Mémoires de la S. M. F.

François Dress

Sur le problème de Waring à exposant réel (résultats de Dress et Polzin)

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 55-58
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__55_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 55-58

SUR LE PROBLEME DE WARING A EXPOSANT REEL (résultats de Dress et Polzin)

par

François DRESS

-:-:-:-

1. GENERALITES SUR LE PROBLEME DE WARING.

Etant donné un nombre réel $c > 1$, on cherche à représenter tout entier $m \geq 0$ comme somme

$$m = \sum_{i=1}^{r} [a_i^c] \quad ,$$

les a_i étant des entiers positifs ou nuls ($[\ \ ]$ est la notation de la partie entière). S'il existe un entier r tel que tout entier $m \geq 0$ s'écrive sous la forme précédente, on note alors :

- $g(c)$ le plus petit r tel que tout entier m soit somme de r termes $[a_i^c]$;
- $G(c)$ le plus petit r tel que tout entier m "suffisamment grand" (i.e. $m \geq M_r(c)$) soit somme de r termes $[a_i^c]$.

On a évidemment $2 \leq G(c) \leq g(c)$.

Pour c entier, on retrouve le problème de Waring classique (sur ce sujet, consulter par exemple Ellison [4]).

Pour c réel quelconque, Segal a montré ([6], 1934) l'existence de G et de g (existences qui sont bien sûr liées) et donné pour $G(c)$ une majoration, de l'ordre de $c^2 2^c$. Cette majoration vaut 18 au voisinage de 1 , mais on peut déduire presque immédiatement d'un article antérieur ([5], 1933) le résultat $G(c) = 2$ ou 3 valable pour $1 < c < 3/2$.

Il ne semble pas qu'il y ait eu de majorations meilleures jusqu'au travail de Deshouillers ([1], 1972) qui utilise des estimations de sommes trigonométriques et obtient $G(c) = 2$ pour $1 < c < 4/3$ (il donne par ailleurs une majoration explicite équivalente à $4c \operatorname{Log} c$ pour $c > 12$).

Signalons à ce propos la conjecture très raisonnable : $G(c) = [c] + 1$ pour tout c non entier (on sait que ce résultat est impossible pour c entier pour des raisons de congruences).

Pour ce qui est de $g(c)$, comme les résultats de Deshouillers fournissent une valeur explicitement calculable pour la borne $M_2(c)$ au-delà de laquelle tout entier est somme de 2 termes $[a_i^c]$, sa détermination complète entre 1 et 4/3 est réduite à des calculs finis, quoiqu'impraticables en fait. Tout au plus sait-on qu'il existe un intervalle $1 < c < 1+\varepsilon$ où $g(c) = 2$. Enfin, pour les valeurs de c petites, mais au-delà de 4/3, il n'existe aucune "bonne" majoration de $g(c)$.

2. ESTIMATIONS DE G ET DE g POUR $1 < c < 3/2$.

Le principe de notre étude est le suivant : montrer que tout entier $m(\geq M_3(c))$ est assez proche d'une somme $a_1^c + a_2^c$ pour que, après passage aux parties entières, il suffise d'un troisième terme pour obtenir l'égalité

$$m = [a_1^c] + [a_2^c] + r \text{ , avec } r = 0 = [0^c] \text{ , } 1 = [1^c] \text{ ou } 2 = [2^c] \text{ .}$$

Les valeurs a_1 et a_2 ne sont pas quelconques : si m est compris entre $2n^c$ et $2(n+1)^c$, on prend $a_1 = n+h$, $a_2 = n-h$, avec h "petit" devant n.

On utilise alors des développements en séries avec des majorations effectives des restes, ce qui redonne le théorème de Segal :

<u>pour</u> $c \in \,]1\,,\,3/2[$, $G(c) \leq 3$, <u>i.e.</u> $G(c) = 2$ <u>ou</u> 3 .

De ces premiers calculs, on déduit trois inégalités dépendant de deux paramètres, et la recherche approchée d'un point triple (effectuée sur ordinateur) permet ensuite d'obtenir une valeur simple de la borne $M_3(c)$ au-delà de laquelle tout entier est somme de 3 termes $[a_i^c]$. On montre enfin (soit en utilisant la théorie additive de Schnirelman - théorèmes de Mann et Dyson -, soit par une étude directe) que tout entier de 1 à $M_3(c) - 1$ est également somme de 3 termes $[a_i^c]$, soit :

<u>pour</u> $c \in \,]1.\,,\,1.445]$, $g(c) \leq 3$, <u>i.e.</u> $g(c) = 2$ <u>ou</u> 3 .

(La valeur 1.445 n'a pas été dépassée pour des raisons de gigantisme des calculs, mais nous conjecturons allègrement que toute valeur de c inférieure à

3/2 pourrait être atteinte).

