DOMINGO LUNA

Slices étales

Mémoires de la S. M. F., tome 33 (1973), p. 81-105
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__33__81_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 33, 1973, p. 81-105.

SLICES ETALES

par Domingo LUNA
[Grenoble]

RESUME

Cet article étudie l'opération des groupes algébriques réductifs dans les variétés algébriques affines, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. On démontre l'existence d'un "slice étale" en tout point d'une orbite fermée ; puis on en tire des conséquences.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie réel compact, qui opère différentiablement dans une variété différentiable X. La façon dont on s'y prend pour analyser localement une telle opération est bien connue : on munit X d'une métrique riemannienne invariante par G ; pour tout point x de X, on peut alors trouver, grâce à l'application exponentielle, un voisinage de la zéro-section du fibré normal à l'orbite $G(x)$, et un isomorphisme de ce voisinage sur un voisinage de $G(x)$ dans X, isomorphisme qui commute à l'action de G ; de là, se déduit l'existence d'un "slice" au point x : c'est une sous-variété V de X, contenant x, stable par le groupe d'isotropie G_x, et telle que l'opération de G dans X induit un isomorphisme de $G\times_{G_x} V$ sur un voisinage de $G(x)$ dans X, l'isomorphisme qui commute à l'action de G (voir par exemple [8]).

Dans ce travail, nous observerons une analogie entre la situation précédente et l'opération d'un groupe algébrique réductif G dans une variété algébrique affine X, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. La "rigidité" d'une telle opération (qui, dans le cas décrit plus haut, tient à la compacité du groupe) vient alors du fait que G opère de façon semi-simple dans l'algèbre des fonctions régulières sur X. Guidés par cette analogie, nous donnerons une place importante aux orbites fermées de G dans X, pour plusieurs raisons : d'abord, parce que leur isotropie est réductive ; ensuite, parce que les points du "quotient" X/G (que l'on définit naturellement comme la variété affine associée à l'algèbre des fonctions régulières G-invariantes) correspondent de façon biunivoque aux orbites fermées; et surtout, parce que nous obtiendrons l'existence d'un "slice étale" (*) en tout point x dont l'orbite $G(x)$ est fermée : il s'agit d'une sous-variété V de X qui a les propriétés suivantes : elle est affine et contient x ; le groupe d'isotropie G_x laisse V stable ; l'opération de G dans X induit un G-morphisme étale $\psi : G\times_{G_x} V \to X$; l'image U de ψ est un ouvert affine de X ; enfin, propriétés essentielles, le morphisme $\psi/G : (G\times_{G_x} V)/G \simeq V/G_x \to U/G$ est étale, et les morphismes ψ et $G\times_{G_x} V \to (G\times_{G_x} V)/G \simeq V/G_x$ induisent un G-isomorphisme $G\times_{G_x} V \simeq U\times_{U/G} V/G_x$.

(*) N.B.: la définition de "slice étale" n'est plus la même que dans [9].

I. PRELIMINAIRES

Nous commencerons par introduire, au premier paragraphe, quelques généralités qui nous serviront ensuite constamment. Puis, dans le reste du chapitre, nous passerons en revue et nous adapterons à nos besoins les trois outils suivants : le théorème de Matsushima, les fibrés, et le théorème principal de Zariski.

Le corps de base k est supposé algébriquement clos et de caractéristique nulle.

1. Généralités.

Introduisons donc les notions et notations que nous utiliserons par la suite (pour plus de détails, voir [2], [5], [11] et [15]).

Soit X une variété algébrique affine. On désigne par $k[X]$ son algèbre affine ; c'est une algèbre de type fini sur k, non nécessairement intègre, ni réduite. Les points de X correspondent soit aux idéaux maximaux de $k[X]$, soit au homomorphismes d'algèbres de $k[X]$ dans k. Les éléments de $k[X]$ définissent des fonctions de X à valeurs dans k.

Soit G un groupe réductif, c'est-à-dire un groupe algébrique affine, dont le radical unipotent est réduit à l'élément neutre. Supposons que G opère (morphiquement) dans X. Le groupe G opère alors aussi dans $k[X]$, par automorphismes d'algèbres et de façon semi-simple (en tant que G-module, $k[X]$ est la somme de ses sous-G-modules de dimensions finies). On en déduit (voir [12], chapitre 1, §2) que :

1) $k[X]^G$, l'algèbre des éléments de $k[X]$ laissés fixes par G, est de type fini sur k ;
2) pour tout idéal $\mathfrak{b}$ de $k[X]^G$, on a $(k[X]\mathfrak{b})^G = \mathfrak{b}$;
3) si $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont deux idéaux de $k[X]$, stables par G et tels que $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2 = k[X]$, alors $\mathfrak{a}_1^G + \mathfrak{a}_2^G = k[X]^G$.

Le premier point permet de définir une variété affine X/G par $k[X/G]=k[X]^G$; l'inclusion $k[X]^G \subset k[X]$ donne un morphisme $\pi_X : X \to X/G$. Du deuxième point résulte alors que π_X est surjectif ; le troisième signifie que "les invariants séparent les fermés G-stables disjoints".

Soit $\xi \in X/G$. Puisque la fibre $\pi_X^{-1}(\xi)$ est non-vide, fermée et stable par G , toute orbite de dimension minimale dans $\pi_X^{-1}(\xi)$ est fermée dans X (voir [2], p.98) ; puisque les invariants séparent les fermés G-stables disjoints, $\pi_X^{-1}(\xi)$ ne peut contenir deux orbites fermées ; $\pi_X^{-1}(\xi)$ contient donc exactement une orbite fermée ; désignons-la par $T(\xi)$. On voit aisément que les points de $\pi_X^{-1}(\xi)$ sont ceux de X dont l'orbite est adhérente à $T(\xi)$. Ainsi les points du "quotient" X/G paramètrent les orbites <u>fermées</u> de G dans X . Si G est connexe, comme les invariants séparent les fermés G-stables disjoints, les fibres de π_X sont connexes ; dans le cas général, la fibre $\pi_X^{-1}(\xi)$ a autant de composantes connexes que $T(\xi)$.

Soit Y une deuxième variété affine dans laquelle opère G , et soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme qui commute à l'action de G (pour abréger, nous dirons souvent : une G-variété, un G-morphisme, etc.). Alors, φ induit un morphisme $\varphi/G : X/G \to Y/G$ tel que $\pi_Y \circ \varphi = (\varphi/G) \circ \pi_X$.

Fixons encore quelques notations : si $x \in X$, désignons par $G(x)$ l'orbite de G passant par x , et par G_x le groupe d'isotropie de G en x . Si $s \in G$ et $f \in k[X]$, notons f^s l'image de f par l'automorphisme de $k[X]$ qui est associé à s . Si $f \in k[X]$, désignons par X_f le sous-ensemble des points de X où la fonction f n'est pas nulle ; c'est un ouvert affine de X , d'algèbre affine $k[X]_f$; si $f \in k[X]^G$, $X_f = \pi_X^{-1}((X/G)_f)$ est stable par G . Si $k[X]$ est intègre, notons $k(X)$ son corps de fractions.

2. <u>Le théorème de Matsushima</u>.

Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine X . Soit x un point de X .

<u>PROPOSITION</u> (Matsushima, voir [10]). <u>Si l'orbite</u> $G(x)$ <u>est fermée</u>, <u>le groupe d'isotropie</u> G_x <u>est réductif</u>.

Nous esquisserons deux démonstrations de la proposition. La première est inspirée par celle de [1] ; la deuxième est due à J.L. Koszul. Les deux démonstrations s'appuient sur le lemme suivant :

<u>LEMME</u>. <u>Soient</u> G <u>un groupe réductif et</u> D <u>un sous-groupe algébrique de</u> G, <u>isomorphe au groupe additif de</u> k . <u>Il existe alors un sous-groupe algébrique</u> S <u>de</u> G , <u>simple et de dimension</u> 3, <u>qui contient</u> D .

Ce lemme est une conséquence facile du résultat analogue pour les algèbres de Lie (Jacobson-Morozov, voir [7]).

Première démonstration : Elle utilise l'existence et les propriétés des quotients de groupes algébriques (voir par exemple [5], exposé 7). Nous allons en fait démontrer le résultat suivant :

(*) Soient G un groupe réductif et H un sous-groupe algébrique de G. Si G/H est affine, H est réductif.

