BULLETIN DE LA S. M. F.

H. HANCOCK

Les fondements de la théorie des fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 37-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__37_1>

LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. HARRIS HANCOCK.

Weierstrass (*Œuvres*, t. 1, p. 140) écrit
« Si $x = \operatorname{sn} u$, on a

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = k^2 x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Si ensuite on pose $x = \frac{p_1}{p}$, il en résulte que

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} - \frac{d^2 \log p}{du^2} = k^2 \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{p^2}{p_1^2}.$$

Cette équation se décompose en deux équations, si nous posons

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} = -\frac{p^2}{p_1^2}, \qquad \frac{d^2 \log p}{du^2} = k^2 \frac{p_1^2}{p^2}.$$

On peut prouver que les deux fonctions p et p_1, qui sont définies par ces deux équations différentielles, peuvent s'exprimer par deux séries uniformément convergentes. »

Weierstrass écrit en outre que « Abel, dans une lettre à Legendre (*Journal de Crelle*, t. 4, p. 244; *voir* aussi t. 6, p. 76), a remarqué une telle représentation des fonctions elliptiques sans indiquer comment elle est possible et sans exposer la méthode à suivre ».

On peut démontrer en employant un théorème qui est énoncé dans la suite, et l'on peut prouver aussi, indépendamment de ce théorème, que l'exposé d'Abel s'établit si simplement qu'il n'y a pas besoin d'insister sur cette méthode, et, en même temps, il devient clair que les procédés de Weierstrass dans son Mémoire *Ueber die Entwickelung der Modular-Funktionen* (*Œuvres*, t. I, p. 1-49) ne sont pas directs et qu'ils ont peu d'importance. On voit aussi que les fonctions $\mathrm{A}l(u)$, $\mathrm{A}l(u)_1$, $\mathrm{A}l(u)_2$, $\mathrm{A}l(u)_3$, qu'il y a introduites et sur lesquelles on a indûment insisté, sont sans valeur dans le développement des fonctions elliptiques.

Voici une modification d'un théorème qui se trouve à la fin du Mémoire de Weierstrass : *Sur les fonctions abéliennes* (voir *Journal de Crelle*, t. 52). Nous allons l'appeler le *théorème initial.*

Théorème. — *Si* $\mathrm{F}(u)$ *est une fonction monodrome quelconque de* u *qui n'a pas de singularité essentielle dans une région finie,* R, *du plan, et si* α *est un pôle quelconque de* $\mathrm{F}(u)$ *dans* R, *tel que*

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\mathrm{L}}{(u-\alpha)^\lambda} + \mathrm{P}(u-\alpha),$$

où, dans le second membre, il y a une seule puissance négative et où P *représente, comme d'habitude, une série de puissances entières positives de* $u-\alpha$; λ *devant être le même pour tout pôle de* $\mathrm{F}(u)$ *dans la région* R *dont il s'agit; si encore*

$$\frac{\mathrm{L}}{(u-\alpha)^\lambda} = l\,\frac{d^\lambda \log(u-\alpha)}{du^\lambda},$$

où il faut toujours que l *soit un entier positif, alors l'intégrale générale* $z=f(u)$, *de l'équation différentielle*

$$[\mathrm{A}] \qquad \frac{d^2\log z}{du^\lambda} = \mathrm{F}(u),$$

est une série uniformément convergente dans R.

L'équation différentielle que vérifie $z = \operatorname{sn} u$ est

$$[\mathrm{B}] \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2).$$

On peut écrire cette équation :

$$\frac{d^2\log z}{du^2} = k^2z^2 - \frac{1}{z^2},$$

ou

$$[\mathrm{C}]\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\log \operatorname{sn} u}{du^2}=k^2\operatorname{sn}^2 u-\dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 u}.\\[2ex] \text{De la même façon, on voit que}\\[1ex] \dfrac{d^2\log \operatorname{cn} u}{du^2}=k^2\operatorname{sn}^2 u-\dfrac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u},\\[2ex] \dfrac{d^2\log \operatorname{dn} u}{du^2}=k^2\operatorname{sn}^2 u-\dfrac{k^2\operatorname{cn}^2 u}{du^2 u}.\end{array}\right.$$

On peut démontrer que les fonctions $k^2\operatorname{sn}^2 u, \dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 u}, \dfrac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}, \dfrac{k^2\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}$ satisfont aux conditions du théorème initial. Il s'ensuit que, à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\log z}{du^2}=\mathrm{F}_1(u)=-k^2\operatorname{sn}^2 u,$$

satisfait une série entière uniformément convergente, $g(u)$, de sorte que

$$[\mathrm{D}]\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\log g(u)}{du^2}=-k^2\operatorname{sn}^2 u;\\[2ex] \text{et de la même façon}\\[1ex] \dfrac{d^2\log g_1(u)}{du^2}=\mathrm{F}_2(u)=-\dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 u},\\[2ex] \dfrac{d^2\log g_2(u)}{du^2}=\mathrm{F}_3(u)=-\dfrac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u},\\[2ex] \dfrac{d^2\log g_3(u)}{du^2}=\mathrm{F}_4(u)=-k^2\dfrac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u},\end{array}\right.$$

où $g_1(u)$, $g_2(u)$ et $g_3(u)$ sont aussi des séries entières uniformément convergentes.

