

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARIE-JOSE FERTON

**Sur l'anneau des entiers d'extensions cycliques  
d'un corps local**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 37 (1974), p. 69-74

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1974\\_\\_37\\_\\_69\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__69_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ANNEAU DES ENTIERS D'EXTENSIONS CYCLIQUES D'UN CORPS LOCAL

par

Marie-José FERTON

-:-:-

(Les résultats exposés ont été obtenus avec la collaboration de Madame F. Bertrandias).

1. Préliminaires sur l'anneau des entiers d'une extension galoisienne.

1.1. Si  $k$  est le corps des quotients d'un anneau de Dedekind  $A$ , et si  $K/k$  est une extension galoisienne de groupe de Galois  $G$ , alors la clôture intégrale de  $A$  dans  $K$ ,  $B$ , est un  $A[G]$ -module.  $B$  est un  $A[G]$ -module projectif si et seulement si  $K/k$  est une extension modérément ramifiée. Pour que  $B$  soit un  $A[G]$ -module libre il est donc nécessaire que l'extension  $K/k$  soit modérément ramifiée ; cette condition n'est pas suffisante en général, elle l'est cependant dans le cas où  $k$  est un corps local [8].

Pour étudier la structure de  $B$  sans faire d'hypothèses sur la ramification dans  $K/k$ , on introduit le sous-anneau  $\mathfrak{B}$  de  $k[G]$  défini par :

$$\mathfrak{B} = \{ \lambda \in k[G], \lambda.B \subset B \}. \quad [7]$$

On montre que  $\mathfrak{B}$  est un ordre de  $A$  dans  $k[G]$ , on l'appelle l'ordre associé à  $B$  dans  $k[G]$ .  $B$  est donc un  $\mathfrak{B}$ -module, on est alors amené à chercher pour quelles extensions,  $K/k$ ,  $B$  est un  $\mathfrak{B}$ -module libre.

On sait par exemple, que  $B$  est libre sur son ordre associé dans les cas suivants :

- a)  $k = \mathbb{Q}$ , corps des rationnels, et  $G$  est abélien [6].
- b)  $k = \mathbb{Q}$  et  $G$  est un groupe diédral d'ordre  $2p$  [1].

On s'intéresse ici aux extensions  $K/k$  d'un corps local  $k$ .

1.2. Pour étudier  $B$  comme  $\mathfrak{B}$ -module, on introduit un idéal à gauche de  $\mathfrak{B}$  dans  $k[G]$  qui soit isomorphe à  $B$  en tant que  $\mathfrak{B}$ -module.

A étant un anneau de Dedekind, il existe un élément  $\theta$  de B qui engendre une base normale de  $K/k$ .

Pour un tel  $\theta$ , on définit :

$$\mathfrak{A}_\theta = \{\lambda \in k[G], \lambda.\theta \in B\}.$$

On voit que  $B = \mathfrak{A}_\theta.\theta$ , que  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}_\theta$  et que  $\mathfrak{A}_\theta$  est un idéal à gauche de  $\mathfrak{B}$  [3]. D'autre part, on démontre que :

PROPOSITION 1. - Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) B est un  $\mathfrak{B}$ -module libre.
- (ii) Il existe  $\theta$  tel que  $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{B}$ .
- (iii) Il existe  $\theta$  tel que  $\mathfrak{A}_\theta$  soit un anneau.
- (iv) Quel que soit  $\theta$ ,  $\mathfrak{A}_\theta$  est un idéal principal de  $\mathfrak{B}$ .

## 2. Cas d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local.

2.1. Dans ce paragraphe,  $k$  est un corps local de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle  $p$ ,  $p$  nombre premier.  $K$  est une extension cyclique de degré  $p$  de  $k$ . On note  $\sigma$  un générateur du groupe de Galois  $G$  et  $f = \sigma^{-1}$  dans  $k[G]$ .  $e$  est l'indice de ramification absolu de  $k$  et  $t$  le nombre de ramification de  $K/k$ ; on sait que  $-1 \leq t \leq \frac{pe}{p-1}$  [9]. On supposera dans la suite que  $t \geq 1$ .