LEMME. Soient G un groupe algébrique affine, $H_1 \supset H_2$ deux sous-groupes algébriques de G. Si G/H_1 et H_1/H_2 sont affines, G/H_2 l'est également.

Preuve : Comme H_1/H_2 est affine, le morphisme canonique $G/H_2 \to G/H_1$ l'est aussi : en effet, après extension par le morphisme fidèlement plat $G \to G/H_1$, il devient isomorphe à la projection $G \times H_1/H_2 \to G$. Comme G/H_1 est affine, il s'ensuit que G/H_2 l'est également.

Démontrons maintenant (*). On raisonne par l'absurde. Supposons le radical unipotent R de H non trivial. Il existe alors un sous-groupe distingué D de R, isomorphe au groupe additif de k. Soit S un sous-groupe simple de dimension 3 de G qui contient D. On sait que S est isomorphe soit à $SL(2,k)$, soit à $SL(2,k)/(\pm 1)$. Désignons par $\varphi : S' = SL(2,k) \to S$ un isomorphisme ou un revêtement à deux feuilles, et par D' la composante neutre de $\varphi^{-1}(D)$.

On sait que le quotient d'un groupe algébrique affine par un sous-groupe distingué est encore affine. Par suite, G/H, H/R et R/D étant affines, G/D l'est également ; donc aussi S/D ; par suite $S'/\varphi^{-1}(D) \simeq S/D$ et $\varphi^{-1}(D)/D'$ sont affines ; donc aussi $S'/D' \simeq k^2 - \{0\}$, ce qui est absurde.

Deuxième démonstration : Comme on peut identifier X à un fermé G-stable d'un espace vectoriel de dimension finie sur k, dans lequel G opère linéairement, il suffit de démontrer la proposition pour une représentation linéaire $G \to GL(M)$.

On raisonne par l'absurde. Supposons le radical unipotent R_x de G_x non trivial ; il contient alors un sous-groupe D, isomorphe au groupe additif de k. Soit S un sous-groupe simple de dimension 3 de G qui contient D. Désignons par $\varphi : SL(2,k) \to S$ un isomorphisme ou un revêtement à deux feuilles, tel que $\varphi(\{\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \beta\in k\}) = D$.

D'après la théorie bien connue des représentations linéaires de $SL(2,k)$, M se décompose en une somme directe $\oplus M_i$, où $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$ opère dans M_i par l'homothétie de rapport α^i . Soit $x = \sum x_i$ la décomposition de x suivant les M_i ; comme $\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}.x = x$, on a $x_i = 0$ pour $i < 0$. Posons $T = \varphi(\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}, \alpha\in k^*\})$. On voit facilement que $x_o \in \overline{T(x)}$. Comme $G(x)$ est supposé fermé, on a donc $x_o \in G(x)$.

On a clairement $T \subset G_{x_o}$; puisque T normalise D et que $D \subset G_x$, on a aussi $D \subset G_{x_o}$; il s'ensuit que $S \subset G_{x_o}$. Par conséquent, l'ensemble des sx_o , où $s \in G$ est tel que $\dim(S\cap R_{sx_o}) = 0$, est un voisinage de x_o dans l'orbite $G(x_o) = G(x)$. Comme $x_o \in \overline{T(x)}$, il existe alors $t \in T$ tel que $\dim(S\cap R_{tx}) = 0$; mais $D = tDt^{-1} \subset tR_xt^{-1} = R_{tx}$, ce qui est absurde.

3. Fibrés.

Nous rassemblerons dans ce paragraphe, les définitions et les résultats concernant les fibrés, dont nous aurons besoin par la suite.

Soient E , B et F trois variétés, $\pi : E \to B$ un morphisme de variétés. On dit que π est une fibration (localement triviale au sens étale) d'espace total E , de fibre type F et de base B , s'il existe une variété B' , un morphisme étale et surjectif $B' \to B$, et un isomorphisme $F\times B' \xrightarrow{\sim} X\times_B B'$ qui commute aux projections sur B' .

Soit G un groupe réductif qui opère dans deux variétés affines X et F . Nous dirons que $\pi_X : X \to X/G$ est une fibration de fibre type F , s'il existe une variété affine Z , un morphisme étale et surjectif $Z \to X/G$ et un G-isomorphisme $F\times Z \xrightarrow{\sim} X\times_{X/G} Z$. Dans le cas où $F = G$, nous dirons que X est un fibré principal (voir aussi [15], pp. 360-363) .

Soit G un groupe réductif qui opère (à gauche) dans une variété affine Y. Soit X un fibré principal de groupe G (le groupe opérant cette fois à droite). Faisons opérer G dans $X\times Y$ par $s(x,y) = (xs^{-1},sy)$, et notons $X\times_G Y$ le quotient (au sens du §1) de $X\times Y$ par cette opération. On vérifie aisément que $X\times_G Y$ est l'espace total d'une fibration de fibre type Y et de base X/G . On l'appelle le fibré associé au fibré principal X .

Nous allons maintenant décrire une construction importante de G-variétés. Soit H un groupe réductif qui opère dans une variété affine Y . Soit G un groupe réductif qui contient H comme sous-groupe. Le groupe H opère par translations à droite dans G , qui est alors un fibré principal (voir [14], p.12). On peut donc former le fibré associé $G\times_H Y$. L'opération de G dans lui-même, par translations à gauche, passe au quotient en une opération de G dans $G\times_H Y$, de telle sorte que la projection $G\times_H Y \to G/H$ commute à l'action de G . L'opération de G dans $X = G\times_H Y$ est entièrement déterminée par celle de H dans Y : ainsi, on voit aisément que X/G s'identifie à Y/H qu'on a $\pi_X^{-1}(\xi) \simeq G\times_H \pi_Y^{-1}(\xi)$, pour tout $\xi \in X/G = Y/H$, etc... . A titre d'exemple, démontrons avec plus de détails le lemme suivant :

LEMME. *Soit X' une sous-variété fermée de $X = G\times_H Y$, stable par G . Il existe alors une sous-variété fermée Y' de Y , stable par H et telle que X' soit G-isomorphe à $G\times_H Y'$.*

Preuve : Désignons par $\mathfrak{a}'$ l'idéal de $(k[G]\otimes k[Y])^H$ associé à X' , par $\mathfrak{a}$ l'idéal de $k[G]\otimes k[Y]$ engendré par $\mathfrak{a}'$, et par $\mathfrak{b}$ l'idéal des $f \in k[Y]$ tels que $1\otimes f \in \mathfrak{a}$. On démontre aisément que $\mathfrak{b}$ est invariant par H et qu'on a $\mathfrak{a} = k[G]\otimes\mathfrak{b}$. Définissons alors Y' par $k[Y'] = k[Y]/\mathfrak{b}$. La suite exacte

$$0 \to \mathfrak{a} = k[G]\otimes\mathfrak{b} \to k[G]\otimes k[Y] \to k[G]\otimes k[Y'] \to 0$$

donne une autre suite exacte

$$0 \to \mathfrak{a}^H = \mathfrak{a}' \to (k[G]\otimes k[Y])^H \to (k[G]\otimes k[Y'])^H \to 0 .$$

Par suite, X' est bien isomorphe à $G\times_H Y'$.

4. Le théorème principal de Zariski.

L'énoncé classique du théorème principal de Zariski est le suivant (voir par exemple [3],§3, exercice 7) :

Soient X et Y deux variétés (affines) irréductibles et normales, $\varphi : X \to Y$ un morphisme birationnel dont les fibres sont finies. Alors φ est une immersion ouverte.

Nous aurons besoin de la variante que voici :

PROPOSITION. *Soient X et Y deux variétés affines (non nécessairement irréductibles ni réduites), G un groupe réductif qui opère dans X et Y , et $\varphi : X \to Y$ un G-morphisme. On suppose que φ a ses fibres finies. Alors, il existe une G-variété affine Z , un G-morphisme $i : X \to Z$ qui est une immersion ouverte, et un G-morphisme fini $\psi : Z \to Y$, tels que $\psi\circ i = \varphi$.*

Une bonne référence nous manquant, nous allons déduire cette variante de l'énoncé classique cité plus haut.

Preuve : Quitte à remplacer $k[Y]$ par son image dans $k[X]$, on peut supposer $k[Y] \subset k[X]$.