Dans une deuxième partie de notre étude nous recherchons, pour une suite convenable d'intervalles en c de la forme $[\mathrm{Log}\ m_j/\mathrm{Log}\ a_j\ ,\ \mathrm{Log}\ m_{j+1}/\mathrm{Log}\ a_{j+1}[$, le plus petit entier (s'il existe) qui n'est pas somme de 2 termes $[a_i^c]$. Les calculs ont été bien sûr effectués sur ordinateur, avec une limite heuristique au-delà de laquelle cette recherche est abandonnée.

Nous avons ainsi trouvé 42 intervalles où $g(c) \geq 3$, le premier étant $[\mathrm{Log}\ 77/\mathrm{Log}\ 29 = 1.28999\ ,\ \mathrm{Log}\ 84/\mathrm{Log}\ 31 = 1.29028[$ et le dernier $[\mathrm{Log}\ 39/\mathrm{Log}\ 14 = 1.38820\ ,\ +\infty[$. En conjuguant ces résultats avec la majoration précédemment établie, cela donne donc 42 intervalles (le dernier étant "coupé" à 1.445) où $g(c) = 3$ exactement.

La répartition de ces intervalles est très irrégulière : le tableau ci-contre donne, centième par centième, la somme S des longueurs des intervalles où nous avons trouvé $g(c) = 3$.

intervalle	S/0.01
au-dessous de 1.28	0.
1.28 - 1.29	0.0002
1.29 - 1.30	0.0656
1.30 - 1.31	0.
1.31 - 1.32	0.1188
1.32 - 1.33	0.0494
1.33 - 1.34	0.0614
1.34 - 1.35	0.7506
1.35 - 1.36	0.5224
1.36 - 1.37	0.3348
1.37 - 1.38	0.5110
1.38 - 1.39	0.8189
au-dessus de 1.39	1.

Une remarque pour terminer : la limite heuristique évoquée plus haut correspond à une probabilité (heuristique) suffisamment faible qu'un entier ne soit pas somme de 2 termes $[a_i^c]$ pour qu'il soit légitime de conjecturer que $g(c) = 2$ sur le complémentaire de la réunion des 42 intervalles déterminés.

Le lecteur trouvera dans [2] le détail de tous les calculs dont nous venons d'exposer les lignes directrices.

3. DISCUSSION DES METHODES ELEMENTAIRES.

On sait qu'historiquement le problème de Waring a été abordé par des méthodes élémentaires avant que les méthodes analytiques (Hardy et Littlewood, 1920, et Vinogradov, 1924) ne les relèguent presque à l'arrière-plan pour de banales raisons d'efficacité.

Presque ... car il s'avère que pour les petites valeurs de c les méthodes élémentaires demeurent "compétitives". On pourrait tout d'abord recopier notre étude avec $1, 2, \ldots$ termes de plus pour obtenir $G(c)$ et $g(c) \leq 4, S, \ldots$ jusqu'à des valeurs de c supérieures à $3/2$; nous craignons que cela ne paraisse bien fastidieux. Mais nous espérons surtout que les méthodes élémentaires permettent bientôt de démontrer, pour $c \in]1,2[$, sinon le meilleur résultat espéré, i.e. $G(c) = 2$, du moins un résultat très fort du type : il existe L tel que, dans tout intervalle de longueur L , se trouve un entier somme de 2 termes $[a_i^c]$ (d'autant que cette notion nous paraît la meilleure : pour le "$\tilde{G}$" qui lui correspond, la conjecture évidente est $\tilde{G}(c) = [c]+1$, y compris pour les valeurs entières de c).

Rappelons enfin que la meilleure majoration actuelle pour $c = 3$: $G(3) \leq 7$, peut être considérée comme très mauvaise, et il nous semble qu'elle puisse être améliorée, soit par les méthodes élémentaires, soit par un heureux mariage des méthodes élémentaires et analytiques.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. DESHOUILLERS - Propriétés additives et arithmétiques des suites à croissance polynômiale (Thèse Sc. Math., Paris, 1972).

[2] F. DRESS et M. POLZIN - Problème de Waring à exposant réel compris entre 1 et 3/2 : estimations de G et de g . Publ. Math. Univ. Bordeaux I, 1972-73, fasc. 4, p. 1-23.

[3] F. DRESS et M. POLZIN - Sur le problème de Waring pour un exposant réel c inférieur à $3/2$. A paraître in C.R. Acad. Sci., 1973.

[4] W. ELLISON - Waring's problem. Amer. Math. Monthly, 78, 1971, p.10-36.

[5] B. SEGAL - A general theorem concerning some properties of an arithmetical function [en russe, résumé en anglais]. Acad. Sci. URSS, N.S., 3, 1933, p. 95-98.

[6] B. SEGAL - Der Waringsche Satz für die Potenzen mit gebrochenen und mit irrationalen Exponenten. Trav. Inst. Steklov, 5, 1934, p. 73-86.

-:-:-:-

François DRESS
Université de Bordeaux I,
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,
351, cours de la Libération
33405 - TALENCE