

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GEORGES GRAS

**Problèmes relatifs aux  $l$ -classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier  $l$**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 37 (1974), p. 91-100

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1974\\_\\_37\\_\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__91_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLEMES RELATIFS AUX  $\ell$ -CLASSES D'IDEAUX  
DANS LES EXTENSIONS CYCLIQUES RELATIVES DE DEGRE PREMIER  $\ell$

par

Georges GRAS

-:-:-

I. Introduction.

Etant donné une extension de corps de nombres  $K/k$  à groupe de Galois  $H$  cyclique d'ordre premier  $\ell$ , on peut se poser la question : que signifie l'expression "étude du  $\ell$ -groupe des classes d'idéaux  $\mathfrak{H}(K)$ ", d'une telle extension ?

Cela peut vouloir dire :

- i) donner des contraintes sur les  $H$ -modules qui réalisent le  $\ell$ -groupe des classes de  $K$  ;
- ii) trouver des algorithmes de calcul du nombre de  $\ell$ -classes d'une extension  $K/k$  ;
- iii) donner des expressions du  $\ell$ -rang ou simplement des majorations ;
- iv) caractériser l'existence de  $\ell$ -classes non invariantes par  $H$ , etc...

On se propose de décrire ici une méthode d'attaque susceptible d'englober une grande partie de ces différents aspects : certains d'entre eux ont déjà été étudiés mais en général par des méthodes sans lien commun les unes avec les autres (consulter la bibliographie donnée dans [4]). Nous retrouverons aussi des études générales dues principalement à Inaba [8] et Fröhlich [2].

Donnons d'abord les six résultats suivants comme "échantillonnage" (pour une idée plus complète des applications possibles, se reporter à [4] et [5]) :

Résultat 1. (Hasse [6], Kaplan [9]). Soit  $p \equiv 1 \pmod{8}$  (alors  $p = 2x^2 - y^2$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ ). Si  $|x| \equiv 1 \pmod{4}$  alors 8 divise le nombre de classes de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$  (cf. [4] chap.V, [7] et [9] pour d'autres résultats analogues).

Résultat 2. (Damey et Payan [1]). Les 4-rangs des groupes des classes de  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$  et  $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$  diffèrent d'une unité au plus (le plus grand rang étant pour

le corps imaginaire).

Résultat 3. ([4]). Les  $2^{t-1}$  corps cubiques dont le conducteur  $p_1 p_2 \dots p_t$  est produit de  $t$  nombres premiers donnés (en convenant que  $p_t = 9$  si 3 est ramifié) ont un 3-rang égal à  $2(t-1)$  si et seulement si  $p_i$  est reste cubique modulo  $p_j$  pour tout  $i, j$ ,  $i \neq j$  (cf [4] chap.VI pour des résultats plus précis concernant les corps cubiques).

Résultat 4. ([4]). Parmi les deux corps cubiques de conducteur  $p_1 p_2$ , si l'un a une classe d'ordre 9, il en est de même pour l'autre.

Résultat 5. ([5] et [10]). Soit  $K/\mathbb{Q}$  une extension à groupe de Galois diédral d'ordre 6 et soit  $L$  l'un des corps cubiques non galoisien contenus dans  $K$ ; faisons les hypothèses :

- (i) les  $t$  nombres premiers totalement ramifiés dans  $L/\mathbb{Q}$  ne sont pas décomposés dans le sous-corps quadratique  $k$  de  $K$ ;
- (ii) 3 ne divise pas le nombre de classes de  $k$ ;

alors le 3-rang du groupe des classes de  $L$  est égal à  $t-1-a$  et celui de  $K$  à  $2(t-1-a)$ ,  $3^a$  étant l'indice, dans le groupe des unités de  $k$ , du sous-groupe de celles qui sont normées d'un élément de  $K$  (ce résultat, (cf. [5]), est la généralisation d'un résultat de Kobayashi [10]; depuis, Kobayashi a étendu ce type de résultat à d'autres sortes d'extensions de degré  $\ell$  non cycliques ([11]).

Résultat 6. Soient  $K$  et  $\hat{K}$  les 2 corps cubiques cycliques de conducteur  $37 \cdot 991$ ; alors  $\mathfrak{h}(K)$  et  $\mathfrak{h}(\hat{K})$  sont respectivement isomorphes à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ .

