, car $g_{U,U+x}$ est surjective. Donc $I_x = \cap I_U \; [U \in \mathcal{F}(M)] \neq \emptyset$ (car si $I_x = \emptyset$, on aurait $\emptyset = I_{U_1} \cap I_{U_2} \cap \ldots \cap I_{U_n} = I_{U_1 \cup U_2 \ldots \cup U_n}$) et $\forall i \in I_x$, $M^i + x$ est libre, et (M^i) n'est donc pas maximale.

Chap. VII Changements de bases. Applications aux matrices

Les théorèmes d'échange classiques montrent l'existence de bases ayant certaines propriétés, mais ne se préoccupent pas de la manière dont on peut les obtenir. Le but de cette section est d'étudier comment on peut construire de proche en proche une application u d'une base L dans une base L' en sorte que, par échanges successifs on ait toujours des bases. La première difficulté consiste à bien formuler la notion d'échanges successifs.

7.1.- Lemmes et remarques préliminaires

SoientX et L deux parties d'un ensemble E, $\leq$ un bon ordre sur X et u une application de X dans L. Le procédé d'échanges successifs entre X et L défini par $<$ et u se conduit par récurrence transfinie dans X ainsi :

- α étant le premier élément de X, $L^{\alpha} = L$
- si x a un prédécesseur y, $L^{x} = L^{y} - u(y) + y$
- si x n'a pas de prédécesseur, L^{x} est l'ensemble des $z \in X \cup L$ pour lesquels il existe $y > x$ tel que pour tout $t \in]y,x[$, $y \in L^{t}$.

L^{x} est bien défini par ces conditions car pour tout z il n'y a qu'un nombre fini (trois au plus) de passages (soustraction ou addition) effectifs. En effet :

1) Si $z \in X-L$, $z \in L^{t}$ pour tout $t > z$ (z est ajouté une fois pour toute)

2) Si $z \in L-X$, ou bien $u^{-1}(z) = \emptyset$ et $z \in L^{t}$ pour tout t

ou bien $u^{-1}(z) = \emptyset$ et $x°$ étant le plus petit élément de $u^{-1}(z)$, $\forall t \in]\leftarrow, x°]$, $z \in L^{t}$ et $\forall t \in]x°, \rightarrow[$, $z \notin L^{t}$

(Il se peut que $|u^{-1}(z)| > 1$, globalement on échange alors z et $u^{-1}(z)$, mais l'échange "successif" n'est "effectif" que pour $x°$)

3) Si $z \in X \cap L$, on note $x°$ le plus petit élément de $u^{-1}(z)$ s'il existe.

3a) Si $u^{-1}(z) = \emptyset$, alors $z \in L^{t}$ pour tout t

3b) Si $u^{-1}(z) \neq \emptyset$, et $x° \geq z$, $\forall t \in]\leftarrow, x°]$, $z \in L^{t}$ et $\forall t \in]x°, \rightarrow[$, $z \notin L^{t}$

3c) Si $u^{-1}(z) \neq \emptyset$, $x° < z$ et $u^{-1}(z) \subset]\leftarrow, z[$, alors :

$\forall t \in]\leftarrow, x°]$, $z \in L^{t}$; $\forall t \in]x°, z]$, $z \notin L^{t}$; $\forall t \in]z, \rightarrow[$, $z \in L^{t}$

3d) Si $u^{-1}(z) \neq \emptyset$, $x° < z$, $u(z) \neq z$ et $u(z) \notin]\leftarrow , z[$, en notant x^1 le plus petit élément x de $u^{-1}(z)$ tel que $x > z$, on a :

$\forall t \in]\leftarrow, x°]$, $z \in L^t$; $\forall t \in]x° , z]$, $z \notin L^t$; $\forall t \in]z, x^1]$, $z \in L^t$;
$\forall t \in]x^1 ,\rightarrow[$, $z \notin L^t$.

Il reste à étudier les cas où $z \in u^{-1}(z)$, i.e. tels que $u(z) = z$: on note alors $x°$ le plus petit élément de $u^{-1}(z)$ et x^1 le plus petit $x \in u^{-1}(z)$ tel que $x > z$ s'il existe .

3a') $u^{-1}(z) = \{z\}$: $z \in L^t$ pour tout t

3b') $x° = z$ et $x^1 > z$: alors $\forall t \leq x^1$, $z \in L^t$ et $\forall t > x^1$, $z \notin L^t$

3c') $x° < z$ et z est le plus grand élément de $u^{-1}(z)$ (x^1 n'existe pas) :

$\forall t \in]\rightarrow , x°]$, $z \in L^t$; $\forall t \in]x°, z]$, $z \notin L^t$; $\forall t \in] z,\rightarrow[$, $z \in L^t$

3d') $x° < z < x^1$: alors

$\forall t \in]\leftarrow, x°]$, $z \in L^t$; $\forall t \in]x°, z]$, $z \notin L^t$;$\forall t \in], z, x^1]$, $z \in L^t$;
$\forall t \in] x^1,\rightarrow[$, $z \notin L^t$

On constate un très grand arbitraire dans cette construction ; mais comme on veut obtenir en fin de compte une partie L^X contenant X, en ajoutant un plus grand élément x^ω à X, $L^X = L^{x\omega}$ si X n'a pas de plus grand élément et $L^X = L^{x\omega} = L^x - u(x) + x$ si X a x pour plus grand élément, en particulier L^X contient $X \cap L$; donc les cas 3b), 3d), 3b') et 3d') ne peuvent se produire. Les cas restant sont caractérisés par :

(Ech) $\forall z \in X \cap L$, $u^{-1}(z) \subset]\leftarrow , z]$

En outre il est naturel d'exiger que l'échange soit "éffectif", i.e.