A) Montrons d'abord qu'il existe des G-variétés affines irréductibles et réduites X' et Y' , et un G-morphisme $\varphi' : X' \to Y'$ dont les propriétés sont les suivantes : X' est normale ; X' et Y' contiennent X et Y comme sous-G-variétés fermées ; le morphisme $\varphi' : X' \to Y'$ est dominant, ses fibres sont finies, et il induit $\varphi : X \to Y$.

Soit W un sous-G-module de dimension finie sur k de $k[X]$ qui engendre $k[X]$ en tant qu'algèbre sur k . Le groupe G opère de façon naturelle dans l'algèbre symétrique $S(W)$, et l'on a un homomorphisme d'algèbres $\rho : S(W) \to k[X]$ qui est surjectif et qui commute à l'action de G . Désignons par $\mathfrak{n}$ le noyau de ρ . Définissons une variété X'' par $k[X''] = S(W)$, et une variété Y' en choisissant pour $k[Y']$ une sous-algèbre de $S(W)$ ayant les propriétés suivantes :

1) $k[Y']$ est de type fini sur k ;
2) $k[Y']$ est stable par G ;
3) $k[Y']$ contient un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{n}$ de $S(W)$;
4) l'image de $k[Y']$ par ρ est $k[Y]$.

Le groupe G opère dans X'' et Y' ; X et Y s'identifient à des sous-G-variétés fermées de X'' et de Y' ; l'inclusion $k[X''] \supset k[Y']$ donne un G-morphisme $\varphi'' : X'' \to Y'$ qui induit $\varphi : X \to Y$. Soit $y \in Y \subset Y'$; désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal de y dans $k[Y]$ et par $\mathfrak{m}'$ l'idéal de y dans $k[Y']$. Montrons que $k[X'']\mathfrak{m}' = \rho^{-1}(k[X]\mathfrak{m})$: en effet, si $f \in \rho^{-1}(k[X]\mathfrak{m})$, il existe $g \in k[X'']\mathfrak{m}'$ tel que $f-g \in \mathfrak{n}$; comme $k[X'']\mathfrak{m}'$ contient $\mathfrak{n}$ (car $k[Y']$ - et donc $\mathfrak{m}'$ - contient un système de générateurs de $\mathfrak{n}$), il s'ensuit que $f \in k[X'']\mathfrak{m}'$; l'autre inclusion est évidente. Comme $\varphi^{-1}(y)$ est fini, $k[X]/k[X]\mathfrak{m}$ est de dimension finie sur k ; par suite $k[X'']/k[X'']\mathfrak{m}' \simeq$ $\simeq k[X]/k[X]\mathfrak{m}$ l'est aussi, donc $(\varphi'')^{-1}(y)$ est également fini. L'ensemble V des $x'' \in X''$ dont la fibre $(\varphi'')^{-1}(\varphi''(x''))$ est de dimension nulle en x'' , contient donc X . On sait qu'il est ouvert ([11], p. 97), et il est stable par G . Comme les invariants séparent les fermés G-stables disjoints, il existe $f \in k[X'']^G$ tel que $X \subset X''_f \subset V$. Il est clair que $X' = X''_f$, Y' et $\varphi' = \varphi''|X'$ satisfont aux conditions énoncées au début de A) .

B) Démontrons maintenant la proposition. Désignons par $k[Z']$ la fermeture intégrale de $k[Y']$ dans $k[X']$; on sait que $k[Z']$ est une algèbre de type fini sur k ([3], §3, th.2). Désignons par $k[Z]$ l'image de $k[Z']$ par ρ, et par Z et Z' les variétés de $k[Z]$ et $k[Z']$. Le groupe G opère dans Z et Z', et les inclusions induisent des G-morphismes $i' : X' \to Z'$, $i : X \to Z$ et $\psi : Z \to Y$; il est clair que $\psi \circ i = \varphi$ et que ψ est fini. On vérifie aisément que i' est birationnel et de fibres finies, et que Z' est normale. D'après l'énoncé classique du théorème principal de Zariski, i' est donc une immersion ouverte. On en déduit aussitôt qu'il en est de même de i.

Remarque. Conservons les notations et hypothèses de la proposition. Soit C la fermeture intégrale de $k[Y]$ dans $k[X]$. Si $k[X]$ est réduit, on démontre que C est fini sur $k[Y]$ et que, par suite, C est de type fini sur k (si $k[X]$ est intègre, cela résulte de [3], loc. cit. ; le cas général s'y ramène, en plongeant $k[X]$ dans le produit des $k[X]/\mathfrak{p}_i$, où les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers minimaux de $k[X]$). On déduit alors aisément de la proposition, qu'on peut prendre pour Z la variété définie par $k[Z] = C$. Toutefois, si $k[X]$ n'est pas réduit, C n'est pas nécessairement de type fini sur k.

Une conséquence importante de la proposition est le lemme suivant :

LEMME. *Soit G un groupe réductif qui opère dans deux variétés affines X et Y, et soit $\varphi : X \to Y$ un G-morphisme. On suppose que φ envoie les orbites fermées dans X sur des fermés dans Y, que les fibres de φ sont finies, et que φ/G est fini. Alors φ est fini.*

Preuve : Conservons les notations de la proposition. Si $k[X]^G$ est fini sur $k[Y]^G$, on voit aisément qu'on peut demander à $k[Z]$, dans la construction de la proposition, de contenir $k[X]^G$; i/G est alors un isomorphisme. Soit T une orbite fermée dans X ; le fermé $\psi^{-1}(\varphi(T))$ est composé d'un nombre fini d'orbites de même dimension dont $i(T)$; par suite, $i(T)$ est fermé dans Z. De ces deux remarques résulte que $i(X)$ contient toutes les orbites fermées de Z. Comme $i(X)$ est un ouvert G-stable de Z, $i(X) = Z$, donc $\varphi = \psi$ est bien fini.

COROLLAIRE (Mumford, [12], p.55, corollaire 2.5). Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine X. On suppose que les groupes d'isotropie de G dans X sont finis. Alors G opère proprement dans X.

Preuve : Il faut montrer que le morphisme $\varphi : G\times X \to X\times X$ défini par $\varphi(s,x) = (sx,x)$ est propre, c'est-à-dire fini. Faisons opérer G dans $G\times X$ par $t(s,x) = (ts,x)$, et dans $X\times X$ par $t(x,y) = (tx,y)$. On vérifie aisément toutes les hypothèses du lemme.

II. G-MORPHISMES ETALES

Soit G un groupe de Lie réel compact qui opère différentiablement dans deux variétés différentiables X et Y, et soit $\varphi : X \to Y$ une application différentiable qui commute à l'action de G. Si φ est étale en un point x de X (c'est-à-dire, si $T_x\varphi$ est un isomorphisme de T_xX sur $T_{\varphi(x)}Y$), et si la restriction de φ à l'orbite passant par x est injective, alors il existe un ouvert U de X qui a les propriétés suivantes : U contient x, U est stable par G, et la restriction de φ à U est un isomorphisme de U sur un ouvert de Y.

Dans ce chapitre, nous obtiendrons un résultat (§2, lemme fondamental) qui, dans le contexte algébrique, est analogue au précédent, et dont le rôle au chapitre III se révèlera décisif.

1. Un lemme préliminaire.

Soit G un groupe réductif qui opère dans deux variétés affines X et Y. Soient $\varphi : X \to Y$ un G-morphisme, ξ un point de X/G, x un point de $T(\xi)$ (pour la définition de $T(\xi)$, voir I, §1).

LEMME 1. On suppose les variétés X et Y normales, φ fini, φ étale en x, et la restriction de φ à $T(\xi)$ injective. Alors φ/G est étale en ξ.

Dans la démonstration du lemme 1, nous utiliserons la caractérisation suivante des morphismes étales :

LEMME 2. *Soient* B *une algèbre de type fini sur* k , *intègre et intégralement close*, L *son corps des fractions*, K' *une extension galoisienne finie de* L , $\mathfrak{G}$ *son groupe de Galois*, A' *la fermeture intégrale de* B *dans* K', $\mathfrak{m}'$ *un idéal maximal de* A' , $\mathfrak{n} = B\cap\mathfrak{m}'$. *Enfin, soient* $\mathfrak{H}$ *un sous-groupe de* $\mathfrak{G}$, K *le sous-corps de* K' *des éléments laissés fixes par* $\mathfrak{H}$, A *la fermeture intégrale de* B *dans* K , $\mathfrak{m} = A\cap\mathfrak{m}'$. *Alors, pour que* $A_{\mathfrak{m}}$ *soit étale sur* $B_{\mathfrak{n}}$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{m}'}$, *le groupe de décomposition de* $\mathfrak{m}'$, *soit contenu dans* $\mathfrak{H}$.