Nous allons voir comment on peut rendre un peu plus systématique la démonstration de ces divers types de résultats.

## II. Etude générale.

Soient  $K/k$  une extension cyclique de degré premier  $\ell$ , à groupe de Galois  $H$ ,  $A_K$  et  $A_k$  les anneaux d'entiers de  $K$  et  $k$ ,  $\mathcal{J}(K)$  et  $\mathcal{J}(k)$  (resp.  $\mathcal{J}_0(K)$  et  $\mathcal{J}_0(k)$ ) les groupes d'idéaux fractionnaires (resp. principaux au sens restreint) de  $K$  et  $k$ ,  $E_K$  et  $E_k$  les groupes des unités et enfin  $\mathfrak{h}(K)$  et  $\mathfrak{h}(k)$  les  $\ell$ -groupes des classes au sens restreint de  $K$  et  $k$ . On considère la

filtration suivante :  $\mathfrak{H}_1 = \text{Ker}(\sigma-1)^i$  où  $\sigma$  est un générateur de  $H$  ; (cf. travaux antérieurs de Inaba, Fröhlich, Leopoldt..., où l'on étudiait aussi cette filtration ou encore la filtration des  $\mathfrak{H}(K)^{(\sigma-1)^i}$  qui est "duale" de la précédente).

Le premier "stade",  $\mathfrak{H}_1$ , est bien connu grâce à la théorie des genres et à la formule de Chevalley que l'on peut transformer dans le cas restreint ([4]) :

$$|\mathfrak{H}_1| = \frac{|\mathfrak{H}(k)| \ell^{t-1}}{(E_k^+ : E_k^+ \cap \text{NK}^*)}$$

où  $t$  est le nombre d'idéaux premiers ramifiés dans  $K/k$  et  $E_k^+$  le sous-groupe de  $E_k$  formé par les unités totalement positives dans  $k$ .

Il est donc naturel d'étudier les quotients  $\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i$  puisque pour  $i = 0$  on a une "formule". La connaissance des ordres  $|\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i|$  et de celle de l'action de la norme  $v = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{\ell-1}$  entraîne la connaissance de la structure de  $\mathfrak{H}(K)$ . Par exemple, si  $\mathfrak{H}(K)^v = \{1\}$ , le  $\ell^q$ -rang  $R_q$  de  $\mathfrak{H}(K)$  est

$$R_q = \sum_{i=(q-1)(\ell-1)}^{q(\ell-1)-1} \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i) \quad (\text{cf. [4] et [12]}).$$

Il suffit alors d'avoir un moyen pour déterminer :

(i)  $\mathfrak{H}_{i+1}$  à partir de  $\mathfrak{H}_i$  par un groupe d'idéaux convenable noté  $\mathcal{J}_{i+1}$  ( $\mathfrak{H}_i$  étant défini par  $\mathcal{J}_i$ ),

(ii)  $|\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i|$  de façon directe à partir de  $\mathfrak{H}_i$  par une formule du style de celle de Chevalley.

1) Premier problème : détermination de  $\mathfrak{H}_{i+1}$ . On a le théorème suivant qui en donne une solution :

Théorème 1. Soit  $\mathfrak{H}$  un sous-H-module de  $\mathfrak{H}(K)$  et soit  $\tilde{\mathfrak{H}} = \{h \in \mathfrak{H}(K), h^{\sigma-1} \in \mathfrak{H}\}$ . Pour tout sous-H-module  $\mathcal{J}$  de  $\mathfrak{J}(K)$  dont l'image dans  $\mathfrak{H}(K)$  est  $\mathfrak{H}$  et qui est tel que

$$\mathcal{J} \cap \mathcal{J}(K)^{\sigma-1} = \mathcal{J}^{\sigma-1},$$

on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow N\mathcal{J}_0/I^\ell \rightarrow N\mathcal{J} \cap N\mathcal{J}_0(K)/I^\ell \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1 \rightarrow 1,$$

où  $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cap \mathcal{J}_0(K)$  et  $I = N\mathcal{J} \cap \mathcal{J}_0(k)$ .