- ou bien $u(x) \in L^x$ et $x \notin L^x - u(x)$
- ou bien $u(x) \notin L^x$ et $x \in L^x - L^x - u(x)$

Alors nécessairement dans les cas 2) et 3a) $u^{-1}(z)$ a au plus un élément ; dans le cas 3c) $u^{-1}(z) = \{x°\}$; dans le cas 3a') $u^{-1}(z) = z$; et le cas 3c') doit être écarté car $z \in L^z$, donc $L^{z+} \supsetneq L^z$. On constate alors aisément que :

<u>Un prodécé d'échanges successifs tel que $L^X \supset X$ et tel que</u> l'échange soit toujours effectif est caractérisé par le fait que : u est une injection et $\forall z \in X \cap L$, $u^{-1}(z) \leq z$

En outre dans ce cas, en examinant chacun des cinq cas 1), 2), 3a), 3c) et 3a'), on vérifie que :

$\forall z \in X \cup L$, $\forall t \in X + x^{\omega}$, $z \in L^t$ si et seulement si $z \in M^t$

où $M^t = L - u(X_t) + X_t$ où $X_t = \;]\leftarrow , t[$

Donc $\forall t \in X + x^{\omega}$, $L^t = M^t = L - u(X_t) + X_t$

Lemme 1 .- Soient X et L deux parties libres de (E , φ) telles que $X \subset \varphi(L)$, u une application de X dans L, $\leq$ un bon ordre sur X et $(L^x)_{x \in X+x^{\omega}}$ associé au procédé d'échanges successifs $(u , \leq)$ de X dans L. Alors $L^X = L^{x^{\omega}}$ contient X si et seulement si :

(Ech) $\quad \forall z \in X \cap L$, $u^{-1}(z) \subset \;]\leftarrow , z]$

En outre les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $(u , \leq)$ vérifie (Ech) et $\forall x \in X+x^{\omega}$, L^x est une base de $\varphi(L)$

b) $(u , \leq)$ vérifie (Ech') : $\forall x \in X \cap L$, $u(x) \notin u(X_x)$ où $X_x = \;]\rightarrow , x[$; et $\forall x \in X+x^{\omega}$, $M^x = L - u(X_x) + X_x$ est une base de $\varphi(L)$

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, u est une injection telle que : $\forall z \in X \cap L$, $u^{-1}(z) \leq z$ et pour tout $x \in X+x^{\omega}$, $L^x = L - u(X_x) + X_x$

a) $\Longrightarrow$ (b, u injectif et $L^x = M^x$ pour tout x)

En raisonnant dans le $\varphi_{L^x - u(x)}$-espace E, on constate que l'échange est effectif pour tout $x \in X$, et comme u vérifie (Ech), u est une injection telle que : $\forall z \in X \cap L$, quand $u^{-1}(z) \neq \emptyset$, $u^{-1}(z) \leq z$, et $\forall x \in X+x$, $L^x = M^x$. D'où aisément b).

b) $\Longrightarrow$ (a , u injectif et $L^x = M^x$ pour tout x)

Il suffit de démontrer que : u est une injection telle que : pour tout $z \in X \cap L$, $u^{-1}(z) \leq z$ quand $u^{-1}(z) \neq \emptyset$.

u est injective si et seulement si pour tout $x \in X$, $u(x) \notin u(X_x)$. Donc si u n'est pas injective, soit $x \in X$ le plus petit $y \in X$ tel que $u(y) \in u(X_y)$. Alors $X_x \neq \emptyset$, la restriction de u à X_x est injective et $u(x) \in u(X_x)$.
Or $M^{x+} = L - u(X_x + x) + X_x + x$ et $M^x = L - u(X_x) + X_x$ sont deux bases de $\varphi(L)$, et $M^{x+} = M^x + x$, donc $x \in M^x$: $x \in X \cap L$, ce qui contredit (Ech').

Pour tout $z \in X \cap L$ tel que $u^{-1}(z) \neq \emptyset$, $u^{-1}(z) \leq z$. Sinon soit x le plus petit $z \in X \cap L$ tel que $u^{-1}(z) \neq \emptyset$ et $u^{-1}(z) > z$. La restriction u^x de u a X_x

défini un procédé d'échanges successifs $(u^x, \leq$ sur $X_x)$ de X_x dans L tel que $X_x \subset L$ et (Ech). Donc $L^t = M^t$ pour tout $t < x$.

