MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN JACOD

Noyaux multiplicatifs d'un processus de Markov

Mémoires de la S. M. F., tome 35 (1973), p. 81-117
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__35__81_0>

Bull. Soc. math. France
Mémoire 35, 1973, p. 81-117.

NOYAUX MULTIPLICATIFS D'UN PROCESSUS DE MARKOV

par Jean JACOD

[Ecole des Mines, Fontainebleau]

RESUME. - Soient E_1 et E_2 deux espaces localement compacts de type dénombrable. Soit $X = (\Omega, \theta_t, X_t, P^x)$ un processus de Markov à valeurs dans E_1, de semi-groupe (P_t). Une famille $(q_t(\omega);\ t\geq 0,\ \omega\in\Omega)$ de noyaux sur E_2 est appelée noyau multiplicatif de X si pour tous $s,t\geq 0$, $y\in E_2$, tout borélien A de E_2, on a

$$q_{t+s}(\omega)(y,A) = q_t(\omega)q_s\circ\theta_t(\omega)(y,A) \text{ ps}$$

en ω. Il s'agit d'une généralisation naturelle des fonctionnelles multiplicatives de X.

On montre l'existence d'une correspondance bi-univoque entre les classes d'équivalence de noyaux multiplicatifs de X, et les semi-groupes (Q_t) sur $E_1\times E_2$ vérifiant $Q_t(x,y;A\times E_2) = P_t(x,A)$. On construit le processus canonique subordonné à X et admettant (Q_t) pour transition. Enfin on étudie le potentiel des fonctionnelles additives continues et prévisibles, associées à un noyau multiplicatif.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit $(\Omega,\theta_t,(X_t,Y_t),\underset{\sim}{P}^{x,y})$ un processus de Markov à valeurs dans un espace produit $E_1\times E_2$, de semi-groupe (Q_t). Ce processus est appelé produit semi-direct de processus de Markov si $Q_t(x,y;A\times E_2)$ ne dépend pas de y. $\mathcal{F}$ étant la tribu engendrée par les $(X_t)_{t\geq o}$, on vérifie aisément que les restrictions des $\underset{\sim}{P}^{x,y}$ à $\mathcal{F}$ ne dépendent pas de y, et on note P^x leur valeur commune. Le processus $X = (\Omega,\theta_t,X_t,P^x)$ est alors markovien, de semi-groupe $\mathcal{P} = (P_t)_{t\geq o}$ défini par $P_t(x,A) = Q_t(x,y;A\times E_2)$.

L'outil principal pour l'étude des produits semi-directs est constitué par les noyaux multiplicatifs. On appelle noyau multiplicatif (en abrégé: NM) de X une famille $(q_{t,\omega}; t\geq 0, \omega\in\Omega)$ de mesures de transition positives sur E_2, telle que pour tous $s,t\geq 0$, $y\in E_2$ et tout borélien A de E_2, on ait $q_{t+s,\omega}(y,A) = q_{t,\omega}q_{s,\theta_t(\omega)}(y,A)$ sauf sur un ensemble négligeable (dépendant de s,t,y et A). L'intérêt de cette notion provient de l'existence d'un NM de X tel que $q_t(y,A) = \underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_t\in A|\mathcal{F}\}$ ps.

Dans cet article nous étudions les NM d'un processus de Markov, sans référence explicite aux produits semi-directs, qui sont abordés dans un autre article [7]. L'introduction des produits semi-directs aurait sans doute permis de simplifier quelques démonstrations, mais au prix d'une perte de généralité (car tout processus X n'est pas forcément la première composante d'un produit semi-direct), et en outre les NM présentent un intérêt intrinsèque. Cependant nous avons indiqué l'existence d'une démonstration plus simple chaque fois que le cas se présente.

On commence par montrer que, sous certaines conditions, il y a correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence de NM de X, et les semi-groupes sur $E_1\times E_2$ vérifiant $Q_t(x,y;A\times E_2) = P_t(x,A)$. Cela généralise la correspondance bien connue entre fonctionnelles multiplicatives de X et semi-groupes subordonnés à $\mathcal{P}$.

Nous étudions ensuite quelles hypothèses permettent de définir pour presque tout ω un processus de Markov non homogène $(\Omega',Y_t,P^y_{t,\omega})$ à valeurs dans E_2, vérifiant la condition suivante: si $\underset{\sim}{\Omega} = \Omega\times\Omega'$ et $\underset{\sim}{P}^{x,y}(d\omega,d\omega') = P^x(d\omega)P^y_{o,\omega}(d\omega')$, le processus $(\underset{\sim}{\Omega},(X_t,Y_t),\underset{\sim}{P}^{x,y})$ est markovien et admet (Q_t) pour semi-groupe. On étend ainsi la notion de sous-processus canonique associé à une fonctionnelle multiplicative.

Enfin nous introduisons la notion de fonctionnelle additive associée à un NM. Nous démontrons plusieurs théorèmes concernant principalement le potentiel de ces fonctionnelles additives, et qui sont analogues aux résultats relatifs aux fonctionnelles additives ordinaires.

Je tiens à remercier vivement M. NEVEU qui a bien voulu accepter de diriger ma thèse, dont ce travail constitue une partie, ainsi que M. MEYER dont les conseils m'ont été très utiles pour la rédaction de cet article.

NOTATIONS, PRELIMINAIRES.- D'une manière générale nous utiliserons les notations de BLUMENTHAL et GETOOR [2]. E_1 et E_2 sont deux espaces localement compacts de type dénombrable, et $E_3 = E_1\times E_2$. Pour i = 1,2,3, on adjoint à E_i un point à l'infini Δ_i (un point isolé si E_i est compact), et $E_i = E_i\cup\{\Delta_i\}$. $\mathcal{E}_i$ désigne la tribu des boréliens de E_i. On note $C(E_i)$ l'espace des fonctions réelles continues sur E_i, limitées à l'infini. $(A,\mathcal{A})$ étant un espace mesurable quelconque, $b\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions réelles, mesurables et bornées sur $(A,\mathcal{A})$; si $B\subset A$, 1_B désigne la "fonction indicatrice" de B; ε_a est la probabilité sur A concentrée en a; $\mathcal{A}^*$ est la complétée universelle de $\mathcal{A}$. Enfin $\mathcal{R}$ désigne la tribu borélienne de $[0,\infty[$.

Dans tout cet article, $X = (\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\theta_t,X_t,P^x)$ est un processus de Markov à valeurs dans $(E_1,\mathcal{E}_1^*)$. Pour fixer les idées, nous le supposerons normal, à trajectoires continues à droite. Rappelons que si $\mathcal{F}_t^o = \sigma(X_s;\ s\leq t)$, $\mathcal{F}$ est la complétée de $\mathcal{F}_\infty^o$ par rapport à la famille (P^μ; μ probabilité sur E_1), et $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t^o$ et les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. On note ζ le temps de mort de X, et $\mathcal{P} = (P_t)_{t\geq 0}$ son semi-groupe de transition: c'est un semi-groupe sur $(E_1,\mathcal{E}_1^*)$.

Ci-dessous sont rassemblés, sous la forme d'une série de lemmes faciles, quelques résultats techniques de mesurabilité que nous utilisons plus loin. Nous conseillons au lecteur de passer directement à la partie I, quitte à se reporter à ce qui suit au fur et à mesure des besoins.

Rappelons d'abord que si $(A,\mathcal{A})$ et $(B,\mathcal{B})$ sont deux espaces mesurables quelconques et si P est un noyau de $(A,\mathcal{A}^*)$ dans $(B,\mathcal{B})$, c'est aussi un noyau de $(A,\mathcal{A}^*)$ dans $(B,\mathcal{B}^*)$. On sait également que si $f\in b(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^*$, f(a,b) est séparément $\mathcal{A}^*$-mesurable en a et $\mathcal{B}^*$-mesurable en b. Comme $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t$ ([2], p.27), on en déduit:

LEMME 1.- Si $Z\in b(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$, $Z(.,y)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout y.

LEMME 2.- a) Si $Z\in b(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)^*$, $f(x,y) = E^x\{Z(.,y)\}$ est $\mathcal{E}_3^*$-mesurable en (x,y).
b) Si $Z\in b(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)^*$, la fonction $Z(\theta_t\omega,y)$ est $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable.
c) Si $Z\in b(\mathcal{E}_3\otimes\mathcal{F}_t)^*$ et $s\leq t$, la fonction $Z(X_s(\omega),y,\omega)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y).

Démonstration.- a) Soit μ une probabilité sur E_3, et $\hat\mu$ la mesure sur $(\Omega\times E_2,\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)$ définie par $\hat\mu(d\omega,dy) = \int\mu(dx,dy)P^x(d\omega)$. Si $Z\in b(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)^*$, il existe Z_1 et Z_2 dans $b(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)$, tels que $Z_1\leq Z\leq Z_2$ et que $\hat\mu(Z_1\neq Z_2) = 0$. Mais alors les $f_i(x,y) = E^x\{Z_i(.,y)\}$ encadrent f, sont $\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2$-mesurables, et vérifient $\mu(f_1\neq f_2) = 0$. On termine en remarquant que $(\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2)^* = \mathcal{E}_3^*$.

b) (resp c)) se montre de la même manière, en associant à toute loi μ sur $(\Omega\times E_2, \mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)$ (resp $(\Omega\times E_2,\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)$) la loi $\hat\mu$ sur $(\Omega\times E_2,\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)$ (resp $(E_3\times\Omega,\mathcal{E}_3\otimes\mathcal{F}_t)$) définie par $\hat\mu(Z) = \int\mu(d\omega,dy)Z(\theta_t\omega,y)$ (resp $\hat\mu(Z) = \int\mu(d\omega,dy)Z(X_s(\omega),y,\omega)$). ∎

LEMME 3.- Soient r un noyau de $(\Omega\times E_2,(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2^*)$, et $Z\in b(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$.
a) La fonction $Z'(\omega,y) = \int r(\omega,y;dy')Z(\omega,y')$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable.

b) <u>On a</u> $E^x\{\int r(\omega,y;dy')Z(\theta_t\omega,y')|\mathcal{F}_t\} = \int r(.,y;dy')E^{X_t}\{Z(\omega,y')\}$.

<u>Démonstration</u>.- a) ω étant fixé, $r(\omega,.;.)$ est un noyau sur $(E_2,\mathcal{E}_2^*)$ et $Z(\omega,.)$ est $\mathcal{E}_2^*$-mesurable, donc $Z'(\omega,.)$ est bien défini. On termine comme au lemme 2, en associant à toute loi μ sur $(\Omega\times E_2,\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)$ la mesure sur le même espace définie par $\hat{\mu}(Z) = \int\mu(d\omega,dy)r(\omega,y;dy')Z(\omega,y')$.

b) D'après a) et le lemme 2 (a et c), le second membre de l'expression de l'énoncé est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable, donc $\mathcal{F}_t$-mesurable en ω à y fixé. Les lemme 1 et 2 (b et c) montrent que le premier membre a un sens. A l'aide d'un argument de classe monotone on montre l'égalité annoncée lorsque $Z\in b(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)$. Par suite si $Z'\in b\mathcal{F}_t$, les deux mesures sur $(\Omega\times E_2,\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)$ définies par:

$$\mu_1(Z') = E^x\{Z'(\omega)\int r(\omega,y;dy')Z(\theta_t\omega,y')\}$$

$$\mu_2(Z') = E^x\{Z'(\omega)\int r(\omega,y;dy')E^{X_t(\omega)}\{Z(.,y')\}\}$$

sont égales, et on en déduit le résultat. ∎

<u>Remarque</u>.- Dans tout ce qui précède, on peut remplacer les variables bornées par des variables positives.

I- DEFINITION D'UN NOYAU MULTIPLICATIF

DEFINITION.- <u>Une famille</u> $q = (q_{t,\omega}(y,.);\ t\geq 0,\ \omega\in\Omega,\ y\in E_2)$ <u>de mesures positives sur</u> $(E_2,\mathcal{E}_2)$ <u>est un noyau multiplicatif (NM) de</u> X <u>si elle vérifie</u>:

<u>N-1</u>. Pour tous $t\geq 0$, $A\in\mathcal{E}_2$, $q_{t,\omega}(y,A)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y).

<u>N-2</u>. Pour tous $s,t\geq 0$, $A\in\mathcal{E}_2$, $y\in E_2$; pour tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de s,t,A et y), on a:

$$q_{t+s,\omega}(y,A) = \int q_{t,\omega}(y,dy')q_{s,\theta_t(\omega)}(y',A). \tag{1}$$

<u>N-3</u>. Pour tous $t\geq 0$, $y\in E_2$, pour tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de t et de y), on a:

$$q_{t,\omega}(y,E_2) = 1_{t<\zeta(\omega)}. \tag{2}$$

N-1 entraine en particulier que pour ω fixé, $q_{t,\omega}(.,.)$ est un noyau sur $(E_2,\mathcal{E}_2^*)$. D'après les lemmes 2 et 3, l'égalité (1) a un sens, et on l'écrit habituellement sous la forme:

$$q_{t+s,\omega}(y,A) = q_{t,\omega}q_{s,\theta_t(\omega)}(y,A),$$

le second membre ayant le sens d'un produit de noyaux. Enfin s'il n'y a pas d'ambiguité possible, on écrira $q_t(y,A)$ au lieu de $q_{t,\omega}(y,A)$. Comme $\mathcal{E}_2$ est séparable, l'ensemble négligeable introduit dans N-2 ne dépend pas de A, mais seulement de s, t et y.(*)

Deux NM q et r sont dits <u>équivalents</u> si pour tous $t\geq 0$, $y\in E_2$ et tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de t et de y), on a: $q_{t,\omega}(y,.) = r_{t,\omega}(y,.)$. En vertu de la séparabilité de $\mathcal{E}_2$, il suffit pour cela que pour tous $(x,y)\in E_3$, $t\geq 0$, $A\in\mathcal{E}_2$, on ait $P^x\{q_t(y,A) \neq r_t(y,A)\} = 0$.

DEFINITION.- <u>Un semi-groupe $\mathcal{Q} = (Q_t)_{t\geq o}$ de noyaux sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ est dit subordonné au semi-groupe $\mathcal{P}$ si pour tous</u> $t\geq 0$, $(x,y)\in E_3$, $A\in\mathcal{E}_1$, <u>on a</u>:

$$Q_t(x,y;A\times E_2) = P_t(x,A). \tag{3}$$

Etant donné un NM q, définissons la mesure $Q_t(x,y;.)$ sur E_3 par

$$Q_t(x,y;A\times B) = E^x\{1_A(X_t)q_t(y,B)\}. \tag{4}$$

PROPOSITION 1.- <u>La famille $\mathcal{Q} = (Q_t)_{t\geq o}$ définie par (4) est un semi-groupe sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ subordonné à</u> $\mathcal{P}$. On dit que $\mathcal{Q}$ est le <u>semi-groupe engendré</u> par q.

<u>Démonstration</u>.- Le fait que Q_t soit un noyau sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ découle de N-1 et du lemme 2. N-2 et le lemme 3 permettent d'écrire

$$\begin{aligned} Q_{t+s}(x,y;A\times B) &= E^x\{1_A(X_s\circ\theta_t(\omega))\int q_{t,\omega}(y,dy')q_{s,\theta_t(\omega)}(y',B)\} \\ &= E^x\{\int q_t(y,dy')E^{X_t}\{1_A(X_s)q_s(y',B)\}\} \\ &= Q_tQ_s(x,y;A\times B); \end{aligned}$$

donc $\mathcal{Q}$ est un semi-groupe, vérifiant (3) d'après N-3. ■

PROPOSITION 2.- <u>Deux NM sont équivalents si et seulement s'ils engendrent le même semi-groupe</u>.

