STEPHEN SIMONS

Un théorème de convergence avec frontière

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 359-363
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__359_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 359-363.

UN THEOREME DE CONVERGENCE AVEC FRONTIERE

par
Stephen SIMONS

Soit X un ensemble non vide. Si $f \in \ell^\infty(X)$, nous écrivons $S(f) = \sup f(X)$ et $\|f\| = \sup|f(X)|$. Nous écrivons "conv" pour "enveloppe convexe de". Tous les espaces vectoriels considérés seront réels.

THEOREME : <u>Nous supposons que</u> $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \ell^\infty(X)$, $\sup_{n\geqslant 1}\|f_n\| < \infty$, $Y \subset X$ <u>et que, si</u> $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1} \in \ell_1$, <u>alors, il existe</u> $y \in Y$ <u>tel que</u> $(\Sigma_{n\geqslant 1} \lambda_n f_n)(y) = S(\Sigma_{n\geqslant 1} \lambda_n f_n)$. <u>Soit, de plus,</u> μ <u>une forme linéaire positive sur</u> $\ell^\infty(X)$ <u>telle que</u> $\mu(1) = 1$. <u>Si</u>

(1) $$\limsup_{n\to\infty} f_n(y) \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in Y$$

alors

(2) $$\limsup_{n\to\infty} \mu(f_n) \leqslant 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Si l'inégalité (2) n'est pas vérifiée, nous pouvons supposer, en remplaçant $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ par une suite convenable extraite, qu'il existe $A>0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mu(f_n) \geqslant 3A$. Il en résulte que, pour tout g appartenant à conv $\{f_n : n\geqslant 1\}$, $S(g) = \mu(S(g)1) \geqslant \mu(g) \geqslant 3A$. Nous avons alors :

(3) $$A>0 \quad \text{et, pour tout} \quad g \in \text{conv}\,\{f_n : n\geqslant 1\}\ ,\ S(g) \geqslant 3A\ .$$

Posons :

(4) $$B = \sup_{n\geqslant 1} S(f_n) \quad ,$$

et choisissons :

(5) $$\lambda>0 \quad \text{tel que} \quad B\lambda \leqslant A \quad ;$$

construisons par récurrence une suite $g_1, g_2, \ldots,$ telle que,

(6) $$\text{pour tout} \quad m\geqslant 1\ ,\ g_m \in \text{conv}\,\{f_n : n\geqslant m\} \quad ,$$

et,

$$S(\Sigma_{n\leqslant m} \lambda^{n-1} g_n) \leqslant \inf S(\Sigma_{n\leqslant m-1} \lambda^{n-1} g_n + \lambda^{m-1}\, \text{conv}\,\{f_n : n\geqslant m\}) + A(\lambda/2)^m \quad .$$

Pour tout $m \geqslant 1$, $\dfrac{g_m + \lambda g_{m+1}}{1+\lambda}$ appartient à conv $\{f_n : n\geqslant m\}$, d'où

$$S(\Sigma_{n\leqslant m} \lambda^{n-1} g_n) \leqslant S(\Sigma_{n\leqslant m-1} \lambda^{n-1} g_n + \lambda^{m-1} \frac{g_m + \lambda g_{m+1}}{1+\lambda}) + A(\lambda/2)^m \quad .$$

En multipliant par $1+\lambda$ et écrivant,

(7) $$h_m = \Sigma_{n\leqslant m} \lambda^{n-1} g_n \quad ,$$

nous en déduisons que

$$(1+\lambda)\ S(h_m) \leqslant S(\lambda h_{m-1} + h_{m+1}) + A(1+\lambda)(\lambda/2)^m \quad ,$$

d'où

$$(1+\lambda)\ S(h_m) \leqslant \lambda\ S(h_{m-1}) + S(h_{m+1}) + A(1+\lambda)(\lambda/2)^m \quad ,$$

et par suite

$$\frac{S(h_{m+1}) - S(h_m)}{\lambda^m} \geqslant \frac{S(h_m) - S(h_{m-1})}{\lambda^{m-1}} - \frac{A(1+\lambda)}{2^m} \ .$$