Comme $u(x) = x^1 \notin X_x + x$ (sinon, $u^{-1}(x) = x$ ou $x^1 \in X \cap L$ et $u^{-1}(x^1) = x > x^1$, et x ne serait pas minimal), $M^{x+} = M^x - u(x) + x$. Or si $x \in M^x$ (i.e. $x \notin u(X_x)$), $u(x) \notin M^x$, donc $u(x) \in u(X_x)$, ce qui contredit (Ech'). De plus si $x \notin M^x$, $x \in u(X_x)$; il existe donc $y_1 < x$ tel que $u(y_1) = x$, mais $u(x_1) = x$, ce qui contredit u injective.

C.Q.F.D.

<u>Remarque 1.-</u> Si u est injective et vérifie (Ech), u vérifie (Ech'); mais en général, quand u n'est pas injective, même si (Ech) est vérifiée, (Ech') ne l'est pas. Inversement, il est aisé de construire u injective (donc vérifiant (Ech')), mais ne vérifiant pas (Ech), et a fortiori u non injective. <u>Les conditions (Ech) et (Ech') sont donc indépendantes</u>.

<u>Remarque 2.-</u> La condition (Ech') s'introduit <u>naturellement</u> pour (M^x). En effet si (M^x) est une base de $\varphi(L)$ pour tout $x \in X + x^\omega$

- ou $x \in X - L$ et $u(x) \notin u(X_x) \cup X_x$
- ou $x \in X \cap L$ et $x \notin M$ et $u(x) \notin u(X_x) \cup X_x$
- ou $x \in X \cap L$ et $x \in M^x$, alors

ou bien $u(x) \in M^x$, donc $u(x) = x$

ou bien $u(x) \notin M^x$, alors on peut choisir arbitrairement $u(x)$ dans $L - M^x$, i.e. dans $u(X_x) - X_x$. (Ech') écarte donc cet arbitraire.

<u>Remarque 3.-</u> Si $(u, \leq)$ vérifie a) ou b), $u^{-1}(z) \neq \emptyset$ pour tout $z \in X \cap L$, car <u>ou bien</u> $u^{-1}(z) \cap X_z = \emptyset$ et <u>$u(z) = z$</u>, donc $u^{-1}(z) = z$, <u>ou bien $u^{-1}(z) < z$</u>.

7.2.- Changements de bases.

<u>Définition 1.-</u> X et L étant deux parties libres d'un φ-espace E telles que $X \subset \varphi(L)$, on appelle <u>changement de base</u> (en abrégé : <u>c d b</u>) de source X, de but dans L, tout terme $(u, \leq)$ formé d'une application u de X dans L et d'un <u>ordre total</u> $\leq$ sur X tels que : u soit une injection de X dans L vérifiant

$\forall x \in X$, $L - u(X_x) + X_x$ est une base de $\varphi(L)$ où $X_x =]\leftarrow, x[$

et $L - u(X) + X$ est une base de $\varphi(L)$.

Il résulte aisément du lemme 1 le :

Théorème 1.- Soient X et L deux parties libres de $(E\ ,\ \varphi)$ telles que $X \subset \varphi(L)$, $\leq$ un bon ordre sur X et u une application de X dans L. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $(u\ ,\leq)$ est un c d b de source X, de but dans L

2) $\forall x \in X + x^{\omega}$, L^{x} est une base de $\varphi(L)$
et $\forall x \in X \cap L$, $u^{-1}(x) \subset \ ]\leftarrow, x]$

3) $\forall x \in X + x^{\omega}$, $L - u(X_x) + X_x$ est une base de $\varphi(L)$
et $\forall x \in X \cap L$, $u(x) \notin u(X_x)$

et alors, pour tout $x \in X \cap L$, $u^{-1}(x) \neq \emptyset$ et $u^{-1}(x) \leq x$;

et $\forall x \in X + x^{\omega}$; $L^{x} = L - u(X_x) + X_x$

Justification de la terminologie : changements de bases.

Soit $(u\ ,\leq)$ un c d b de X dans L. Alors $B = L$ et $B' = L - u(X) + X$ sont deux bases de $\varphi(L)$, et u se prolonge trivialement, à savoir $v(x) = x$ pour tout $x \in L - u(X)$, en un c d b $(v\ ,\leq')$ de B sur B' pour tout bon ordre $\leq'$ sur B induisant celui de X.

v permet alors essentiellement de construire de proche en proche la base B' à partir de B, en n'ayant par échanges successifs que des bases intermédiaires ; mais seule la restriction de v à X, i.e. u, fait réellement des échanges, en sorte qu'il est techniquement préférable de raisonner sur u.

