MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ANDRÉ BLANCHARD

Les systèmes modulaires appliqués à la théorie des partitions

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 9-22
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__9_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 9-22

LES SYSTEMES MODULAIRES APPLIQUES A LA THEORIE DES PARTITIONS

par

André BLANCHARD

-:-:-:-

Hardy et Ramanujan [HR] ont obtenu une théorie des partitions très satisfaisante, perfectionnée encore par Rademacher [R]. Soit $p(n)$ le nombre de partitions sans restriction de n, c'est-à-dire le nombre de manières d'écrire $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ avec $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k$ (k non fixé). Une circonstance essentielle pour l'étude de la série entière

$$f(x) = 1 + \sum_1^\infty p(n)x^n \quad (|x| < 1)$$

est que (pour $\mathrm{Im}(z) > 0$)

$$f(e^{2i\pi z}) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)}$$

où $\eta(z)$ s'apparente aux fonctions modulaires : on a en effet les deux formules

$$\eta(z+1) = e^{i\pi/12}.\eta(z)$$

$$\eta(-1/z) = (\frac{z}{i})^{1/2}.\eta(z)$$

d'où résultent des relations entre $\eta(z)$ et $\eta(\frac{az+b}{cz+d})$ lorsque a, b, c, d entiers avec $ad - bc = 1$. Notons que η^{24} est une véritable forme modulaire.

Les auteurs cités plus haut indiquent quelques problèmes voisins qui peuvent être étudiés par la même méthode : Hardy et Ramanujan [HR] donnent quelques développements limités : nombre de partitions de n en <u>entiers impairs</u>, nombre de partitions de n en <u>entiers impairs et distincts</u>, qui font intervenir respectivement $\frac{\eta(2z)}{\eta(z)}$ et $\frac{(\eta(2z))^2}{\eta(z)\eta(4z)}$.

Nous nous proposons de montrer ici que les mêmes idées sont applicables à un problème de <u>partitions et de progressions arithmétiques</u> en utilisant, en plus de la fonction η , des "systèmes modulaires" c'est-à-dire des systèmes de fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_S$, holomorphes pour $\mathrm{Im}\, z > 0$, telles que les $\varphi_j(z+1)$ ainsi que les $\varphi_j(-1/z)$ soient des combinaisons linéaires de $\varphi_1(z), \dots, \varphi_S(z)$ à coefficients de formes très particulières (constantes, puissances de $\frac{z}{i}$).

<u>Enoncé d'un problème</u> : (P)

<u>Soit</u> $A \subset \mathbb{N}$ <u>une réunion finie de progressions arithmétiques</u>. <u>On supposera de plus que le p.g.c.d. des éléments de</u> A <u>est</u> 1 . <u>Soit</u> $p(n,A)$ <u>le nombre de partitions de</u> n <u>en éléments de</u> A , <u>et</u> $q(n;A)$ <u>le nombre de partitions de</u> n <u>en éléments distincts de</u> A .

<u>Etudier le comportement à l'infini de</u> $p(n;A)$ <u>et</u> $q(n;A)$.

Dans une première partie, nous verrons que des considérations d'analyse réelle donnent sans hypothèse supplémentaire une expression simple équivalente à $\text{Log } p(n;A)$, ainsi qu'une majoration de $\text{Log } q(n;A)$.

Dans la deuxième partie, nous obtenons beaucoup plus grâce à des "systèmes modulaires", mais à condition d'introduire une nouvelle hypothèse sur A (condition de symétrie).

CHAPITRE I

On considèrera dans cette première partie la fonction

$$f_A(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} p(n;A).x^n \tag{1}$$

définie sur l'intervalle $[0,1[$. Remarquons qu'une réunion finie de progressions arithmétiques peut toujours être considérée comme réunion de progressions de <u>même raison</u>.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> A <u>une réunion de</u> r <u>progressions arithmétiques de raison</u> m <u>et de premiers termes</u> $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r$ <u>(distincts modulo</u> m) <u>avec</u> p.g.c.d. $(\nu_1,\ldots,\nu_r,m) = 1$. <u>On a alors au voisinage de</u> 1

$$\text{Log } f_A(x) \sim \frac{r}{m}.\frac{\pi^2}{6}.\frac{1}{1-x} \quad . \tag{2}$$