(*) P.A. MEYER m'a signalé les travaux récents de PINSKY [11], sur les fonctionnelles multiplicatives à valeur "noyau". Celles-ci diffèrent des NM sur deux points: on impose seulement la mesurabilité de $q_{t,\omega}(y,A)$ séparément en y et en ω; par contre l'ensemble exceptionnel de N-2 ne dépend que de s et t.

Démonstration.- Il est évident que deux NM équivalents engendrent le même semi-groupe. Réciproquement soient q et r deux NM engendrant le semi-groupe $\mathcal{Q}$. Il suffit de montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t_1 < \ldots < t_n$, $A \in \mathcal{E}_2$, $f_i \in b\mathcal{E}_1$, $(x,y) \in E_3$, on a:

$$E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})q_{t_n}(y,A)\} = E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})r_{t_n}(y,A)\}.$$

Appliquons N-2, le lemme 3 et (4):

$$E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})q_{t_n}(y,A)\} = E^x\{\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i})\int q_{t_{n-1}}(y,dy')Q_{t_n-t_{n-1}}(X_{t_{n-1}},y';f_n,A)\}$$

$$= \int Q_{t_1}(x,y;dx_1,dy_1)\ldots Q_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},y_{n-1};dx_n,dy_n)\prod_{i=1}^n f_i(x_i)1_A(y_n),$$

et on obtient la même expression en remplaçant q par r, d'où le résultat. ∎

Comportement à l'origine d'un NM.- La loi 0-1 ([2] p.30) entraine que la variable aléatoire $q_o(y;A)$ est P^x-ps égale à une constante notée $Q_x(y,A)$. Si les A_i sont disjoints on a $\sum_{(i)} Q_x(y,A_i) = Q_x(y, \sum_{(i)} A_i)$, P^x-ps; on peut évidemment supprimer le "ps", car les deux membres de l'égalité précédente sont des constantes. Donc $Q_x(y,.)$ est une mesure positive sur E_2, qui coïncide P^x-ps avec $q_o(y,.)$. Il découle alors de N-1 et de N-2 que Q_x est un noyau sur E_2, vérifiant $Q_xQ_x = Q_x$.

On a donc montré l'existence d'une famille $(Q_x;\ x\in E_1)$ de noyaux sur E_2, idempotents, tels que $Q_x(y,A) = q_o(y,A)$ P^x-ps. La forme de Q_o s'en déduit:

(5) $$Q_o(x,y;A\times B) = 1_A(x)Q_x(y,B).$$

On dit qu'un point x de E_1 est permanent pour q si Q_x égale l'identité.

Exemple: noyau multiplicatif associé à une fonctionnelle multiplicative.- Soit $M = (M_t)_{t\geq o}$ une FM de X engendrant le semi-groupe $\mathcal{P}' = (P'_t)_{t\geq o}$. On associe à M un NM q et à $\mathcal{P}'$ un semi-groupe $\mathcal{Q}$ subordonné à $\mathcal{P}$ et engendré par q de la manière suivante: on prend $E_2 = \{0,1\}$, et on pose:

$$q_t(1,1) = 1_{t<\zeta}M_t \qquad Q_t(x,1;.,1) = P'_t(x,.)$$

$$q_t(1,0) = 1_{t<\zeta}(1-M_t) \qquad Q_t(x,1;.,0) = P_t(x,.) - P'_t(x,.)$$

$$q_t(0,1) = 0 \qquad Q_t(x,0,.,1) = 0$$

$$q_t(0,0) = 1_{t<\zeta} \qquad Q_t(x,0;.,0) = P_t(x,.)$$

Remarquons que les points permanents pour q sont exactement les points permanents pour M.

NM parfaits.- Un NM q est dit parfait si N-2 et N-3 sont renforcés ainsi:

N-2'. Il existe une partie Ω_2 de Ω de probabilité unité, telle que (1) soit vérifiée pour tous $s,t\geq 0$, $A\in\mathcal{E}_2$, $y\in E_2$, $\omega\in\Omega_2$.

N-3'. Il existe une partie Ω_3 de Ω de probabilité unité, telle que (2) soit vérifiée pour tous $t\geq 0$, $y\in E_2$, $\omega\in\Omega_3$.

N-3' n'est pas véritablement plus fort que N-3, puisque:

PROPOSITION 3.- Soit q un NM de X. Il existe un NM q' équivalent à q et vérifiant N-3' (avec d'ailleurs $\Omega_3 = \Omega$).

Démonstration.- Définissons ainsi la mesure $q'_{t,\omega}(y,.)$:

$$q'_{t,\omega}(y,.) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\geq\zeta(\omega) \\ q_{t,\omega}(y,.) & \text{si } t<\zeta(\omega),\ q_{t,\omega}(y,E_2) = 1 \\ \varepsilon_y(.) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La famille q' vérifie N-3' par construction, avec $\Omega_3 = \Omega$. Si $A\in\mathcal{E}_2$, on a:

$$\{(y,\omega);\ q'_{t,\omega}(y,A)>a\} = \{(y,\omega);\ t<\zeta(\omega),\ q_{t,\omega}(y,A)>a,\ q_{t,\omega}(y,E_2) = 1\}$$
$$+ \{(y,\omega);\ t<\zeta(\omega),\ y\in A,\ q_{t,\omega}(y,E_2) \neq 1\};$$

donc q' vérifie N-1. D'après N-3, $q'_t(y,A) = q_t(y,A)$ ps. Pour terminer il suffit de montrer que q' vérifie N-2. Si $s,t\geq 0$, $Z_1\in b\mathcal{F}_t$, $Z_2\in b\mathcal{F}_s$, on a:

$$E^x\{Z_1Z_2\circ\theta_t q'_{t+s}(y,A)\} = E^x\{Z_1Z_2\circ\theta_t q_{t+s}(y,A)\} = E^x\{Z_1\int q_t(y,dy')E^{X_t}\{Z_2q_s(y',A)\}\}$$
$$= E^x\{Z_1\int q'_t(y,dy')E^{X_t}\{Z_2q'_s(y',A)\}\} = E^x\{Z_1Z_2\circ\theta_t q'_t q'_{s,\theta_t(.)}(y,A)\}$$

en utilisant le lemme 3. Il en découle que q' vérifie N-2. ∎

Lorsque E_2 est fini, on peut donner un critère assurant qu'un NM est équivalent à un NM parfait; sa démonstration suit de près celle de WALSH [13] concernant les fonctionnelles multiplicatives.

Rappelons d'abord que la topologie essentielle sur $\mathbb{R}$ (WALSH, [12]) admet pour ouverts les ensembles de la forme U-N, où U est un ouvert ordinaire et N un ensemble tel que $\lambda(N) = 0$, λ étant la mesure de Lebesgue. (f_i) étant une famille finie ou dénombrable de fonctions bornées sur $[0,\infty[$, on pose:

$$A_n^{b_1,\dots,b_n} = \{s;\ f_i(s)\geq b_i \text{ pour } i\leq n\},$$

$$a_1 = \sup(s;\ \lambda(A_1^s \cap [0,\varepsilon])>0,\quad \forall \varepsilon>0),$$

$$a_n = \sup(s;\ \lambda(A_n^{a_1-\varepsilon,..,a_{n-1}-\varepsilon,s} \cap [0,\eta])>0,\quad \forall \varepsilon,\eta>0).$$

Il est facile de voir que chaque a_n est ainsi bien défini, et que a_1 égale la lim sup essentielle de $f_1(s)$ quand $s\downarrow 0$. On dit que la famille (a_i) est la lim sup essentielle de la famille (f_i) quand $s\downarrow 0$ (cette famille (a_i) dépend de l'ordre dans lequel sont pris les f_i).

LEMME 4.- Avec les hypothèses précédentes, si B est une partie de $[0,t]$ telle que $\lambda(B) = t$, il existe une suite (s_n) de points de B, convergeant vers 0 et telle que $\lim\limits_{(n)} f_i(s_n) = a_i$ pour tout i.

Démonstration.- Fixons n et posons $A_n = A_n^{a_1-1/n,..,a_n-1/n}$, $B_n^1 = A_1^{a_1+1/n}$, et $B_n^p = A_p^{a_1-1/n,..,a_{p-1}-1/n,a_p+1/n}$ pour $p\geq 2$. Par définition des a_p, il existe $\eta_n\leq 1/n$ tel que $\lambda(B_n^p \cap [0,\eta_n]) = 0$ pour tout $p\leq n$; on a également $\lambda(A_n \cap [0,\eta_n])>0$. Si

$$C_n = B\cap A_n \cap [0,\eta_n] \cap (\bigcap_{p=1}^{n} (B_n^p)^c),$$

dès que $n\geq 1/t$ l'hypothèse faite sur B montre que $\lambda(C_n)>0$. On peut alors choisir un point quelconque s_n dans C_n, et on vérifie aisément que la suite (s_n) satisfait aux conditions de l'énoncé. ∎

PROPOSITION 4.- Supposons E_2 fini. Tout NM q de X continu à droite, tel que tous les points de E_1 soient permanents pour q, est équivalent à un NM parfait.

Démonstration.- Quitte à modifier q sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que N-3' est vérifié avec $\Omega_3 = \Omega$ et que $q_o = I$ (= identité) partout. Posons

$$V_t^\omega = \{s<t;\ q_{t,\omega} = q_{s,\omega}q_{t-s,\theta_s(\omega)}\},$$

$$U_t = \{\omega;\ \lambda(V_t^\omega) = t\},$$

et $U = \bigcap\limits_{t>o} U_t$. La continuité à droite de q entraine que $U = \bigcap\limits_{t\in Q_+} U_t$. Les fonctions $q_{s,\omega}(y,\{y'\})$ et $q_{t-s,\theta_s(\omega)}(y,\{y'\})$ sont $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$-mesurables en (s,ω) (cf. [13], p.235); donc $\{(s,\omega);\ s\in V_t^\omega\}\in\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$ et on peut appliquer le théorème de Fubini:

$$P^x\{(s,\omega);\ s\in V_t^\omega\} = \int_o^t P^x\{s\in V_t^\cdot\}ds = \int_o^t P^x\{\omega;\ q_{s,\omega}q_{t-s,\theta_s(\omega)} = q_{t,\omega}\}ds = t$$

$$= E^x\{\lambda(V_t^\cdot)\} = tP^x\{U_t\} + r,$$

où $r<tP^x\{\Omega-U_t\}$; par suite $P^x\{U_t\} = 1$ pour tout t, et $P^x\{U\} = 1$.

Fixons t et ω, et rangeons les éléments de $E_2\times E_2$ dans un ordre quelconque. On note $(\bar{q}_{t,\omega}(y,\{y'\}))$ la lim sup essentielle quand $s\downarrow 0$ de la famille de fonctions de s $(q_{t-s,\theta_s(\omega)}(y,\{y'\}))$, indicée par $E_2\times E_2$. Pour tous $t>0$, $\omega\in\Omega$, on définit ainsi un noyau $\bar{q}_{t,\omega}$ sur E_2. Posons enfin $\bar{q}_{o,\omega} = I$.

Soient $\omega\in U$, $0<r<t$. D'après le lemme 4 il existe une suite (s_n) de points de V_t^ω, telle que $s_n>r$, $s_n\downarrow r$ et

$$\lim_{(n)} q_{t-s_n,\theta_{s_n}(\omega)}(y,\{y'\}) = \lim_{(n)} q_{t-r-(s_n-r),\theta_{s_n-r}\circ\theta_r(\omega)}(y,\{y'\})$$
$$= \bar{q}_{t-r,\theta_r(\omega)}(y,\{y'\})$$

pour tous $y,y'\in E_2$. D'après la continuité à droite de q et la définition de V_t^ω, on a alors (en utilisant le fait que E_2 est fini):

$$q_{t,\omega} = q_{r,\omega}\bar{q}_{t-r,\theta_r(\omega)}.$$

On en déduit:

(i)- comme $q_o = I$, on a $q_t = \bar{q}_t$ sur U (utiliser la relation précédente pour $r = 0$). Donc, U étant de probabilité unité, la famille $\bar{q} = (\bar{q}_{t,\omega})$ est un NM de X, équivalent à q, vérifiant N-3' avec $\Omega_3\supset U$.

(ii)- pour tous $\omega\in U$, $0<r<t$, on a $\bar{q}_{t,\omega} = \bar{q}_{r,\omega}\bar{q}_{t-r,\theta_r(\omega)}$ (utiliser (i)); donc $\bar{q}$ vérifie N-2' avec $\Omega_2\supset U$, ce qui achève la démonstration. ∎

Quelques définitions complémentaires.- Rappelons d'abord que $[0,\infty[\times\Omega$ peut être muni des tribus suivantes: la tribu $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$ des ensembles mesurables; la tribu engendrée par les intervalles stochastiques $[\![S,T[\![$ (S et T sont des temps d'arrêt) des ensembles bien-mesurables; la tribu engendrée par les intervalles $]\!]S,T]\!]$ et les ensembles $\{0\}\times A$ $(A\in\mathcal{F}_o)$ des ensembles prévisibles. Pour plus de détails concernant la "théorie générale des processus", nous renvoyons à DELLACHERIE [3].

-Un NM q est ps continu à droite, limité à gauche, ou continu si pour tous $y\in E_2$, $f\in C(E_2)$, presque toutes les trajectoires de $q_\cdot(y,f)$ ont les propriétés citées.

-Un NM q est continu à droite, limité à gauche, ou continu si pour tous $y\in E_2$, $f\in C(E_2)$, $\omega\in\Omega$, les fonctions $q_{\cdot,\omega}(y,f)$ ont les propriétés citées.

-Un NM q est fort si N-1 et N-2 restent vérifiés si on remplace t par un temps d'arrêt quelconque T.

-Un NM q est bien-mesurable si pour tout $f\in b\mathcal{E}_2$ on a: (i) pour tout t, $q_{s,\omega}(y,f)$ est $\mathcal{R}\otimes(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (s,ω,y) sur $[0,t]\times\Omega\times E_2$; (ii) pour tout $y\in E_2$, le processus $q_{\cdot}(y,f)$ est bien-mesurable.(*)

Il est facile de voir qu'on a les implications suivantes: (continu à droite) $\Rightarrow$ (ps continu à droite) $\Rightarrow$ (bien-mesurable); (bien-mesurable) $\Rightarrow$ (N-1 est vérifié si on remplace t par un temps d'arrêt T); (bien-mesurable + parfait) $\Rightarrow$ (fort).

II- SEMI-GROUPES SUBORDONNES

On sait que si $\mathcal{P}'$ est un semi-groupe sur E_1 subordonné (au sens classique) à $\mathcal{P}$, il est engendré par une FM de X. Le théorème suivant généralise ce résultat.

THEOREME 1.- Si $\mathcal{Q}$ est un semi-groupe sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ subordonné à $\mathcal{P}$, il existe un NM q de X engendrant $\mathcal{Q}$.

La démonstration suit le principe de la démonstration de MEYER pour les FM (voir par exemple [2]). On pourrait en donner une autre, plus simple, dans le cas où X est la première composante d'un processus de Markov à valeurs dans E_3, de semi-groupe $\mathcal{Q}$.