L'on note $\mathscr{C}\mathscr{D}$ l'ensemble des c d b de $(E\ ,\ \varphi)$. $\mathscr{C}\mathscr{D}$ est ordonné par la relation : $(u\ ,\leq)$ (resp. $(u',\leq')$) étant un c d b de X dans L (resp. de X' dans L'), on dit que $\boxed{(u,\leq)\quad (u',\leq')}$ et on lit u est restriction de u', ou u' prolonge u, si et seulement si :

$X \subset X'$, $L \subset L'$, $\leq'$ induit $\leq$ sur X
et u est la restriction de u' à X

Si $(u\ ,\leq)$ est un c d b de X dans L, tout $(v\ ,\leq')$ restriction de $(u\ ,\leq)$ est aussi un c d b . Inversement :

Lemme 2.- Tout c d b $(u\ ,\leq)$ de X dans L tel que X ne soit pas une base de $\varphi(L)$ se prolonge en un c d b $(v\ ,\leq')$ de $X + x$ dans L où : x est un élément quelconque de $\varphi(L) - \varphi(X)$ donné à priori et $\leq'$ le bon ordre sur $X + x$ prolongeant $\leq$ et pour lequel x est le plus grand élément.

En effet comme $L^x = L - u(X_x) + X_x$ est une base de $\varphi(L)$, il suffit de prendre $v(x) \in L^x_x$ tel que $v(x) \geqslant x$ si $x \in X \cap L$. Or :

si $x \in L^x$, on choisit $v(x) = x$

si $x \notin L^x$, comme $X + x$ est une partie libre, $L^x{}_x \not\subset X'_x$ et on choisit $v(x) \in L^x_x - X'_x$.

7.3.- Propriétés des c d b

Le principal intérêt des c d b est qu'on peut en démontrer l'existence dans un grand nombre de cas. En effet le lemme 2 permet de prolonger un peu tout c d b de X dans L quand $\varphi(X) \neq \varphi(L)$; mais nous allons voir que $\mathcal{C}\mathcal{B}$ n'est pas un ensemble inductif, en sorte que l'existence et la construction de c d b pour les bons ordres infinis est délicate. Cette étude semble bien augurer de l'existence de c d b pour tout bon ordre sur X. Voici une notion plus faible .

Soient X et L deux parties libres telles que $X \subset \varphi(L)$, $\leqslant$ un bon ordre sur X et u une injection de X dans L. $(u , \leqslant)$ est dit c d b f (c d b faible) de X dans L si :

$\forall x \in X$, la restriction de u à X'_x est un c d b de X'_x dans L.

Soient $\leqslant$ un bon ordre sur X, u une application de X dans L. $(u, \leqslant)$ est un c d b f de X dans L si et seulement si on a les propriétés :

(1) X et L sont des parties libres telles que $X \subset \varphi(L)$

(2) $\forall x \in X$, $L - u(X_x) + X_x$ et $L - u(X'_x) + X'_x$ sont des bases de $\varphi(L)$.

(3) $L - u(X) + X$ est une partie libre de $\varphi(L)$.

Donc un c d b f $(u , \leqslant)$ est un c d b si et seulement si $L - u(X) + X$ φ-engendre $\varphi(L)$ (c'est toujours le cas si $(X , \leqslant)$ a un plus grand élément).

Lemme 3.- Soit $(u , \leqslant)$ un c d b f de X dans L et a le premier élément de X. Si L_a a deux éléments au moins, i.e. si :

$$L_x = \{e_0 , e_1 ,\dots, e_q\} \quad \text{où } q \geq 1$$

et où $a = a_0 = u^{-1}(e_0) < a_1 = u^{-1}(e_1) < \dots < a_q = u^{-1}(e_q)$

Alors, notant W l'application de X dans L définie par :

$W(a_1) = e_0$, $W(a_0) = e_1$ et $W(x) = u(x)$ pour les autres ,

<u>$(W, \leq)$ est un c d b f de X dans L.</u>

Ceci est faux en général si on échange les valeurs de a_i et a_j où $(i,j) \neq \{0,1\}$.

<u>Démonstration.</u>

(1) et (3) de la proposition 1 sont vérifiées. Il suffit donc de démontrer que :

$\forall x \in X$, $L - W(X_x) + X_x$ et $L - W(X'_x) + X'_x$ sont des bases de $\varphi(L)$,

i.e. que :

$\forall x \in X,\ a_0 < x \leq a_1$, $N^x = L - W(X_x) + X_x$ est une base de $\varphi(L)$.

Or $\forall x \in X,\ a_0 < x \leq a_1$, $L^x = L - u(X_x) + X_x$ est une base de $\varphi(L)$, donc $N^x = L^x - e_1 + e_0$ est une φ-base de $\varphi(L)$ si et seulement si $e_0 \notin \varphi(L^x - e_1)$. Or si $e_0 \in \varphi(L^x - e_1)$, comme $L_a + a - \{e_0 , e_1\} \subset L^x - e_1$,

$L_a + a - e_1 \subset \varphi(L^x - e_1)$

donc $e_1 \in \varphi(L^x - e_1)$, ce qui contredit L^x libre.

L'on sait que en général les "valeurs" de a_i et a_j ne peuvent être permutées dans les autres cas (considérer les matrices inversibles).