Mais il résulte de (7), (6) et (3) que

$$\frac{S(h_1) - S(h_o)}{\lambda^o} = S(g_1) \geqslant 3\ A \quad ,$$

d'où, par récurrence, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\frac{S(h_{m+1}) - S(h_m)}{\lambda^m} \geqslant 3\ A - A(1+\lambda)(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots) = A(2-\lambda) \ .$$

Posons :

(8) $$h = \Sigma_{n \geqslant 1}\ \lambda^{n-1}\ g_n \ .$$

Alors, pour tout $m \geqslant 1$

$$S(h) - S(h_{m-1}) = \Sigma_{n \geqslant m}\ [S(h_n) - S(h_{n-1})] \geqslant \Sigma_{n \geqslant m}\ \lambda^{n-1}\ A(2-\lambda)$$

c'est-à-dire :

(9) $$S(h) - S(h_{m-1}) \geqslant \lambda^{m-1}\ \frac{A(2-\lambda)}{1-\lambda} \ .$$

Par hypothèse,

(10) il existe $y \in Y$ tel que $h(y) = S(y)$.

Pour tout $m \geqslant 1$ il résulte de (8) et (7) que :

$$\lambda^{m-1}\ g_m(y) = h(y) - h_{m-1}(y) - \Sigma_{n \geqslant m+1}\ \lambda^{n-1}\ g_n(y) \quad ,$$

qui, d'après (10) et (4), est supérieur à

$$S(h) - S(h_{m-1}) - \Sigma_{n \geqslant m+1}\ \lambda^{n-1}\ B \ ,$$

mais il résulte de (9) que cette expression est supérieure à

$$\lambda^{m-1}\ \frac{A(2-\lambda)}{1-\lambda} - \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\ B = \frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda}\ \{A(2-\lambda) - \lambda B\} \ ,$$

qui, enfin est supérieure à $\lambda^{m-1}\ A$ d'après l'inégalité (5).

Nous avons établi que :

(11) pour tout $m \geqslant 1$ $g_m(y) \geqslant A$

il résulte de (11) et (6) que

pour tout $m \geqslant 1$ il existe $k(m) \geqslant m$ tel que $f_{k(m)}(y) \geqslant A$.
Ceci contredit l'hypothèse (1), ce qui démontre le théorème.

Les quatre corollaires ci-dessous découlent immédiatement du théorème.

COROLLAIRE 1 :Soient M un sous-espace fermé de $\ell^{\infty}(X)$, et $Y \subset X$ tel que pour tout $f \in M$ il existe $y \in Y$ tel que $f(y) = S(f)$. Soit $\{f_n : n \geqslant 1\}$ une suite de M telle que $\sup_{n \geqslant 1} \|f_n\| < \infty$. Soit $f \in M$. Si $f_n(y) \to f(y)$ pour tout $y \in Y$, alors $f_n \to f$ dans $\sigma(\ell_\infty(X) , \ell_\infty(X)')$.

Remarque : Le corollaire 1 généralise un résultat connu sur des fonctions continues sur un espace compact dans lequel Y est la frontière de Choquet de M .

COROLLAIRE 2 : Soient X un espace topologique pseudo-compact, et $\{f_n : n \geqslant 1\}$ une suite bornée en norme de $C(X)$. Si $f \in C(X)$ et $f_n \to f$ simplement sur X alors $f_n \to f$ dans $\sigma(C(X) , C(X)')$.

Remarque : X est pseudo-compact si $C(X) \subset \ell_\infty(X)$, ce qui implique que pour tout $f \in C(X)$ il existe $y \in X$ tel que $f(y) = S(f)$. Le corollaire 2 généralise le théorème de Lebesgue.