L'homomorphisme  $\bar{\phi}$  permet de construire  $\tilde{\mathfrak{H}}$  à partir de  $\mathfrak{H}$  (si  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$ ,

$\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_{i+1}$ ) : Etant donné  $\alpha \in N\mathcal{G} \cap N\mathcal{G}_0(K)$ , on peut écrire, d'une part,  $\alpha = N\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A} \in \mathcal{J}$ , et, d'autre part,  $\alpha = N(\alpha A_K)$ ,  $\alpha \in K^*$ ;  $\frac{\mathfrak{A}}{(\alpha)}$  est de norme (1) donc  $\mathfrak{A} = (\alpha A_K)^{\sigma^{-1}}$ , avec  $\mathfrak{B} \in \mathcal{J}(K)$ ; par définition  $\varphi(\alpha)$  est l'image dans  $\tilde{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$  de la classe de  $\mathfrak{B}$ .

Ce théorème ne donne pas  $|\tilde{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}|$  directement.

2) Deuxième problème : Calcul de  $|\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i|$ . Soit  $\mathcal{J}_i$  un groupe d'idéaux représentant  $\mathfrak{H}_i$ . On considère la suite exacte :

$$1 \rightarrow E_k^+ \rightarrow k^{*+} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{J}_0(k) \rightarrow 1,$$

et on pose  $\Lambda_i = \Psi^{-1}(I_i)$  ( $I_i = N\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_0(k)$ ).

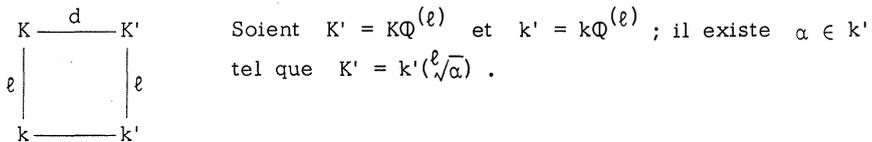
Proposition. On a  $|\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i| = \frac{|\mathfrak{H}(k)|}{|N\mathfrak{H}_i|} \frac{\ell^{t-1}}{(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^*)}$ .

Cette formule se déduit de la suite exacte du théorème 1 ; elle réalise une généralisation de la formule de Chevalley (pour  $\mathfrak{H}_0 = (1)$  on a  $\Lambda_0 = E_k^+$  et on retrouve cette dernière).

Reste à trouver un moyen systématique pour déterminer  $(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^+)$ . Le problème n'est pas très difficile car il se traite localement (par le théorème des normes de Hasse).

On procède par adjonction des racines  $\ell^e$  de l'unité.

Application de la théorie de Kummer. On a la situation suivante :



La ramification dans  $K'/k'$  se déduit de celle de  $K/k$  et inversement, de façon triviale. De plus un nombre  $a \in k$  est norme dans  $K/k$  si et seulement s'il est norme dans  $K'/k'$ , ce qui fait que l'indice  $(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^*)$  peut se calculer à l'aide du symbole de Hilbert dans  $k'$  : on aura  $a \in NK^*$  si et seulement si  $(\alpha, a)_p = 1$  pour toute place  $p$  dans  $k'$ . Or, par suite du fait que  $a \in k$  et que  $K'/k$  est abélienne, le symbole  $(\alpha, a)_p$  ne dépend que de la place  $\mathfrak{p}$  de  $k$  au-dessous de  $p$  ([4]). On peut alors énoncer :

Théorème 2. Soit  $q(a_1), \dots, q(a_n)$  une base de  $\Lambda_1/\Lambda_1^\ell$  ( $a_k \in \Lambda_1$ ) ; alors  $|\mathbb{H}_{i+1}/\mathbb{H}_i| = \frac{|\mathbb{H}(k)|}{|N_{\mathbb{H}_i}|} \ell^{t-1-r}$  , où  $r$  est le rang du système linéaire  $\prod_{k=1}^n (\alpha, a_k)_{\mathbb{P}_j}^{x_k} = 1$  , les  $\mathbb{P}_j$  étant les idéaux premiers ramifiés. En outre, on a  $r \leq t-1$  (si  $t \geq 1$ ) et  $r = 0$  si  $t = 0$  .