<u>Lemme 4.-</u> Soit $(u , \leq)$ un c d b f de X dans L et B une $\varphi_{L-u(X)+X}$-base de $\varphi(L)$ incluse dans $u(X) - X$. Si u n'est pas c d b , $b \neq \emptyset$ et pour $b \in B$, soit $u^{-1}(b) = x_0$, <u>il existe une suite $(x_n)_{0 \leq n < \omega}$ strictement croissante d'éléments de X telle que</u> :

1°) <u>(x_n) soit cofinale à X</u>

et 2°) l'application v : $v(x_n) = u(x_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$

et <u>$v(x) = u(x)$ pour les autres x, définisse un c d b f $(v , \leq)$ de X dans L pour lequel on a</u> :

a) $\forall x \in X$, $\exists y \in X$, $y \geq x$ tel que $v(x) = u(y)$

et b) $L - v(X) + X = (L - u(X) + X) + b$

<u>démonstration.</u> Posons $u_0 = u$. En raisonnant dans le $\varphi_{X_{x_0}}$-espace E, et en utilisant le lemme 3, on déduit que :

$\exists\, x_1 > x_0$ tel que l'application u_1 :

$u_1(x_0) = u(x_1)$, $u_1(x_1) = u(x_0)$ et $u_1(x) = u(x)$ pour les autres (x_1 est unique si on le choisit successeur de x_0 dans $u^{-1}(L_{x_0} - X_{x_0})$), définisse $(u_1, \leq)$ c d b f de X dans L.

On itère avec x_1, d'où u_2 et x_2 à partir de u_1 et x_1, puis avec $[x_2, u_2]$ ... . On construit ainsi de proche en proche une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante dans X telle que, pour tout entier $n \geq 1$, l'application u_n :

$$\begin{cases} u_n(x_p) = u(x_{p+1}) & \text{pour } p = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_n(x_n) = b & \text{et } u_n(x) = u(x) \text{ pour les autres} \end{cases}$$

définisse un c d b f $(u_n, \leq)$ de X dans L.

Pour tout $n \geq 0$, la restriction W_n de u_n à X_{x_n} définit un c d b de X_{x_n} dans L. On a ainsi une suite croissante de c d b $(W_n, \leq)$, donc :

$W = \bigcup_n W_n$ est un c d b f de $X' = \bigcup_{n\geq 0} X_{x_n}$ dans L.

Si $(x_n)_{n\geq 0)}$ n'est pas cofinale à X, soit $x = \operatorname{Sup} x_n\ [0 \leq n < \omega]$.

On a $X_x = X'$ et $L - W(X_x) + X_x$ est φ-libre. Or $L - u(X_x) + X_x$ est une φ-base de $\varphi(L)$, d'où la contradiction puisque

$$L - W(X_x) + X_x \supsetneq L - u(X_x) + X_x$$

D'où 1°) et 2°), a) et b), et le :

<u>Théorème 2.-</u> L'ensemble des c d b sur (E,φ) muni de la relation d'ordre de prolongement <u>n'est pas inductif</u>. Plus précisément soit $(u_i, \leq_i)_{i\in I}$ une famille bien ordonnée de c d b de X_i dans L_i. Alors <u>si le caractère final*</u> <u>de I n'est pas dénombrable</u>,
$(u = \bigcup_i u_i, \leq = \bigcup_i \leq_i)$ <u>est un c d b</u> de $X = \bigcup_i X_i$ dans $L = \bigcup L_i$;
mais si le caractère final de I est dénombrable, alors $(u, \leq)$ est un c d b f de X dans L qui, en général, n'est pas un c d b.

---

*) voir A. Tarski, quelques théorèmes sur les alephs, Fund. Math. Vol. 7 (1929) p. 2

<u>Théorème 3.-</u> Soient X et L deux parties libres telles que $X \subset \varphi(L)$.
Alors <u>pour tout bon ordre</u> $\leqslant$ sur X tel que :

$$\boxed{\alpha = \text{Ord}\ (X\ ,\leqslant) < \omega_1}$$

il existe une injection u au moins de X dans L telle que $(u\ ,\leqslant)$ soit un c d b de X dans L.

<u>Corollaire.-</u> Soient X et L deux parties libres telles que $X \subset \varphi(L)$, $\leqslant$ un bon ordre sur X et Y un segment de X. Alors, si $\text{Ord}\ (X - Y) < \omega_1$ <u>on peut prolonger tout c d b</u> $(u\ ,\leqslant_Y)$ <u>de Y</u> dans L en un c d b $(u',\leqslant)$ de X dans L d'au moins une manière.

Il suffit de raisonner dans E considéré comme φ_Y-espace.

<u>Démonstration du théorème 3.</u>

L'on va raisonner par récurrence transfinie dénombrable sur α. Supposons le démontré pour tout ordinal $\lambda < \alpha$. Si α a un prédécesseur, il suffit d'appliquer le lemme 2. Sinon il existe une suite strictement croissante $(\alpha_n)_{0 \leqslant n < \omega}$ d'ordinaux $\alpha_n < \alpha$ telle que :

$$\alpha = \text{Sup}\ \alpha_n \qquad [0 \leqslant n < \omega]$$

Soient L' une φ_X-base de $\varphi(L)$ incluse dans L, $Y = L - L'$: on a $L' = L - Y$. Soit en outre $\leqslant$ un bon ordre sur X tel que $\text{Ord}\ (X, \leqslant) = \alpha$.
Alors si

X_0 est le segment de X isomorphe à α_0

...

