HUBERT DELANGE

Sur les suites de Farey

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 39-47
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__39_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 39-47

SUR LES SUITES DE FAREY

par

Hubert DELANGE

-:-:-:-

1. La suite de Farey d'ordre N est la suite des fractions irréductibles de dénominateur $\leq N$ appartenant à l'intervalle fermé $[0,1]$, rangées par ordre croissant. (Les nombres 0 et 1 y figurent sous les formes $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$).

Ces fractions étant au nombre de $1+\Phi(N)$, où $\Phi(N) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n)$, nous écrirons cette suite sous la forme

$$x_o^{(N)}, x_1^{(N)}, \ldots, x_{\Phi(N)}^{(N)}$$

(avec donc $x_o^{(N)} = 0$ et $x_{\Phi(N)}^{(N)} = 1$).

On peut se proposer d'étudier la distribution asymptotique, pour N tendant vers $+\infty$, des longueurs des $\Phi(N)$ intervalles $[x_{r-1}^{(N)}, x_r^{(N)}]$, autrement dit des nombres $\ell_r^{(N)} = x_r^{(N)} - x_{r-1}^{(N)}$, où $r = 1,2,\ldots,\Phi(N)$.

On sait que, lorsque N tend vers $+\infty$, $\Phi(N) \sim \frac{3}{\pi^2} N^2$. Comme $\sum_{r=1}^{\Phi(N)} \ell_r^{(N)} = 1$, la moyenne arithmétique des nombres $\ell_r^{(N)}$ est équivalente à $\pi^2/3N^2$. Il est donc naturel d'étudier plutôt la distribution asymptotique des nombres $N^2 \ell_r^{(N)}$.

Cette étude a été faite par R.R. Hall [1], qui a montré que ces nombres ont une distribution limite continue.

Ceci veut dire qu'il existe une fonction réelle σ continue et croissante sur $\mathbb{R}$, avec

$$\lim_{t\to-\infty} \sigma(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = 1,$$

telle que, σ_N étant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sigma_N(t) = \Phi(N)^{-1} \times \text{nombre des r tels que } N^2 \ell_r^{(N)} \leq t,$$

pour tout t réel, $\sigma_N(t)$ tend vers $\sigma(t)$ quand N tend vers $+\infty$.

On a :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad t \le 1 \ , \\ 2(1-\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\log t) \quad \text{pour} \quad 1 < t \le 4 \ , \\ 2(1-\frac{1}{t}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{t}}+\frac{2}{t}\log(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{t}})) \quad \text{pour} \quad t > 4 \ . \end{cases} \qquad (^1)$$

R.R. Hall donne, de plus, une estimation de la différence $\sigma_N(t) - \sigma(t)$, mais nous laissons ici cette question de côté.

Notre but est de montrer que l'on a la même distribution limite si l'on considère seulement les intervalles $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$ contenus dans un intervalle donné I quelconque contenu dans l'intervalle fermé $[0,1]$, ou, ce qui revient au même, ceux dont l'extrémité gauche appartient à $]a,b]$, où $0 \le a < b \le 1$ (²).

Nous établirons le résultat suivant :

THEOREME. - <u>Etant donné</u> a <u>et</u> b <u>réels satisfaisant à</u> $0 \le a < b \le 1$, <u>soit</u> $\nu(a,b;N)$ <u>le nombre des</u> $r \ge 1$ <u>tels que</u> $a < X_{r-1}^{(N)} \le b$, <u>et soit</u> $\sigma_{N,a,b}$ <u>la fonction définie sur</u> $\mathbb{R}$ <u>par</u>

$$\sigma_{N,a,b}(t) = \nu(a,b;N)^{-1} \times \underline{\text{nombre des}}\ r \ge 1\ \underline{\text{tels que}}\ a < X_{r-1}^{(N)} \le b \text{ et } N^2 \ell_r^{(N)} \le t \ .$$

(N <u>étant assez grand pour que</u> $\nu(a,b\,;N) > 0$).

<u>Pour tout</u> t <u>réel</u>, $\sigma_{N,a,b}(t)$ <u>tend vers</u> $\sigma(t)$ <u>quand</u> N <u>tend vers</u> $+\infty$, <u>où</u> σ <u>est la fonction indiquée plus haut</u> (³).

