BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Sur certaines hypersurfaces de l'espace conforme réel à cinq dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 46 (1918), p. 84-105
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__84_1>

SUR CERTAINES HYPERSURFACES DE L'ESPACE CONFORME RÉEL A CINQ DIMENSIONS;

Par M. E. Cartan.

J'ai étudié dans un Mémoire précédent [1] la représentation conforme des hypersurfaces dans l'espace à $n \geqq 5$ dimensions et j'ai montré en particulier qu'une telle représentation ne pouvait exister qu'entre deux hypersurfaces se déduisant l'une de l'autre par une transformation conforme, à moins que les hypersurfaces ne fussent des enveloppes d'hypersphères à deux paramètres au plus, et encore cette condition n'est-elle pas suffisante. J'ai signalé que pour $n = 5$ il pouvait y avoir un cas exceptionnel où deux hypersurfaces *distinctes* de l'espace conforme, c'est-à-dire ne se déduisant pas l'une de l'autre par une transformation conforme, admettraient une représentation conforme l'une sur l'autre sans

---

[1] *La deformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \geqq 5$ dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLV. 1917, p. 57-121).

être des enveloppes d'hypersphères à deux paramètres : ces hypersurfaces possèdent alors quatre familles distinctes de lignes de courbure et *la représentation se fait avec conservation des lignes de courbure*.

Le but des pages suivantes est l'étude de ces hypersurfaces. Le résultat principal obtenu est, qu'étant donnée une hypersurface (S) à lignes de courbure distinctes, il n'existe aucune famille *continue* d'hypersurfaces (Σ) distinctes admettant une représentation conforme sur (S) ou, plus brièvement, que (S) *n'admet pas de déformation continue dans l'espace conforme*. D'une manière plus précise, il ne peut exister qu'*une* hypersurface (Σ) distincte de (S) admettant une représentation conforme sur (S). La recherche des couples de deux hypersurfaces distinctes (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre est ramenée à l'intégration d'un certain système de Pfaff qui n'est pas discuté complètement. J'ai simplement déterminé les couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) tels que, sur chacune des deux hypersurfaces, les trois premières familles de lignes de courbure soient formées de circonférences : ces couples dépendent de cinq paramètres arbitraires.

1. Considérons, dans l'espace conforme à cinq dimensions, un système de référence heptasphérique formé de cinq hypersphères A, A_1, A_2, A_3, A_4, de rayon non nul, et de deux hypersphères-points M, N de rayon nul, les cinq premières hypersphères passant par les centres de M et N et étant orthogonales entre elles : chaque hypersphère est définie par sept coordonnées homogènes x_i; la condition pour qu'elle soit de rayon nul est obtenue en annulant une certaine forme quadratique Φ des sept coordonnées. Si deux hypersphères A, B ont pour coordonnées x_i et y_i, nous poserons

$$A \mid B = \sum \frac{1}{2} y_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

et nous supposerons que les coordonnées des hypersphères de référence sont choisies de manière à avoir

$$A \mid A = A_i \mid A_i = M \mid N = 1;$$

on a, de plus, par hypothèse,

$$A \mid A_i = A_i \mid A_j = A \mid M = A \mid N = A_i \mid M = A_i \mid N = M \mid M = N \mid N = 0.$$

Le système de référence le plus général dépend de 21 paramètres arbitraires. Si l'on donne à ce système de référence le plus général un déplacement infiniment petit, on a des relations de la forme

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
dM &= \theta M + \omega A + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \omega_\rho A_\rho,\\
dA &= -\chi M - \omega N - \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \psi_\rho A_\rho,\\
dA_i &= -\chi_i M - \omega_i N + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \varpi_{i\rho} A_\rho + \psi_i A,\\
dN &= -\theta N - \sum_{\rho=}^{\rho=4} \chi_\rho A_\rho + \chi A,
\end{aligned}
\right.
$$

où les coefficients ω_i, χ_i, $\varpi_{ij} = -\varpi_{ji}$, ψ_i, θ, χ, sont 21 expressions de Pfaff indépendantes par rapport aux différentielles des 21 paramètres dont dépend le système de référence mobile. Ces 21 expressions de Pfaff ont leurs covariants bilinéaires donnés par les formules

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\omega' &= [\theta\omega] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho \psi_\rho],\\
\omega'_i &= [\theta\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho \varpi_{\rho i}],\\
\theta' &= -\sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho \chi_\rho],\\
\chi'_i &= [\chi_i \theta] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\chi_\rho \varpi_{\rho i}] + [\psi_i \chi],\\
\chi' &= [\chi\theta] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\chi_\rho \psi_\rho],\\
\varpi'_{ij} &= [\omega_j \chi_i] - [\omega_i \chi_j] + \sum_{\rho=1}^{\rho=2} [\varpi_{i\rho} \varpi_{\rho j}] - [\psi_i \psi_j],\\
\psi'_i &= -[\omega_i \chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\psi_\rho \varpi_{\rho i}].
\end{aligned}
\right.
$$

2. Étant donnée une hypersurface (S) à quatre dimensions, on peut faire correspondre à chaque point M de cette hypersurface un système de référence heptasphérique, l'une des hypersphères-points ayant pour centre le point M et continuant à être désignée par cette même lettre, l'hypersphère A étant tangente à (S). On peut, de plus, supposer que les hypersphères A_1, A_2, A_3, A_4 sont normalès aux lignes de courbure. Le système de référence associé au point M est encore jusqu'à un certain point arbitraire, car on peut multiplier les coordonnées de M par un même facteur et remplacer respectivement A, A_1, A_2, A_3, A_4, par $A+\lambda M$, $A_1+\lambda_1 M$, $A_2+\lambda_2 M$, $A_3+\lambda_3 M$, $A_4+\lambda_4 M$, avec cinq paramètres arbitraires. Quoi qu'il en soit, une fois choisi le système de référence associé à chaque point M de (S), on a, pour tout déplacement sur (S), les relations

$$\omega = 0,$$
$$\psi_i = a_i \omega_i,$$

où les coefficients a_i sont tels que $A + a_i M$ soit la $i^{\text{ème}}$ hypersphère de courbure.