On a en effet $f_A(x) = \prod_{n\in A} \frac{1}{1-x^n}$ comme cela est exposé dans [HW] sur des cas particuliers. On a alors

$$\text{Log } f_A(x) = - \sum_{n\in A} \text{Log } (1-x^n) = \sum_{n\in A} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^{nq}}{q} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q}.\frac{x^{q\nu_1}+\ldots+x^{q\nu_r}}{1-x^{qm}} \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \frac{x^{q\nu_1}+\ldots+x^{q\nu_r}}{1+x+\ldots+x^{qm-1}} \quad ; \tag{3}$$

or pour $x \in [0,1[$,

$$\frac{x^{q\nu_1}+\ldots+x^{q\nu_r}}{1+x+\ldots+x^{qm-1}} < \frac{r\cdot x^{q\nu_1}}{\mathrm{Inf}(q\nu_1,qm)x^{\mathrm{Inf}(q\nu_1-1,qm-1)}} < \frac{r}{q} \quad ;$$

les termes de la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{q} \cdot \frac{x^{q\nu_1}+\ldots+x^{q\nu_2}}{1+x+\ldots+x^{qm-1}}$ sont donc majorés indépendamment de x par les termes $\frac{r}{q^2}$ d'une série convergente, et $\frac{1}{q} \cdot \frac{x^{q\nu_1}+\ldots+x^{q\nu_r}}{1+x+\ldots+x^{qm-1}}$ tend vers $\frac{r}{q^2 m}$ quand x tend vers 1. Il s'ensuit que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{q} \cdot \frac{x^{q\nu_1}+\ldots+x^{q\nu_r}}{1+x+\ldots+x^{qm-1}}$ tend vers $\frac{r}{m} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ quand x tend vers 1, d'où la proposition 1.

Nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME. - <u>Soit</u> $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ <u>pour</u> $0 \le x < 1$. <u>On suppose</u> $a_n \ge 0$ <u>et</u> $\mathrm{Log}\, f(x) \sim \frac{M}{1-x}$ <u>au voisinage de</u> 1. <u>On a alors</u> $\overline{\mathrm{Lim}}\, \frac{\mathrm{Log}\, a_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{M}$, <u>et de plus il existe une suite infinie</u> n_q <u>vérifiant</u> $n_{q+1}/n_q \to 1$ <u>et</u> $\mathrm{Log}\, a_{n_q} \sim 2\sqrt{M}\cdot n_q$.

Ce lemme est un cas particulier d'un théorème figurant dans [V] . Sa démonstration, sans difficulté spéciale, est une vérification d'inégalités. Ce lemme donne d'abord les majorations :

PROPOSITION 2. - <u>Dans les hypothèses de la proposition</u> 1 :

$$\overline{\mathrm{Lim}}\, \frac{\mathrm{Log}\, p(n;A)}{\sqrt{n}} = \pi\sqrt{\frac{2r}{3m}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Lim}}\, \frac{\mathrm{Log}\, q(n;A)}{\sqrt{n}} = \pi\sqrt{\frac{r}{3m}} \quad . \tag{4}$$

Cela est immédiat pour $p(n;A)$. Pour $q(n;A)$ il suffit de remarquer que :

$$g_A(x) = 1 + \sum_1^{\infty} q(n;A)x^n = \prod_{n\in A} (1+x^n) = \prod_{n\in A} \frac{1-x^{2n}}{1-x^n} = \frac{f_A(x)}{f_A(x^2)} \quad , \tag{5}$$

d'où le comportement de $\mathrm{Log}\, g_A(x)$ au voisinage de 1 .

Précisons le comportement de $p(n;A)$. On a les trois lemmes suivants qu'il suffit d'énoncer :

LEMME 2. - Si a et b sont deux entiers strictement positifs, tout multiple assez grand de leur p.g.c.d. est de la forme $xa + yb$ avec $x \geq 0$, $y \geq 0$.

LEMME 3. - Soient $\nu_1, \ldots, \nu_{r+1}$ strictement positifs et premiers entre eux ; alors tout entier assez grand est de la forme $x_1\nu_1 + \ldots + x_{r+1}\nu_{r+1}$ avec les $x_j \geq 0$.

Puis en appliquant le lemme avec $\nu_{r+1} = \nu_1 + m$:

LEMME 4. - Dans les hypothèses de la proposition 1, il existe un entier N_o tel que $n > N_o$ entraîne $p(n;A) > 0$ et $p(n_1+n;A) \geq p(n_1;A)$.

On peut alors montrer :

PROPOSITION 3. - Dans les hypothèses de la proposition 1 :

$$\text{Log } p(n;A) \sim \pi\sqrt{\frac{2rn}{3m}} \quad . \tag{6}$$

D'après le lemme 1 en effet, on a une suite n_q telle que $n_{q+1}/n_q \to 1$ et $\text{Log } p(n_q;A) \sim n\sqrt{\frac{2rn_q}{3m}}$; à un entier n faisons correspondre le plus grand n_q qui soit strictement inférieur à $n-N_o$. Ce nombre n_q est alors équivalent à n , et on a $p(n;A) \geq p(n;A)$; d'où

$$\underline{\text{Lim}}\ \frac{\text{Log } p(n;A)}{\sqrt{n}} \geq \pi\sqrt{\frac{2r}{3m}} \tag{7}$$

ce qui, avec la proposition 2, donne la proposition 3.