Remarquons que :

(i) on se limite aux  $\mathbb{P}_j$  ramifiés car les éléments de  $\Lambda_1$  sont déjà des normes d'idéaux, il n'y a donc pas de conditions locales pour les places inertes ou décomposées ;

(ii) le fait que  $r \leq t-1$  ( $r = 0$  si  $t = 0$ ) provient de la formule du produit :  $\prod_p (\alpha, a)_p = 1$  , qui donne ici  $\prod_{\mathbb{P}} (\alpha, a)_{\mathbb{P}}^{n_{\mathbb{P}}} = 1$  , où  $n_{\mathbb{P}}$  est le nombre de places  $p$  divisant  $\mathbb{P}$  dans  $K/k$  ; d'où une relation non triviale, car les  $n_{\mathbb{P}}$  sont premiers à  $\ell$  .

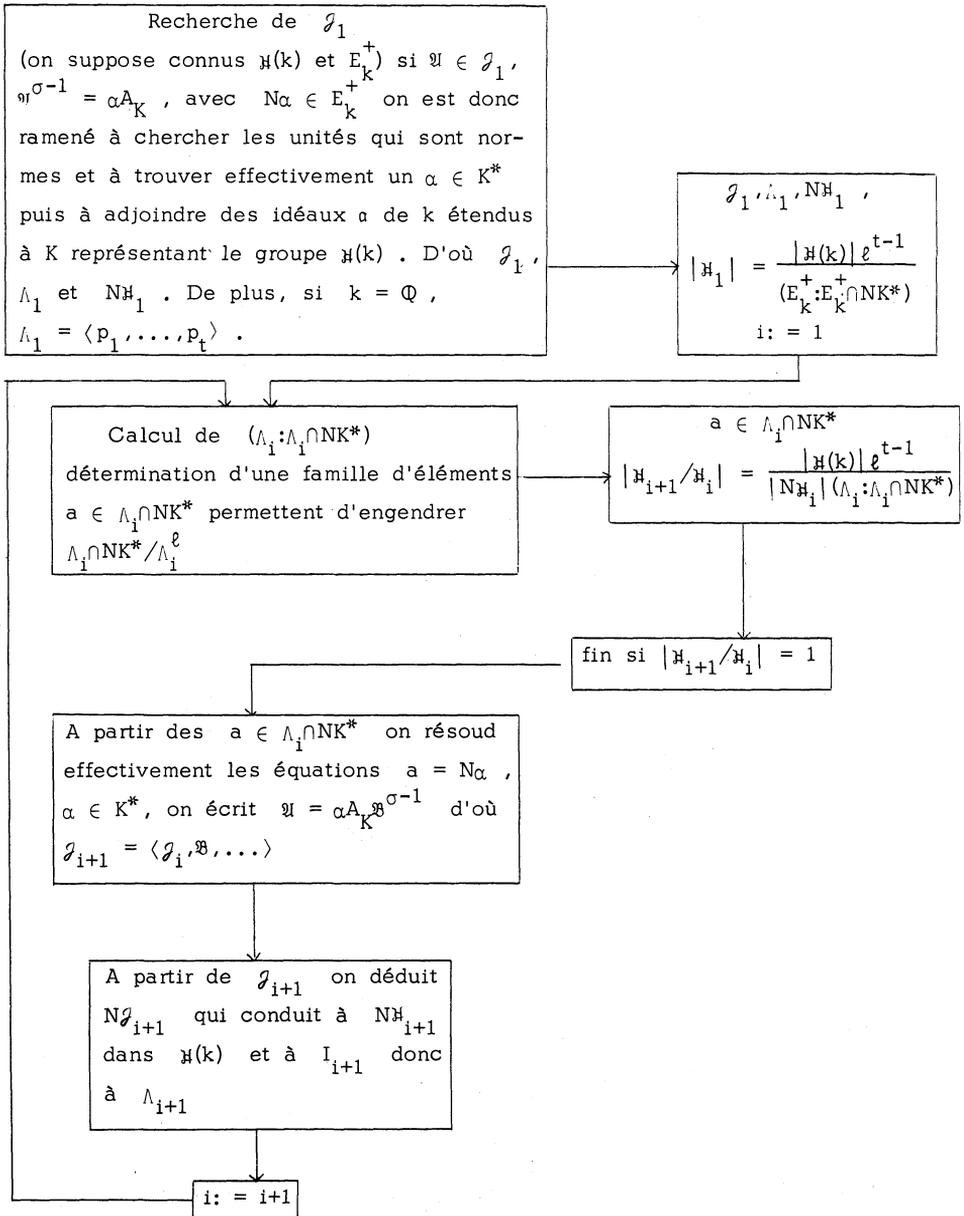
### III. Conséquences.