Preuve du lemme 2 : On sait que, sous les hypothèses du lemme 2, "étale" équivaut à "non-ramifié" (voir par exemple [6], exposé I, théorème 9.5) ; à cela près, la démonstration du lemme 2 se trouve dans [3], §2, prop.7.

Afin de faciliter l'application du lemme 2, traduisons-le en langage géométrique : désignons par X , Y , Z les variétés affines de A , B , A' (A et A' sont de type fini sur k d'après [3], §3, th.2) ; par x , y , z les points associés aux idéaux $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'$; enfin par $\varphi : X \to Y$ le morphisme donné par l'inclusion $B \subset A$. Alors $\mathfrak{G}$ opère dans Z ; on a $Z/\mathfrak{G} = Y$ et $Z/\mathfrak{H} = X$; pour que φ soit étale en x , il faut et il suffit que $\mathfrak{G}_z \subset \mathfrak{H}$.

Preuve du lemme 1 : (A) Supposons d'abord les variétés X et Y irréductibles et le groupe G connexe.

Soit K une extension galoisienne finie de $k(Y)$ contenant $k(X)$, de groupe de Galois $\mathfrak{G}$; notons $\mathfrak{H}$ le sous-groupe des éléments de $\mathfrak{G}$ qui laissent fixe $k(X)$. Désignons par C la fermeture intégrale de $k[Y]$ dans K , et par C' celle de $k[Y]^G$ dans K . Notons Z et Z' les variétés associées à C et C' . On vérifie aisément que $\mathfrak{G}$ opère dans Z et Z' , et qu'on a $Z/\mathfrak{G} = Y$, $Z'/\mathfrak{G} = Y/G$, $Z/\mathfrak{H} = X$ et $Z'/\mathfrak{H} = X/G$ (par exemple, montrons que $Z'/\mathfrak{G} = Y/G$; $k[Z']^{\mathfrak{G}}$ est entier sur $k[Y]^G$, donc aussi sur $k[Y]$; puisque $k[Z']^{\mathfrak{G}} \subset k(Y)$ et que $k[Y]$ est normal, $k[Z']^{\mathfrak{G}} \subset k[Y]$; par ailleurs, comme G est supposé connexe, on voit aisément que $k[Y]^G$ est intégralement fermé dans $k[Y]$; d'où $k[Z']^{\mathfrak{G}} = k[Y]^G$). Choisissons un point z de Z au-dessus de x , et désignons par z' le point de Z' en-dessous de z .

Nous pouvons appliquer le lemme 2 au triple (Z,X,Y) : l'hypothèse "φ étale en x" se traduit donc par $\mathcal{G}_z \subset \mathcal{H}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{G}_{z'}$. Désignons par $\overline{\sigma z}$ l'image de σz dans X . Le point $\overline{\sigma z}$ est au-dessus de ξ et de y , donc est situé sur l'orbite $T(\xi)$; puisque la restriction de φ à $T(\xi)$ est supposée injective, on en déduit que $\overline{\sigma z} = x$. Par suite, comme $\mathcal{H}$ opère transitivement dans l'ensemble des points de Z au-dessus de x , il existe $\tau \in \mathcal{H}$ tel que $\tau z = \sigma z$; d'où $\tau^{-1}\sigma \in \mathcal{G}_z \subset \mathcal{H}$, donc $\sigma \in \mathcal{H}$.

On vient de montrer que $\mathcal{G}_{z'} \subset \mathcal{H}$. Grâce au lemme 2, il s'ensuit que φ/G est étale en ξ .

(B) On suppose maintenant les variétés X et Y irréductibles, et le groupe G fini.

Soit K une extension galoisienne finie de $k(Y/G)$ contenant $k(X)$, de groupe de Galois $\mathcal{G}'$. Notons $\mathcal{H}'$ (resp. $\mathcal{G},\mathcal{H}$) le sous-groupe des éléments de $\mathcal{G}'$ qui laissent fixe $k(X/G)$ (resp. $k(Y),k(X)$). On a $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$. Désignons par C la fermeture intégrale de $k[Y/G]$ dans K , et par Z la variété correspondante. Le groupe $\mathcal{G}'$ opère dans Z et l'on a $Z/\mathcal{G}' = Y/G$, $Z/\mathcal{H}' = X/G$, $Z/\mathcal{G} = Y$ et $Z/\mathcal{H} = X$. Fixons un point z de Z au-dessus de x .

On peut appliquer le lemme 2 au triple (Z,X,Y) : l'hypothèse "φ étale en x" se traduit donc par $\mathcal{G}_z \subset \mathcal{H}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{G}'_z$. Il résulte de la théorie de Galois que $\mathcal{G}'$ (resp. $\mathcal{H}'$) opère dans Y (resp. dans X), et que $\mathcal{G}'$ et G ont même image dans le groupe des automorphismes de $k[Y]$ (et qu'il en est de même pour $\mathcal{H}'$ et G dans celui de $k[X]$). Par conséquent, il existe $s \in G$ et $\tau \in \mathcal{H}'$ tels que $\sigma|k[Y] = s|k[Y]$ et $\tau|k[X] = s|k[X]$. On a $sy = \sigma y = y$. Comme la restriction de φ à l'orbite passant par x est supposée injective, il s'ensuit que $\tau x = sx = x$. Le groupe $\mathcal{H}$ opère transitivement dans l'ensemble des points de Z au-dessus de x : il existe donc $\rho \in \mathcal{H}$ tel que $\rho z = \tau^{-1}z$. L'élément $\tau^{-1}\sigma$ laissant fixe $k[Y]$, appartient à $\mathcal{G}$. Par suite $\rho^{-1}\tau^{-1}\sigma \in \mathcal{G}_z \subset \mathcal{H}$. D'où $\sigma \in \mathcal{H}'$.

Nous venons de démontrer que $\mathcal{G}'_z \subset \mathcal{H}'$. Comme on peut appliquer le lemme 2 aussi au triple $(Z,X/G,Y/G)$, il en résulte que φ/G est étale en ξ.

(C) Traitons enfin le cas général.

On peut toujours supposer X/G et Y/G irréductibles. Soient $X_1,\dots,X_k$ les composantes irréductibles de X et $Y_1,\dots,Y_l$ celles de Y (où, disons, $x \in X_1$ et $y \in Y_1$). L'orbite $T(\xi)$ coupe alors tous les X_i, et $\varphi(T(\xi))$ tous les Y_j. Puisque, par hypothèse, la restriction de φ à $T(\xi)$ est injective, il s'ensuit que $k = l$, et que le sous-groupe G_1 de G qui stabilise X_1, est aussi celui qui stabilise Y_1. Comme on a $X/G = X_1/G_1$, $Y/G = Y_1/G_1$, etc..., on voit qu'on peut supposer les variétés X et Y irréductibles. Ce cas enfin découle aussitôt de (A) + (B) (car $X/G = (X/G^o)/(G/G^o)$ etc...).

2. <u>Le lemme fondamental.</u>

Soit G un groupe réductif qui opère dans deux variétés affines X et Y, et soit $\varphi : X \to Y$ un G-morphisme. Soient ξ un point de X/G, x un point de l'orbite $T(\xi)$.

<u>LEMME 3</u>. <u>On suppose le G-morphisme</u> φ <u>étale en</u> x, <u>la variété</u> X <u>normale en</u> x (<u>ou, ce qui revient au même, la variété</u> Y <u>normale en</u> $\varphi(x)$), <u>l'orbite</u> $\varphi(T(\xi))$ <u>fermée, et enfin la restriction de</u> φ <u>à</u> $T(\xi)$ <u>injective. Alors, il existe un ouvert affine</u> U' <u>de</u> X/G <u>qui a les propriétés suivantes</u> : <u>l'ouvert</u> $U = \pi_X^{-1}(U')$ <u>contient</u> $T(\xi)$; <u>les restrictions de</u> φ <u>à</u> U <u>et de</u> φ/G <u>à</u> U' <u>sont étales</u> ; <u>les ouverts</u> $V = \varphi(U)$ <u>et</u> $V' = (\varphi/G)(U')$ <u>sont affines</u> ; <u>on a</u> $V = \pi_Y^{-1}(V')$; <u>enfin, le morphisme</u> $\varphi : U \to V$ <u>envoie les orbites fermées dans</u> U <u>sur des fermés dans</u> V.