Nous commencerons par reprendre la démonstration du résultat de R.R. Hall, en adoptant une méthode qui éclaire les choses en montrant que, pour $t > 1$, $\sigma(t)$ est simplement le double de la mesure d'un certain sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, mais qui ne fournit pas l'évaluation de la différence $\sigma_N(t) - \sigma(t)$.

Il est entendu que, dans tout ce qui suit, m et n désignerons toujours des entiers > 0, ainsi que d au §4.2.

2. Rappelons d'abord que la démonstration de R.R. Hall est basée sur le lemme élémentaire suivant :

LEMME. - <u>Soit</u> $\mathcal{J}_N$ <u>l'ensemble des intervalles</u> $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$, <u>où</u> $r=1,2,\dots,\Phi(N)$. <u>Considérons l'application de</u> $\mathcal{J}_N$ <u>dans</u> $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ <u>définie de la façon suivante</u> :

<u>Si</u> $X_{r-1}^{(N)}$ <u>et</u> $X_r^{(N)}$ <u>sont les fractions irréductibles</u> $\frac{h}{k}$ <u>et</u> $\frac{h'}{k'}$, <u>on fait</u>

<u>correspondre à l'intervalle</u> $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$ <u>le couple</u> $[k,k']$.

<u>Cette application est une bijection de</u> $\mathcal{J}_N$ <u>sur l'ensemble</u> $\mathcal{A}_N$ <u>des couples</u> $[m,n]$ <u>tels que</u>

$$(m,n) = 1 \quad , \quad m \le N \ , \ n \le N \ \underline{\text{et}} \ m+n > N \ .$$

La démonstration de ce lemme est immédiate. On a une application dans $\mathcal{A}_N$ car $k \le N$, $k' \le N$, et on sait que $k+k' > N$ et $kh' - hk' = 1$, ce qui entraîne $(k,k') = 1$.

Deux intervalles différents ne peuvent avoir la même image, car, étant donné k et $k' \in \mathbb{N}^*$ tels que $(k,k') = 1$, il existe un seul entier h' tel que

$$kh' \equiv 1 \pmod{k'} \quad \text{et} \quad 0 < h' \le k' \ .$$

D'autre part, étant donné $k \in \mathbb{N}^*$ et $\le N$, chacun des couples $[m,n] \in \mathcal{A}_N$ tels que $m = k$ est l'image d'un élément de $\mathcal{J}_N$. En effet, $\mathcal{J}_N$ contient exactement $\varphi(k)$ intervalles auxquels correspond un couple dont le premier élément est k , puisqu'il y a dans l'intervalle $[0,1[$ exactement $\varphi(k)$ fractions irréductibles de dénominateur k . Il y a aussi dans $\mathcal{A}_N$ exactement $\varphi(k)$ couples $[m,n]$ tels que $m = k$, que l'on obtient en donnant à n toutes les valeurs satisfaisant à $N-k < n \le N$ et $(k,n) = 1$.

3. Conjointement à ce lemme, on utilise le fait que, si $X_{r-1}^{(N)}$ et $X_r^{(N)}$ sont les fractions irréductibles $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$, la relation $kh' - hk' = 1$ donne $\ell_r^{(N)} = \frac{1}{kk'}$.

On voit ainsi que, pour $t > 1$, le nombre des r tels que $N^2 \ell_r^{(N)} \le t$ est égal au nombre des éléments de $\mathcal{A}_N$ pour lesquels $mn \ge N^2/t$, c'est-à-dire au nombre des couples $[m,n] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$(m,n) = 1 \ , \ m \le N \ , \ n \le N \ , \quad m+n > N \quad \text{et} \quad mn \ge N^2/t \ .$$

4. C'est à partir d'ici que notre méthode se différencie de celle de R.R. Hall, par l'introduction d'une notion de densité d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4.1. Soit E une partie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Etant donné x et y réels > 0 , désignons par $\eta(E \ ; \ x,y)$ le nombre des couples $[m,n] \in E$ tels que $m \le x$ et $n \le y$.