Additif à la proposition 1 (comportement de $f_A(x)$ sur les rayons du disque unité) :

PROPOSITION 4. - Dans les hypothèses de la proposition 1, soit h premier à k ; alors pour x réel tendant vers 1,

$$\text{Log } f_A(x.e^{2i\pi h/k}) \sim \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{k|qm} \frac{e^{2i\pi q\nu_1 h/k} + \ldots + e^{2i\pi q\nu_2 h/k}}{q^2 m} = \frac{\lambda_{h/k}}{1-x} \tag{8}$$

et $\lambda_{h/k} < \lambda_{0/1}$ si $k \geq 2$. De plus, $\lambda_{0/1} - \lambda_{h/k}$ est borné inférieurement.

En effet, $\operatorname{Log} f_A(x.e^{2i\pi h/k}) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q}.\frac{x^{q\nu}(e^{2i\pi q\nu_1 h/k}+\ldots+x^{q\nu_r}e^{2i\pi q\nu_r h/k})}{1-x^{qm}e^{2i\pi qmh/k}}$;

on a $\sum_{k\not| qm} 0(k\sum_1^{\infty}\frac{x^q}{q}) = 0(k\operatorname{Log}(1-x))$; puis on raisonne comme à la proposition 1 pour les q tels que $k|qm$. Cela étant $\lambda_{h/k} = \lambda_{0/1}$ entraîne $k|m$, puis les $e^{2i\pi\nu_1 qh/k}$ ... tous égaux à 1, d'où $k|\text{p.g.c.d.}(\nu_1,\ldots,\nu_r)$. Finalement $k|\text{p.g.c.d.}(\nu_1,\ldots,\nu_r,m) = 1$.

Le dernier point est évident, car $\lambda_{h/k}$ étant une somme portant sur les q tels que qm multiple de k , on a visiblement $\lambda_{h/k} \to 0$ pour $k \to \infty$.

CHAPITRE II

Dans cette partie, on utilise la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe.

1. Formules utilisées.

Formule de Jacobi : On a pour $|x| < 1$, $y \neq 0$, la formule

$$\prod^{\infty} (1+y.x^{2n-1})(1+y^{-1}x^{2n-1})(1-x^{2n}) = \sum_{-\infty}^{\infty} y^n.x^{n^2} . \tag{9}$$

([A], [HW], [R]).

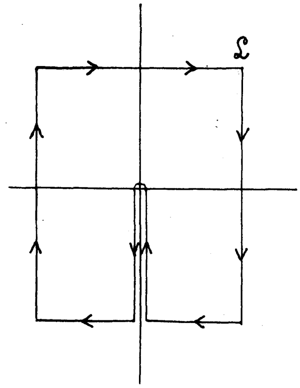
Formule de Poisson : La dualité de Pontryagin étant réalisée sur $\mathbb{R}$ par $e^{2i\pi x\xi}$, les fonctions ω et $\hat{\omega}$ définies par $\omega(x) = e^{-\pi ux^2}$ et $\hat{\omega}(\xi) = u^{-1/2}e^{-\pi\xi^2/u}$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre (u étant un complexe de partie réelle strictement positive). La fonction $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u(x+n)^2}$ qui admet 1 pour période a donc pour coefficients de Fourier $u^{-1/2}.e^{-\pi n^2/u}$, d'où la formule de Poisson

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u(x+n)^2} = u^{-1/2}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/u}.e^{2i\pi nx}$$

valable si $\operatorname{Ré}(u) > 0$. On écrira plutôt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi z(x+n)^2} = (\frac{i}{z})^{1/2}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\pi in^2}{z}}.e^{2i\pi nx} \tag{10}$$

pourvu que $\operatorname{Im}(z) > 0$.



Evaluations d'intégrales.

Soit $\mathcal{L}$ le chemin d'intégration représenté sur la figure dans le plan "coupé" $-\pi/2 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ (il est plus correct de considérer $\mathcal{L}$ comme chemin d'intégration sur la surface de Riemann de $\log z$). On a alors

$$\int_{\mathcal{L}} (z/i)^{1/2}\exp\left(\frac{-ix}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)dz = 2\sqrt{2\pi x}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\right) \qquad (11)$$

si $x > 0$. Par changement de variable, on a la formule utile pour la suite :

$$\int_{\mathcal{L}} (z/i)^{1/2} e^{2i\pi\left((\alpha-x)z+\frac{\beta}{z}\right)}dz = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{sh}\,4\pi\sqrt{\beta}.\sqrt{n-\alpha}}{\sqrt{n-\alpha}}\right) \qquad (12)$$