Démonstration.- (3) entraine que si $f\in b\mathcal{E}_2$ la mesure $Q_t(x,y;.,f)$ est absolument continue par rapport à $P_t(x,.)$. La séparabilité de $\mathcal{E}_1$ entraine l'existence d'une densité $\overline{r}_t(x,y;.,f)$ de la première mesure par rapport à la seconde, telle que $\overline{r}_t(x,y;x',f)$ soit $\mathcal{E}_3^*\otimes\mathcal{E}_1$-mesurable en (x,y,x') et inférieur à $\|f\|$. Si les f_i sont positives, on a $\sum_{(i)} \overline{r}_t(x,y;.,f_i) = \overline{r}_t(x,y;.,\sum_{(i)} f_i)$, $P_t(x,.)$-ps.

Soit H un sous-espace vectoriel de $C(E_2)$ sur $\mathbb{Q}$, dénombrable, dense, réticulé, contenant la fonction 1. Fixons x,y et t. L'ensemble D des x' tels que $f \mapsto \overline{r}_t(x,y;x',f)$ soit une forme linéaire positive sur H, de norme inférieure à 1, vérifie $P_t(x,D) = 1$. Si $x'\in D$ on appelle $r_t(x,y;x',.)$ la mesure sur E_2 qui étend cette forme linéaire; si $x'\notin D$, on pose $r_t(x,y;x',.) = 0$. La "σ-additivité presque-sûre" de r_t entraine que $r_t(x,y;.,f) = \overline{r}_t(x,y;.,f)$ $P_t(x,.)$-ps pour tout $f\in b\mathcal{E}_2$, et $r_t(x,y;x',f)$ est encore $\mathcal{E}_3^*\otimes\mathcal{E}_1$-mesurable. Enfin si x ou x' égale Δ_1, on pose $r_t(x,y;x',.) = 0$.

Si $U = \{0=t_o<t_1<\ldots<t_n\}$, $\mathcal{F}(U)$ désigne la tribu engendrée par les $(X_s;\ s\in U)$ et les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. D'après les lemmes 2 et 3, modifiés de manière éviden-

---

(*) (i) signifie que $q_{.,\omega}(y,f)$, considéré comme processus sur l'espace d'états $\Omega\times E_2$, est progressivement mesurable pour la famille $((\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*)_{t\geq 0}$.

te en remplaçant $\mathcal{F}_t$ par $\mathcal{F}(U)$, la formule suivante définit un noyau $q^U_{t,\omega}(y,.)$ de $(\Omega\times E_2,(\mathcal{F}(U)\otimes\mathcal{E}_2)^*)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2^*)$:

$$q^U_{t,\omega}(y,.) = \int r_{t_1}(X_o(\omega),y;X_{t_1}(\omega),dy_1)\ldots r_{t_n-t_{n-1}}(X_{t_{n-1}}(\omega),y_{n-1};X_{t_n}(\omega),.).$$

Si $f_i\in b\mathcal{E}_1$, d'après le lemme 3 on a:

$$E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})q^U_t(y,f)\} = E^x\{\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i})\int q^{\{0,..,t_{n-1}\}}_{t_{n-1}}(y,dy')$$

$$E^{X_{t_{n-1}}}\{f_n(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})r_{t_n-t_{n-1}}(X_o,y';X_{t_n-t_{n-1}},f)\}\}$$

$$= E^x\{\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i})\int q^{\{0,..,t_{n-1}\}}_{t_{n-1}}(y,dy')Q_{t_n-t_{n-1}}(X_{t_{n-1}},y';f_n,f)\};$$

et on montre par récurrence sur n que

$$(6)\qquad E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})q^U_t(y,f)\} =$$

$$= \int Q_{t_1}(x,y;dx_1,dy_1)\ldots Q_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},y_{n-1};dx_n,dy_n)\prod_{i=1}^n f_i(x_i)f(y_n).$$

La propriété de semi-groupe entraine que (6) reste vérifiée si, sans changer les t_i, on remplace U par une partie finie V de $[0,t]$ contenant U. Par suite, comme $q^U_{t,\omega}(y,f)$ est $\mathcal{F}(U)$-mesurable en ω d'après le lemme 1,

$$(7)\qquad q^U_t(y,f) = E^x\{q^V_t(y,f)\,|\,\mathcal{F}(U)\}.$$

Soit U une partie dénombrable dense de $[0,t]$ contenant 0 et t, et $(U(n))$ une suite de parties finies de U contenant également 0 et t, et croissant vers U. D'après (7), $(q^{U(n)}_t,\mathcal{F}(U(n)))_{n\geq 1}$ est une martingale bornée par $\|f\|$. Elle admet donc ps une limite notée $\bar{q}_{t,\omega}(y,f)$, qu'on peut choisir $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y) puisque chaque $q^{U(n)}_{t,\omega}(y,f)$ l'est. Si les f_i sont positives, le lemme de Fatou entraine que $\sum_{(i)}\bar{q}_t(y,f_i) \leq \bar{q}_t(y,\sum_{(i)} f_i)$ ps. D'autre part d'après (6) et (7), on a $E^x\{\bar{q}_t(y,f)\} = Q_t(x,y;1,f)$. Par suite $E^x\{\sum_{(i)}\bar{q}_t(y,f_i)\} = E^x\{\bar{q}_t(y,\sum_{(i)} f_i)\}$ et $\sum_{(i)}\bar{q}_t(y,f_i) = \bar{q}_t(y,\sum_{(i)} f_i)$ ps.

L'ensemble D des (ω,y) tels que $f\mapsto\bar{q}_{t,\omega}(y,f)$ soit une forme linéaire sur H, positive et de norme inférieure à 1, appartient à $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$ et si D_y est la section de D en y, $P^x\{D_y\} = 1$. Si $(\omega,y)\in D$, on appelle $q_{t,\omega}(y,.)$ la mesure sur E_2 qui prolonge cette forme linéaire; si $(\omega,y)\notin D$ on pose $q_{t,\omega}(y,.) = 0$. La σ-additivité ps de q_t entraine que $q_t(y,f) = \bar{q}_t(y,f)$ ps pour tout $f\in b\mathcal{E}_2$. Donc la suite $q^{U(n)}_t(y,f)$ converge ps vers $q^U_t(y,f)$, et la formule (6) reste vraie pour tous $n\in\mathbb{N}$, $t_i\in U$, si on remplace q^U_t par q_t, Soient V et V(n) des parties de $[0,t]$ satisfaisant aux mêmes conditions que U et U(n). D'après ce qui précède il existe une famille $(q'_{t,\omega}(y,.))$ de mesures sur E_2 telle que $q_t^{U(n)\cup V(n)}(y,f)$ converge ps vers $q'_t(y,f)$. (6) restant valide lorsque les $t_i\in U$ et quand on remplace q_t^U par q_t ou par q'_t, on en déduit que si $Z\in b\mathcal{F}(U)$,

$$E^x\{Zq_t(y,f)\} = E^x\{Zq'_t(y,f)\}.$$

Mais $q_t(y,f)$ et $q'_t(y,f)$ étant $\mathcal{F}_t$-mesurables et $\mathcal{F}_t$ égalant $\mathcal{F}(U)$, on a $q_t(y,f) = q'_t(y,f)$ ps. Donc $q_t^{U(n)\cup V(n)}(y,f)$ (et également $q_t^{V(n)}(y,f)$) converge ps vers $q_t(y,f)$, et (6) est valable pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t_i\leqslant t$.

Enfin X étant normal, $P_o(x,.) = \varepsilon_x(.)$. On en déduit que Q_o est de la forme (5) et on pose $q_{o,\omega}(y,.) = Q_{X_o(\omega)}(y,.)$.

Il nous reste à montrer que la famille $q = (q_{t,\omega}(y,.))$ ainsi construite est un NM engendrant $\mathcal{Q}$. N-1 est vérifié par construction pour $t>0$, et pour $t = 0$ c'est une conséquence de la mesurabilité de $Q_o(x,y;E_1\times A)$. (6) est clairement vérifiée par q_o quand $t = 0$. N-3 et (4) sont des conséquences de (3) et de (6) appliquée à $n = 1$, $t_1 = t$, $f_1 = 1$. Enfin si $f\in b\mathcal{E}_2$, $t_1<\ldots<t_n=t$, $s_1<\ldots<s_p=s$, $f_i,g_i\in b\mathcal{E}_1$, on a

$$E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\prod_{j=1}^p g_j(X_{t+s_j})\, q_t\, q_{s,\theta_t(.)}(y,f)\}$$

$$= E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\int q_t(y,dy')E^{X_t}\{\prod_{j=1}^p g_j(X_{s_j})q_s(y',f)\}\}$$

$$= \int Q_{t_1}(x,y;dx_1,dy_1)\ldots Q_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},y_{n-1};dx_n,dy_n)\prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

$$Q_{s_1}(x_n,y_n;dx'_1,dy'_1)\ldots Q_{s_p-s_{p-1}}(x'_{p-1},y'_{p-1};dx'_p,dy'_p)\prod_{j=1}^p g_j(x'_j)f(y'_p)$$

$$= E^x\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\prod_{j=1}^p g_j(X_{t+s_j})\, q_{t+s}(y,f)\},$$

d'après (6) et le lemme 3, ce qui prouve N-2. ∎

<u>Remarques</u>.- 1) Ce résultat reste vrai quand les hypothèses sont affaiblies ainsi: X est normal, et pour toute suite dense U de $[0,t]$ contenant t, $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_t$ (cf. [2])

2) On peut également montrer les résultats suivants: soit $\mathcal{Q}$ un semi-groupe subordonné à $\mathcal{P}$. Pour qu'il soit engendré par un NM q tel que $q_{t,\omega}(y,.)$ soit un noyau de $(\Omega\times E_2,\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2)$ (resp de $(\Omega\times E_2,\mathcal{F}_t^o\otimes\mathcal{E}_2)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2)$), il faut et il suffit que $\mathcal{Q}$ soit un semi-groupe sur $(E_3,\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2)$ (resp sur $(E_3,\mathcal{E}_3)$). Dans ce dernier cas, $\mathcal{P}$ est également un semi-groupe borélien.

NM bien-mesurables.- Z étant un processus sur Ω, on sait qu'il existe un processus bien-mesurable ${}^1Z$, unique à une P^μ-indistinction près, tel que $E^\mu(Z_T) = E^\mu({}^1Z_T)$ pour tout temps d'arrêt T: ${}^1Z$ s'appelle la projection bien-mesurable (relative à P^μ) de Z. Plus précisément, on a:

LEMME 5.- Soit Z une fonction mesurable bornée sur $([0,\infty[\times\Omega\times E_2, \mathcal{R}\otimes(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)^*)$. Il existe une fonction ${}^1Z$ sur le même espace, vérifiant: a) pour tout t, ${}^1Z$ est mesurable sur $([0,t]\times\Omega\times E_2, \mathcal{R}\otimes(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*)$; b) pour tout $y\in E_2$ et toute loi P^μ, ${}^1Z(.,y)$ est une projection bien-mesurable de $Z(.,y)$.

Démonstration.- Par un argument de classe monotone, il suffit de prouver le résultat pour Z de la forme $Z(t,\omega,y) = 1_{[r,s]}(t)W(\omega,y)$, où $W\in b(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)^*$. Comme pour tout $V\in b\mathcal{F}_t$, $E^x\{VW(.,y)\}$ est $\mathcal{E}_3^*$-mesurable en (x,y), il existe une version $W_t'(x,y,.)$ de $E^x\{W(.,y)|\mathcal{F}_t\}$, $\mathcal{E}_3^*\otimes\mathcal{F}_t$-mesurable en (x,y,ω). On pose successivement $W_t''(\omega,y) = W_t'(X_o(\omega),y,\omega)$, $Y(t,\omega,y) = \lim\sup(W_u''(\omega,y);\ u\downarrow t,\ u\in\mathbb{Q})$ et ${}^1Z(t,\omega,y) = 1_{[r,s]}(t)Y(t,\omega,y)$. Il est clair que $Y(t,.)\in b(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$ et $Y(.,y)$ est une version continue à droite et indépendante de μ, de $E^\mu\{W(.,y)|\mathcal{F}_t\}$. On en déduit le résultat (cf. [3]).∎

PROPOSITION 5.- Pour qu'un NM q soit équivalent à un NM bien-mesurable, il faut et il suffit qu'il engendre un semi-groupe $\mathcal{Q}$ mesurable. (i.e.: si $f\in b\mathcal{E}_3^*$, $Q_tf(x,y)$ est $\mathcal{R}\otimes\mathcal{E}_3^*$-mesurable en (t,x,y)).

Démonstration.- La nécessité de la condition est évidente (moyennant une application des théorèmes de Fubini et des classes monotones). Réciproquement supposons $\mathcal{Q}$ mesurable. Fixons $h\in H$ (H est l'espace introduit dans la démonstration du théorème 1). On vérifie aisément que pour tout Y de la forme $\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})$ (où $f_i\in b\mathcal{E}_1$), donc tout $Y\in b\mathcal{F}$, $E^x\{Yq_t(y,h)\}$ est $\mathcal{E}_3^*$-mesurable. Il existe alors $\bar{Z}\in b(\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_3^*)$ tel que $\bar{Z}(t,.,x,y) = E^x\{q_t(y,h)|\mathcal{F}\}$. La variable $Z(t,\omega,y) = \bar{Z}(t,\omega,X_o(\omega),y)$ vérifie les conditions du lemme 5, et on note $\bar{r}_{t,\omega}(y,h)$ le processus ${}^1Z$ construit dans ce lemme: il est clair que $\bar{r}_t(y,h)\geqslant 0$, et $\bar{r}_t(y,h_1+h_2) = \bar{r}_t(y,h_1)+\bar{r}_t(y,h_2)$ ps.

Exactement comme au théorème 1, on construit alors une famille de mesures $(r_{t,\omega})$ sur E_2, telle que $r_t(y,h) = \bar{r}_t(y,h)$ ps pour tout $h\in H$, et possédant les mêmes propriétés de mesurabilité que $\bar{r}$: $r_{s,\omega}(y,h)$ est $\mathcal{R}\otimes(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable sur $[0,t]\times\Omega\times E_2$, et $r_.(y,h)$ est bien-mesurable, pour tout $h\in H$, donc tout $h\in b\mathcal{E}_2$. Il reste à prouver que pour tout $h\in H$, $r_t(y,h) = q_t(y,h)$ ps (d'après la proposition 3, r sera alors un NM). Mais cela découle de ce que, pour tout $Y\in b\mathcal{F}_t$, on a:

$$E^x\{Yq_t(y,h)\} = E^x\{Y\bar{Z}(t,.,x,y,)\} = E^x\{YZ(t,.,y)\} = E^x\{Y\bar{r}_t(y,h)\} = E^x\{Yr_t(y,h)\}.$$ ∎

NM continus à droite.- Commençons par un lemme:

LEMME 6.- Soit q un NM de X engendrant $\mathcal{Q}$ et $C_y^f = \{\omega;\ q_{t,\omega}(y,f)$ est limité à droite et à gauche le long de $\mathbb{Q}_+)$. Si pour tous $(x,y)\in E_3$ et $f\in C(E_2)$, $Q_t(x,y;1,f)$ converge vers $Q_x(y,f)$ quand $t\downarrow 0$ et $P^x\{C_y^f\} = 1$, il existe un NM q' continu à droite et limité à gauche, équivalent à q.

