MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN COUGNARD

Sur l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré *pq* des rationnels

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 33-34

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__33_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 33-34

SUR L'ANNEAU DES ENTIERS DES EXTENSIONS GALOISIENNES NON ABELIENNES DE DEGRE pq DES RATIONNELS

par

Jean COUGNARD

-:-:-:-

Soit N une extension galoisienne, non abélienne, de degré pq (p et q premiers) du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Le groupe de Galois G de $N/\mathbb{Q}$ est engendré par deux éléments σ et τ vérifiant $\sigma^p = \tau^q = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^r$ avec $q|p-1$ et $r \neq 1$, $r^q \equiv 1 \pmod p$. On pose $H = (\sigma)$, $\mathfrak{g} = (\tau)$, et on désigne par K (resp k) le corps invariant par $\mathfrak{g}$ (resp H) . Le groupe $\mathfrak{g}$ opère sur H par automorphismes intérieurs et il existe $\frac{p-1}{q}$ éléments i_ℓ tels que les orbites soient, outre l'élément neutre, les $\sigma^{i_\ell r^t}$ (t variant de 1 à q) . On appelle $\mathbb{Z}_1$ la sous-algèbre de $\mathbb{Z}[G]$ engendrée par les $\sum_{t=1}^{q} \sigma^{i_\ell r^t}$ $(\ell = 1, \ldots, \frac{p-1}{q})$ et on pose $T = \sum_{\ell=0}^{p-1} \sigma^i$.

Soit $\mathbb{Q}(\zeta)$ le p-ième corps cyclotomique, $\mathbb{Q}_o$ le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta)$ de degré $\frac{p-1}{q}$ sur $\mathbb{Q}$. On suppose pour cet exposé que k n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}(\zeta)$; on note A_K (resp A_N , resp A_o) la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K (resp N , resp $\mathbb{Q}_o$)

LEMME. - $\mathbb{Z}_1/\mathbb{Z}[T]$ <u>possède une structure d'anneau de Dedekind</u> ; <u>il est isomorphe de façon non canonique à</u> A_o .

PROPOSITION. - $A_K/\mathbb{Z}$ <u>est un module sur</u> A_o .

On se propose d'étudier la structure de ce module ; pour cela on introduit des résolvantes de Lagrange.

DEFINITION. - <u>Pour tout élément</u> θ <u>de</u> K <u>et tout caractère</u> χ <u>de</u> H , <u>on définit la résolvante de Lagrange de</u> θ <u>et de</u> χ :

$$\langle \theta, \chi \rangle = \sum_{n=1}^{p} \sigma^n(\theta)\chi(\sigma^{-n}) \quad ,$$

et on note $\tilde{k}$ la sous-extension de $N(\zeta)$ engendrée par les $\langle\theta,\chi\rangle^p$.

On peut alors définir une application f de K dans $\tilde{k}$ de la façon suivante : choisissons un élément θ_o de K qui forme avec ses conjugués une base normale de l'extension N/k et un caractère χ de H , différent du caractère trivial ; on pose alors :

$$f(\theta) = \frac{\langle\theta,\chi\rangle}{\langle\theta_o,\chi\rangle} \;;$$

on démontre alors [1] le théorème suivant.

THEOREME 1. - L'application f induit un isomorphisme de A_o-modules entre $A_K/\mathbb{Z}$ et $f(A_K)$ qui est un A_o-module libre.

Soit $\mathcal{B}$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$. En utilisant des résultats de Rosen [2] et une suite exacte analogue à la suite de Mayer-Vietoris [3], Galovitch [4] a démontré que le théorème 1 avait pour conséquence.

THEOREME 2. - Si $N/\mathbb{Q}$ est une extension modérément ramifiée, $A_N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathcal{B}$ est un $\mathcal{B}$-module libre.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] - J. COUGNARD, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 274, (1972), pp.936-939.

[2] - M.I. ROSEN, Représentations of twisted Group Rings, Thèse, Princeton (1963).

[3] - I. REINER, S. ULLOM, A. MAYER-VIETORIS, Sequence for class-groups, J. Algebra (à paraître).

[4] - S. GALOVICH, N.I.B.S. and P.I.C.S., Thèse, Brown University (1972).

-:-:-:-

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération

33405 - TALENCE