<u>Preuve</u> : Les ensembles des points normaux de X et de Y sont ouverts, G-stables et contiennent $T(\xi)$ et $\varphi(T(\xi))$; comme les invariants séparent les fermés G-stables disjoints, il existe un $f \in k[X]^G$ et un $g \in k[Y]^G$ tels que X_f et Y_g soient normales et contiennent $T(\xi)$ et $\varphi(T(\xi))$. Il est clair qu'il suffit de démontrer le lemme 3 pour $\varphi : X_f \cap \varphi^{-1}(Y_g) \to Y_g$. On peut donc supposer les variétés X et Y normales. On voit par un raisonnement analogue qu'on peut aussi supposer que les fibres de φ sont finies.

Désignons par $k[\tilde{X}]$ la fermeture intégrale de $k[Y]$ dans $k[X]$, et par $\tilde{X}$ la variété affine correspondante. D'après I, §4, $\tilde{X}$ est une G-variété normale, et les homomorphismes d'algèbres $k[X] \supset k[\tilde{X}] \leftarrow k[Y]$ donnent une G-immersion ouverte $i : X \to \tilde{X}$ et un G-morphisme fini $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to Y$. Identifions X a son image par i ; φ devient alors la restriction de $\tilde{\varphi}$ à X . L'orbite $T(\xi)$ est fermée dans $\tilde{X}$: en effet, $\varphi(T(\xi))$ étant supposé fermé, $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(T(\xi)))$ est fermé et composé d'un nombre fini d'orbites de même dimension dont $T(\xi)$. L'ensemble des points où $\tilde{\varphi}$ est étale, est ouvert, stable par G et contient $T(\xi)$. D'après le lemme 1, $\tilde{\varphi}/G$ est étale en $\tilde{\xi} = (i/G)(\xi)$. Comme les invariants séparent les fermés G-stables disjoints, on peut trouver un $f \in k[\tilde{X}]^G \subset k[X]^G$ qui a les propriétés suivantes : $\tilde{X}_f = X_f \subset X$; $(\tilde{X}/G)_f \simeq (X/G)_f$ est irréductible et contient ξ ; les restrictions de φ à X_f et de φ/G à $(X/G)_f$ sont étales. De façon analogue, comme $\varphi(T(\xi))$ est supposé fermé, on voit qu'il existe un $g \in k[Y]^G$ tel que $\varphi(T(\xi)) \subset Y_g \subset$ $\subset \varphi(X_f)$. Posons $U' = (X/G)_f \cap (\varphi/G)^{-1}((Y/G)_g)$. Nous allons voir que U' satisfait aux exigences du lemme 3.

On vérifie aisément que $V' = (Y/G)_g$, que $U = X_f \cap \varphi^{-1}(Y_g)$ et que $V = Y_g$. Toutes les assertions du lemme 3 sont alors immédiates, sauf peut-être la dernière. Voici comment on la démontre : les orbites fermées dans U sont aussi fermées dans $\tilde{X}$ (car U contient avec tout point x , la fibre $\pi_{\tilde{X}}^{-1}(\pi_{\tilde{X}}(x))$) ; comme $\varphi : \tilde{X} \to Y$ est fini, φ envoie donc bien les orbites fermées dans U sur des fermés de Y .

LEMME FONDAMENTAL. Soit G un groupe réductif qui opère dans deux variétés affines X et Y , et soit $\varphi : X \to Y$ un G-morphisme. Soit x un point de X . On suppose φ étale en x , la variété X normale en x (ou la variété Y normale en $\varphi(x)$) , les orbites $G(x)$ et $G(\varphi(x))$ fermées, et enfin la restriction de φ à $G(x)$ injective.

Alors, il existe un ouvert affine U de X dont les propriétés sont les suivantes :

l'ouvert U contient x et est saturé pour la projection π_X ; la restriction de φ à U est étale ; l'image V de U par φ est un ouvert affine de Y , saturé pour la projection π_Y ; le morphisme $\varphi/G : \pi_X(U) \simeq U/G \to \pi_Y(V) \simeq V/G$ est étale ; enfin, les morphismes $\varphi : U \to V$ et $\pi_U : U \to U/G$ induisent un G-isomorphisme $\chi : U \xrightarrow{\sim} V \times_{V/G} U/G$.

Preuve : Prenons pour U le "U" du lemme précédent. Reste à démontrer la dernière assertion du lemme fondamental.

On a $(V\times_{V/G}U/G)/G \simeq U/G$. Si $\xi \in U/G$, la fibre de $V\times_{V/G}U/G$ au-dessus de ξ est canoniquement isomorphe à la fibre de V au-dessus de $\eta = (\varphi/G)(\xi)$. Le morphisme χ induit l'identité au niveau des quotients et envoie $\pi_U^{-1}(\xi)$ dans $\pi^{-1}_{V\times_{V/G}U/G}(\xi) \simeq \pi_V^{-1}(\eta)$, exactement de la même façon que φ envoie $\pi_U^{-1}(\xi)$ dans $\pi_V^{-1}(\eta)$. Puisque φ envoie les orbites fermées dans U sur des fermés, il s'ensuit que χ en fait autant. D'après le lemme de I, §4, il en résulte que χ est fini.

Le morphisme χ est aussi étale : en effet, $id_V\times\varphi/G : V\times_{V/G}U/G \to$ $\to V\times_{V/G}V/G = V$ et $\varphi : U \to V$ le sont, et $\varphi = (id_V\times\varphi/G)\circ\chi$. Par suite, χ est un revêtement. Comme χ/G est un isomorphisme, on a $\chi^{-1}(\chi(G(x))) =$ $= G(x)$. Par hypothèse, la restriction de φ à $G(x)$ est injective ; il en est donc de même de celle de χ . Puisque toute composante connexe de $V\times_{V/G}U/G$ rencontre $\chi(G(x))$ (car $(V\times_{V/G}U/G)/G$ est isomorphe à U/G qui, par construction, est irréductible), χ est un revêtement à une feuille, donc un isomorphisme.

COROLLAIRE. Gardons les mêmes hypothèses et les mêmes notations que dans le lemme fondamental. Pour tout $\xi \in U/G$, φ induit un G-isomorphisme $\pi_X^{-1}(\xi) \xrightarrow{\sim} \pi_Y^{-1}((\varphi/G)(\xi))$.

Preuve : Cela découle aussitôt du lemme fondamental.

Le lemme suivant, technique mais banal, nous sera utile au chapitre III, §1 .

LEMME. Soient G un groupe réductif qui opère dans deux variétés affines X et Y , Y' une sous-G-variété fermée de Y , et $\varphi : X \to Y$ un G-morphisme. On pose $X' = Y'\times_Y X$, et $\varphi' = id_{Y'}\times\varphi : X' = Y'\times_Y X \to Y'\times_Y Y = Y'$. On suppose que φ et φ/G sont étales et que $X \to Y\times_{Y/G}X/G$ est un G-isomorphisme. Alors φ' et φ'/G sont étales et $X' \to Y'\times_{Y'/G}X'/G$ est un G-isomorphisme.

Preuve : Il est clair que φ' est étale. On a $X' = Y'\times_Y X \simeq$ $\simeq Y'\times_Y(Y\times_{Y/G}X/G) \simeq Y'\times_{Y/G}X/G$. Par suite, $X'/G \simeq Y'/G\times_{Y/G}X/G$, et

$\varphi'/G = id_{Y'/G} \times \varphi/G : X'/G \simeq Y'/G \times_{Y/G} X/G \to Y'/G \times_{Y/G} Y/G = Y'/G$ est étale.
Enfin, $X' \simeq Y' \times_{Y/G} X/G \simeq Y' \times_{Y'/G} (Y'/G \times_{Y/G} X/G) \simeq Y' \times_{Y'/G} X'/G$.