Démonstration.- Soit $C_t = \{(\omega,y);\ q_{t,\omega}(y,f)$ est limité à droite et à gauche le long des rationnels de $[0,t]$, pour tout $f\in H\}$. Si t est réel on pose, la limite étant prise au sens de la convergence étroite:

$$q'_{t,\omega}(y,.) = \begin{cases} \lim\limits_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} q_{s,\omega}(y,.) & \text{si } (\omega,y)\in \lim\limits_{s\downarrow t} C_s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction la famille $q' = (q'_{t,\omega}(y,.))$ est continue à droite et limitée à gauche au sens des NM. On a $C_s\in(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{E}_2)^*$ et $q_{s,\omega}(y,f)\in b(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{E}_2)^*$ pour tout $f\in C(E_2)$; donc $q'_{t,\omega}(y,f)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable pour tout $f\in C(E_2)$ et q' vérifie N-1. Pour terminer il suffit de montrer, comme dans la proposition 3, que $q'_t(y,f) = q_t(y,f)$ ps pour tout $f\in C(E_2)$.

Si $C_{t,y}$ est la section en y de C_t, on a $\bigcap\limits_{f\in H} C_y^f\subset C_{t,y}$; donc $C_{t,y}$ est plein et $q'_t(y,f) = \lim\limits_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} q_s(y,f)$ ps pour $f\in C(E_2)$. Si $Z\in b\mathcal{F}_t$, on a:

$$\begin{aligned} E^x\{Zq'_t(y,f)\} &= \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} E^x\{Zq_s(y,f)\} \\ &= \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} E^x\{Z\textstyle\int q_t(y,dy')Q_{s-t}(X_t,y';1,f)\} \\ &= E^x\{Z\textstyle\int q_t(y,dy')Q_{X_t}(y',f)\} = E^x\{Zq_t(y,f)\}, \end{aligned}$$

car d'après la définition de Q_x et (1) appliqué à s = 0, on a $q_tQ_{X_t}(y,.) = q_t(y,.)$ ps. Par conséquent $q'_t(y,f) = q_t(y,f)$ ps, d'où le résultat.∎

PROPOSITION 6.- Soit q un NM de X engendrant $\mathcal{Q}$.

(i)- Pour que q soit équivalent à un NM ps continu à droite, il faut et il suffit que $\mathcal{Q}$ soit mesurable et que pour tout $f\in C(E_2)$ et toute suite (T_n) de temps d'arrêt décroissant vers T, $Q_{T_n}1\otimes f$ converge vers $Q_T1\otimes f$.

(ii)- Pour que q soit équivalent à un NM continu à droite et limité à gauche, il faut et il suffit que $\mathcal{Q}$ soit mesurable et que pour tout $f\in C(E_2)$ et toute suite (T_n) de temps d'arrêt décroissant (resp croissant) vers T, $Q_{T_n}1\otimes f$ converge vers $Q_T1\otimes f$ (resp vers une limite).

Démonstration.- Les conditions sont trivialement nécessaires. Pour les réciproques, on peut supposer que q est bien-mesurable (proposition 5). D'après MERTENS [9], la condition (i) (resp (ii)) est (nécessaire) et suffisante pour que q soit ps continu à droite (resp ps continu à droite et limité à gauche). Dans le cas (ii), cela entraine clairement que $P^x\{C_y^f\} = 1$ pour tous $x \in E_1$, $f \in C(E_2)$; d'autre part sous la condition (ii) il est clair que $Q_t 1 \otimes f$ converge vers $Q_o 1 \otimes f$ si $t \downarrow 0$, et il suffit alors d'appliquer le lemme 6 pour achever la démonstration. ∎

Voici enfin un critère de régularité, sans doute plus commode que le précédent:

PROPOSITION 7.- Soit q un NM de X engendrant $\mathcal{Q}$ et (V^λ) la résolvante de $\mathcal{Q}$. Si pour tout $f \in C(E_2)$, $\lambda V^\lambda(x,y;1,f)$ converge uniformément (en (x,y)) vers $Q_x(y,f)$ quand $\lambda \uparrow \infty$, il existe un NM continu à droite, limité à gauche, équivalent à q.

Démonstration.- Soient $f \in C(E_2)$, $y \in E_2$, et $M_t^\lambda = e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')V^\lambda(X_t,y';1,f)$; d'après le lemme 3, il vient:

$$E^x\{M_{t+s}^\lambda|\mathcal{F}_t\} = e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')E^{X_t}\{e^{-\lambda s}\int q_s(y',dy'')V^\lambda(X_s,y'';1,f)\}$$

$$= e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')e^{-\lambda s}Q_s V^\lambda(X_t,y';1,f)$$

$$\leqslant e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')V^\lambda(X_t,y';1,f) = M_t^\lambda,$$

car $V^\lambda 1 \otimes f$ est λ-excessive pour $\mathcal{Q}$. Pour chaque P^x, $(M_t^\lambda)_{t \geqslant o}$ est une surmartingale bornée, donc M_t^λ est ps limité à droite et à gauche le long des rationnels. D'autre part si $\lambda \uparrow \infty$, $\lambda M_t^\lambda e^{\lambda t}$ converge uniformément vers $\int q_t(y,dy')Q_{X_t}(y',f)$ par hypothèse, et cette dernière expression égale ps $q_t(y,f)$. Donc sur un ensemble plein, $\lambda M_t^\lambda e^{\lambda t}$ converge vers $q_t(y,f)$ pour tout t rationnel, et cette convergence est uniforme en ω. Donc $q_t(y,f)$ est ps limité à droite et à gauche le long des rationnels et $P^x\{C_y^f\} = 1$ pour tous $f \in C(E_2)$, $(x,y) \in E_3$. Enfin les hypothèses faites entrainent clairement que $Q_t(x,y;1,f)$ converge vers $Q_x(y,f)$ quand $t \downarrow 0$, et il suffit d'appliquer le lemme 6. ∎

Remarques. 1) Si E_2 est fini, la condition de la proposition 7 équivaut simplement à la continuité à droite en 0 de $Q_t(x,y;E_2 \times \{y'\})$ pour tous x,y,y'.

2) Si de plus $\mathcal{Q}$ est un semi-groupe sur $(E_3,\mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2)$ (resp $(E_3,\mathcal{E}_3)$), dans les deux propositions précédentes on peut choisir un NM q vérifiant en outre: $q_{t,\omega}(y,.)$ est une transition de $(\Omega \times E_2,\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{E}_2)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2)$ (resp de $(\Omega \times E_2,\mathcal{F}_t^o \otimes \mathcal{E}_2)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2)$).

III- PROCESSUS SUBORDONNES CANONIQUES

Soit (X,Y) un processus à valeurs dans E_3, dont le semi-groupe vérifie (3). Il est intuitif que, conditionnellement au fait que la trajectoire de (X_t) est connue, le processus (Y_t) est un processus de Markov non homogène. Cette assertion sera précisée et développée dans [7]. Nous nous posons ici un problème un peu différent: étant donné le processus X muni d'un NM q engendrant $\mathcal{Q}$, est-il possible de construire un processus (X,Y) de semi-groupe $\mathcal{Q}$, dont la première composante soit précisément X, et tel qu'il existe un système de probabilités conditionnelles régulières (par rapport à la tribu engendrée par les $(X_t)_{t\geq o}$) faisant de la seconde composante un processus de Markov non homogène au sens de Dynkin.

Précisons d'abord ce que nous entendons par là. On considère un espace Ω' muni de:

(i)- une famille $(\theta'_t)_{t\geq o}$ de translations.

(ii)- une famille d'applications $(Y_t)_{t\geq o}$ de Ω' dans E_2, vérifiant $Y_{t+s} = Y_t\circ\theta'_s$, Δ_2 étant un point absorbant pour chaque trajectoire. ζ' désigne le temps de mort (temps d'entrée dans $\{\Delta_2\}$), et $\mathcal{G}_t = \sigma(Y_s;\ s\leq t)$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\infty$.

(iii)- une famille $(P^y_{s,\omega};\ y\in E_2,\ s\geq 0,\ \omega\in\Omega)$ de probabilités sur $(\Omega',\mathcal{G})$.

DEFINITION.- <u>On dit que l'espace</u> Ω' <u>muni de (i)-(iii) vérifie les hypothèses canoniques relatives à</u> X <u>si les axiomes suivants sont satisfaits:</u>

<u>H-1</u>. Pour presque tout ω, $Y_\omega = (\Omega',\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\theta'_t,Y_t,P^y_{t,\omega})$ est un processus de Markov non homogène (nous utilisons les notations de MAYER [8]).

<u>H-2</u>. Pour tous $s,t\geq 0$, $A\in\mathcal{G}_t$, $P^y_{s,\omega}\{A\}$ est $(\mathcal{F}_{s+t}\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y).

<u>H-3</u>. Pour tous $s\geq 0$, $A\in\mathcal{G}$, et tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de s et de A), on a:

$$P^y_{s,\omega}\{A\} = P^y_{o,\theta_s(\omega)}\{A\} \quad \forall\, y\in E_2. \tag{8}$$

<u>H-4</u>. Pour tout $y\in E_2$, on a ps en ω:

$$P^y_{o,\omega}\{\zeta' = \zeta(\omega)\} = 1. \tag{9}$$

Lorsque ces axiomes sont vérifiés, on construit le processus $\underset{\sim}{X}$ de la manière suivante: $\underset{\sim}{\Omega} = \Omega\times\Omega'$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{G}_t$ et

$$\underset{\sim}{\theta}_t(\omega,\omega') = (\theta_t(\omega),\theta'_t(\omega')),$$

$$\underset{\sim}{X}_t(\omega,\omega') = \begin{cases}(X_t(\omega),Y_t(\omega')) & \text{si } t<\zeta(\omega)\wedge\zeta'(\omega')\\ \Delta_3 & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{P}^{x,y}(d\omega,d\omega') = P^x(d\omega)P^y_{o,\omega}(d\omega').$$

PROPOSITION 8.- <u>Lorsque</u> Ω' <u>vérifie les hypothèses canoniques relatives à</u> X, <u>le processus</u> $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{\Omega},\underset{\sim}{\mathcal{F}},\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t,\underset{\sim}{\theta}_t,\underset{\sim}{X}_t,\underset{\sim}{P}^{x,y})$ <u>défini ci-dessus est un processus de Markov dont le semi-groupe de transition est subordonné</u> à $\mathcal{P}$.

Ce résultat justifie la définition suivante:

DEFINITION.- <u>Le processus</u> $\underset{\sim}{X}$ <u>est appelé processus canonique subordonné à</u> X.

Nous nous servirons du lemme suivant, dont nous omettons la démonstration (facile par un argument de classe monotone).

LEMME 7.- <u>Si</u> $Z_1\in b\mathcal{F}_t$, $Z_2\in b\mathcal{F}$ <u>et si</u> f <u>est universellement mesurable et bornée sur</u> $\mathbb{R}^2$, <u>on a</u>:

$$E^x\{f(Z_1,Z_2\circ\theta_t)|\mathcal{F}_t\} = \int P^{X_t(.)}(d\omega)f(Z_1(.),Z_2(\omega)),\quad P^x\text{-ps.}$$

<u>Démonstration de la proposition</u>.- D'après H-2 et le lemme 2, $\underset{\sim}{P}^{x,y}(d\omega)$ est une probabilité de transition de $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ dans $(\underset{\sim}{\Omega},\underset{\sim}{\mathcal{F}})$. Tous les autres axiomes des processus de Markov se vérifient aisément pour $\underset{\sim}{X}$, sauf la propriété de Markov elle-même. Pour prouver cette dernière, il suffit de montrer que si $s,t\geq 0$, $Z_1\in b\mathcal{F}_t$, $Z_2\in b\mathcal{G}_t$, $f\in b\mathcal{E}_1$ et $g\in b\mathcal{E}_2$, on a:

$$\underset{\sim}{E}^{x,y}\{Z_1Z_2f(X_{t+s})g(Y_{t+s})\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{Z_1Z_2\underset{\sim}{E}^{X_t,Y_t}\{f(X_s)g(Y_s)\}\}.$$

En utilisant successivement la définition de $\underset{\sim}{P}^{x,y}$, puis H-1, puis H-3, puis H-2, les lemmes 3 et 7 et la propriété de Markov pour X, et enfin à nouveau la définition de $\underset{\sim}{P}^{x,y}$, on obtient:

$\underset{\sim}{E}^{x,y}\{Z_1Z_2f(X_{t+s})g(Y_{t+s})\}$

$$= \int P^x(d\omega)Z_1(\omega)f(X_{t+s}(\omega))P^y_{o,\omega}(d\omega')Z_2(\omega')g(Y_{t+s}(\omega'))$$

$$(10) \qquad = \int P^x(d\omega)Z_1(\omega)f(X_{t+s}(\omega))P^y_{o,\omega}(d\omega')Z_2(\omega')P^{Y_t(\omega')}_{t,\omega}(d\omega'_1)g(Y_s(\omega'_1))$$

$$(11) \qquad = \int P^x(d\omega)Z_1(\omega)f(X_{t+s}(\omega))P^y_{o,\omega}(d\omega')Z_2(\omega')P^{Y_t(\omega')}_{o,\theta_t(\omega)}(d\omega'_1)g(Y_s(\omega'_1))$$

$$= \int P^x(d\omega)Z_1(\omega)P^y_{o,\omega}(d\omega')Z_2(\omega')P^{X_t(\omega)}(d\omega_1)f(X_s(\omega_1))P^{Y_t(\omega')}_{o,\omega_1}(d\omega'_1)g(Y_s(\omega'_1))$$

$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{Z_1Z_2\underset{\sim}{E}^{X_t,Y_t}\{f(X_s)g(Y_s)\}\}.$$

Donc $\underset{\sim}{X}$ est markovien. Soit $\mathcal{Q}$ son semi-groupe. D'après la première phrase de la démonstration, c'est un semi-groupe sur $(E_3,\mathcal{E}^*_3)$. D'après H-4,

$$Q_t(x,y;A\times E_2) = \int P^x(d\omega)1_A(X_t(\omega))P^y_{o,\omega}\{\zeta'>t\}$$

$$= \int P^x(d\omega)1_A(X_t(\omega))1_{t<\zeta(\omega)} = P_t(x,A);$$

ce qui achève la démonstration. ∎

PROPOSITION 9.- <u>Si $\underset{\sim}{X}$ est un processus canonique subordonné à</u> X, <u>de semi-groupe</u> $\mathcal{Q}$, <u>la formule suivante définit un NM de</u> X <u>engendrant</u> $\mathcal{Q}$:

$$(12) \qquad q_{t,\omega}(y,A) = P^y_{o,\omega}\{Y_t\in A\}.$$

Si (X,Y) est, plus généralement, un processus de Markov de semi-groupe $\mathcal{Q}$, dont la première composante est X, et si q est un NM de X engendrant $\mathcal{Q}$, on montre que $q_t(y,A)$ est une version de $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_t\in A|\mathcal{F}\}$, où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les $(X_t,\ t\geq 0)$. C'est la formule fondamentale sur laquelle est basée l'étude des produits semi-directs de processus de Markov.