X_n est le segment de $X - \bigcup\limits_{p<n} X_p$ isomorphe à $\alpha_n - \alpha_{n-1}$

...

$(X_n)_{0 \leqslant n < \omega}$ est une partition de X.

Raisonnons dans le φ_0-espace E où $\varphi_0 = \varphi_{L'}$: il existe u_0 c d b de X_0 dans Y.

...

Raisonnons dans le φ_n-espace E où $\varphi_n = \varphi_{n-1\ X_{n-1}}$, il existe u_n c d b de X_n dans $Y - \cup\, u_p(X_p)$ $[0 \leqslant p < n]$.

...

Finalement $u = \oplus\, u_n$ est un c d b f de X dans L tel que $u(X) \subset Y$. Donc $L - u(X) + X$ est une partie libre contenant $L - Y + X$: c'est une base de $\varphi(L)$.

C. Q. F. D.

7.4.- Application aux matrices.

Soit $A = (a_i^j)$ $[(i,j) \in I \times J]$ une matrice sur un corps k, i.e. une application de $I \times J$ dans k telle que :

$$\forall j \in J \quad , \quad A^j = (a_i^j) \ [i \in I] \in k^{(I)}$$

(ce sont les vecteurs lignes). On note $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique de $k^{(I)}$ et on suppose ici $J \subset I$ systématiquement.

Posant $L = \{e_i \ / \ i \in I\}$ et $X = \{A^j \ / \ j \in J\}$, l'on sait que M est régulière si et seulement si X est libre (famille libre) ce que l'on suppose désormais.

Soit un bon ordre $\leq$ sur J, d'où
$J = O(\alpha)$ et $X = (A^{\nu}) \quad 0 \leq \nu < \alpha$

Toute injection u de X dans L définit une injection σ de J dans I par $u(A^{\nu}) = A^{\sigma(\nu)}$ et inversement.

Alors $(u, \leq)$ est un c d b si et seulement si :

(1) $\forall \nu \in O(\alpha)$, $L - u(\{A^{\lambda} \ / \ \lambda < \nu\}) + \{A^{\lambda} \ / \ \lambda < \nu\}$
est une base de $k^{(I)}$ ainsi que $L - u(X) + X$.

Si ν n'a pas de prédécesseur, on a une condition "forte", mais si ν a un prédécesseur, soient ν_{-1} , ν_{-2} , ..., ν_{-p} les prédécesseurs successifs de ν (où ν_{-p} n'a plus de prédécesseur), alors (1) pour ν est équivalente à :

$$\det (a_i^j) \quad [\sigma^{-1}(i), \ j = \nu_0 , \nu_{-1} , \ldots, \nu_{-p}] \neq 0$$

Du théorème 3 on déduit alors

Proposition 1 : Soit $A = (a_i^j)$ $[(i,j) \in I \times J]$ où $J = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\} \in I$ une matrice régulière sur un corps k. Alors il existe au moins une permutation σ des vecteurs colonnes de A (i.e. une injection σ de J dans I) telle que :

a) Pour tout entier $p \geq 0$, notant $J_p = \{0, 1, \ldots p\}$, on a

$$\det \ (a^j_{\sigma(i)}) \qquad [(i,j) \in J_p \times J_p] \neq 0$$

et b) la matrice extraite $A_0 = (a^j_{\sigma(i)}$ $[(i,j) \in J \times J]$ soit inversible.

Quand J est fini, on retrouve un résultat classique.

Remarque .- Soit A une matrice carrée d'ordre n : $I = J = \{1, \dots, n\}$
La donnée d'un bon ordre $\leqslant$ sur J est équivalente à celle d'une permutation σ_c de J et celle d'une injection de I dans J à une permutation σ_p de I. Alors "(σ_c , σ_p)" est un c d b f pour tout couple de permutations si et seulement si tous les déterminants mineurs de A sont non nuls, ce qui est en particulier le cas quand les (a_i^j) $[(i,j) \in I \times J]$ sont algèbriquement libres sur le corps premier k_o .

7.5.- Notions plus fortes

Définition 2.- Soient X et L deux parties libres de (E,φ) telles que $X \subset \varphi(L)$ et u une injection de X dans L. On dit que u est un c d b F (c d b fort) de X dans L si :

$$\forall Y \subset X \quad , \quad L - u(Y) + Y \quad \text{est une base de } \varphi(L).$$

Soient X et L deux parties libres de (E,φ) telles que $X \subset \varphi(L)$ et u une application de X dans L. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) u est un c d b F de X dans L

(2) Pour tout ordre total $\leqslant$ sur X, $(u , \leqslant)$ est un c d b de X dans L.

(3) Pour tout bon ordre sur X, $(u , \leqslant)$ est un c d b de X dans L.