COROLLAIRE 3 : Soient $(E , \|.\|)$ un espace normé avec dual E' et complété $\tilde{E}$, et $Y \subset \{y : y \in E', \|y\| \leqslant 1\}$ tel que :

(12) pour tout $x \in \tilde{E}$, il existe $y \in Y$ tel que $\langle x,y \rangle = \|x\|$.
Soit $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset E$, telle que $\sup_{n \geqslant 1} \|x_n\| < \infty$. Si $x \in E$ et $\langle x_n , y \rangle \to \langle x , y \rangle$ pour tout $y \in Y$ alors $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$.

Remarques : On peut déduire du théorème de Bauer ([2] , p. 225) que (12) est satisfaite si Y est l'ensemble des points extrémaux de $\{y : y \in E' , \|y\| \leqslant 1\}$ (si E n'est pas complet, on ne peut pas utiliser le théorème de Krejn et Mil'man). On obtient ainsi le théorème de Rainwater ([3] , p. 33 et [4]).

Le corollaire 3 ne marche pas si nous affaiblissons (12) à

(13) pour tout $x \in E$, il existe $y \in Y$ tel que $\langle x , y \rangle = \|x\|$.

Par exemple, si

$E = \{x : x \in \ell^{\infty}$, x est constante à partir d'un certain rang$\}$
et si Y se compose des applications $x \to \pm x_m (m \geqslant 1)$, alors (13) est satisfaite. Cependant la suite $(1,1,1,1,\ldots)$, $(0,1,1,1,\ldots)$, $(0,0,1,1,\ldots),\ldots$ contredirait cette version renforcée du théorème.

Même si (12) est satisfaite, il peut arriver que $Y \cap \mathrm{ex}\{y : y \in E', \|y\| \leqslant 1\}$ soit vide. Par exemple, si $\mathcal{a}$ est non dénombrable et $E = \ell^1(\mathcal{a})$(donc $E' = \ell^{\infty}(\mathcal{a})$)

nous pouvons prendre $\dot{Y} = \{y : y \in \ell^{\infty}(\mathfrak{a}),\ |y|$ est la fonction caractéristique d'un ensemble dénombrable$\}$.

COROLLAIRE 4 : Soit Y une partie non vide d'un espace vectoriel topologique E telle que

(14) toute fonction affine continue sur $\mathrm{conv}^{-}Y$ atteigne son maximum en un élément de Y .

Soit $\{f_n : n \geqslant 1\}$ une suite uniformément bornée de fonctions affines continues sur $\mathrm{conv}^{-}Y$ telle que, pour tout $y \in Y$, $f_n(y) \to 0$; alors, pour tout $x \in \mathrm{conv}^{-}Y$, $f_n(x) \to 0$.

Remarques : (14) est satisfaite si Y est pseudo-compact. Donc le corollaire 4 généralise le lemme qu'on trouve dans [1] (17.11, p. 158). Dans ce lemme, qu'on utilise pour établir le théorème de Krejn, on suppose que Y est semi-compact (= countably compact) et que les fonctions f_n sont linéaires.

Autres remarques : On peut utiliser la technique du théorème pour démontrer certains théorèmes du minimax, le théorème de James et le lemme combinatoire de Ptak ([5], [6] et [7]).

Qu'il me soit permis d'exprimer mes sincères remerciements à Marc Rogalski pour l'aide qu'il m'a apportée dans la rédaction de la version française de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KELLEY (J.L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces, Van Nostrand, 1963.

[2] MEYER (P.A.). - Theory of Probability, Blaisdell, New-York 1965.

[3] PHELPS (R.R.). - Lectures on Choquet's Theorem, Van Nostrand mathematical Studies 7, 1966.

[4] RAINWATER (J.). - Weak convergence of bounded sequences, Proc.Amer.math.Soc. 14 (1963), 999.

[5] SIMONS (S.). - A convergence theorem with boundary (à paraître), Pacific J.Math

[6] SIMONS (S.). - Maximinimax, minimax and antiminimax theorems and a result of R. C. James, (à paraître) Pacific J. Math.

[7] SIMONS (S.). - On Ptak's combinational lemma (à paraître) Pacific J. Math.

Dept of Mathematics
University of California
SANTA BARBARA, Calif. 93106
(Etats-Unis)