(ce qui est équivalent pour $n \to \infty$ à $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}\cdot n}\,e^{4\pi\sqrt{\beta x}}$. De même, si C_- est un cercle de centre 0 parcouru dans le sens négatif on a

$$\int_{C_-} \exp\left(\frac{-ix}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)dz = 2\pi I_1(x) \qquad (13)$$

si $x > 0$. I_1 est une fonction de Bessel modifiée. Par changement de variable on a de même :

$$\int_{C_-} e^{2i\pi\left((\alpha-n)z+\frac{\beta}{z}\right)}dz = 2\pi\sqrt{\frac{\beta}{n-\alpha}}\,.\,I_1(4\pi\sqrt{\beta}.\sqrt{n-\alpha}) \qquad (14)$$

(ce qui est équivalent pour $n \to \infty$ à $\frac{\beta^{1/4}}{\sqrt{2.n^{3/4}}}\,e^{4\pi\sqrt{\beta n}}$) .

2. La condition de symétrie, et les fonctions φ_ν .

Dans ce qui suit, on supposera que A vérifie une condition de symétrie qui soit l'une des deux conditions suivantes :

1ère condition : Les premiers termes $\nu_1,\dots,\nu_r$ des r progressions de raison m dont la réunion est A vérifient :

$$\nu_1+\nu_r = \nu_2+\nu_{r-1} = \nu_3+\nu_{r-2} = \dots = m .$$

2e condition : Les premiers termes $\nu_1,\dots,\nu_r$ des r progressions de raison m dont la réunion est A vérifient :

$$\nu_1+\nu_{r-1} = \nu_2+\nu_{r-2} = \dots = \nu_r = m .$$

Le rôle de ces conditions provient de ce que la formule de Jacobi donne en remplaçant x par $x^{m/2}$ et y par $-x^{m/2-\nu}$ $(1\le\nu\le\frac{m}{2})$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^{mn-\nu})(1-x^{mn-(m-\nu)})(1-x^{mn}) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n . x^{m.\frac{n(n+1)}{2}-n\nu} . \tag{15}$$

On est alors amené à poser pour $\operatorname{Im} z > 0$:

$$\varphi_\nu(z) = e^{\frac{(m-2\nu)^2}{4m} i\pi z} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{2i\pi z(m\frac{n(n+1)}{2}-n\nu)} , \tag{16}$$

de sorte que l'on a aussi :

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{4mi\pi z(n+\frac{m-2\nu}{4m})^2} - e^{4mi\pi z(n+\frac{m+2\nu}{4m})^2} ; \tag{17}$$

les fonctions $\varphi_\nu(z)$ permettent alors avec $\eta(z)$, $\eta(mz)$ et $\eta(\frac{m}{2}z)$ (si m pair) d'exprimer :

$$F_A(z) = f_A(e^{2i\pi z}) = \prod_{n\in A} \frac{1}{1-e^{2i\pi nz}} . \tag{18}$$

On a en effet :

<u>1er cas</u> : $m \in A$, m <u>impair ou</u> $m/2 \in A$.

Alors

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)} \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} \left(\frac{\varphi_\nu(z)}{e^{\frac{(m-2\nu)^2}{4m} i\pi z}} . \frac{e^{mi\pi z/12}}{\eta(mz)}\right) \tag{19}$$

<u>2e cas</u> : $m \notin A$, m <u>impair ou</u> $m/2 \in A$.

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)} . \frac{\eta(mz)}{e^{mi\pi z/12}} \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} \left(\frac{\varphi_\nu(z)}{e^{\frac{(m-2\nu)^2}{4m} i\pi z}} . \frac{e^{mi\pi z/12}}{\eta(mz)}\right) . \tag{20}$$

<u>3e cas</u> : $m \in A$, $m/2 \notin A$, m <u>pair</u>.

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)} . \frac{\eta(mz/2)e^{mi\pi z/24}}{\eta(mz)} . \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} \frac{\varphi_\nu(z)}{e^{\frac{(m-2\nu)^2}{4m} i\pi z}} . \frac{e^{mi\pi z/12}}{\eta(mz)}) . \tag{21}$$

4e cas : $m \notin A$, $m/2 \notin A$, m pair .

$$F_A(z) = \frac{e^{i\pi z/12}}{\eta(z)} \cdot \frac{\eta(\frac{mz}{2})}{e^{mi\pi z/24}} \cdot \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} \left(\frac{\varphi_\nu(z)}{e^{\frac{(m-2\nu)^2}{4m}i\pi z}} \cdot \frac{e^{mi\pi z/12}}{\eta(mz)}\right) . \tag{22}$$

3. Le système modulaire.

Posons pour $\operatorname{Im} z > 0$

$$\psi_\mu(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{4mi\pi z(n+\frac{\mu}{4m})^2} = e^{\frac{\mu^2}{4m}i\pi z} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi z(2mn^2+n\mu)} \tag{23}$$

μ est susceptible a priori de prendre les $4m$ valeurs modulo $4m$. Mais en fait $\psi_{-\mu} = \psi_\mu$ de sorte que l'on a ainsi que $2m+1$ fonctions distinctes, par exemple pour μ allant de 0 à $2m$.