Posons  $t = a_0 p + a$ ,  $a_0$  étant la partie entière de  $\frac{t}{p}$ ,  $a_0 = \lfloor \frac{t}{p} \rfloor$ ; on vérifie que  $a$  peut prendre toutes les valeurs de 0 à  $p-1$  [9].

Pour  $a = 0$ , on a  $t = \frac{pe}{p-1}$  et B est libre sur  $\mathfrak{B}$  qui coïncide dans ce cas avec l'ordre maximal dans  $k[G]$ .

Pour  $a \neq 0$ , on détermine un  $\mathfrak{A}_\theta$  et l'ordre associé  $\mathfrak{B}$ .  $\pi$  et  $\varpi$  désignant respectivement des uniformisantes de B et de A, on a :

2.2. PROPOSITION 2. - Si  $t \geq 1$  et  $t \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\theta = \pi^a$  engendre une base normale de  $K/k$  et  $\mathfrak{A}_\theta$  est le sous A-module de  $k[G]$  engendré par la famille  $(\frac{f^i}{\varpi^{v_i}})_{0 \leq i \leq p-1}$  où  $v_i = \lfloor \frac{it+a}{p} \rfloor = ia_0 + \lfloor \frac{(i+1)a}{p} \rfloor$ .

PROPOSITION 3. - L'ordre associé  $\mathcal{B}$  est le sous A-module de  $k[G]$  engendré par la famille  $(\frac{f_i}{w_i})_{0 \leq i \leq p-1}$  où  $n_i = \text{Min}_{0 \leq j \leq p-1-i} (v_{i+j} - v_j)$ .

Remarque 1 : L'idempotent  $\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i$  de  $k[G]$  appartient à  $\mathcal{B}$  si et seulement si :

$$\frac{pe}{p-1} - 1 \leq t \leq \frac{pe}{p-1} .$$

Dans ces conditions, on dira que l'indice  $t$  est "presque maximal" [5].

2.3. Cas où l'indice de ramification  $t$ , n'est pas "presque maximal".

On démontre que pour  $a \neq 0$  :

PROPOSITION 4. -

- a) Si  $\theta = \pi^a$ ,  $\mathfrak{A}_\theta = \mathcal{B}$  si et seulement si  $a$  divise  $p-1$ .
- b) Si  $t < \frac{pe}{p-1} - 1$  et si  $a$  ne divise pas  $p-1$ ,  $\mathfrak{A}_\theta$  n'est pas un idéal principal de  $\mathcal{B}$ .

Ces résultats se résument dans le théorème :

THEOREME 1. -

- a) Si  $t \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $B$  est libre sur  $\mathcal{B}$ .
- b) Si  $t \not\equiv 0 \pmod{p}$  et si  $t < \frac{pe}{p-1} - 1$ , pour que  $B$  soit libre sur  $\mathcal{B}$ , il faut et il suffit que  $a$  divise  $p-1$ .

Remarque 2 : Si l'on introduit le développement en fraction continue de  $\frac{t}{p}$ ,

$$\frac{t}{p} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0, a_1, \dots, a_n] \text{ avec } a_n > 1 ,$$

on remarque que l'on a  $a = 0$  où  $a$  divise  $p-1$  si et seulement si  $n \leq 2$ .

COROLLAIRE (d'après une remarque de J. MARTINET). - Si  $t$  vérifie les conditions :  $t \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $t < \frac{pe}{p-1} - 1$  et si  $a$  ne divise pas  $p-1$ ,  $B$  n'est pas un  $\mathcal{B}$ -module projectif.

Ceci donne une réponse à la question posée dans [7].

2.4. Cas où l'indice de ramification est "presque maximal", c'est-à-dire où

$$\frac{pe}{p-1} - 1 \leq t \leq \frac{pe}{p-1} .$$

Le résultat est le suivant [2 bis] :

THEOREME 2. - Si t est "presque maximal", pour que B soit libre sur son ordre associé  $\mathcal{B}$ , il faut et il suffit que, dans le développement en fraction continue de  $\frac{t}{p}$ , n soit inférieur ou égal à 4 (voir remarque 2, pour la définition de n).

Exemples : Si  $p = 7$ ,  $t = 5$ ,  $e = 5$ , t est "presque maximal" et  $n = 3$ , B est donc une  $\mathcal{B}$ -module libre.