4.1.1. Nous disons que E possède la densité δ si $\frac{1}{xy}\eta(E \ ; \ x,y)$

tend vers δ quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

Nous disons que E possède la "densité au sens faible" δ si $\frac{1}{xy}\,\eta(E\,;\,x,y)$ tend vers δ lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe, quel que soit ce rapport.

Il est clair que, si E possède la densité δ, il possède aussi la densité au sens faible δ (alors que l'inverse n'a pas lieu).

C'est la notion de densité au sens faible qui nous sera utile ici.

4.1.2. $\eta(E\,;\,x,y)$ est le nombre des éléments de l'intersection de E avec l'ensemble des couples $[\xi,\eta]$ de nombres réels tels que $0 \leq \xi \leq x$ et $0 \leq \eta \leq y$.

On peut considérer, plus généralement, une partie A quelconque de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, et désigner par $\eta(E\,;\,A)$ le nombre des éléments de $E \cap A$.

Etant donné $\lambda > 0$, nous désignons par λA, comme il est usuel, l'image de A par l'application $[\xi,\eta] \to [\lambda\xi,\lambda\eta]$.

On voit que, si E possède la densité au sens faible δ, pour toute partie A de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mesurable au sens de Jordan, $\frac{1}{\lambda^2}\,\eta(E\,;\,\lambda A)$ tend vers $\delta\mu(A)$ quand λ tend vers $+\infty$ ($\mu(A)$ étant la mesure de Jordan de A).

Il est clair que ceci a lieu quand A est l'ensemble des couples $[\xi,\eta]$ tels que $0 \leq \xi \leq \alpha$ et $0 \leq \eta \leq \beta$, où α et $\beta > 0$, car alors

$$\frac{1}{\lambda^2}\,\eta(E\,;\,\lambda A) = \frac{1}{\lambda^2}\,\eta(E\,;\,\lambda\alpha,\lambda\beta) = \alpha\beta\,\frac{1}{(\lambda\alpha)(\lambda\beta)}\,\eta(E\,;\,\lambda\alpha,\lambda\beta) .$$

On passe de là au cas général par un raisonnement bien connu. ([4])

4.1.3. On déduit immédiatement de ce qui précède que, lorsque E possède une densité au sens faible strictement positive, si A et B sont des parties de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mesurables au sens de Jordan, avec $\mu(B) > 0$, le rapport $\eta(E\,;\,\lambda A)/\eta(E\,;\,\lambda B)$ est défini pour $\lambda > 0$ assez grand et tend vers $\mu(A)/\mu(B)$ quand λ tend vers $+\infty$.

4.2. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples $[m,n] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $(m,n) = 1$.

On voit très facilement, et il est bien connu, que $\mathcal{E}$ possède une densité égale à $\frac{6}{\pi^2}$.

En effet, en remarquant que

$$\sum_{\substack{d/m \\ d/n}} \mu(d) = \sum_{d/(m,n)} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ si } (m,n) = 1 , \\ 0 \text{ si } (m,n) > 1 , \end{cases}$$

on voit que l'on a pour x et $y > 0$

$$\eta(\mathcal{E} ; x,y) = \sum_{\substack{m\leq x \\ n\leq y}} (\sum_{\substack{d/m \\ d/n}} \mu(d)) = \sum_{d\leq \mathrm{Inf}(x,y)} \mu(d) [\tfrac{x}{d}] [\tfrac{y}{d}]$$

$$= xy \sum_{d\leq \mathrm{Inf}(x,y)} \frac{\mu(d)}{d^2} + 0((x+y) \sum_{d\leq \mathrm{Inf}(x,y)} \frac{1}{d} ,$$

d'où

$$\frac{1}{xy} \eta(\mathcal{E} ; x,y) = \sum_{d\leq \mathrm{Inf}(x,y)} \frac{\mu(d)}{d^2} + 0((\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}) \log \mathrm{Inf}(x,y)) \quad (x,y \to +\infty) ,$$

ce qui montre que $\frac{1}{xy} \eta(\mathcal{E} ; x,y)$ tend vers $\sum_{1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$ quand x et y tendent vers $+\infty$.