III. SLICES ETALES

Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine X . Dans le premier paragraphe, nous démontrerons qu'il existe un "slice étale" en tout point d'une orbite fermée de G dans X . Nous nous appuierons essentiellement pour cela sur le lemme fondamental du chapitre précédent. Les trois paragraphes suivants sont consacrés aux applications : si X est lisse, nous obtiendrons sensiblement les mêmes résultats que l'on connait pour l'opération d'un groupe de Lie compact dans une variété différentiable. Toutefois, la situation est plus riche du fait qu'il existe des orbites non fermées. Voici un exemple typique de petit phénomène que nous expliquerons dans un cadre général : l'isomorphisme bien connu de l'ensemble des éléments unipotents d'un groupe réductif et celui des éléments nilpotents de son algèbre de Lie. Au dernier paragraphe, nous retrouverons un résultat de R.W. Richardson ([13]).

1. Slices étales.

Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine X . Soit x un point de X .

LEMME. *On suppose la variété X lisse en x et G_x , le groupe d'isotropie de G en x , réductif. Alors, il existe un morphisme de variétés $\varphi : X \to T_xX$ qui a les propriétés suivantes :*

1) *φ commute à l'action de G_x ,*
2) *φ est étale en x ,*
3) $\varphi(x) = 0$.

Preuve : Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $k[X]$ qui correspond au point x . L'application canonique $d : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (T_xX)^*$ commute à l'action de G_x . Comme G_x est supposé réductif, il opère de façon complètement réductible dans $k[X]$. Par suite, il existe un sous-G_x-module W de $\mathfrak{m}$ tel que $d : W \to (T_xX)^*$ soit un isomorphisme. On prolonge $(d|W)^{-1}$ de façon canonique en un homomorphisme de l'algèbre symétrique de $(T_x X)^*$ dans $k[X]$. On vérifie facilement que le morphisme $\varphi : X \to T_x X$ qui lui correspond, répond aux exigences du lemme.

THEOREME DU SLICE ETALE. _Soit_ G _un groupe réductif qui opère dans une variété affine_ X . _Soit_ x _un point de_ X , _dont l'orbite_ $G(x)$ _est fermée_.

Il existe alors une sous-variété V _de_ X _qui a les propriétés suivantes_ : _elle est affine et contient_ x ; _le groupe d'isotropie_ G_x _laisse_ V _stable_ ; _l'opération de_ G _dans_ X _induit un G-morphisme étale_ $\psi : G\times_G V \to X$; _l'image_ U _de_ ψ _est un ouvert affine_ π_X_-saturé de_ X ; _le morphisme_ $\psi/G : (G\times_{G_x} V)/G \simeq V/G_x \to U/G$ _est étale_ ; _enfin, les morphismes_ ψ _et_ $G\times_{G_x} V \to (G\times_{G_x} V)/G \simeq V/G_x$ _induisent un_ G-_isomorphisme_

$$G\times_{G_x} V \xrightarrow{\sim} U\times_{U/G} V/G_x .$$

Preuve : A) Supposons d'abord X lisse en x . Comme l'orbite $G(x)$ est supposée fermée dans X , G_x est réductif (I,§2) . Les conditions du lemme précédent sont alors remplies ; il existe donc un morphisme $\varphi : X \to T_x X$ qui a les trois propriétés de ce lemme. Choisissons un supplémentaire N de $T_x G(x)$ dans $T_x X$, stable par G_x . Posons $Y = \varphi^{-1}(N)$; c'est une sous-variété fermée de X , contenant x , lisse en x et stable par G_x . Le morphisme $G\times X \to X$, qui définit l'opération de G dans X , induit un G-morphisme $G\times_{G_x} Y \to X$ qui est étale au point $\overline{(e,x)}$ (nous désignons par e l'élément neutre de G , et par $\overline{(e,x)}$ l'image canonique de $(e,x) \in G\times Y$ dans $G\times_{G_x} Y)$. On voit aisément que les hypothèses du lemme fondamental (II,§2) sont remplies pour $G\times_{G_x} Y \to X$; le théorème en découle aussitôt.

B) Dans le cas général, identifions X à une sous-G-variété fermée d'une G-variété affine lisse. Le théorème résulte alors de A), du lemme qui suit le lemme fondamental, et des remarques de I, §3.

Remarques (nous gardons les hypothèses du théorème).

1°- Si X est lisse en x , quitte à rétrécir V , on peut s'arranger pour que, outre les propriétés énumérées dans le théorème, il ait aussi les suivantes (voir le lemme fondamental) : V est lisse ; le morphisme $\varphi : V \to N = T_x V$ est étale ; l'image W de V par φ est un ouvert π_N-saturé de N ; le morphisme $\varphi/G_x : V/G_x \to W/G_x$ est étale ; enfin, les morphismes $\varphi : V \to W$

et $\pi_V : V \to V/G_x$ induisent un G_x-isomorphisme $V \simeq W \times_{W/G_x} V/G_x$. Insistons une fois de plus sur l'analogie avec le comportement de l'action d'un groupe de Lie compact dans une variété différentiable, au voisinage d'une orbite (cf. l'introduction) : à l'isomorphisme que l'on a alors (ibid.) correspondent ici les deux G-morphismes $G \times_{G_x} V \to G \times_{G_x} W$ et $G \times_{G_x} V \to U$ ($G \times_{G_x} W$ est un ouvert du "fibré normal à l'orbite").

Nous appellerons <u>slices étales</u> en x , les sous-variétés V de X qui ont les propriétés énumérées dans le théorème (et qui, si x est un point simple de X , ont aussi les propriétés énoncées au début de la remarque).

2°- Il résulte du corollaire du lemme fondamental que, pour tout $x' \in V$, ψ induit un G-isomorphisme $G \times_{G_x} \pi_V^{-1}(\pi_V(x')) \simeq \pi_X^{-1}(\pi_X(x'))$ (si X est lisse en x , on voit de même que $\pi_X^{-1}(\pi_X(x)) \simeq G \times_{G_x} \pi_N^{-1}(\pi_N(0))$).

3°- Si le corps de base est le corps des complexes, le théorème montre l'existence de "vrais slices" analytiques : à savoir, de sous-variétés analytiques V' de X , contenant x , stables par G_x , et telles que l'opération de G dans X induit un isomorphisme analytique de $G \times_{G_x} V'$ sur un voisinage ouvert (dans la topologie usuelle) de $G(x)$ dans X . Cela résulte aussitôt de la remarque 2° et du fait que $\psi/G\,|V/G_x$ est alors un isomorphisme local analytique.

4°- De l'existence des slices étales en x découle que les groupes d'isotropie des points voisins de x sont conjugués dans G à des sous-groupes de G_x . Si l'orbite $G(x)$ n'est pas fermée, cela peut être faux, même si G_x est réductif. Voici un exemple (que m'a donné R.W. Richardson) : on considère $SL(2,k)$ opérant de façon naturelle dans les formes cubiques à deux variables. Le groupe d'isotropie de x^2y est trivial, mais il existe un ouvert dense composé de formes dont l'isotropie est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

<u>COROLLAIRE 1</u>. <u>Soit</u> G <u>un groupe réductif qui opère dans une variété affine</u> X (<u>non nécessairement réduite</u>). <u>Pour que</u> X <u>soit un fibré principal</u> (<u>voir</u> I, §3) , <u>il faut et il suffit que tous les groupes d'isotropie de</u> G <u>dans</u> X <u>soient réduits à l'élément neutre</u>.

Cela résulte aussitôt du théorème.

<u>COROLLAIRE 2</u>. <u>Soit</u> G <u>un groupe réductif qui opère dans une variété affine</u> X

<u>(non nécessairement réduite)</u>. <u>On suppose</u> X/G <u>connexe et de dimension nulle</u>. <u>Il existe alors un sous-groupe réductif</u> H <u>de</u> G , <u>et une</u> H-<u>variété affine</u> Y , <u>tels que</u>

1°- H <u>a un point fixe</u> y <u>dans</u> Y ;

2°- <u>toutes les orbites de</u> H <u>dans</u> Y <u>sont adhérentes à</u> y ;

3°- X <u>est</u> G-<u>isomorphe à</u> $G \times_H Y$.

<u>Si l'on suppose de plus que</u> X <u>est lisse en un point d'une orbite fermée de</u> G <u>dans</u> X , <u>la</u> H-<u>variété</u> Y <u>est isomorphe à un espace vectoriel de dimension finie sur</u> k , <u>dans lequel</u> H <u>opère linéairement</u>.