Si  $p = 13$ ,  $t = 8$ ,  $e = 8$ , t est "presque maximal" et  $n = 5$ , B n'est donc pas libre sur son ordre associé.

Le problème est donc entièrement résolu pour les extensions cycliques de degré premier d'un corps local ; la rédaction détaillée des démonstrations se trouve dans [4] .

### 3. Cas d'une extension cyclique de degré $p^2$ d'un corps local.

Dans ce paragraphe  $K/k$  est une extension cyclique de degré  $p^2$  d'un corps local  $k$  de caractéristique résiduelle  $p$  et d'indice de ramification absolu  $e$ .  $\sigma$  est un générateur du groupe de Galois  $G$ .  $t_1$  et  $t_2$  désignant les deux nombres inférieurs de ramification de l'extension, on sait que :

$$t_1 \leq \frac{pe}{p-1} , \quad t_2 \leq \frac{p^2e}{p-1} \quad \text{et} \quad t_1 \equiv t_2 \pmod{p} .$$

On note  $a$  l'entier compris entre 0 et  $p-1$  tel que  $t_1 \equiv a \pmod{p}$  .

On montre que les idempotents  $\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p^2-1} \sigma^i$  et  $\frac{T_1}{p} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{ip}$  appartiennent à l'ordre associé à B dans  $k[G]$ ,  $\mathcal{B}$ , si et seulement si :

$\frac{pe}{p-1} - 1 \leq t_1 \leq \frac{pe}{p-1}$  ; dans ce cas on dira que la fonction indice est "presque maximale" [5] .

En utilisant une méthode analogue à celle employée dans le cas cyclique de degré premier, on obtient les résultats suivants, qui ne sont que partiels :

PROPOSITION 5. - On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\frac{1}{2} \frac{pe}{p-1} < t_1 < \frac{pe}{p-1} - 1, \quad t_1 \not\equiv t_2 \pmod{p^2} \quad \text{et} \quad t_2 \equiv a(1+p) \pmod{p^2};$$

alors, quel que soit a, B n'est pas un  $\beta$ -module libre.

PROPOSITION 6. - On suppose la fonction indice "presque maximale" et  $t_1 \not\equiv t_2 \pmod{p^2}$  ; alors si  $a = 0$  ou si a divise  $p-1$ , B est un  $\beta$ -module libre.

Pour les corps locaux,  $k$ , d'indice de ramification absolu  $e = 1$ , on a pour toute extension cyclique de degré  $p^2$ ,  $K/k$ ,  $t_1 = 1$  et  $t_2 = 1+p$  ; la fonction indice est donc "presque maximale" et par suite  $B$  est toujours libre sur son ordre associé.

--:--:--

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.M. BERGE. - Sur l'arithmétique d'une extension diédrale. Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n°14.
- [2] F. BERTRANDIAS et M.J. FERTON. - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Sér.A, p. 1330-1333.
- [2bis] F. BERTRANDIAS, J.P. BERTRANDIAS et M.J. FERTON. - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Sér.A, p.1388-1391.
- [3] M. DEURING. - Algebren. Berlin, Springer Verlag, 1935.
- [4] M.J. FERTON. - Sur l'anneau des entiers d'extensions cycliques de degré  $p$  et d'extensions diédrales de degré  $2p$  d'un corps local. (Thèse 3e cycle, Math. Univ. Grenoble).
- [5] H. JACOBINSKI. - J. reine angew. Math., t.213, 1964, p.151-164.
- [6] H.W. LEOPOLDT. - J. reine angew. Math., t.201, 1959, p.119-149.
- [7] J. MARTINET. - Anneau des entiers d'une extension galoisienne considéré comme module sur l'algèbre du groupes de Galois. Colloque de Théorie des Nombres [1969-Bordeaux], Bull. Soc. Math. France, Mémoire 25, 1971, p.123-126.
- [8] E. NOETHER. - J. reine angew. Math., t.267, 1932, p. 147-152.

- [9] J.P. SERRE. - Corps locaux. Hermann, Paris, 1962.

--:--:--

Université scientifique et médicale de  
Grenoble

Institut de Mathématiques Pures

Associé au C.N.R.S. n° 188

BP 116

38402 ST MARTIN D'HERES