4.3. Ce qui précède donne immédiatement le résultat de R.R. Hall cité plus haut.

En effet, d'après ce que l'on a vu au §3, pour $t > 1$, le nombre des r tels que $N^2 \ell_r^{(N)} \leq t$ est égal à $\eta(\mathcal{E} ; NA_t)$, où A_t est l'ensemble des couples $[x,y] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que

$$x \leq 1 , \; y \leq 1 , \; x+y > 1 \quad \text{et} \quad xy \geq \frac{1}{t^2} .$$

$\Phi(N)$, nombre des éléments de l'ensemble $\mathcal{J}_N$, qui est en bijection avec l'ensemble $\mathfrak{a}_N$, est égal à $\eta(E ; NB)$, où B est l'ensemble des couples $[x,y] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que

$$x \leq 1 , \; y \leq 1 \quad \text{et} \quad x+y > 1 .$$

On a donc, pour $t > 1$, $\sigma_N(t) = \eta(\mathcal{E} ; NA_t)/\eta(\mathcal{E} ; NB)$. B est mesurable au sens de Jordan, ainsi que A_t pour tout $t > 1$, et on a $\mu(B) = \frac{1}{2}$.

Donc, pour tout $t > 1$, quand N tend vers $+\infty$, $\sigma_N(t)$ tend vers $\mu(A_t)/\mu(B) = 2\mu(A_t)$.

5. Pour établir le résultat que nous avons annoncé, nous utilisons encore la bijection de $\mathcal{J}_N$ sur $\mathcal{A}_N$ indiquée par le lemme du §2, mais il nous faut maintenant sélectionner parmi les éléments de $\mathcal{A}_N$ ceux qui correspondent à des intervalles dont l'extrémité gauche appartient à $]a,b]$.

5.1. Définissons une fonction f sur l'ensemble $\mathcal{E}$ par $f(m,n) = \frac{n'}{m}$, où n' est l'entier déterminé par les conditions $nn' \equiv -1 \pmod m$ et $0 \leq n' < m$. Notons en passant que l'on a $0 \leq f(m,n) < 1$, avec $f(m,n) = 0$ seulement si $m = 1$, et que la fonction $n \mapsto f(m,n)$, où m est fixé, est périodique de période m .

On voit que l'élément de $\mathcal{J}_N$ qui correspond par la bijection considérée à l'élément $[m,n]$ de $\mathcal{A}_N$ est un intervalle d'extrémité gauche $f(m,n)$.

En effet, si les extrémités d'un intervalle appartenant à $\mathcal{J}_N$ sont les fractions irréductibles $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$, on sait que

$$kh' - hk' = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq h < k .$$

L'élément correspondant de $\mathcal{A}_N$ est le couple $[k,k']$. Si c'est $[m,n]$, on a $k = m$, $k' = n$, et par suite $nh = mh'-1$, d'où $nh \equiv -1 \pmod m$, et $0 \leq h < m$, de sorte que h est égal à l'entier n' considéré ci-dessus. Alors $\frac{h}{k} = \frac{n'}{m} = f(m,n)$.

5.2. Ceci montre que $\nu(a,b,N)$ est égal au nombre des couples $[m,n] \in \mathcal{A}_N$ tels que $a < f(m,n) \leq b$, c'est-à-dire au nombre des éléments de $\mathcal{E}$ pour lesquels

$$m \leq N \ , \ n \leq N \ , \ m+n > N \quad \text{et} \quad a < f(m,n) \leq b .$$

De même, le nombre des $r \geq 1$ tels que $a < X_{r-1}^{(N)} \leq b$ et $N^2 \ell_r^{(N)} \leq t$ est égal, pour $t > 1$, au nombre des éléments de $\mathcal{E}$ pour lesquels

$$m \leq N \ , \ n \leq N \ , \ m+n > N \ , \ a < f(m,n) \leq b \quad \text{et} \quad mn \geq N^2/t .$$

Si l'on introduit l'ensemble $E_{a,b}$ des éléments de $\mathcal{E}$ pour lesquels $a < f(m,n) \leq b$, on voit que ces deux nombres sont égaux respectivement à $\eta(E_{a,b} \ ; NB)$ et $\eta(E_{a,b} \ ; NA_t)$, où B et A_t sont les ensembles définis plus haut, de sorte que

$$\sigma_{N,a,b}(t) = \eta(E_{a,b} \ ; NA_t)/\eta(E_{a,b} \ ; NB) .$$

Ainsi, pour obtenir le résultat annoncé, il suffit de montrer que l'ensemble

$E_{a,b}$ possède une densité au sens faible strictement positive.