A partir de ce qui précède, on peut déduire des résultats de deux sortes :

(i) Calculs numériques de nombres de  $\ell$ -classes. (Résultat 6 par exemple, tables numériques de [4]),

(ii) Des énoncés généraux du style de ceux mentionnés au début (Résultats 1 à 5).

1) Algorithmes numériques. En pratique, on utilise l'algorithme général figuré par le schéma ci-dessous (et qui peut être utile aussi dans un cas "non numérique") :



Remarque : Il ne faut pas oublier de vérifier la condition  $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}(K)^{\sigma^{-1}} = \mathcal{J}_1^{\sigma^{-1}}$ ; cette contrainte n'est pas trop grande en pratique : il suffit de résoudre les équations  $N\alpha = a$  de telle manière que  $\mathfrak{P}$  soit par exemple premier (infinité de solutions).

Exemple : On considère l'extension cubique cyclique de  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ,  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{182})$ . On vérifie facilement que 3 est ramifié dans  $K/k$ , que 2 est inerte dans  $k/\mathbb{Q}$ , que 7 et 13 sont décomposés dans  $k/\mathbb{Q}$  et que si  $\zeta_3$  est une racine cubique de l'unité, primitive, alors  $\zeta_3 \in k$  et n'est pas norme dans  $K/k$ . On note  $\tau$  l'élément d'ordre 2 de  $\text{Gal}(k/\mathbb{Q})$  prolongé à  $K$ . On notera  $\mathfrak{P}_2 = 2A_k$ ,  $\mathfrak{P}_3 = \sqrt{-3}A_k$ ,  $\mathfrak{P}_7 = (2+\sqrt{-3})A_k$ ,  $\mathfrak{P}_7^\tau = (2-\sqrt{-3})A_k$ ,  $\mathfrak{P}_{13} = (1+2\sqrt{-3})A_k$  et  $\mathfrak{P}_{13}^\tau = (1-2\sqrt{-3})A_k$  les idéaux premiers de  $k$  ramifiés dans  $K/k$ .

D'après la formule de Chevalley, on a  $|\mathfrak{H}_1| = \frac{3^{t-1}}{(E_k : E_k \cap NK^*)} = 3^4$  et, d'après [4], toute classe invariante est, ici, classe d'un idéal invariant ; par conséquent, il existe deux relations indépendantes non triviales entre les classes des six idéaux premiers de  $K : \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_7, \mathfrak{P}_7^\tau, \mathfrak{P}_{13}$  et  $\mathfrak{P}_{13}^\tau$  ramifiés dans  $K/k$  et qui engendrent par définition le groupe  $\mathcal{J}_1$ .

Nous allons rechercher ces relations (ceci n'est nullement nécessaire pour déterminer  $\Lambda_1 \cap NK^*$  et  $\mathcal{J}_2$ ; c'est seulement un renseignement supplémentaire) :

La première est donnée par  $\sqrt[3]{2 \cdot 7 \cdot 13} A_K = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_7^{1+\tau} \mathfrak{P}_{13}^{1+\tau}$ ; la seconde s'obtient à partir d'une unité du corps (via le théorème 90 de Hilbert) : on trouve que  $\eta = -17 + 3\sqrt[3]{182}$  est une unité de  $K$  de norme relative 1. On a donc  $\eta = \varphi^{\sigma^{-1}}$  avec, par exemple,  $\varphi = 1 + \eta + \eta\eta^\sigma$ ; on vérifie facilement que  $\frac{\varphi}{3}$  est encore un entier et que sa norme relative est