<u>Démonstration</u>.- N-1 et N-2 découlent respectivement de H-2 et de H-4. D'après H-1 et H-3 on a:

$$q_{t+s,\omega}(y,A) = E^y_{o,\omega}\{P^{Y_t}_{o,\theta_t(\omega)}\{Y_s\in A\}\}$$

$$= E^y_{o,\omega}\{q_{s,\theta_t(\omega)}(Y_t,A)\} = q_{t,\omega}q_{s,\theta_t(\omega)}(y,A)$$

pour presque tout ω. Enfin q vérifie clairement (4). ∎

<u>Exemple: processus canonique associé à une FM</u>.- On considère une FM continue à droite $M = (M_t)_{t\geq o}$ de X, q le NM associé, et $\mathcal{Q}$ le semi-groupe engendré par q (on rappelle que $E_2 = \{0,1\}$). Soit $\Omega' = [0,\infty[$ muni de $\theta'_t(\omega') = \omega'+t$ et $Y_t(\omega') = 1_{t<\zeta'}$. Les formules

$$P^1_{s,\omega}\{\zeta'>t\} = M_{t+s}(\omega)1_{t+s<\zeta(\omega)},\quad P^o_{s,\omega}\{\zeta'>t\} = 0$$

définissent des probabilités sur $(\Omega',\mathcal{G})$. Il est facile de vérifier que les termes que nous venons de définir satisfont aux hypothèses canoniques relatives à X, et que le processus canonique correspondant $\underset{\sim}{X}$ admet $\mathcal{Q}$ pour semi-groupe.

Par ailleurs $\underset{\sim}{X}$ est relié de manière simple au sous-processus canonique $\hat{X} = (\hat{\Omega},\hat{\theta}_t,\hat{X}_t,\hat{P}^x)$ associé à M par les formules suivantes (cf. [2], p.105; rappelons que $\hat{\Omega} = \underset{\sim}{\Omega}$):

$$\hat{P}^x = \underset{\sim}{P}^{x,1}$$

$$\hat{X}_t(\omega,\omega') = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } Y_t(\omega') = 1 \\ \Delta_1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Inversement on pourrait évidemment construire $\underset{\sim}{X}$ à partir de $\hat{X}$.

IV- CONSTRUCTION D'UN PROCESSUS CANONIQUE SUBORDONNE

Dans ce paragraphe nous examinons à quelles conditions il est possible, étant donné un NM q de X, de construire un processus canonique subordonné à X, dont le semi-groupe soit engendré par q. Cette construction n'est pas toujours possible, puisque déjà dans le cas simple des fonctionnelles multiplicatives, nous devons faire certaines hypothèses pour pouvoir construire le sous-processus canonique (par exemple: la FM est continue à droite, ou parfaite).

DEFINITION.- Un processus canonique subordonné à X est dit parfait si H-3 et H-4 sont renforcés ainsi:

H-3'. Il existe une partie Ω_3 de Ω, de probabilité unité, telle qu'on ait (8) pour tous $s,t\geq 0$, $A\in\mathcal{G}_t$, $\omega\in\Omega_3$.

H-4'. Il existe une partie Ω_4 de Ω, de probabilité unité, telle qu'on ait (9) pour tous $y\in E_2$, $\omega\in\Omega_4$.

THEOREME 2.- Soit $\mathcal{Q}$ un semi-groupe subordonné à $\mathcal{P}$. Pour qu'il existe un processus canonique subordonné à X, parfait, de transition $\mathcal{Q}$, il faut et il suffit que $\mathcal{Q}$ soit engendré par un NM parfait.

Démonstration.- Soit $\underset{\sim}{X}$ un processus canonique parfait, subordonné à X, de transition $\mathcal{Q}$, et q le NM défini par (12). Soient Ω_1 l'ensemble des ω pour lesquels Y_ω est markovien, et $\Omega_o = \Omega_1 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$, où Ω_3 et Ω_4 sont définis dans H-3' et H-4'. On a $P^x\{\Omega_o\} = 1$ par hypothèse, et on vérifie immédiatement que N-2' et N-3' sont satisfaits avec $\Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_o$. Donc q est un NM parfait.

Réciproquement soit q un NM parfait de X engendrant $\mathcal{Q}$; Ω_2 et Ω_3 sont les ensembles définis dans N-2' et N-3'. Si $\Omega_o = \Omega_2 \cap \Omega_3$ on pose:

$$P^s_{s+t,\omega} = \begin{cases} q_{t,\theta_s(\omega)} & \text{si } \omega\in\Omega_o \\ I & \text{sinon.} \end{cases}$$

N-1 et N-2' montrent que pour tout ω, la famille $(P^s_{s+t,\omega})_{s,t\geq o}$ est un semi-groupe "non-homogène" de transitions sous-markoviennes sur $(E_2,\mathcal{E}^*_2)$ (c'est-à-dire vérifiant $P^r_{r+s+t} = P^r_{r+s}P^{r+s}_{r+s+t}$). Soit Ω' l'ensemble des fonctions de $[0,\infty[$ dans $\overline{E}_2$ admettant un temps de mort, muni des translations naturelles θ'_t et des applications coordonnées Y_t. On sait qu'on peut construire une famille $(P^y_{s,\omega};\ y\in E_2, s\geq 0)$ de probabilités sur $(\Omega',\mathcal{G})$ faisant de $Y_\omega = (\Omega',\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\theta'_t,Y_t,P^y_{t,\omega})$ un processus de Markov non homogène de semi-groupe $(P^s_{s+t,\omega})$.

Si $t_1<\ldots<t_n$, $B_i\in\mathcal{E}_2$, $A = \bigcap_{i=1}^{n} \{Y_{t_i}\in B_i\}$, on a pour $\omega\in\Omega_o$:

$$P^y_{s,\omega}\{A\} = \int q_{t_1,\theta_s(\omega)}(y,dy_1)\ldots q_{t_n-t_{n-1},\theta_{s+t_{n-1}}(\omega)}(y_{n-1},dy_n)\prod_{i=1}^{n} 1_{B_i}(y_i).$$

Comme Ω_o est de probabilité unité, N-1 et les lemmes 2 et 3 entrainent que l'expression précédente est $(\mathcal{F}_{t+s}\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y): ceci étant vrai pour les ensembles A de la forme ci-dessus, est également vrai pour tout $A\in\mathcal{G}_t$ (classe monotone), et on a H-2. De même tout A de la forme ci-dessus, donc tout $A\in\mathcal{G}_t$, vérifie (8) sur Ω_o; par suite on a H-3' avec $\Omega_3 = \Omega_o$. De même sur Ω_o,

$$P^y_{o,\omega}\{\zeta'>t\} = q_{t,\omega}(y,E_2) = 1_{t<\zeta(\omega)}$$

d'après N-3', et on a H-4' avec $\Omega_4 = \Omega_o$. Enfin le processus $\underset{\sim}{X}$ admet pour transition:

$$\underset{\sim}{P}^{x,y}\{X_t\in A,\ Y_t\in B\} = E^x\{1_A(X_t)P^y_{o,.}\{Y_t\in B\}\} = E^x\{1_A(X_t)q_t(y,B)\};$$

comme q vérifie (4), cela achève la démonstration. ∎

DEFINITION.- Un NM q est dit complètement continu à droite si:

(i)- q est un NM continu à droite.

(ii)- Pour tous $\omega\in\Omega$, $f\in C(E_2)$, $t\geq 0$, alors $q_{t,\omega}(.,f)\in C(E_2)$.

(iii)-Pour toute partie dénombrable dense R de $\mathbb{R}$ il existe une partie Ω_R de Ω, de probabilité unité, vérifiant:

CC. Si $\omega\in\Omega_R$, si $s\downarrow s_o$ le long de R, si $t\downarrow t_o$ et si $f\in C(E_2)$, $q_{t,\theta_s(\omega)}f$ converge localement uniformément vers une limite, égale à $q_{t_o,\theta_{s_o}(\omega)}f$ si $s_o\in R$.

Remarques.- 1) Dans CC il suffit bien entendu que la convergence ait lieu pour une suite dense de $C(E_2)$.

2) CC entraine en particulier que $q_{t,\theta_s(\omega)}(y,.)$ converge étroitement vers une mesure si $t\downarrow t_o$, $s\downarrow s_o$ le long de R.

3) Si dans CC nous imposons que la limite soit $q_{t_o,\theta_{s_o}(\omega)}f$ dans tous les cas, alors le NM est parfait.

LEMME 8.- Soit μ_n une suite de mesures bornées sur E_2, convergeant étroitement vers μ et f_n une suite uniformément bornée de fonctions continues convergeant localement uniformément vers f. Alors $\mu_n(f_n)$ converge vers $\mu(f)$.

Démonstration.- Soit A la borne des f_n et B celle des μ_n. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe un compact K de E_2 tel que $|\mu_n|(K^c)\leq\varepsilon$ pour tout n. Il existe une fonction continue g comprise entre 0 et 1, à support compact, égale à 1 sur K. Il existe un entier N tel que si $n\geq N$, $\|g(f_n-f)\|\leq\varepsilon$ et $|(\mu-\mu_n)(fg)|\leq\varepsilon$. Il vient:

$$\begin{aligned}|\mu_n(f_n)-\mu(f)| &\leq |\mu_n(f_n(1-g))| + |\mu(f(1-g))| + |\mu_n(g(f_n-f))| + |(\mu_n-\mu)(fg)|\\ &\leq A\varepsilon + A\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon\end{aligned}$$

dès que $n\geq N$, d'où le résultat. ∎

THEOREME 3.- Soit q un NM complètement continu à droite de X. Il existe un processus canonique subordonné à X, dont le semi-groupe est engendré par q.

Démonstration.- Comme q est continu à droite et transforme les fonctions continues limitées à l'infini en fonctions du même type, il est clair que l'ensemble exceptionnel de N-2 ne dépend que de t. Soit alors Ω_o une partie de Ω, de probabilité unité, vérifiant CC pour $R = \mathbb{Q}_+$, et (1) pour $s\geq 0$, $t\in\mathbb{Q}_+$, $A\in\mathcal{E}_2$, $y\in E_2$. D'après CC, on peut poser, au sens de la limite étroite:

$$(13) \qquad p^{s_o}_{s_o+t_o,\omega}(y,.) = \begin{cases} \lim\limits_{s\downarrow s_o, s\in\mathbb{Q}, t\downarrow t_o} q_{t,\theta_s(\omega)}(y,.) & \text{si } \omega\in\Omega_o \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette formule définit une famille de transitions sur E_2. Si r,s,t sont des réels, soient (r_n), (s_n), (t_n) trois suites de rationnels décroissant respectivement vers r,s et t. Si $g\in C(E_2)$, $y\in E_2$, $\omega\in\Omega_o$, posons

$$\mu_n(.) = q_{s_n,\theta_{r_n}(\omega)}(y,.)$$

$$f_n = q_{t_n,\theta_{s_n+r_n}(\omega)}g.$$

D'après (13), μ_n converge étroitement vers $\mu(.) = p^r_{r+s,\omega}(y,.)$, et d'après CC, f_n converge localement uniformément vers $f = p^{r+s}_{r+s+t,\omega}g$. Le lemme 8 entraine alors que $\lim\limits_{(n)} \mu_n(f_n) = \mu(f)$. D'autre part on a:

$$\mu_n(f_n) = q_{s_n,\theta_{r_n}(\omega)}q_{t_n,\theta_{r_n+s_n}(\omega)}(y,g) = q_{s_n+t_n,\theta_{r_n}(\omega)}(y,g)$$

d'après la définition de Ω_o. On déduit alors de (13) que

$$p^r_{r+s+t,\omega}(y,g) = p^r_{r+s,\omega}p^{r+s}_{r+s+t,\omega}(y,g).$$

Donc la famille $(p^s_{s+t,\omega})_{s,t\geq o}$ est pour tout $\omega\in\Omega$ un semi-groupe sous-markovien non-homogène, sur E_2. Pour tout ω on construit un processus Y_ω admettant ce semi-groupe pour transition, exactement comme pour le théorème 2. Si $t_1<\ldots<t_n$, $B_i\in\mathcal{E}_2$, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{Y_{t_i}\in B_i\}$, on a:

$$(14) \qquad P^y_{s,\omega}\{A\} = \int p^s_{s+t,\omega}(y,dy_1)\ldots p^{s+t_1+..+t_{n-1}}_{s+t_1+..+t_n,\omega}(y_{n-1},dy_n)\prod_{i=1}^{n} 1_{B_i}(y_i).$$

La famille $((\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*)_{t\geq o}$ est continue à droite, donc $p^s_{s+t,\omega}(y,B)$ est $(\mathcal{F}_{s+t}\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable si $B\in\mathcal{E}_2$. D'après (14) et le lemme 3, il en est de même de $P^y_{s,\omega}\{A\}$ pour tout A de la forme ci-dessus, donc tout $A\in\mathcal{G}_t$, d'où H-2. Démontrons maintenant H-3: soient $s>0$, et R l'ensemble des réels de la forme s+t, où t est rationnel. Si $u_n\downarrow 0$ le long des rationnels, $t_n\downarrow t$, $s_n = s+u_n$, $f\in C(E_2)$, $\omega\in\Omega_R\cap\theta_s^{-1}(\Omega_o)$, on a:

$$\begin{aligned} p^s_{s+t,\omega}(y,f) &= \lim_{(n)} q_{t_n,\theta_{s_n}(\omega)}(y,f) \\ &= \lim_{(n)} q_{t_n,\theta_{u_n}\circ\theta_s(\omega)}(y,f) = p^o_{t,\theta_s(\omega)}(y,f). \end{aligned}$$

Mais $\Omega_R \cap \theta_s^{-1}(\Omega_o)$ est de probabilité unité, donc $p^s_{s+t,.}(y,f) = p^o_{t,\theta_s(.)}(y,f)$ ps. D'après la condition (ii) de la définition des NM complètement continus à droite, on en déduit qu'on a ps $p^s_{s+t,.}(y,.) = p^o_{t,\theta_s(.)}(y,.)$ pour tout $y \in E_2$. L'expression (14) égale alors $P^y_{o,\theta_s(\omega)}\{A\}$ pour tout y, et on en déduit H-3.

L'application de CC à $s_o = 0$ montre que

$$P^y_{o,\omega}\{\zeta'>t\} = p^o_{t,\omega}(y,E_2) = q_{t,\omega}(y,E_2) = 1_{t<\zeta(\omega)} \quad \text{ps},$$

d'où H-4. Enfin $p^o_t = q_t$, donc le semi-groupe du processus canonique construit à partir des Y_ω est précisément le semi-groupe engendré par q. ∎

Exemple.- Soit M une FM continue à droite de X, telle que $M_t>0$ sur $\{t<\zeta\}$, et q le NM associé. Il est clair que q vérifie les conditions (i) et (ii). Si R est une partie dénombrable de $[0,\infty[$, l'ensemble Ω_R des ω vérifiant $M_{t+s}(\omega) = M_s(\omega)M_t\circ\theta_s(\omega)$ pour tous $s\in R$, $t\geq 0$, est de probabilité unité. Si $\omega\in\Omega_R$ on a:

$$\lim_{s\downarrow s_o, s\in R, t\downarrow t_o} q_{t,\theta_s(\omega)}(1,1) = \lim_{s\downarrow s_o, s\in R, t\downarrow t_o} \frac{M_{t+s}(\omega)}{M_s(\omega)} 1_{t+s<\zeta(\omega)}$$

$$= (M_{t_o+s_o}(\omega)/M_{s_o}(\omega))1_{t_o+s_o<\zeta(\omega)},$$

qui coïncide bien avec $q_{t_o,\theta_{s_o}(\omega)}(1,1)$ quand $s_o\in R$; on en déduit facilement que Ω_R vérifie CC, et par suite q est complètement continu à droite.

V- REGULARITE DES TRAJECTOIRES DU PROCESSUS CANONIQUE SUBORDONNE

Les résultats obtenus dans ce paragraphe sont assez disparates et, malheureusement, très partiels, puisqu'ils ne concernent principalement que le cas où E_2 est dénombrable.