Les fonctions ψ_μ forment un système modulaire et les fonctions φ_ν sont des combinaisons linéaires des fonctions ψ_μ .

De là, nous déduisons des approximations très précises de φ_ν au voisinage des points h/k . On a immédiatement :

$$\varphi_\nu(z) = \psi_{m-2\nu}(z) - \psi_{m+2\nu}(z) ; \tag{24}$$

on a aussi :

$$\psi_\mu(z+1) = e^{i\mu^2\pi/4m}\psi_\mu(z) . \tag{25}$$

Enfin, la formule de Poisson (10) appliquée à ψ_μ donne

$$\psi_\mu(z) = \frac{1}{2\sqrt{m}}(i/z)^{1/2} \sum_{\rho=1}^{4m} \cos\frac{\mu\rho\pi}{2m}\, \psi_\rho(-1/z) ,$$

ce que nous écrivons de préférence

$$\psi_\mu(z) = (i/z)^{1/2}\left[\frac{1}{2\sqrt{m}}(\psi_o(-1/z)+(-1)^\mu\psi_{2m}(-1/z)) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{1}^{2m-1} \cos\frac{\mu\rho\pi}{2m}\psi_\rho(-1/z)\right] . \tag{26}$$

LEMME 5. - Les matrices intervenant dans les formules (25) et (26) sont unitaires pour la forme $\frac{1}{2}x_o\bar{x}_o + x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_{2m-1}\bar{x}_{2m-1} + \frac{1}{2}x_{2m}\bar{x}_{2m}$.

C'est évident pour la matrice intervenant dans la formule (25) . Pour celle qui intervient dans la formule (26) , cela résulte de son interprétation comme matrice représentant la <u>transformation de Fourier des fonctions paires</u> sur le groupe $Z/4m$, la base utilisée étant

- ε_o valant 1 en 0 , et 0 ailleurs
- ε_μ valant 1/2 en μ et en $4m-\mu$, 0 ailleurs (si $1\le\mu\le 2m-1$)
- ε_{2m} valant 1 en 2m , 0 ailleurs.

On a alors $\hat{\varepsilon}_\mu(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \sum_{\rho=1}^{4m} \varepsilon_\mu(\rho) e^{-\frac{2i\pi\rho\nu}{4m}}$, d'où $\hat{\varepsilon}_\mu(0) = \frac{1}{2\sqrt{m}}$, $\hat{\varepsilon}_\mu(2m) = \frac{(-1)^\mu}{2\sqrt{m}}$;

et pour $\nu \notin \{0,2m\}$ on a $\hat{\varepsilon}_\mu(\nu) = \frac{\cos\frac{\pi\mu\nu}{2m}}{2\sqrt{m}}$ (cela revient à dire que

$$\hat{\varepsilon}_\mu = \frac{1}{2\sqrt{m}}(\varepsilon_o+(-1)^\mu\varepsilon_{2m}) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_1^{2m-1} \cos\frac{\pi\mu\nu}{2m}\,\varepsilon_\nu) \quad .$$

Or la base $\varepsilon_o,\dots,\varepsilon_{2m}$ est une base de l'espace des fonctions paires, orthogonales et de carrés scalaires proportionnels à $2,1,1,\dots,1,2$.

LEMME 6. - <u>Posons</u>

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} \psi_o(z) \\ \psi_1(z) \\ \vdots \\ \psi_{2m}(z) \end{pmatrix} \tag{27}$$

on a alors des formules

$$\psi(z) = \left(\frac{i}{cz+d}\right)^{1/2} M\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \psi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \tag{28}$$

<u>où</u> $M(\binom{a,b}{c,d})$ <u>est unitaire pour la forme</u> $\frac{1}{2}x_o\bar{x}_o + x_1\bar{x}_1+\dots+x_{2m-1}\bar{x}_{2m-1}+\frac{1}{2}x_{2m}\bar{x}_{2m}$ <u>chaque fois que</u> a,b,c,d <u>sont entiers avec</u> $ad - bc = 1$.

Le groupe modulaire est en effet engendré par les transformations $z \to z+1$ et $z \to -1/z$; le lemme est alors évident par récurrence sur le nombre de transformations de ce type nécessaires pour obtenir $z \to \frac{az+b}{cz+d}$.

4. <u>Approximations et majorations</u>.