En fait, nous allons prouver que cet ensemble possède la densité au sens faible $(b-a)\frac{6}{\pi^2}$.

Pour cela, il suffit de montrer que, quel que soit $\alpha \in [0,1]$, l'ensemble E_α des $[m,n] \in \mathcal{E}$ tels que $f(m,n) \leq \alpha$ a la densité faible $\frac{6}{\pi^2}\alpha$ (car $E_{a,b} = E_b \setminus E_a$ et $E_a \subset E_b$) .

C'est vrai pour $\alpha = 0$ car l'ensemble E_o se réduit à l'ensemble des couples $[m,n]$ tels que $m = 1$.

Il ne reste qu'à traiter le cas où $0 < \alpha \leq 1$.

6. Introduisons, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction ψ_m définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi_m(y) = \frac{1}{\varphi(m)} \times \text{nombre des } n \leq y \text{ tels que } (m,n) = 1 \text{ et } f(m,n) \leq \alpha .$$

On aura alors pour x et $y > 0$

$$\eta(E_\alpha ; x,y) = \sum_{m \leq x} \varphi(m)\psi_m(y) .$$

6.1. On voit que, pour prouver que E_α possède la densité au sens faible $\frac{6}{\pi^2}\alpha$, il suffit de montrer que, pour tout $t \in]0,1]$, $\psi_m(mt)$ tend vers αt quand m tend vers $+\infty$.

En effet, supposons ceci démontré.

Comme la même chose a évidemment lieu pour $t = 0$ et comme chaque fonction ψ_m est croissante, il y a convergence uniforme de $\psi_m(mt)$ vers αt sur $[0,1]$.

Posons donc $\psi_m(mt) = \alpha t + \epsilon_m(t)$ et $\sup_{t \in [0,1]} |\epsilon_m(t)| = \omega_m$. Ainsi, ω_m tend vers zéro quand m tend vers $+\infty$. Maintenant, si $q = [\frac{y}{m}]$, on peut écrire $y = mq+z$, avec $0 \leq z < m$. D'après la périodicité de la fonction $n \mapsto f(m,n)$, on a

$$\begin{aligned}\psi_m(y) = q\psi_m(m) + \psi_m(z) &= q(\alpha+\epsilon_m(1)) + \alpha\frac{z}{m} + \epsilon_m(\frac{z}{m}) ,\\ &= \alpha\frac{y}{m} + q\epsilon_m(1) + \epsilon_m(\frac{z}{m}) ,\\ &= \alpha\frac{y}{m} + [\frac{y}{m}]\epsilon_m(1) + \epsilon_m(\frac{y}{m} - [\frac{y}{m}]) .\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\eta(E_\alpha;x,y) = \alpha y \sum_{m\le x} \frac{\varphi(m)}{m} + \sum_{m\le x} \varphi(m)\,[\tfrac{y}{m}]\varepsilon_m(1) + \sum_{m\le x} \varphi(m)\varepsilon_m(\tfrac{y}{m} - [\tfrac{y}{m}]) ,$$

d'où

$$\frac{1}{xy}\eta(E_\alpha;x,y) = \alpha\frac{1}{x} \sum_{m\le x} \frac{\varphi(m)}{m} + \frac{1}{xy} \sum_{m\le x} \varphi(m)\,[\tfrac{y}{m}]\varepsilon_m(1) + \frac{1}{xy} \sum_{m\le x} \varphi(m)\,\varepsilon_m(\tfrac{y}{m} - [\tfrac{y}{m}]) .$$

Il est connu que, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x} \sum_{m\le x} \frac{\varphi(m)}{m}$ tend vers $\frac{6}{\pi^2}$.