PROPOSITION 10.- Supposons E_2 dénombrable. Soit q un NM de X complètement continu à droite, engendrant $\mathcal{Q}$. S'il existe une réalisation de $\mathcal{Q}$ dont la seconde composante est continue à droite et limitée à gauche, il existe un processus canonique subordonné à X, de semi-groupe $\mathcal{Q}$, tel que chaque Y_ω soit à trajectoires continues à droite et limitées à gauche.

Démonstration.- On peut appliquer à X et à q le théorème 3, dont nous reprenons les notations: $p^s_{s+t,\omega}$, Y_ω, $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{\Omega},\underset{\sim}{\mathcal{F}},\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t,\underset{\sim}{\theta}_t,(X_t,Y_t),\underset{\sim}{P}^{x,y})$. Si $\Omega'_o = \{\omega';\ Y_.(\omega')$ est limité à droite et limité à gauche le long des rationnels$\}$, $\Omega\times\Omega'_o$ est mesurable et sa probabilité ne dépend que de la "loi temporelle" de (Y_t). Par hypothèse on a donc $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\Omega\times\Omega'_o\} = 1$ pour tout $(x,y)\in E_3$. Si $\Omega^y_o = \{\omega;\ P^y_{o,\omega}\{\Omega'_o\} = 1\}$ et $\Omega_o = \bigcap_{(y)} \Omega^y_o$, on a $P^x\{\Omega_o\} = 1$. Posons:

$$Y'_t(\omega') = \begin{cases} \lim\limits_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} Y_s(\omega') & \text{si } \omega'\in\Omega'_o \\ \Delta_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $r,s,t\geq 0$, $A\in\mathcal{G}_{t+}$. On considère deux suites de rationnels (r_n) et (t_n) décroissant respectivement vers r et t. En utilisant la continuité à droite de $p^s_{s+t,\omega}$ en s et t (cf. théorème 3) et le fait que $A\in\mathcal{G}_{t_n}$, il vient pour $\omega\in\Omega_o$:

$$\begin{aligned} E^y_{s,\omega}\{1_A 1_{\{y'\}}(Y'_{t+r})\} &= \lim_{(n)} E^y_{s,\omega}\{1_A 1_{\{y'\}}(Y_{t_n+r_n})\} \\ &= \lim_{(n)} E^y_{s,\omega}\{1_A p^{s+t_n}_{s+t_n+r_n,\omega}(Y_{t_n},\{y'\})\} \\ &= E^y_{s,\omega}\{1_A p^{s+t}_{s+t+r}(Y'_t,\{y'\})\}, \end{aligned}$$

car E_2 étant dénombrable, on a $Y_{t_n} = Y'_t$ sur Ω'_o pour n assez grand. On vient donc de montrer que pour tout $\omega\in\Omega_o$, $Y'_\omega = (\Omega',\mathcal{G},\mathcal{G}_{t+},\theta'_t,Y'_t,P^y_{s,\omega})$ est markovien (non homogène), de même semi-groupe que Y_ω; par suite les processus Y'_ω vérifient H-2, H-3 et H-4, et le processus canonique construit à partir des Y'_ω admet $\mathcal{Q}$ pour semi-groupe. Enfin par construction, les trajectoires de Y'_ω ont les propriétés désirées. ∎

Remarque.- La démonstration précédente n'est pas valable quand E_2 n'est pas dénombrable, car Ω_o n'est plus de probabilité unité. De même elle n'est pas valable si q est seulement parfait, car p^s_{s+t} ne possède plus les propriétés de régularité nécessaires.

On sait qu'un processus de Markov non homogène à valeurs dans un espace dénombrable, à trajectoires continues à droite et dont le semi-groupe p^s_{s+t} est continu à droite en s et t, est fortement markovien. Donc:

COROLLAIRE.- Sous les hypothèses précédentes, chaque Y_ω est fortement markovien.

Il est alors naturel de se demander si le processus canonique $\underset{\sim}{X}$ est fortement markovien, du moins lorsque X l'est. A cet effet, reprenons la démonstration de la proposition 8, en remplaçant t par un $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt T. Comme $T(\omega,.)$ et

$T(.,\omega')$ sont respectivement des $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt, cette démonstration reste valide, à l'exception peut-être du passage de (10) à (11), qui repose sur l'égalité suivante:

$$E_{T(\omega,\omega'),\omega}^{Y_{T(\omega,\omega')}(\omega')}\{g(Y_s)\} = E_{o,\theta_{T(\omega,\omega')}(\omega)}^{Y_{T(\omega,\omega')}(\omega')}\{g(Y_s)\} \quad \underset{\sim}{P}^{x,y}\text{-ps en } (\omega,\omega').$$

Cette égalité est fausse en général, comme le montre la proposition 12 ci-dessous. Elle est vraie si H-3' est vraie, donc:

PROPOSITION 11.- Soit $\underset{\sim}{X}$ un processus canonique parfait subordonné à X. Si X et chaque Y_ω sont fortement markoviens, $\underset{\sim}{X}$ est fortement markovien (E_2 n'est pas supposé dénombrable).

PROPOSITION 12.- Supposons E_2 dénombrable. Soit X un processus fortement markovien. Soit $\underset{\sim}{X}$ un processus canonique subordonné à X, normal, continu à droite, de semi-groupe $\mathcal{Q}$, et q le NM défini par (12). Il y a équivalence entre:

(i)- $\underset{\sim}{X}$ est fortement markovien.

(ii)- q est un NM fort.

(iii)- Pour tous $(x,y)\in E_3$, $A\in\mathcal{E}_2$, $f\in b\mathcal{E}_1$, tout $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt T, on a:

$$E^x\{f(X_{T+t})q_{T+t}(y,A)\} = E^x\{\int q_T(y,dy')E^{X_T}\{f(X_t)q_t(y',A)\}\}.$$

(iv)- Si f est une fonction bornée sur E_1, continue pour la topologie fine induite par X, $Q_t(x,y;f,\{y'\})$ est finement continue en x pour tous $t\geq 0$, $y,y'\in E_2$.

Démonstration.- Remarquons d'abord que, d'après (12), q est continu à droite. Nous allons montrer que (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv)$\Longrightarrow$(i).

(i)$\Longrightarrow$(ii): Supposons $\underset{\sim}{X}$ fortement markovien, et soit T un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt. Si $\mathcal{H}_T = \sigma(X_{T+s};\ s\geq 0)$ on sait que $\mathcal{F}_T\vee\mathcal{H}_T = \mathcal{F}$ ([2], p.122). D'après la continuité à droite, N-1 est vérifié si on remplace t par T, et pour prouver N-2 il suffit de montrer que si $Z_1\in b\mathcal{F}_T$, $Z_2\in b\mathcal{F}$, on a:

$$E^x\{Z_1Z_2\circ\theta_T q_{T+t}(y,A)\} = E^x\{Z_1Z_2\circ\theta_T\int q_T(y,dy')q_{t,\theta_T}(y',A)\}.$$

En utilisant (12), (i), (12) et la propriété de Markov forte, on obtient:

$$E^x\{Z_1Z_2\circ\theta_T q_{T+t}(y,A)\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{Z_1Z_2\circ\theta_T 1_A(Y_{T+t})\}$$
$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{Z_1\underset{\sim}{E}^{X_T,Y_T}\{Z_2 1_A(Y_t)\}\}$$

$$= E^x\{Z_1\int q_T(y,dy')E^{X_T}\{Z_2 q_t(y',A)\}\}$$

$$= E^x\{Z_1 Z_2\circ\theta_T\int q_T(y,dy')q_{t,\theta_T}(y',A)\}$$

(ii)⟹(iii): Il suffit d'appliquer la propriété forte de Markov à X.

(iii)⟹(iv): Soit f une fonction bornée sur E_1, finement continue pour X. Pour prouver (iv) il suffit (DYNKIN, [4], p.120) de vérifier que pour une certaine suite (T_n) de temps d'arrêt décroissant ps vers 0, on a (en posant $g(x,y) = Q_t(x,y;f,\{y'\})$):

$$\lim_{(n)} E^x\{g(X_{T_n},y)\} = g(x,y)$$

(cette suite dépend de x,y,y',f et t). Posons:

$$a_n = |E^x\{\sum_{y''\in E_2} q_{T_n}(y,\{y''\})g(X_{T_n},y'') - g(X_{T_n},y)\}|$$
$$= |E^x\{\sum_{y''\neq y} q_{T_n}(y,\{y''\})g(X_{T_n},y'') - (1-q_{T_n}(y,\{y\}))g(X_{T_n},y)\}|$$
$$< 2\|f\|E^x\{1 - q_{T_n}(y,\{y\})\}.$$

La continuité à droite de q entraine que $q_{T_n}(y,\{y\})$ converge ps vers $Q_{X_o}(y,\{y\})$, qui égale 1 à cause de la normalité de $\tilde{X}$. Donc $\lim_{(n)} a_n = 0$. Mais

$$\lim_{(n)} E^x\{\sum_{y''\in E_2} q_{T_n}(y,\{y''\})g(X_{T_n},y'')\} = \lim_{(n)} E^x\{\sum_{y''\in E_2} q_{T_n}(y,\{y''\})E^{X_{T_n}}\{f(X_t)q_t(y,\{y'\})\}$$
$$= \lim_{(n)} E^x\{f(X_{T_n+t})q_{T_n+t}(y,\{y'\})\}$$
$$= E^x\{f(X_t)q_t(y,\{y'\})\} = g(x,y),$$

en utilisant (iii) et la continuité à droite de $f(X_s)$ et de $q_s(y,\{y'\})$ en s. Comme $a_n\to 0$, l'expression précédente est aussi la limite de $E^x\{g(X_{T_n},y)\}$, d'où le résultat.

(iv)⟹(i): $\tilde{X}$ étant continu à droite, il suffit pour que ce processus soit fortement markovien que pour tous $f\in C(E_1)$, $y\in E_2$, $Q_t(X_s,Y_s;f,\{y\})$ soit ps continu à droite en s. Mais E_2 étant discret, il suffit pour cela que $Q_t(X_s,y';f,\{y\})$ le soit pour tout y', ce qui est entrainé par (iv). ∎

Lorsque E_2 est fini, les hypothèses de la proposition 12 entrainent celles de la proposition 4, et tout NM parfait est fort (pour E_2 fini). Donc:

COROLLAIRE.- <u>Supposons E_2 fini. Sous les hypothèses de la proposition 12, les quatre assertions (i)-(iv) sont vérifiées.</u>

<u>Remarques</u>.- 1) Si E_2 n'est pas dénombrable, on a seulement (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii). Plus généralement on a ces implications lorsque $\underset{\sim}{X}$ est un processus continu à droite, de transition $\mathbb{Q}$, dont la première composante est fortement markovienne (q étant le NM dont il a été question après la proposition 9).

2) Le point crucial de la démonstration précédente consiste à montrer que a_n converge vers 0. Si $\underset{\sim}{X}$ n'est pas normal, on a d'après (5):

$$a_n = |E^x\{ \sum_{y''\in E_2} (q_{T_n}(y,\{y''\}) - Q_{X_{T_n}}(y,\{y''\}))g(X_{T_n},y'')\}|.$$

On peut donc remplacer "$\underset{\sim}{X}$ normal" par d'autres hypothèses. Par exemple: E_2 est fini et $Q_x(y,\{y'\})$ est une fonction finement continue en x.

<u>VI-FONCTIONNELLES ADDITIVES ASSOCIEES A UN NOYAU MULTIPLICATIF</u>

Tout au long du paragraphe, X est muni d'un NM q engendrant $\mathbb{Q}$.

DEFINITION.- <u>On appelle fonctionnelle additive (FA) de</u> (X,q) <u>une famille</u> (A_t^y; $t\geq 0$, $y\in E_2$) <u>d'applications de Ω dans $[0,\infty]$, vérifiant</u>:

<u>A-1</u>. Pour tout $t\geq 0$, $A_t^y(\omega)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y).

<u>A-2</u>. Pour tout $y\in E_2$, $A_o^y(\omega) = 0$, et $A_t^y(\omega)$ est croissante (en t), continue à droite, constante pour $t\geq\zeta(\omega)$.

<u>A-3</u>. Pour tous $s,t\geq 0$, $y\in E_2$ et tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de s,t et y), on a:

$$A_{t+s}^y(\omega) = A_t^y(\omega) + \int q_{t,\omega}(y,dy')A_s^{y'}\circ\theta_t(\omega). \tag{15}$$

Les lemmes 2 et 3 montrent que la formule (15) a un sens. Etant donnée la continuité à droite, l'ensemble négligeable de A-3 peut être pris indépendant de s.

<u>Exemples</u>.- 1) Soit M une FM de X et (A_t) une FA de (X,M) au sens ordinaire. q est le NM sur $E_2 = \{0,1\}$ associé à M. A (A_t) on fait correspondre la FA de (X,q) dé-

finie par:

$$A_t^o = 0, \qquad A_t^1 = A_t.$$

2) Soit (A_t) une FA de X au sens ordinaire et $f\in b\mathcal{E}_3$. La formule suivante définit une FA de (X,q):

$$A_t^y = \int_o^t dA_s \int q_s(y,dy')f(X_s,y').$$

<u>Remarque</u>.- Supposons que X soit la première composante d'un processus $\underset{\sim}{X}$ de semi-groupe $\mathcal{Q}$, et soit $(\underset{\sim}{A}_t)$ une FA de $\underset{\sim}{X}$. On vérifie aisément que les projections de $\underset{\sim}{A}_t$ sur la tribu engendrée par les $(X_t;\ t\geq 0)$ est une FA (A_t^y) de (X,q) au sens précédent; dans ce cas, toutes les propriétés de (A_t^y) se déduisent de celles de $(\underset{\sim}{A}_t)$. Malheureusement nous ne savons pas montrer que toute FA de (X,q) est la projection d'une FA de $\underset{\sim}{X}$.

Donnons maintenant quelques définitions:

-Deux FA (A_t^y) et (B_t^y) de (X,q) sont <u>équivalentes</u> si pour tous $t\geq 0$, $(x,y)\in E_3$, on a $P^x\{A_t^y \neq B_t^y\}= 0$; cela signifie que pour tout y, les processus $(A_t^y)_{t\geq o}$ et $(B_t^y)_{t\geq o}$ sont indistinguables.

-Une FA (A_t^y) est <u>prévisible</u> si chaque processus $(A_t^y)_{t\geq o}$ est prévisible. Si X est standard et si $A_{\zeta-}^y = A_\zeta^y$, cela revient à dire que les processus $(A_t^y)_{t\geq o}$ et $(X_t)_{t\geq o}$ n'ont ps aucune discontinuité commune.