On a aisément des approximations des ψ_μ dans des demi-plans $\mathrm{Im}(z) \ge \gamma$ (γ constante strictement positive quelconque). Le principe de ce qui suit est celui-ci : les transformations du groupe modulaire permettent d'en déduire des

approximations des ψ_μ dans les transformées de ce demi-plan. Or si $\gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq \gamma$ contient un domaine fondamental de groupe modulaire ; ses transformées recouvrent alors tout le demi-plan $\mathrm{Im}\, z > 0$. On aura donc un système d'approximations des ψ_μ (puis des φ_μ, puis de $F_A(z)$, à condition d'examiner $\eta(mz)$) utilisables partout. Soit D_∞ le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq \gamma$. On désigne par $D_{h/k}$ (h premier à k) le transformé de D_∞ par la transformation qui envoie ∞ en h/k ; alors $z \to \frac{az+b}{kz-h}$ $(ah-bk = 1)$ envoie $D_{h/k}$ sur D_∞, et $D_{h/k}$ est le disque tangent en h/k à $\mathbb{R}$ et de centre $\frac{h}{k} + \frac{i}{\gamma k^2}$.
Si on se propose d'obtenir une première approximation de $p(n;A)$ et $q(n;A)$, il convient d'avoir des approximations des φ_ν dans $D_{0/1}$ et des majorations dans les autres $D_{h/k}$ (ainsi que des approximations de $\eta(z)$, $\eta(mz)$, $\eta(mz/2)$, mais cela est déjà connu).

Approximations dans $D_{0/1}$:

D'après (23), on a dans D_∞

$$\psi_\mu(z) = e^{\frac{\mu^2}{4m}i\pi z} \bmod 0\left(\left|e^{(\frac{\mu^2}{4m}+2)i\pi z}\right|\right), \tag{29}$$

donc dans $D_{0/1}$

$$\psi_{m-2\nu}(z) = \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2\sqrt{m}}\psi_o(-1/z) + \frac{1}{\sqrt{m}}\sin\frac{\nu\pi}{m}\psi_1(-1/z)\right] \bmod 0\left(|z|^{-1/2}\left|e^{-\frac{i\pi}{mz}}\right|\right), \tag{30}$$

et par suite, toujours dans $D_{0/1}$:

$$\varphi_\nu(z) = \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \times \frac{2\sin\frac{\nu\pi}{m}}{\sqrt{m}} \cdot e^{-\frac{i\pi}{4mz}} \bmod 0\left(|z|^{-1/2}\left|e^{-\frac{i\pi}{mz}}\right|\right). \tag{31}$$

Ceci est applicable bien entendu à la fonction η. $(m = 3\ ,\ \nu = 1)$ et permet même d'avoir des approximations de $\eta(mz)$ ou $\eta(\frac{m}{2}z)$ puisque l'on peut changer la valeur de la constante γ qui fixe la grandeur des disques $D_{h/k}$.
De (31) et de (19) à (22) résultent alors les approximations de $F_A(z)$ dans $D_{0/1}$:

1er cas. $m \in A$; m impair ou $m/2 \in A$.

$$F_A(z) = \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} (2\sin\frac{\nu\pi}{m})\cdot(\frac{z}{i})^{1/2}.\exp(\frac{i r\pi}{12mz}).\exp(i\pi z(\frac{1}{12} + \sum_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} (\frac{m}{12}-\frac{(m-2\nu)^2}{4m})))$$

$$\text{mod } 0(|z|^{1/2}.|\exp(\frac{i r\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz})|) . \qquad (32)$$

2e cas. $m \notin A$; m impair ou $m/2 \in A$.

$$F_A(z) = \frac{1}{\sqrt{m}} \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} (2\sin\frac{\nu\pi}{m}).\exp(\frac{i r\pi}{12mz}).\exp(i\pi z(\frac{1}{12} - \frac{m}{12} + \sum (\frac{m}{12} - \frac{(m-2\nu)^2}{4m}))$$

$$\text{mod } 0 (|e^{\frac{i r\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz}}|) . \qquad (33)$$

3e cas. $m \in A$; m pair, $m/2 \notin A$.

$$F_A(z) = \sqrt{2} \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} (2\sin\frac{\nu\pi}{m})(\frac{z}{i})^{1/2}\exp(\frac{i r\pi}{12mz}).\exp(i\pi z(\frac{1}{12} + \frac{m}{24} + \sum (\frac{m}{12} - \frac{(m-2\nu)^2}{4m})))$$

$$\text{mod } 0(|z|^{1/2}.|\exp(\frac{i r\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz}|) . \qquad (34)$$

4e cas. $m \notin A$; m pair, $m/2 \notin A$.