Il est clair que l'on a $|\frac{1}{xy} \sum_{m\le x} \varphi(m)\,[\frac{y}{m}]\varepsilon_m(1)| \le \frac{1}{x} \sum_{m\le x} \omega_m$, expression qui tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Enfin $|\sum_{m\le x} \varphi(m)\varepsilon_m(\frac{y}{m} - [\frac{y}{m}])| \le \sum_{m\le x} \omega_m\varphi(m)$, expression qui est $o(x^2)$ quand x tend vers $+\infty$.

On voit ainsi que, quand x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe, $\frac{1}{xy}\eta(E_\alpha;x,y)$ tend vers $\frac{6}{\pi^2}\alpha$.

6.2. Remarquons maintenant que, d'après les définitions des fonctions f et ψ_m , pour $t \in]0,1]$ et $m > 1$, $\psi_m(mt)$ est égal au quotient par $\varphi(m)$ du nombre des couples $[n,n'] \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tels que

$$nn' \equiv -1 \pmod m) , \quad \frac{n}{m} \le t \quad \text{et} \quad \frac{n'}{m} \le \alpha .$$

Ceci peut se traduire par la relation

$$\psi_m(mt) = \mu_m([0,t]\times[0,\alpha]) ,$$

où μ_m est la mesure sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mu_m = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1\le n<m \\ 1\le n'<m \\ nn'\equiv -1 (\mathrm{mod}\ m)}} \mu_{m,n,n'} ,$$

où $\mu_{m,n,n'}$ est la mesure de Dirac au point $[\frac{n}{m},\frac{n'}{m}]$.

Ainsi, ce que nous devons montrer est que, pour tout $t \in]0,1]$, quand m tend vers $+\infty$, $\mu_m([0,t]\times[0,\alpha])$ tend vers αt , c'est-à-dire vers la mesure de Lebesgue de $[0,t] \times [0,\alpha]$.

D'après le critère de Weyl, ceci a certainement lieu si, pour tout couple $[u,v] \in Z^2$, autre que $[0,0]$, $\int e(ux+vy)d\mu_m(x,y)$ tend vers zéro quand m tend vers $+\infty$ (où $e(X) = e^{2\pi iX}$) .

Mais on a $\int e(ux+vy)d\mu_m(x,y) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1\leq n<m \\ 1\leq n'<m \\ nn'\equiv -1 \pmod m}} e(\frac{un+vn'}{m})$. La somme qui figure ici est une somme de Kloosterman. On sait (6) qu'elle est de module au plus égal à $d(m)m^{1/2}(u,v,m)^{1/2}$, donc à $(u,v)^{1/2}d(m)m^{1/2}$.

Le quotient par $\varphi(m)$ tend bien vers zéro quand m tend vers $+\infty$ car, quel que soit $\epsilon > 0$, $d(m) = O(m^{\epsilon})$ et $\varphi(m)$ tend vers l'infini plus vite que $m^{1-\epsilon}$.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] - R.R. HALL. - J. London Math. Soc.(2), 2, 1970, pp. 139-148.

[2] - T. ESTERMANN. - Mathematika, 8, 1961, pp. 83-86.

-:-:-:-

NOTES

(1) Le résultat est trivial pour $t \leq 1$ car les $\ell_r^{(N)}$ sont tous $> 1/N^2$ et par suite $\sigma_N(t) = 0$ pour $t \leq 1$.

(2) Si I (fermé, ouvert, ou semi-ouvert) a comme extrémités a et b, le nombre des intervalles $[X_{r-1}^{(N)}, X_r^{(N)}]$ dont l'extrémité gauche appartient à $]a,b]$ et le nombre de ceux qui sont contenus dans I diffèrent au plus de deux unités.

(3) Ici encore, il suffit de considérer le cas où $t > 1$.

(4) En fait, on voit que la propriété indiquée est équivalente au fait que E possède la densité au sens faible δ .

-:-:-:-

Université de Paris Sud
Centre d'Orsay
Département de Mathématiques,
Bâtiment 425

91405 - ORSAY