Les équations [C] peuvent s'écrire sous la forme

$$[\mathrm{C}']\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\log \operatorname{sn} u}{du^2}=\mathrm{F}_2(u)-\mathrm{F}_1(u)=\dfrac{d^2\log g_1(u)}{du^2}-\dfrac{d^2\log g(u)}{du^2},\\[2ex] \dfrac{d^2\log \operatorname{cn} u}{du^2}=\mathrm{F}_3(u)-\mathrm{F}_1(u)=\dfrac{d^2\log g_2(u)}{du^2}-\dfrac{d^2\log g(u)}{du^2},\\[2ex] \dfrac{d^2\log \operatorname{dn} u}{du^2}=\mathrm{F}_4(u)-\mathrm{F}_1(u)=\dfrac{d^2\log g_3(u)}{du^2}-\dfrac{d^2\log g(u)}{du^2}.\end{array}\right.$$

Il s'ensuit que

$$\operatorname{sn} u = \frac{g_1(u)}{g(u)} e^{A_0 + A_1 u},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{g_2(u)}{g(u)} e^{B_0 + B_1 u},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{g_3(u)}{g(u)} e^{C_0 + C_1 u},$$

où A_0, A_1 ; B_0, B_1 ; C_0, C_1 sont les constantes d'intégration.

Hermite (*voir* le *Calcul de Serret*, t. 2, p. 829) a démontré que

$$-\int_0 k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - Cu,$$

où

$$C = \frac{J}{K} = \frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)}.$$

On déduit de la formule [D] que

$$g(u) = \Theta(u) e^{C' - C\frac{u^2}{2}},$$

C′ étant la constante d'intégration.

Il existe des expressions semblables pour $g_1(u)$, $g_2(u)$ et $g_3(u)$. Il en résulte (*voir* notre Ouvrage, *Elliptic Functions*, vol. I, p. 241) que

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \, \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \, \frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \, \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

Les propriétés des fonctions elliptiques peuvent ensuite dériver directement de celles des fonctions Θ. Celles-ci étant les éléments de la théorie entière, il est naturellement plus scientifique d'établir leurs propriétés sans employer aucune des propriétés des fonctions elliptiques élémentaires sn, cn et dn. Ceci peut se faire en introduisant les fonctions dites *intermédiaires* d'Hermite. Dans le Chapitre V de nos *Elliptic Functions*, nous reproduisons le procédé de ce grand génie mathématique avec beaucoup de rapport à ses œuvres.

Ainsi, sans entamer de discussion étendue des propriétés de ces fonctions auxiliaires $g(u)$, $g_1(u)$, $g_2(u)$ et $g_3(u)$, nous pouvons d'une manière assez simple exprimer les fonctions elliptiques comme quotients des fonctions Θ. On voit que les fonctions $g(u)$, $g_1(u)$, $g_2(u)$ et $g_3(u)$ ne sont pas autre chose que les fonctions A*l*. Il est clair que les propriétés caractéristiques que Weierstrass déduisit pour ces fonctions-ci en faisant grand emploi des fonctions élliptiques élémentaires ne sont que les propriétés déjà bien connues pour les fonctions Θ, ce qui résulte directement de notre raisonnement. Il est difficile de voir pourquoi Weierstrass attribue tant d'importance à ces fonctions A*l* qu'il les emploie comme introduction à ses *Œuvres complètes* (*voir* ce qu'il écrit t. 1, p. 50 de ses *Œuvres*).

Une deuxième forme de l'équation différentielle par laquelle on peut définir les fonctions elliptiques fondamentales est

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3),$$

ou

$$(i) \qquad \frac{d^2}{du^2}\log z = 2z + \frac{1}{2}\frac{g_2}{z} + \frac{g_3}{z^2}.$$

En écrivant

$$F_1(u) = -2z = -2\wp u$$

et

$$F_2(u) = \frac{1}{2}\frac{g_2}{z} + \frac{g_3}{z^2} = \frac{1}{2}\frac{g_2}{\wp u} + \frac{g_3}{(\wp u)^2},$$

on peut démontrer que les fonctions $F_1(u)$ et $F_2(u)$ satisfont aux conditions du théorème initial.

Il s'ensuit que l'intégrale $z = \wp u$ de l'équation différentielle (i) est

$$z = \wp u = \frac{\rho(u)}{(\sigma u)^2}e^{\alpha_0 + \alpha_1 u},$$

où α_0 et α_1 sont des constantes d'intégration et où $w = \rho(u)$ est une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \log w}{du^2} = \frac{1}{2}\frac{g_2}{\wp u} + \frac{g_3}{(\wp u)^2},$$

et où la fonction σu est définie par l'équation

$$\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = -\wp u.$$

De la même façon, on peut démontrer que $\sqrt{pu - e_\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$) peuvent s'exprimer comme quotients de séries uniformément convergentes.

On parvient à des résultats semblables si l'on écrit l'équation différentielle qui définit les fonctions elliptiques sous la forme suivante :

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = 4t(1-t)(1-\lambda t) \qquad [\text{Riemann}]$$

ou sous la forme

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = t(1-\rho t+t^2) \qquad [\text{Kronecker}].$$

Dans les deux cas, on peut introduire des fonctions qui correspondent aux fonctions Θ, précisément comme les fonctions σ le font dans le cas ci-dessus et l'on peut leur donner les noms de Riemann ou de Kronecker comme Weierstrass a donné à ses fonctions auxiliaires celui d'Abel. Mais le nom, comme les fonctions elles-mêmes, a peu d'importance.

Remarquons enfin qu'on peut arriver à ces résultats sans utiliser le théorème initial; et, pourtant, en l'employant, on connaît *a priori* l'existence nécessaire des résultats que l'on obtient.