En général les c d b ne sont pas des c d b F. On le constate aisément même pour X ayant deux éléments.

La propriété pour u d'être un c d b F n'est pas de caractère fini en ce sens que si :

$$\forall Y \in \mathcal{F}(X) \ , \ u/_Y \text{ est un c d b F de } Y \text{ dans } L,$$

Alors u n'est pas en général un c d b F (ainsi considérer $L = (e_n)_{n \geqslant 0}$ base canonique de $K^{(N)}$,

$$X = \{x_n \mid x_n = e_{n+1} - e_n \quad \text{et} \quad n \geqslant 0\}$$

et pour tout $n \geqslant 0$, $u(x_n) = e_{n+1})$.

Reprenons les notations du paragraphe 7.4 :

Une matrice $A = (a_i^j)$ $[(i,j) \in I \times J]$ est dite forte s'il existe une injection σ de J dans I qui fait de u un c d b F de X dans L.

Il est aisé de vérifier la :

<u>Proposition 2.-</u> Une matrice $A = (a_i^j)$ $[(i,j) \in I \times J]$, où J est fini, est forte si et seulement si il existe une injection σ de J dans I (d'où permutation des vecteurs colonnes) telle que tous les déterminants mineurs :

$$\det\ (a^j_{\sigma(i)})\qquad [(i,j) \in K^2]$$

où K est une partie quelconque de J, sont non nuls.

Toutes les matrices régulières 2×2 sont fortes.

Les matrices régulières 3×3 non fortes sont toutes, à une permutation des lignes ou des colonnes près, et à une constante multiplicative non nulle près, de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1, & a, & 0 \\ b, & ab, & \lambda b \\ 0, & a\mu, & \lambda\mu \end{pmatrix} \qquad a\, b\, \lambda\, \mu \neq 0$$

Ces matrices sont caractérisées par le fait que :

1°) deux de ses éléments sont nuls

et 2°) deux de ses déterminants mineurs 2×2 sont nuls et deux seulement.

<u>Démonstration</u> : Si A est une matrice régulière 3×3 :

- on peut, par permutation des colonnes ou des linges, rendre les éléments de la diagonale principale non nuls.

- il y a au plus trois déterminants mineurs 2×2 nuls.

Une matrice régulière 3×3 non forte est donc équivalente à :

$$A' = \begin{pmatrix} 1, & a & \lambda \\ b, & ab, & \mu \\ \lambda' & \mu' & c \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a\, b\, c \neq 0 \\ (b\lambda - \mu)\ (\mu' - a\lambda') \neq 0 \end{array}$$

alors A' est faible si et seulement si :

$\lambda\mu = 0$, $\lambda'\ \mu' = 0$ et un second déterminant mineur 2×2 extrait de manière symétrique par rapport à la diagonale principale est nul.

<u>Matrices régulières 4×4 non fortes</u>

1°) <u>Si une ligne ou une colonne a trois zéros</u>, les matrices 4×4 régulières non fortes sont, à une permutation des lignes ou des colonnes près, et à une constante multiplicative non nulle près de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & a & 0 \\ \beta & b & ab & \lambda b \\ \gamma & 0 & a\mu & \lambda\mu \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} c & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & b & ab & \lambda b \\ 0 & 0 & a\mu & \lambda\mu \end{pmatrix}$$

où $a\ b\ c\ \lambda\ \mu \neq 0$

2°) <u>Sinon</u> : on vérifie que toutes les matrices régulières 4×4 ayant huit éléments nuls sont fortes. Voici un exemple de matrice non forte :

$$A = \begin{pmatrix} a\,a', & 0\ , & a'\ , & 0 \\ 0 & b\,b', & b'\ , & 0 \\ 0\ , & 0\ , & c\ , & cc' \\ a\,d\ , & b\,d\ , & 0 & -dc' \end{pmatrix}$$

où $a\ b\ c\ d\ a'\ b'\ c'\ \neq 0$

3°) Voici un exemple de matrice non forte n'ayant aucun coefficient nul :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Index terminologique

Index des notations

Les symboles, notations et terminologies de Bourbaki seront utilisées sans rappel, ainsi que les notations ensemblistes suivantes :

Notation utilisée	Notation Bourbakiste correspondante
$X+Y$	$X \cup Y$
$X+x$	$X \cup \{x\}$
$X-x$	$X - \{x\}$
$X-x+y-z$	$(((X - \{x\}) + \{y\}) - \{z\})$

Elles seront utilisées quand aucune confusion ne sera à craindre avec des lois de composition.

En outre ω_α est l'ordinal initial d'indice α, $\mathcal{U}_\alpha$ est le cardinal aleph α, $\omega_{\bar\alpha}$ le caractère final de ω_α et si $a = \mathcal{U}_\alpha$, $\bar a = \mathcal{U}_{\bar\alpha}$ est le cardinal de finalité de $\mathcal{U}_\alpha$. Tout ordinal ν est l'<u>ensemble</u> bien ordonné des ordinaux qui lui sont strictement inférieurs.