<u>Preuve</u> : Soit x un point sur l'unique orbite fermée de G dans X , et soit V un slice étale en x . Puisque l'on suppose X/G connexe et de dimension nulle et que $V/G_x \to X/G$ est étale, quitte à rétrécir V , on peut supposer que $V/G_x \to X/G$ est un isomorphisme. L'ouvert U du théorème, qui est stable par G et qui contient l'unique orbite fermée de G dans X , est égal à X tout entier. De la dernière assertion du théorème résulte alors que $G \times_{G_x} V$ est G-isomorphe à $X \times_{X/G} V/G_x \simeq X$.

Supposons maintenant qu'en outre X soit lisse en un point de l'orbite fermée de G dans X , et revenons aux notations de la première remarque qui suit le théorème. Puisque $V/G_x \to W/G_x$ est étale, et que W/G_x est réduit et connexe, V/G_x et W/G_x sont alors nécessairement isomorphes à des points réduits. Il s'ensuit que $W = T_xV$ (W est ouvert, stable par G_x et contient l'unique orbite fermée de G_x dans T_xV , l'origine). Par suite, V est G_x-isomorphe à $W \times_{W/G_x} V/G_x \simeq T_xV$.

<u>Remarque</u>. Les hypothèses étant les mêmes que dans la dernière assertion du corollaire 2, supposons de plus que G ait un point fixe dans X . En conséquence immédiate, X est alors un espace vectoriel, dans lequel G opère linéairement. Un cas particulier (bien connu, et que nous ne mentionnons que pour illustrer la situation) en est le résultat suivant : soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ une algèbre graduée de type fini sur k ; désignons par X la variété affine de A . On suppose que $A_o = k$ et que le point de X , qui correspond à l'idéal maximal $\bigoplus_{n\geq 1} A_n$, soit un point simple. Alors A est isomorphe à une algèbre de polynômes sur k .

2. Modèles et stratification du quotient.

Soit G un groupe réductif. Considérons les G-variétés $G\times_H N$, où H est un sous-groupe réductif de G , et où N est un espace vectoriel de dimension finie sur k , dans lequel H opère linéairement. Ces G-variétés affines lisses -qui ne sont rien d'autre que les G-fibrés vectoriels de base affine homogène- sont particulièrement importantes : nous allons voir qu'elles servent de modèles, dans un sens qui va être précisé, aux actions de G dans les variétés affines lisses générales. Pour cela, nous allons appeler ces G-variétés -et parfois leurs classes d'isomorphie- les modèles. Nous noterons $\mathfrak{M}$ l'ensemble des modèles.

Soit X une variété affine lisse dans laquelle opère G . Définissons une application $\mu : X/G \to \mathfrak{M}$ en posant, pour ξ dans X/G , $\mu(\xi)$ égal à la classe d'isomorphie du fibré normal à $T(\xi)$.

COROLLAIRE 3. L'image de X/G par μ est un sous-ensemble fini de $\mathfrak{M}$.

On démontre le même résultat pour un groupe de Lie réel compact, qui opère différentiablement dans une variété différentiable compacte (voir [8], §4) . La démonstration du corollaire 3 n'est pas très différente (le slice étale jouant le rôle du slice différentiable).

Pour $\lambda \in \mathfrak{M}$, posons $(X/G)_\lambda = \mu^{-1}(\lambda)$.

COROLLAIRE 4. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{M}$, $(X/G)_\lambda$ est localement fermé dans X/G et, muni de sa structure de sous-variété réduite, il est lisse.

On obtient donc ainsi une "stratification" finie de X/G en sous-variété localement fermées lisses.

Preuve : Soient U et V deux G-variétés affines lisses, $\varphi : U \to V$ un G-morphisme surjectif ; on suppose φ et φ/G étales et $U \to V\times_{V/G} U/G$ un G-isomorphisme. On le voit alors aisément, pour que $(U/G)_\lambda$ soit fermé dans U/G et lisse, il faut et il suffit que $(V/G)_\lambda$ soit fermé dans V/G et lisse.

Soit $G\times_H N$ un "représentant" de λ . On peut identifier $(G\times_H N)/G$ à N/H (voir I, §3) . Il est clair qu'on a $((G\times_H N)/G)_\lambda = N^H/H \simeq N^H$.

Le corollaire 4 résulte aussitôt de ces deux remarques et du slice étale.

Pour $\lambda \in \mathfrak{M}$, posons $X_\lambda = \pi_X^{-1}((X/G)_\lambda)$; comme image réciproque par π_X

de $(X/G)_\lambda$, X_λ porte une structure de sous-variété fermée de X , non nécessairement réduite. Les fibres de π_X au-dessus de $(X/G)_\lambda$ sont toutes G-isomorphes ; de façon plus précise :

COROLLAIRE 5. Le morphisme $\pi_X : X_\lambda \to (X/G)_\lambda$ est une G-fibration (voir I, §3).

La démonstration est analogue à celle du corollaire précédent.

3. Modèles principaux.

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent.

Si T_1 et T_2 sont deux espaces homogènes de G , nous dirons que T_1 est plus grand que T_2 s'il existe un G-morphisme $T_1 \to T_2$; on définit ainsi une relation d'ordre dans l'ensemble des espaces homogènes de G . Nous dirons que deux orbites de G dans X sont voisines, si elles se projettent par π_X dans la même composante connexe de X/G . Pour $x \in X$, nous posons $N_x = T_x X/T_x G(x)$. Si M est un G-module (semi-simple), nous notons par M_G le supplémentaire canonique de M^G dans M qui est stable par G .

COROLLAIRE 6. Soit $\xi \in X/G$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $(X/G)_{\mu(\xi)}$ est un voisinage de ξ dans X/G ;

(2) $T(\xi)$ est maximal parmi les orbites fermées de G dans X , voisines de $T(\xi)$;

(3) pour tout x dans $T(\xi)$, $\pi_{N_x}^{-1}(\pi_{N_x}(0)) = (N_x)_{G_x}$;

(4) π_X est lisse aux points de $T(\xi)$.

En particulier, $\pi_X^{-1}(\xi) \simeq G\times_{G_x}(N_x)_{G_x}$ est alors lisse.

Preuve : Grâce au slice étale, on voit aisément qu'il suffit de démontrer l'équivalence quand $T(\xi)$ est réduit à un point. De là, on est aussitôt ramené au cas où X est un espace vectoriel M dans lequel G opère linéairement, et où $\xi = \pi_M(0)$. Réécrivons les conditions :

(1) M^G/G ($\simeq M^G$) est ouvert dans M/G (c'est-à-dire, est égal à M/G);

(2) l'origine est une orbite maximale parmi les orbites fermées de M ;

(3) $\pi_M^{-1}(\pi_M(0)) = M_G$;

(4) π_M est lisse en zéro.

On voit aisément que (1) $\Leftrightarrow$ (3) , que (2) $\Leftrightarrow$ (3) , et que (3) $\Rightarrow$ (4). Montrons que (4) $\Rightarrow$ (3) . La fibre $\pi_M^{-1}(\pi_M(0))$ est un cône de M , qui est lisse à l'origine et stable par G ; c'est donc forcément un sous-G-module (voir la remarque qui suit le corollaire 2). Pour tout $G°$-module simple non trivial N, on a $\pi_N^{-1}(\pi_N(0)) \neq \{0\}$. Il en résulte que $\pi_M^{-1}(\pi_M(0)) = M_{G°}$. Le quotient $M/G°$ s'identifie alors à $M^{G°}$, et $M \to M/G°$ est lisse. Comme π_M est supposé lisse, il s'ensuit que $M/G° \simeq M^{G°} \to M/G \simeq M^{G°}/(G/G°)$ l'est aussi. Mais cela n'est possible que si $M^{G°} = M^G$. Par conséquent, $M_G = M_{G°} = \pi_M^{-1}(\pi_M(0))$.

DEFINITION. Si l'une des conditions du corollaire 6 est remplie, nous dirons que le modèle de ξ est principal ; si X/G est connexe, il n'y a qu'un modèle principal possible, que nous appellerons alors "le modèle principal de X".

Montrons maintenant comme le slice étale permet de retrouver -et de mieux comprendre- le résultat principal de [9].

COROLLAIRE 7. Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine lisse X. On suppose que tout point de X possède sur l'espace tangent une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée, et invariante par le groupe d'isotropie. Alors, il existe un ouvert dense de X, composé d'orbites fermées dans X.