-Le <u>potentiel</u> U_A^λ de la FA (A_t^y) est défini par:

$$U_A^\lambda(x,y;B) = E^x\{\int e^{-\lambda t} 1_B(X_t)dA_t^y\}.$$

D'après A-1 et le lemme 2, U_A^λ est un noyau positif de $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ dans $(E_1,\mathcal{E}_1^*)$. On écrit u_A^λ au lieu de $U_A^\lambda 1$. D'autre part si T est un temps d'arrêt, on définit les noyaux P_T^λ sur $(E_1,\mathcal{E}_1^*)$ et Q_T^λ sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ par:

$$P_T^\lambda(x,A) = E^x\{e^{-\lambda T}1_A(X_T)\},$$

$$Q_T^\lambda(x,y;A\times B) = E^x\{e^{-\lambda T}1_A(X_T)q_T(y,B)\};$$

enfin $(U^\lambda)_{\lambda\geq o}$ et $(V^\lambda)_{\lambda\geq o}$ désignent les résolvantes respectives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

PROPOSITION 13.- <u>Soit</u> (A_t^y) <u>une FA de</u> (X,q) <u>telle que</u> $A_t^y<\infty$ <u>ps si</u> $t<\infty$ <u>pour tout</u> y. <u>Si</u> $U_A^\lambda f$ <u>et</u> $U_A^\mu f$ <u>sont finies, on a</u>:

(16) $$U_A^\lambda f - U_A^\mu f = (\mu-\lambda)V^\lambda U_A^\mu f = (\mu-\lambda)V^\mu U_A^\lambda f.$$

Démonstration.- C'est un calcul classique:

$$V^\lambda U_A^\mu(x,y;f) = E^x\{\int e^{-\lambda s}ds\int q_s(y,dy')\int e^{-\mu t}f(X_{t+s})dA_t^{y'}\circ\theta_s\}$$

$$= E^x\{\int e^{-\lambda s}ds\int e^{-\mu t}f(X_{t+s})d_{(t)}A_{t+s}^y\}$$

$$= E^x\{\int e^{-\mu v}f(X_v)dA_v^y\int_0^v e^{-(\lambda-\mu)s}ds\} = \frac{1}{\lambda-\mu}(U_A^\mu - U_A^\lambda)(x,y;f),$$

en utilisant le fait que d'après A-3, $dA_{t+s}^y = \int q_t(y,dy')dA_s^{y'}\circ\theta_t$ ps sur $\{A_t^y<\infty\}$, les différentielles étant prises par rapport à s. ■

Voici maintenant quelques résultats d'unicité:

PROPOSITION 14.- Soient A et B deux FA de (X,q) telles que pour un $\lambda\geq 0$, $U_A^\lambda = U_B^\lambda$ et $u_A^\lambda<\infty$. Alors ces deux FA sont équivalentes.

Démonstration.- Comme $E^x\{A_t^y\} \leq e^{\lambda t}u_A^\lambda(x,y)$ est fini, on a $A_t^y<\infty$ ps. On peut donc appliquer (16), ce qui prouve que pour tout $\mu\geq\lambda$ on a $U_A^\mu = U_B^\mu$. Mais

$$U_A^\mu U^\mu g(x,y) = E^x\{\int e^{-\mu t}dA_t^y\, E^{X_t}\{\int e^{-\mu s}g(X_s)ds\}\}$$

$$= E^x\{\int e^{-\mu t}g(X_t)A_t^y dt\} = \int e^{-\mu t}dt\, E^x\{g(X_t)A_t^y\},$$

et une expression analogue pour $U_B^\mu U^\mu g$. Supposons que $g\in C(E_1)$. Nous avons vu plus haut que les fonctions $E^x\{g(X_t)A_t^y\}$ et $E^x\{g(X_t)B_t^y\}$ sont bornées par $\|g\|e^{\lambda t}u_A^\lambda(x,y)$; elles ont même transformée de Laplace pour $\mu\geq\lambda$, et on peut appliquer le théorème de Lebesgue pour prouver qu'elles sont continues à droite. On en déduit que pour tous $t\geq 0$, $(x,y)\in E_3$, on a $E^x\{g(X_t)A_t^y\} = E^x\{g(X_t)B_t^y\}$ pour tout $g\in C(E_1)$, donc tout $g\in b\mathcal{E}_1$. Autrement dit on vient de montrer l'égalité suivante (où $t_1<\ldots<t_n$, $g_i\in b\mathcal{E}_1$) pour n = 1:

$$E^x\{\prod_{i=1}^n g_i(X_{t_i})A_{t_n}^y\} = E^x\{\prod_{i=1}^n g_i(X_{t_i})B_{t_n}^y\}.$$

On montre cette relation par récurrence sur n, en utilisant

$$E^x\{\prod_{i=1}^n g_i(X_{t_i})A_{t_n}^y\} = E^x\{\prod_{i=1}^{n-1} g_i(X_{t_i})A_{t_{n-1}}^y P_{t_n-t_{n-1}}(X_{t_{n-1}},g_n)\}$$

$$+ E^x\{\prod_{i=1}^{n-1} g_i(X_{t_i})\int q_{t_{n-1}}(y,dy')E^{X_{t_{n-1}}}\{g_n(X_{t_n-t_{n-1}})A_{t_n-t_{n-1}}^{y'}\}\},$$

et on en conclut à l'équivalence des deux FA. ■

THEOREME 4.- Si A et B sont deux FA prévisibles telles que pour un $\lambda > 0$, $u^\lambda_A = u^\lambda_B < \infty$, elles sont équivalentes.

Démonstration.- Fixons y, et posons $C_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dA^y_s$, $D_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dB^y_s$. On a:

$$E^x\{C_\infty - C_t | \mathcal{F}_t\} = E^x\{e^{-\lambda t}\int e^{-\lambda s} dA^y_s \circ \theta_t | \mathcal{F}_t\}$$

$$= e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy') E^{X_t}\{\int e^{-\lambda s} dA^{y'}_s\} = e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy') u^\lambda_A(X_t,y')$$

et une expression analogue pour D. Les processus croissants C et D engendrent le même potentiel, et ils sont prévisibles et intégrables pour toute loi P^x, donc ils sont P^x-indistinguables [3] pour tout x. Par suite les FA A et B sont équivalentes. ∎

Nous arrivons au résultat essentiel de ce paragraphe: caractériser les fonctions qui sont le λ-potentiel d'une FA de (X,q). Si T est un temps d'arrêt, on note $T^{(n)}$ le temps d'arrêt défini par $T^{(n)} = k/2^n$ si $T \in [(h-1)/2^n, h/2^n[$.

DEFINITION.- Un λ-potentiel pour (X,Q) est une fonction finie u sur E_3, (λ,Q)-excessive (donc $\mathcal{E}^*_3$-mesurable), telle que pour toute suite (T_n) de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$, on ait: $\lim_{(n)} \downarrow \lim_{(p)} \uparrow Q^\lambda_{T_n^{(p)}} u = 0$.

THEOREME 5.- (i) Si A est une FA de (X,q) telle que $u^\lambda_A < \infty$, alors u^λ_A est un λ-potentiel pour (X,Q).

(ii) Si f est un λ-potentiel pour (X,Q), c'est le λ-potentiel d'une FA prévisible de (X,q).

Démonstration.- Dans son principe, le schéma de démonstration est celui de MEYER pour les FA ordinaires, tel qu'il a été amélioré par BENVENISTE et JACOD [1].

1) Soit A une FA telle que $u^\lambda_A < \infty$. On a:

$$Q^\lambda_t u^\lambda_A(x,y) = E^x\{e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy') E^{X_t}\{\int e^{-\lambda s} dA^{y'}_s\}\}$$

$$= E^x\{e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy') e^{-\lambda s} dA^{y'}_s \circ \theta_t\} = E^x\{e^{-\lambda t}\int_t^\infty dA^y_s e^{-\lambda s}\},$$

d'où l'on déduit facilement que u^λ_A est (λ,Q)-excessive. D'autre part $T_n^{(p)}$ ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs, donc on a également (même démonstration):

$$Q^\lambda_{T_n^{(p)}} u^\lambda_A(x,y) = E^x\{e^{-\lambda T_n^{(p)}} \int_{T_n^{(p)}}^\infty dA^y_s e^{-\lambda s}\}.$$

Il en découle immédiatement que u_A^λ est un $(\lambda,\mathbb{Q})$-potentiel.

2) Réciproquement soit f un λ-potentiel; si on pose $M_t^y = e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')f(X_t,y')$, $M_t^y(\omega)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y) (lemme 3), et on a:

$$E^x\{M_{t+s}^y|\mathcal{F}_t\} = e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')E^{X_t}\{e^{-\lambda s}\int q_s(y',dy'')f(X_s,y'')\}$$

$$= e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')Q_s^\lambda(X_t,y';f) \leq M_t^y.$$

Donc pour toute loi P^x, $(M_t^y)_{t\geq o}$ est une surmartingale; comme $E^x\{M_t^y\} = Q_t^\lambda f(x,y)$ est continue à droite en t, on en obtient une version continue à droite en posant $Z_t^y = \lim\sup(M_s^y;\ s\downarrow t,\ s\in\mathbb{Q})$. Comme $E^x\{Z_t^y\}\downarrow 0$ si $t\uparrow\infty$, $(Z_t^y)_{t\geq o}$ est un potentiel [10]. Enfin si T est un temps d'arrêt,

$$E^x\{Z_T^y\} = \lim_{(n)}\uparrow E^x\{Z^y_{T^{(n)}}\} = \lim_{(n)}\uparrow Q^\lambda_{T^{(n)}}(x,y;f).$$

L'hypothèse faite sur f entraine alors que si $T_n\uparrow\infty$, $E^x\{Z_{T_n}^y\}\downarrow 0$; cela implique que $(Z_t^y)_{t\geq o}$ est un potentiel de la classe (D), pour tout y et toute loi P^x.

3) D'après un théorème de Meyer [3], pour toute loi P^x le potentiel (Z_t^y) est engendré par un processus croissant prévisible unique $(B_t^{x,y})_{t\geq o}$. Soit $\mu^{x,y}$ la mesure sur $([0,\infty[\times\Omega,\mathcal{R}\otimes\mathcal{F})$ associée à $(B_t^{x,y})$ et à la loi P^x. On a (S et T étant des temps d'arrêt, $S\leq T$): $\mu^{x,y}(]\!]S,T]\!]) = \lim_{(n)}(Q^\lambda_{S^{(n)}} - Q^\lambda_{T^{(n)}})f(x,y)$, qui est $\mathcal{E}_3^*$-mesurable. Par suite $\mu^\cdot(A)$ est $\mathcal{E}_3^*$-mesurable pour tout A prévisible, donc tout $A\in\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$: si $Z\in b\mathcal{F}_t$, $E^x\{B_t^{x,y}Z\} = \mu^{x,y}(Z1_{[o,t]})$ est $\mathcal{E}_3^*$-mesurable. Il existe donc une modification $C_t^{x,y}(\omega)$ de $B_t^{x,y}(\omega)$, qui est $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_3^*$-mesurable en (ω,x,y).

Soient $D_t^y(\omega) = C_t^{X_o(\omega),y}(\omega)$, $\Omega_t = \{(\omega,y);\ D_\cdot^y(\omega)$ est croissante sur $[0,t]\cap\mathbb{Q}\}$, Ω_t^y la section de Ω_t en y, $T^y(\omega) = \zeta(\omega)\wedge\inf(t;\ \omega\notin\Omega_t^y)$, et

$$F_t^y(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s\downarrow t,s\in\mathbb{Q}} D_s^y(\omega) & \text{si } t<T^y(\omega) \\ D^y_{T^y}(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $P^x\{D_t^y \neq B_t^{x,y}\} = 0$, donc $P^x\{\Omega_t^y\} = 1$ et $P^x\{T^y<\zeta\} = 0$. $(B_t^{x,y})$ et (F_t^y) étant continus à droite et constants pour $t\geq\zeta$, on en déduit qu'ils sont P^x-indistinguables pour tout x, et (Z_t^y) est le potentiel engendré par (F_t^y).

4) Fixons t et y. Il est très facile de vérifier que les processus $G_s = F_{t+s}^y - F_t^y$ et $H_s = e^{-\lambda s}\int q_t(y,dy')F_s^{y'}\circ\theta_t$ sont prévisibles par rapport à la famille $(\mathcal{G}_s)_{s\geq o}$, où $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{t+s}$ (il suffit d'étudier les sauts de G et H). D'après le lemme 3, on a:

$$E^x\{G_\infty - G_s|\mathcal{G}_s\} = E^x\{F^y_\infty - F^y_{t+s}|\mathcal{F}_{t+s}\} = Z^y_{t+s}, \quad P^x\text{-ps}$$

$$E^x\{H_\infty - H_s|\mathcal{G}_s\} = e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')E^x\{(F^{y'}_\infty - F^{y'}_s)\circ\theta_t|\mathcal{F}_{t+s}\}$$

$$= e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')Z^y_s\circ\theta_t = e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')M^y_s\circ\theta_t = M^y_{t+s} = Z^y_{t+s}, \quad P^x\text{-ps}$$

(en effet il est immédiat que $E^x\{Z\circ\theta_t|\mathcal{F}_{t+s}\} = E^x\{Z|\mathcal{F}_s\}\circ\theta_t$). Les processus croissants prévisibles G et H engendrent le même potentiel $(Z^y_{t+s})_{s\geq o}$ relativement à $(\mathcal{G}_s)_{s\geq o}$, donc ils sont P^x-indistinguables. Cela signifie qu'on a ps:

$$F^y_{t+s} = F^y_t + e^{-\lambda t}\int q_t(y,dy')F^{y'}_s\circ\theta_t.$$

Pour terminer il suffit de poser $A^y_t = \int_o^t e^{\lambda s}dF^y_s$: $(A^y_t)_{t\geq o}$ est un processus croissant prévisible. A-3 est vérifié d'après ce qui précède, A-1 et A-2 par construction. Enfin on a:

$$E^x\{\int e^{-\lambda t}dA^y_t\} = E^x\{F^y_\infty\} = \lim_{t\downarrow o} E^x\{F^y_\infty - F^y_t\} = \lim_{t\downarrow o} E^x\{M^y_t\} = \lim_{t\downarrow o} Q^\lambda_t(x,y;f) = f(x,y). \blacksquare$$

<u>Fonctionnelles additives fortes</u>.- Nous supposons maintenant que X est <u>fortement markovien</u>, et que q est un NM <u>bien-mesurable</u> et <u>fort</u>. Une FA est dite <u>forte</u> si A-3 est vérifié lorsqu'on remplace t par un temps d'arrêt quelconque T. Contrairement à ce qui se passe pour les FA ordinaires, une FA de (X,q) n'est pas obligatoirement une FA forte.

Sous les hypothèses précédentes, nous allons un peu améliorer le théorème 5. Nous dirons qu'une fonction f est $(\lambda,\mathbb{Q})$-<u>fortement excessive</u> si elle est $(\lambda,\mathbb{Q})$-excessive, et si pour tout couple (S,T) de temps d'arrêt tel que $S\leq T$, on a $Q^\lambda_T f \leq Q^\lambda_S f$. Une fonction $(\lambda,\mathbb{Q})$-excessive n'est pas toujours fortement excessive; c'est cependant le cas lorsque $\mathbb{Q}$ admet une réalisation pour laquelle les fonctions λ-excessives sont continues à droite le long des trajectoires.

Une fonction f sur E_3 sera dite (X,q)-<u>presque-borélienne</u> si pour toute loi P^μ et tout $y\in E_2$, il existe une fonction borélienne f' telle que les processus $\int q_t(y,dy')f(X_t,y')$ et $\int q_t(y,dy')f'(X_t,y')$ soient P^μ -indistinguables. Si f ne dépend pas de y, on retrouve la notion de fonction presque-borélienne associée à X. Si $\underset{\sim}{X}$ est une réalisation de $\mathbb{Q}$, une fonction presque-borélienne relativement à $\underset{\sim}{X}$ est (X,q)-presqueborélienne, mais la réciproque n'est pas vraie.