$$F_A(z) = \sqrt{\frac{2}{m}} \prod_{\substack{\nu<m/2\\ \nu\notin A}} (2\sin\frac{\nu\pi}{m}).\exp(\frac{i r\pi}{12mz}).\exp(i\pi z(\frac{1}{12} - \frac{m}{24} + \sum(\frac{m}{12} - \frac{(m-2\nu)^2}{4m})))$$

$$\text{mod } 0(|\exp(\frac{i r\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz}|) . \qquad (35)$$

Ces formules peuvent d'ailleurs se réduire à deux cas :

Cas $m \in A$.

$$F_A(z) = \prod_{\substack{\nu<m\\ \nu\notin A}} (2\sin\frac{\nu\pi}{m})^{1/2}.(\frac{z}{i})^{1/2}.\exp(\frac{i r\pi}{12mz}).\exp(+2i\pi\alpha z)$$

$$\text{mod } 0(|z|^{1/2}|\exp(\frac{i r\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz})|) \qquad (36)$$

<u>Cas</u> $m \notin A$.

$$F_A(z) = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \prod_{\substack{\nu<m \\ \nu\notin A}} \left(2 \sin \frac{\nu\pi}{m}\right)^{1/2} . \exp\left(\frac{i\pi}{12mz}\right) . \exp(2i\pi\alpha z)$$

$$\bmod 0\left(\left|\exp.\left(\frac{i\pi}{12mz} - \frac{3i\pi}{4mz}\right)\right|\right) . \qquad (37)$$

<u>Majorations en dehors de</u> $D_{0/1}$. On majore en dehors de $D_{0/1}$ en majorant dans les $D_{h/k}$ $(k\geq 2)$, puisque les $D_{h/k}$ recouvrent le demi-plan $\mathrm{Im}\, z > 0$. Le lemme 6 joue ici un rôle essentiel : les matrices $M(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix})$ de la formule (28) étant <u>unitaires</u> (pour une forme convenable) ont leurs coefficients majorés en module par une même constante. On a alors la possibilité d'avoir des majorations <u>uniformes en</u> k pour tous les disques $D_{h/k}$. L'additif à la proposition 1 va servir également à nous dispenser de certains calculs.

Dans $D_{h/k}$, on utilise la transformation $z \to \frac{az+b}{kz-h}$ qui ramène à D_∞ . On a alors avec des développements limités poussés assez loin des fonctions ψ_μ : $F_A(z) \in 0(|\sum C_n e^{-i\beta_n \pi/(z-h/k)}$ dans $D_{h/k}$ ou la somme des $|C_n|$ est majorée par une constante absolue C (grâce au lemme 6), les β_n dépendant de la fraction h/k . Or, si β est le plus grand des β_n tels que le développement limité de $F_A(z)$ contienne effectivement $e^{-i\beta\pi/(z-h/k)}$ ceci est l'ordre de grandeur de $F_A(z)$. L'additif à la proposition 1 montre alors que le β est majoré par un β_o <u>strictement inférieur</u> à $r/12m$.

<u>On a alors en dehors de</u> $D_{0,1}$:

$$F_A(z) \in 0(e^{\pi\beta_o/\mathrm{Im}\, z}) \quad \text{ou} \quad \beta_o < \frac{r}{12m} .$$

5. <u>Résultats</u> : <u>équivalents de</u> $p(n;A)$ <u>et</u> $q(n;A)$.

Il suffit d'appliquer les formules de Cauchy

$$p(n;A) = \int_{-1/2+i\epsilon}^{1/2+i\epsilon} F_A(z)e^{-2i\pi nz}dz$$

$$q(n;A) = \int_{-1/2+i\epsilon}^{1/2+i\epsilon} \frac{F_A(z)}{F_A(2z)} e^{-2i\pi nz}dz$$

avec un ϵ convenable. On divise en trois parties I_1, I_2, I_3 l'intervalle d'intégration I_2 étant l'intersection avec le disque $D_{0,1}$. On utilise sur I_2 l'approximation de $F_A(z)$ ou $\frac{F_A(z)}{F_A(2z)}$, tandis qu'on utilise les majorations sur I_1 et I_3.

Cette technique élémentaire mais fastidieuse (cf. [A]) donne les résultats suivants :

Cas où $m \in A$.

$$p(n;A) \sim \prod_{\substack{0<\nu<m \\ \nu\notin A}} \left(2 \sin \frac{\pi\nu}{m}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{r}{48m}} \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2rn}{3m}}}$$

$$q(n;A) \sim \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{r}{3m}} \cdot \frac{1}{n^{3/4}} e^{\pi\sqrt{\frac{rn}{3m}}} .$$

Cas où $m \notin A$.

$$p(n;A) \sim \frac{1}{\sqrt{m}} \prod_{\substack{0<\nu<m \\ \nu\notin A}} \left(2 \sin \frac{\pi\nu}{m}\right)^{1/2} \cdot \sqrt[4]{\frac{r}{24m}} \frac{1}{\sqrt{2 . n^{3/4}}} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2rn}{3m}}}$$

$$q(n;A) \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{r}{3m}} \cdot \frac{1}{n^{3/4}} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{rn}{3m}}}$$

Remarque : Il est clair qu'au moyen d'approximations assez précises, non seulement dans $D_{0/1}$ mais encore dans $D_{1/2}$, $D_{1/3}$, $D_{2/3}$ etc... c'est-à-dire les $D_{h/k}$ avec $k \leq K$, on aurait des développements limités de $p(n;A)$. Peut-être pourrait-on avoir même une série analogue à celle de Rachemacher ([A], [R]). De telles formules seraient des curiosités inutilisables, car d'une complication très grande.