Preuve : Rappelons qu'un G-module M est dit (G-)orthogonalisable, s'il possède une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et G-invariante. On démontre aisément le résultat suivant (voir [9], lemme 5) : soient M un G-module, N un sous-G-module de M. Si M et N sont orthogonalisables, M/N l'est aussi.

Soit ξ un point de X/G dont le modèle est principal, et soit $x \in T(\xi)$. De ce qui précède, il résulte que $(N_x)_{G_x}$ est G_x-orthogonalisable (les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_x$ de G, G_x le sont, donc aussi $T_xG(x) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$, donc aussi $N_x = T_xX/T_xG(x)$, donc aussi $(N_x)_{G_x} \simeq N_x/N_x^{G_x}$, car $N_x^{G_x}$ l'est manifestement). Comme $(N_x)_{G_x} = \pi_{N_x}^{-1}(\pi_{N_x}(0))$ (corollaire 6), il s'ensuit que $(N_x)_{G_x}$ est réduit à zéro. Par suite, $\pi_X^{-1}(\xi) = T(\xi)$. Le corollaire 7 en découle aussitôt.

4. L'isotropie générique.

Dans ce paragraphe, toutes les variétés seront supposées irréductibles et réduites.

Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine X. On pose

$r = \dim X - \dim X/G$ et $s = \max_{x\in X} \dim G(x)$. En général, on a $s \leq r$. Si $s = r$, on dira que X/G a la bonne dimension.

LEMME. _Si_ $k(X/G) = k(X)^G$, X/G _a la bonne dimension_.

Preuve : On peut supposer que $k[X]$ soit un module libre sur $k[X]^G$: en effet, on sait qu'il existe des $f \neq 0$ dans $k[X]^G$, tels que $k[X]_f$ soit libre sur $k[X]_f^G$ (voir par exemple [15], p.77 lemme 3.6) ; il suffit visiblement de démontrer le lemme pour X_f .

Désignons par $\varphi : G\times X \to X$ et par $\psi : G\times X \to X\times_{X/G} X$ les morphismes définis par $\varphi(s,x) = sx$ et $\psi(s,x) = (sx,x)$, et par $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ les homomorphismes d'algèbres qui leur correspondent. Si $s \in G$,

$$k[X] \xrightarrow{\tilde{\varphi}} k[G]\otimes k[X] \xrightarrow{s\otimes 1} k\otimes k[X] = k[X]$$

envoie f sur f^s . Pour tout $f\otimes g \in k[X]\otimes_{k[X/G]} k[X] = k[X\times_{X/G} X]$, on a $\tilde{\psi}(f\otimes g) = \tilde{\varphi}(f)(1\otimes g)$.

Montrons que $\tilde{\psi}$ est injectif. Soit e_i une base de $k[X]$ sur $k[X]^G$. Il suffit de voir que $\Sigma\tilde{\varphi}(e_i)(1\otimes f_i) = 0$ entraîne que les f_i sont tous nuls. Mais $\Sigma\tilde{\varphi}(e_i)(1\otimes f_i) = 0$ implique $\Sigma e_i^s f_i = 0$, quel que soit $s \in G$. Comme par hypothèse $k(X/G) = k(X)^G$, les e_i sont aussi linéairement indépendants sur $k(X)^G$, et nous pouvons invoquer le théorème d'Artin ([4], §7,n°1) :

Soient L un corps (commutatif), G un groupe d'automorphismes de L , K le corps des éléments de L laissés fixes par G , et $e_1,\ldots,e_n$ des éléments de L linéairement indépendants sur K . Alors il existe $s_1,\ldots,s_n$ dans G tels que $\text{dét}(e_i^{s_j}) \neq 0$.

De là, par un raisonnement d'algèbre linéaire, résulte bien que les f_i sont tous nuls. Par suite, $X\times_{X/G} X$ est irréductible, et le morphisme $\psi : G\times X \to X\times_{X/G} X$ est dominant. On voit aisément que $X\times_{X/G} X$ est de dimension $\dim X + r$. On sait qu'il existe alors une fibre de ψ dont toutes les composantes irréductibles ont comme dimension $\dim G\times X - \dim X\times_{X/G} X = \dim G - r$ (voir [11], p.93). Puisque les fibres de ψ ont même dimensions que les groupes d'isotropie de G dans X , il existe donc x dans X tel que $\dim G_x = \dim G - r$. Il s'ensuit que $s \geq \dim G(x) = \dim G - \dim G_x = r$.

LEMME. _Soit_ G _un groupe qui opère dans une variété affine_ X . _On suppose que_ $k[X]$ _est factoriel et que les seuls éléments inversibles de_ $k[X]$ _sont les constantes non nulles_.

(1) Tout f de $k(X)^G$ s'écrit alors $f = g/h$, où g et h sont des invariants relatifs de G dans $k[X]$.

(2) Il existe un ouvert affine, non vide, G-stable X' dans X , tel que $k(X')^G$ = corps des fractions de $k[X']^G$.

Preuve : (1) Ecrivons $f = g/h$, où g et h sont deux éléments de $k[X]$, premiers entre eux. Pour tout $s \in G$ on a $gh^s = g^s h$. Comme $k[X]$ est factoriel, on en déduit que $g^s = \chi(s)g$, où $\chi(s) \in k^*$. On a $\chi(st)g = g^{st} = (g^s)^t = (\chi(s)g)^t = \chi(s)\chi(t)g$, donc $\chi : G \to k^*$ est un caractère.

(2) Le corps $k(X)^G$ est, comme sous-corps de $k(X)$, de type fini sur k; soit $f_1,\ldots,f_n$ un système de générateurs de $k(X)^G$ sur k ; d'après (1) , on peut écrire $f_i = g_i/h_i$, où les g_i et les h_i sont des invariants relatifs de G dans $k[X]$. Posons $h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_n$ et $X' = X_h$. On vérifie sans peine que X' satisfait aux conditions du lemme.

COROLLAIRE 8 (R.W. Richardson). Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine lisse X . Il existe alors un sous-groupe H de G , non nécessairement réductif, tel que l'ensemble des points de X dont le groupe d'isotropie est conjugué à H , soit d'intérieur non vide.

Preuve : On voit facilement, grâce aux corollaires 5 et 6, qu'il suffit de démontrer le corollaire 8 dans le cas où X est un espace vectoriel. D'après les deux lemmes précédents, il existe alors un ouvert affine, non-vide, G-stable X' dans X tel que X'/G ait la bonne dimension. Pour tout $\xi \in X'/G$ dont le modèle est principal, $\pi_{X'}^{-1}(\xi)$ contient alors une orbite qui est ouverte dans $\pi_{X'}^{-1}(\xi)$. Les fibres de tels ξ étant G-isomorphes, les corollaires 5 et 6 permettent de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIALYNICKI-BIRULA A. - On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, Amer. J. Math., 85 (1963), pp. 577-582.

[2] BOREL A. - Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[3] BOURBAKI N. - Algèbre commutative, chap.V, Hermann, 1964.

[4] BOURBAKI N. - Algèbre, chap.V, Hermann, 1959.

[5] Séminaire Heidelberg-Strasbourg, 1965-66, Groupes algébriques linéaires, Publication IRMA, Strasbourg, 1967.

[6] Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie, 1960-61, dirigé par A. Grothendieck, Revêtements étales et groupe fondamental, Springer Lecture Notes 224, 1971.

[7] JACOBSON N. - Lie algebras, Interscience Tracts, 1962.

[8] JÄNICH K. - Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten, Springer Lecture Notes 59, 1968.

[9] LUNA D. - Sur des orbites fermées des groupes algébriques réductifs, Inventiones Math. 16, pp. 1-5 (1972).

[10] MATSUSHIMA Y. - Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, Nagoya Math. J., 16 (1960), pp. 205-218.

[11] MUMFORD D. - Introduction to algebraic geometry.

[12] MUMFORD D. - Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[13] RICHARDSON R.W. - Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero, Inventiones Math. 16, pp. 6-14, (1972).

[14] SERRE J.P. - Espaces fibrés algébriques, Séminaire C. Chevalley, 1958, Paris 1958.

[15] DEMAZURE M.-GABRIEL P. - Groupes algébriques I, Masson-North Holland, 1970.

Domingo LUNA
Institut de Mathématiques pures
Boîte postale 116
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES

-:-:-:-