$$N_{K/k} \left( \frac{\varphi}{3} \right) = -7 \cdot 13 (8 + 3\sqrt{-3}) = -7 \cdot 13 (2 - \sqrt{-3})(1 + 2\sqrt{-3});$$

il en résulte que  $\frac{\varphi}{3} A_K = \mathfrak{P}_7^{1+2\tau} \mathfrak{P}_{13}^{2+\tau}$ . On en déduit qu'une  $\mathbb{F}_3$ -base de  $\mathfrak{H}_1$  serait

$$cl_K(\mathfrak{P}_2), cl_K(\mathfrak{P}_3), cl_K(\mathfrak{P}_7) \text{ et } cl_K(\mathfrak{P}_7^\tau).$$

Le groupe  $\Lambda_1$  associé à  $\mathcal{J}_1$  est donc  $\Lambda_1 = \langle \zeta_3, 2, 3, \alpha, \alpha^\tau, \beta, \beta^\tau \rangle$  avec  $\alpha = 2 + \sqrt{-3}$ ,  $\alpha^\tau = 2 - \sqrt{-3}$ ,  $\beta = 1 + 2\sqrt{-3}$ ,  $\beta^\tau = 1 - 2\sqrt{-3}$ ; le calcul des symboles de Hilbert  $(182, u)_p$ ,  $u \in \Lambda_1$ ,  $p$  idéal premier de  $k$  ramifié dans  $K/k$ , conduit à la matrice suivante (en notation additive) à coefficients dans  $\mathbb{F}_3$  :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

chaque ligne étant formée des symboles  $(182, \zeta_3)_p$ ,  $(182, 2)_p$ ,  $(182, 3)_p$ ,  $(182, \alpha)_p$ ,  $(182, \alpha^\tau)_p$ ,  $(182, \beta)_p$  et  $(182, \beta^\tau)_p$  où  $p$  parcourt l'ensemble  $\{p_2, p_3, p_7, p_7^\tau, p_{13}, p_{13}^\tau\}$ . Le rang de cette matrice est 4 ; les trois solutions indépendantes du système sont, par exemple :

$$\begin{aligned} 2\alpha^{1+\tau} \beta^{1+\tau} &= 182 \in NK^*, \\ \alpha^{1+2\tau} \beta^{2+\tau} &= 7.13(8+3\sqrt{-3}) \in NK^*, \\ \beta^{1+\tau} &= 13 \in NK^* ; \end{aligned}$$

les deux premières provenant des relations entre les "classes ambiges" trouvées plus haut.

On aura donc (théorème 2) :  $|\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1| = 3$  soit  $|\mathfrak{H}_2| = 3^5$  ; c'est-à-dire que le 3-rang de  $\mathfrak{H}(K)$  est égal à 5 .

Déterminons alors  $\mathfrak{H}_2$ . Pour trouver un  $H$ -module  $\mathcal{J}_2$  associé à  $\mathfrak{H}_2$ , il suffit de résoudre l'équation  $N_{K/k}(\kappa) = 13$ ,  $\kappa \in K^*$  (les deux autres relations indépendantes trouvées devraient être considérées si l'on ne savait déjà qu'elles proviennent de la principalité d'idéaux : autrement dit, chaque fois que l'on a une égalité de la forme  $\mathfrak{u} = \alpha$ ,  $\mathfrak{u} \in \mathcal{J}_1$  par exemple, la relation associée  $\mathfrak{u} = \alpha A_K \mathfrak{B}^{\sigma^{-1}}$  conduit ici à  $\mathfrak{B} = A_K$ ).