BIBLIOGRAPHIE

I Mémoires, notes et publications

[1] HALL P., On representations of subsets, J. London Math. Soc., 10, 1934, p. 26

[2] HALMOS P.R. et VAUGHAN H.E., The marriage Problems, Amer. J. of Math., 72, 1950, p. 26.

[3] HAUPT O., NOBELING et PAUC, 181, 1939, pp. 193-217. Uber abhangigkeitsraüme, J. für die reine und ang. Math,

[4] JONSSON B., Lattice-Theoretic approach to projective and affine geometry, Symposium on the Axiomatic Method, North-Holland publ. Comp., Amsterdam, 1959, p. 188.

[5] KONIG D. et VALKO S., über mehrdeutige Abbildungen von Mengen, Math.Annalen, 95, 1926, p. 135.

[6] KUHN H.W., The Hungarian method for the assignement problem, Naval research quarterley, 2, 1955, p. 83.

[7] MAC LANE S., A lattice formulation for transcendance degrees and p-bases, Duke Math. J., 4, 1938, pp. 455-468

[8] ORE O., Graphs and matching theorems, Duke Math. J., 22, 1955, p. 625

[9] RADO R., A theorem on independence relations, Quaterley J. of Math. 13, 1942, pp. 83-89

[10] RADO R., Axiomatic treatment of rank of infinite sets, Canadian J. of Math., 1, 1949, p. 337

[11] WHITNEY H., On the abstract properties of linear dependence, Amer. J. of Math., 57, 1935, p.p. 509-533.

[12] WHITNEY H., Non-separable and planar graphs, Trans. of the Amer. Math. Soc., 34, 1932, p. 339.

[13] ROBERT P., Theorie générale de la disjonction, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 258, 1964, p.p.34-37.

[14] ROBERT P., Sur un problème de disjonction (ensembliste, algébrique, etc.), Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 258, 1964, p.p.6045-6048.

[15] TARSKI A., Quelques théorèmes sur les aleph, Fund. Math. Vol. 7 (1925)

[16] SAMUEL P., Modèles Booléiens et Hypothèse du Continu (Résultats de P. Cohen par la méthode de P. Scott et R. Solovay), Séminaire Bourbaki, 1966/67. 317

[17] COHEN P., The independence of the continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 50 (1963), 1143-1158 et 51 (1964), 105-110.

[18] ROBERT P., Méthodes fonctorielles sur l'axiomatique des systèmes générateurs, des rangs,..., Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 260, 1965, pp. 4291-4294

[19] ROBERT P., idem , 260, 1965, pp. 4661-4664

[20] ROBERT P., idem, 260, 1965, pp. 5983-5986

[21] ROBERT P., Cours d'Algèbre, Faculté des Sciences de Caen, 1966-67.

[22] SMITH Jürgen , Eine verallgemeinerte Wohlordnung und die Endlichkeitsbedingungen der Wohlordnungstheorie, Arch, Math. 6 (1955) - 374-381

II Traités et Monographies

[A] ARTIN E., Algèbre géométrique, Interscience Publ. New-York, 1957, chap.II, pp. 51-104

[B] BERGE C., Théorie des graphes et ses applications, 2e éd. Dunod, 1963

[C] BOURBAKI N., Eléments de Mathématiques. La référence [C; V, 4] indique le chapitre 4 du libre V de la première partie. Il ne sera pas fait de références à la seconde partie. Acutalités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris. Dernières éditions au 1-10-66,

[D] DENJOY A., L'énumération transfinie, Gauthier-Villars, Paris, 1946

[E] DUBREIL-JACOTIN M.L., LESIEUR L. et CROISOT R., Théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[F] HALL M. J^r., The théory of groups, Macmillan C°, New-York, 1959.

[G] KONIG D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936 (Akäd. Verl. M.B.H.) et New-York, 1950 (Chelsea).

[H] SAMUEL P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Springer-Verlag, Ergebnisse der Math., 1955.

[I] STEINITZ E., Algebraische Theorie der Körper, édité par R. Baer et H.Hasse, 1930.

[J] VAN DER WAERDEN , Modern algebra, 2e éd., Berlin, 1940

[K] WEIL A., Foundations of algebraic geometry, A.M.S., Colloq. publ.,XXXIX,1962

[L] SAMUEL P. et ZARISKI O., Commutative Algebra, Van Nostrand, 1958.

[M] GODEMENT R., Topologie algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, A.S.I. 1252 , Paris 1958

[N] TSCHEBOTAROW et SCHWERDFEGER, Grundzüge der Galois'schen Theorie, Noordhoff, 1950, Groningen.

[O] BAER R., Linear algebra and Projective Geometry, Acad. Press. Inc. Pub., New-York, 1952

[P] BENABOU J., Structures algébriques dans les catégories, Thèse, 1966.

[Q] COHN P.M. Universal Algebra, Harper and Row, New-York, 1965.

[R] EHRESMANN C., Catégories et Structures, Dunod, Paris, 1965.

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne - 26-8-68 - n° 3075