CHAPITRE III

EN DEHORS DE LA CONDITION DE SYMETRIE, RECHERCHES ET CONJECTURES.

1. Comportement de $f_A(x)$ pour $x \in [0,1[$.

Soit $f_{\nu+nm}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{\nu+nm})}$ avec $x = e^{2i\pi z}$; la théorie de la fonction η donne pour z imaginaire pur

$$\mathrm{Log}\, f_{m+nm}(x) = \frac{i\pi}{12mz} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(\frac{z}{i}) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}\, m \mod 0\ (1)\ .$$

On peut poser pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Log}\, f_{\nu+nm}(x) = \frac{i\pi}{12mz} + \frac{1}{m}(\nu - \frac{m}{2})\mathrm{Log}(\frac{z}{i}) + C_\nu(z)$.

On a facilement alors $C_{\nu+m}(z) = C_\nu(z) + \mathrm{Log}\,\frac{\nu}{m} + \mathrm{Log}\,(2\pi m) \mod 0\ (1)$ <u>et pour</u> ν <u>multiple de</u> z , $C_\nu(z)$ admet une limite pour z imaginaire pur tendant vers zéro. On va "interpoler" ce comportement. Pour cela on vérifie d'abord :

$$\mathrm{Log}\,\frac{f_{\nu+nm}(x) f_{\nu+2+nm}(x)}{(f_{\nu+1+nm}(x))^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{q}\,\frac{x^{q\nu} - x^{q(\nu+1)}}{1+x^q+\ldots+x^{(m-1)q}} > 0 \quad (\text{pour } x \in [0,1[)\ .$$

Cette <u>convexité</u> montre que pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, $C_\nu(z)$ tend vers une limite pour $z \to 0$, laquelle s'exprime au moyen de la fonction $\mathrm{Log}\,\Gamma$:

$$C_\nu(z) = (\frac{\nu}{m} - \frac{1}{2})\mathrm{Log}\, m + (\frac{\nu}{m} - 1)\mathrm{Log}\, 2\pi + \mathrm{Log}\,\Gamma(\frac{\nu}{m}) \mod 0(1)\ ;$$

autrement dit :

THEOREME. $$\prod_1^\infty \frac{1}{1-e^{2i\pi(\nu+nm)z}} \sim m^{(\frac{\nu}{m}-\frac{1}{2})}\cdot(2\pi)^{\frac{\nu}{m}-1}\cdot\Gamma(\frac{\nu}{m})e^{\frac{i\pi}{12mz}}\cdot(\frac{z}{i})^{(\frac{\nu}{m}-\frac{1}{2})}$$

<u>pour</u> z <u>imaginaire pur tendant vers zéro</u>.

Il serait intéressant évidemment de majorer la différence des expressions ci-dessus dans $D_{0/1}$ par exemple, et de majorer le membre de gauche en dehors. Ceci suggère la <u>conjecture</u> : <u>si</u> A <u>est réunion de</u> r <u>progressions de raison</u> m <u>et de premiers termes</u> $\nu_1,\ldots,\nu_r$ <u>on a</u> :

$$p(n;A) \sim m^{\sum(\frac{\nu_j}{m}-\frac{1}{2})}\cdot(2\pi)^{\sum(\frac{\nu_j}{m}-1)}\cdot\prod\Gamma(\frac{\nu_j}{m})\cdot\frac{(\frac{r}{24m})^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum(\frac{\nu_j}{m}-\frac{1}{2})}}{\sqrt{2}\; n^{\frac{3}{4}+\sum(\frac{\nu_j}{m}-\frac{1}{2})}}\cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2rn}{3m}}}$$

<u>ainsi que</u>

$$q(n;A) \sim \frac{1}{2^{\frac{3}{2}+\sum(\frac{\nu_j}{m}-\frac{1}{2})}}\sqrt[4]{\frac{r}{3m}}\cdot\frac{1}{n^{3/4}}\cdot e^{\pi\sqrt{\frac{rn}{3m}}}$$

-:-:-:-

André Blanchard
33, Bd Herriot - 13008 MARSEILLE