Pour  $N_{K/k}\kappa = 13$ , on trouve  $\kappa = 5.13 + 9\sqrt{182} + 5(\sqrt{182})^2$  qui a pour polynôme irréductible :

$$X^3 - 3.5.13X^2 - 3.5.13.61X - 13.61^3 ;$$

on en déduit que  $\kappa A_K = \mathfrak{P}_{13}^{1+\tau} \mathfrak{P}_{61}^{(1+2\sigma)(1+\tau)}$ , où  $\mathfrak{P}_{61}$  est un idéal premier au-dessus de 61 (61 est totalement décomposé dans  $K/\mathbb{Q}$ ). Comme  $\frac{\kappa}{61}$  est de norme 13, on écrit  $\frac{\kappa}{61} A_K = \mathfrak{P}_{13}^{1+\sigma} \mathfrak{B}^{\sigma^{-1}}$ , soit, ici  $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_{61}^{\sigma+\tau+\sigma\tau}$  ; d'où

$$\mathcal{J}_2 = \langle \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_7, \mathfrak{P}_7^\tau, \mathfrak{P}_{13}, \mathfrak{P}_{13}^\tau, \mathfrak{P}_{61}^{\sigma+\tau+\sigma\tau}, \dots \rangle \text{ et } \Lambda_2 = \langle \zeta_3, 2, 3, \alpha, \alpha^\tau, \beta, \beta^\tau, 61 \frac{1+9\sqrt{-3}}{2} \rangle.$$

Enfin, le calcul des symboles  $(182, 61 \frac{1+9\sqrt{-3}}{2})_p$  montre que la matrice associée à  $\Lambda_2$  se déduit de la précédente en rajoutant la colonne

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  ce qui fait que le rang de cette nouvelle matrice est 5 , donc que  $|\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_2| = 1$  donc que  $\mathfrak{H}(K) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$  .

2) Résultats généraux. Pour les démonstrations des résultats 1 à 5 se reporter à [4] et [5] ; on peut remarquer que ces démonstrations sont basées sur le fait que, lorsque  $k = \mathbb{Q}$  , le groupe  $\Lambda_1$  est particulièrement simple : c'est le groupe  $\langle p_1, \dots, p_t \rangle$  engendré par les nombres premiers ramifiés. De toute façon, si  $k$  est différent de  $\mathbb{Q}$  , le groupe  $\Lambda_1$  est canonique et ne dépend que de la ramification dans  $K/k$  , des unités de  $k$  et des classes dans  $k$  .

-:-:-

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. DAMEY et J.J.PAYAN. - Existence et construction des extensions galoisiennes et non abéliennes de degré 8 d'un corps de caractéristique différente de 2. J. reine angew. Math., 244 (1970).
- [2] A. FRÖHLICH. - The generalization of a theorem of L. Redei's. Quart. J. of Math. Oxford (2), 5 (1954), 130-140.
- [3] A. FRÖHLICH. - The genus field and genus group in finite number fields. Mathematika, 6 (1959), 40-46 et 142-146.
- [4] G. GRAS. - Sur les  $\ell$ -classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier  $\ell$  . Thèse, Grenoble (1972), à paraître aux Ann. Inst. Fourier (1973), (t.23, fasc.3 et 4).
- [5] G. GRAS. - Sur les  $\ell$ -classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de  $\mathbb{Q}$  de degré premier impair  $\ell$  à clôture galoisienne diédrale de degré  $2\ell$  . A paraître.
- [6] H. HASSE. - Über die Klassenzahl des Körpers  $P(\sqrt{-p})$  mit einer Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{2^3}$  . Aequationes Math., 3 (1969).
- [7] H. HASSE. - Über die Teilbarkeit durch  $2^3$  der Klassenzahl imaginärquadratischer Zahlkörper mit genau zwei verschiedenen Diskriminanten primeilern. J. reine angew. Math., 241 (1970).
- [8] E. INABA. - Über die struktur der  $\ell$ -klassengruppe zyklischer Zahlkörper von Primzahlgrad  $\ell$  . J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. I 4 (1940), 61-115.

- [9] P. KAPLAN. - Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique et réciprocity biquadratique. J. Math. Soc. of Japan, 25 (1973)
- [10] S. KOBAYASHI. - On the 3-rank of the ideal class groups of certain pure cubic fields: J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. I A 18 (à paraître).
- [11] S. KOBAYASHI. - On the  $\varrho$ -class rank in some algebraic number fields (communication personnelle, à paraître).
- [12] H.W. LEOPOLDT. - Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern. Math. Nachr., 9 (1953), 351, 362.

-:-:-

Georges GRAS  
Institut de Mathématiques Pures  
Laboratoire C.N.R.S. associé n°188  
BP 116

38402 ST MARTIN D'HERES