DEFINITION.- <u>Un</u> λ-<u>potentiel fort (resp régulier) pour</u> $(X,\mathbb{Q})$ <u>est une fonction finie</u> u <u>sur</u> E_3, $(\lambda,\mathbb{Q})$-<u>fortement excessive, telle que pour toute suite</u> (T_n) <u>de temps d'ar-</u>

<u>rêt croissant vers</u> $+\infty$ (<u>resp vers</u> T), $Q^{\lambda}_{T_n}u$ <u>décroit vers</u> 0 (<u>resp vers</u> $Q^{\lambda}_{T}u$).

Il est clair qu'un λ-potentiel fort pour $(X,\mathcal{Q})$ est un λ-potentiel pour $(X,\mathcal{Q})$. Nous dirons enfin qu'une FA (A^y_t) est <u>continue</u> si chacune de ses trajectoires est continue.

THEOREME 6.- <u>Supposons</u> X <u>fortement markovien, muni d'un</u> <u>NM</u> q <u>bien-mesurable et fort</u>.
(i)- <u>Si</u> A <u>est une FA (resp FA continue) forte de</u> (X,q), <u>telle que</u> $u^{\lambda}_A<\infty$, <u>alors</u> u^{λ}_A <u>est un</u> λ-<u>potentiel fort (resp régulier) pour</u> $(X,\mathcal{Q})$.
(ii)- <u>Si</u> f <u>est un</u> λ-<u>potentiel fort (resp régulier) pour</u> $(X,\mathcal{Q})$, (X,q)-<u>presque-borélien, c'est le</u> λ-<u>potentiel d'une FA prévisible (resp continue) forte de</u> (X,q).

<u>Démonstration</u>.- Si X est fortement markovien et si A est une FA forte, on a pour tout temps d'arrêt T:

$$Q^{\lambda}_T u^{\lambda}_A(x,y) = E^x\{e^{-\lambda T}\int_T^{\infty} dA^y_s e^{-\lambda s}\}$$

(même démonstration qu'au théorème 5), et (i) en découle immédiatement.

Réciproquement soit f une fonction satisfaisant les hypothèses de (ii). On reprend la démonstration et les notations du théorème 5: f étant (X,q)-presque-borélienne et q étant bien-mesurable, les processus $(M^y_t)_{t\geq o}$ sont bien-mesurables. D'autre part soit T un temps d'arrêt. On a $E^x\{Z^y_{T(n)}\} = Q^{\lambda}_{T(n)}f(x,y)$, et comme f est $(\lambda,\mathcal{Q})$-fortement excessive, $Q^{\lambda}_T Q^{\lambda}_{1/2^n}f \leq Q^{\lambda}_{T(n)}f \leq Q^{\lambda}_T f$. Si $n\uparrow\infty$, $Q^{\lambda}_{1/2^n}f$ croit vers f, donc $Q^{\lambda}_{T(n)}f$ tend vers $Q^{\lambda}_T f$. D'autre part $E^x\{Z^y_{T(n)}\}$ tend vers $E^x\{Z^y_T\}$. Donc

$$E^x\{Z^y_T\} = Q^{\lambda}_T f(x,y) = E^x\{M^y_T\}.$$

D'après le théorème de section des ensembles bien-mesurables, on voit que les processus $(M^y_t)_{t\geq o}$ et $(Z^y_t)_{t\geq o}$ sont indistinguables.

On reprend alors mot pour mot la démonstration du théorème 5. Si T est un temps d'arrêt, on définit les processus G et H comme ci-dessus, en remplaçant t par T, et $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{T+s}$. Comme M = Z, les potentiels engendrés par G et H sont respectivement $(M^y_{T+s})_{s\geq o}$ et $(e^{-\lambda T}\int q_T(y,dy')M^{y'}_s\circ\theta_T)_{s\geq o}$, qui sont égaux car q est fort. On en déduit alors que A-3 est vérifié si on remplace t par T.

Enfin si f est régulier, le potentiel $(M^y_t)_{t\geq o}$ est lui-même régulier, et on sait qu'alors le processus croissant prévisible $(B^{x,y}_t)$ qui l'engendre est continu. Donc (A^y_t) est ps à trajectoires continues. On pose $T^y(\omega) = \inf(t;\ A^y_{t-}(\omega) \neq A^y_t(\omega))$ et $A'^y_t(\omega) = A^y_t(\omega)$ si $t<T^y(\omega)$, $A'^y_t(\omega) = A^y_{T^y-}(\omega)$ si $t\geq T^y(\omega)$. (A'^y_t) vérifie les proprié-

tés requises de mesurabilité et de continuité; comme $P^x\{T^y<\infty\} = 0$, (A'^y_t) est indistinguable de (A^y_t). (A'^y_t) est donc la FA continue cherchée. ∎

VII- UN EXEMPLE: LES NOYAUX INDEFINIMENT DIVISIBLES

Dans ce paragraphe nous supposons que $E_2 = \mathbb{R}^n$ (de manière plus générale on pourrait prendre un groupe localement compact de type dénombrable). Si f est une fonction sur E_2, on appelle $\tau_y f$ la fonction définie par $\tau_y f(y') = f(y'-y)$.

DEFINITION.- <u>Un NM</u> q <u>de</u> X <u>est indéfiniment divisible si pour tous</u> $t\geq 0$, $f\in b\mathcal{E}_2$, $\omega\in\Omega$, <u>il vérifie</u>:

(17) $$q_{t,\omega}(0,f) = q_{t,\omega}(y,\tau_y f).$$

Si on pose $r_{t,\omega}(.) = q_{t,\omega}(0,.)$, les axiomes N-1 et N-2 sont clairement équivalents à:

<u>N-1"</u>. Pour tous $t\geq 0$, $A\in\mathcal{E}_2$, $r_t(A)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

<u>N-2"</u>. Pour tous $s,t\geq 0$ et tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de s et de t) on a:

(18) $$r_{t+s,\omega} = r_{t,\omega} * r_{s,\theta_t(\omega)},$$

où $*$ désigne le produit de convolution dans E_2. La dénomination "noyau indéfiniment divisible" provient de ce que pour tout n, r_t est (ps) le produit de convolution de n mesures. Il faut toutefois préciser que, sans certaines hypothèses de continuité, uniforme en ω, au point $t = 0$, la mesure $r_{t,\omega}$ n'est pas indéfiniment divisible au sens classique du terme.

Il est très facile de vérifier que q est continu à droite si et seulement si pour tout ω, $r_{t,\omega}$ est une famille étroitement continue à droite (en t) de mesures.

PROPOSITION 15.- <u>Soit</u> q <u>un NM indéfiniment divisible et continu à droite, tel que</u> $q_o = I$ <u>ps. Il existe alors un NM indéfiniment divisible, parfait et équivalent à</u> q.

Ce résultat se montre comme la proposition 4. Commençons par un lemme.

LEMME 9.- Soient (μ_n) et (υ_n) deux suites uniformément bornées de mesures sur E_2. Si μ_n (resp υ_n) converge étroitement (resp vaguement) vers μ_∞ (resp υ_∞), $\mu_n * \upsilon_n$ converge vaguement vers $\mu_\infty * \upsilon_\infty$.

Démonstration.- Soient M et M' les bornes de $|\mu_n|$ et de $|\upsilon_n|$. Soient $\varepsilon>0$ et $f\in C_K(E_2)$ (espace des fonctions continues à support compact sur E_2). Pour $n\leqslant\infty$ on pose $g_n(x) = \int \upsilon_n(dy) f(x+y)$.

Il existe par hypothèse un compact A tel que $|\mu_n(A^c)|\leqslant\varepsilon$ pour tout n. Il existe $\eta>0$ tel que $|x-x'|\leqslant\eta$ entraine $|f(x)-f(x')|\leqslant\varepsilon$, et A peut être recouvert par un nombre fini de boules de centres x_i et de rayon η. Donc pour tout $x\in A$ il existe un i tel que

$$|g_n(x) - g_\infty(x)| \leqslant |g_n(x_i) - g_\infty(x_i)| + 2M'\varepsilon.$$

Mais g_∞ est continue et bornée, et $f(x_i+.)$ est dans $C_K(E_2)$; il existe donc N tel que pour $n\geqslant N$, $|(\mu_n-\mu_\infty)g_\infty|\leqslant\varepsilon$ et $|g_n(x_i)-g_\infty(x_i)|\leqslant\varepsilon$ pour tout i. Comme $|g_n(x)|\leqslant M'\|f\|$, il vient:

$$\begin{aligned}|\mu_n*\upsilon_n(f) - \mu_\infty*\upsilon_\infty(f)| &= |\mu_n(g_n) - \mu_\infty(g_\infty)| \\ &\leqslant \int\mu_n(dx)1_{A^c}(x)|g_n(x) - g_\infty(x)| + \int\mu_n(dx)1_A(x)|g_n(x) - g_\infty(x)| + |(\mu_n-\mu_\infty)g_\infty| \\ &\leqslant \varepsilon 2M'\|f\| + M(\varepsilon + 2M'\varepsilon) + \varepsilon,\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Démonstration de la proposition.- Quitte à modifier q sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que N-3' est vérifié avec $\Omega_3 = \Omega$ et que $q_o = I$ partout. Posons:

$$V_t^\omega = \{s\leqslant t;\ r_{s,\omega}*r_{t-s,\theta_s(\omega)} = r_{t,\omega}\},$$

$$U_t = \{\omega;\ \lambda(V_t^\omega) = t\},$$

et $U = \bigcap_{t\geqslant o} U_t$. On montre exactement comme pour la proposition 4 que $P^x\{U\} = 1$.

Soit D une partie dénombrable dense de $C_K(E_2)$. On range les éléments f_i de D dans un ordre déterminé. t et ω étant fixés, on note $(\overline{r}_{t,\omega}f_i)$ la lim sup essentielle (définie avant le lemme 4) quand $s\downarrow 0$ de la famille $(r_{t-s,\theta_s(\omega)}f_i)$ de fonctions de s indicées par D. D'après le lemme 4 il existe une suite (s_n) telle que $r_{t-s_n,\theta_{s_n}(\omega)}f_i$ converge vers $\overline{r}_{t,\omega}f_i$ pour tout $f_i\in D$. Donc la famille $(\overline{r}_{t,\omega}f_i)$ définit une mesure positive et $r_{t-s_n,\theta_{s_n}(\omega)}$ converge vaguement vers cette mesure, notée $\overline{r}_{t,\omega}$. Soit $\overline{r}_{o,\omega} = \varepsilon_o$.

Soient $\omega\in U$, $0\leq u<t$. D'après le lemme 4 il existe une suite (s_n) de points de V_t^ω, telle que $s_n \downarrow u$ et

$$\lim_{(n)} r_{t-s_n,\theta_{s_n}(\omega)} f_i = \lim_{(n)} r_{t-u-(s_n-u),\theta_{s_n-u}\circ\theta_u(\omega)} f_i = \overline{r}_{t-u,\theta_u(\omega)} f_i$$

pour tout $f_i\in D$. Donc la suite uniformément bornée $(r_{t-s_n,\theta_{s_n}(\omega)})$ de mesures converge vaguement vers $\overline{r}_{t-u,\theta_u(\omega)}$. Comme $r_{s_n,\omega}$ converge étroitement vers $r_{u,\omega}$, on déduit du lemme 9 et du fait que $s_n\in V_t^\omega$ que:

$$r_{u,\omega} * \overline{r}_{t-u,\theta_u(\omega)} = r_{t,\omega}.$$

On termine alors comme pour la proposition 4. ∎

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> q <u>un NM de</u> X, <u>indéfiniment divisible, continu à droite, tel que</u> $q_0 = I$ <u>ps. Il existe un processus canonique subordonné à</u> X, <u>parfait, dont le semi-groupe est engendré par</u> q.

Pour ce processus canonique, la structure de q entraine que, pour presque tout ω, Y_ω est un processus à accroissements indépendants (non stationnaires).

Terminons par quelques remarques faciles. Soit d'abord $\mathcal{Q}$ le semi-groupe engendré par le NM indéfiniment divisible q. De (17) on déduit:

$$Q_t(x,0;f,g) = Q_t(x,y;f,\tau_y g). \tag{19}$$

Inversement soit $\mathcal{Q}$ un semi-groupe sur E_3 vérifiant (19). Il est subordonné au semi-groupe sur E_1 défini par $P_t(x,.) = Q_t(x,0;.,E_2)$. Un processus admettant un tel $\mathcal{Q}$ pour semi-groupe s'appelle un <u>processus à accroissements semi-markoviens</u> [3,4]: c'est notamment la cas du processus canonique introduit dans le corollaire ci-dessus. Il est facile de vérifier, en calquant la démonstration du théorème 1, que si $\mathcal{Q}$ est subordonné à $\mathcal{P}$ et vérifie (19), $\mathcal{Q}$ est engendré par un NM vérifiant (17).

Si $y,u\in\mathbb{R}^n$, on note $<y,u>$ leur produit scalaire. q étant un NM indéfiniment divisible, soit $M_t^u = \int r_t(dy)e^{i<y,u>}$. Il est clair que pour tout u, $M^u = (M_t^u)_{t\geq 0}$ est une FM de X (à valeurs complexes), engendrant le semi-groupe sur E_1 défini par:

$$Q_t^u(x,A) = \int Q_t(x,0;A,dy)e^{i<y,u>}.$$

Ces remarques conduisent à une autre démonstration du théorème 1, lorsque Q vérifie (19): on définit les semi-groupes (Q^u_t) par la formule ci-dessus; ils sont subordonnés à $\mathcal{P}$, donc engendrés par une FM M^u de X. Ensuite on montre qu'on peut choisir les M^u de sorte que $M^u_t(\omega)$ soit une fonction de type positif en u; il existe alors une mesure $r_{t,\omega}$ dont la transformée de Fourier soit $M^u_t(\omega)$, et on prend $q_{t,\omega}(y,f) = r_{t,\omega}(\tau_{-y}f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENVENISTE A., J. JACOD: Projection des fonctionnelles additives et représentation des potentiels d'un processus de Markov (à paraitre).

[2] BLUMENTHAL R.M., R.K. GETOOR: Markov processes and potential theory. Academic Press, New-York, 1968.

[3] DELLACHERIE C.: Capacités et processus stochastiques. Springer, Berlin, 1972.

[4] DYNKIN E.: Markov processes. Springer, Berlin, 1965.

[5] EZHOV I.I., A.V. SKOROKHOH: Markov processes with homogeneous second component. I. Theor. Ver. 14, p.1-13, 1969.

[6] JACOD J.: Générateurs infinitésimaux des processus à accroissements semi-markoviens. Ann. Inst. H. Poinc., VII, p. 219-233, 1971.

[7] JACOD J.: Fonctionnelles additives et systèmes de Lévy des produits semi-directs de processus de Markov. (à paraitre dans le même volume).

[8] MAYER C.: Processus de Markov non stationnaires et espace-temps. Ann. Inst. H. Poinc., IV, p.165-177, 1967.

[9] MERTENS J.-F.: Théorie des processus stochastiques généraux, applications aux surmartingales. Z. Wahr. Th., 22, p.45-68, 1972.

[10] MEYER P.A.: Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, 1966.

[11] PINSKY M.A.:Multiplicative operator functionals of a Markov Process. Bull. Amer. Math. Soc., 77, p.377-380, 1971.

[12] WALSH J.B.: Some topologies connected with Lebesgue measure. Sém. Proba. Stras-Bourg V, Springer, Lect. Notes in Math., Berlin, 1971.

[13] WALSH J.B.: The perfection of multiplicative functionals. Sém. Proba Strasbourg VI, Springer, Lect. Notes in Math., Berlin, 1972.

Jean JACOD
Centre de Morphologie mathématique
35 rue Saint-Honoré
77300 FONTAINEBLEAU