Si maintenant on a une seconde hypersurface (Σ), à chacun de ses points P on peut faire correspondre d'une manière analogue un système de référence formé des hypersphères-points P, Q et de cinq hypersphères B, B_i, l'hypersphère B étant tangente à (Σ). On peut enfin supposer les B_i normales aux lignes de courbure, de sorte qu'en désignant par de grandes lettres les expressions de Pfaff qui définissent un déplacement infiniment petit du système de référence on a

$$\Omega = 0,$$
$$\Psi_i = b_i \omega_i.$$

Le ds^2 de l'hypersurface (S) est, à un facteur fini près arbitraire, égal à

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2,$$

celui de (Σ) est, dans les mêmes conditions, égal à

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2.$$

3. Cela posé, si les deux hypersurfaces (S) et (Σ) admettent une représentation conforme l'une sur l'autre, avec conservation

des lignes de courbure, on aura, entre les systèmes de référence associés aux deux hypersurfaces, une correspondance telle qu'on pourra toujours supposer, par cette correspondance, vérifiées les relations

$$\Omega_i = \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

En résumé, la recherche de deux hypersurfaces (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre avec conservation des lignes de courbure revient à l'intégration du système de Pfaff suivant, où entrent 50 variables, tant dépendantes qu'indépendantes :

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= 0, \\ \Omega &= 0, \\ \Omega_i &= \omega_i, \\ \psi_i &= a_i \omega_i, \\ \Psi_i &= b_i \Omega_i. \end{aligned} \right.$$

Le système de référence associé à chaque point M de (S) dépend de six paramètres arbitraires : une fois qu'il est choisi, le système associé au point correspondant de (Σ) ne dépend plus que de cinq paramètres arbitraires : la connaissance du facteur arbitraire qui entre dans les coordonnées de M entraîne en effet celle du facteur arbitraire qui entre dans les coordonnées de P.

Si l'on égale les covariants bilinéaires des deux membres de chaque équation (I), en tenant compte de ces équations ellesmêmes, on trouve, d'après (2),

$$(\mathrm{I}') \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega' &\equiv 0, \\ \Omega' &\equiv 0, \\ \Omega'_i - \omega'_i &\equiv [(\Theta - \theta)\,\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho (\Pi_{\rho i} - \varpi_{\rho i})], \\ (\psi_i - a_i \omega_i)' &\equiv [\omega_i (da_i + a_i \theta - \chi)] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} (a_\rho - a_i) [\omega_\rho \varpi_{\rho i}], \\ (\Psi_i - b_i \Omega_i)' &\equiv [\Omega_i (db_i + b_i \Theta - \mathrm{X})] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} (b_\rho - b_i) [\Omega_\rho \Pi_{\rho i}]. \end{aligned} \right.$$

On peut maintenant spécialiser le système de référence associé à un point P de (Σ) de manière à avoir

$$\Theta = \theta;$$

il suffit pour cela, comme le montrent les formules (1), de choisir convenablement les hypersphères B_1, B_2, B_3, B_4. Les six paramètres qui entrent dans le système de référence associé à M une fois choisis, le système de référence associé à P ne dépend plus alors que d'un paramètre, l'hypersphère B pouvant être remplacée par $B + \mu P$.

Pour toute solution de (I) les seconds membres des équations (I′) doivent être nuls ; on en déduit facilement qu'on doit avoir

$$\Pi_{ij} = \varpi_{ij}.$$

4. On peut d'après cela ajouter aux équations de Pfaff (I) les suivantes

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta &= 0, \\ \Pi_{ij} &= \varpi_{ij}. \end{aligned} \right.$$

L'égalité des covariants bilinéaires des deux membres des équations de ce nouveau système donne, en tenant compte des équations (I) et (II),

$$\text{(II′)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\theta' - \theta' \equiv -\sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho(X_\rho - \chi_\rho)], \\ &\Pi'_{ij} - \varpi'_{ij} \equiv [\omega_j(X_i - \chi_i)] - [\omega_i(X_j - \chi_j)] - (b_i b_j - a_i a_j)[\omega_i \omega_j] \end{aligned} \right.$$

Les seconds membres de ces équations doivent être nuls pour toute solution du système (I) et (II) ; on en déduit facilement des relations de la forme

$$\text{(3)} \qquad X_i - \chi_i = u_i \omega_i,$$

avec

$$\text{(4)} \qquad u_i + u_j = a_i a_j - b_i b_j.$$

En calculant de deux manières différentes la somme Σu_ρ, on arrive à la relation importante

$$\text{(5)} \qquad (a_i - a_j)(a_k - a_l) = (b_i - b_j)(b_k - b_l)$$

qui a lieu quelle que soit la permutation (i, j, k, l) des indices $(1, 2, 3, 4)$.

Cette relation (5) prouve en particulier que le rapport anharmonique des quatre coefficients b_i est égal au rapport anharmonique des quatre coefficients a_i de sorte qu'on peut passer des a_i aux b_i par une même transformation homographique.

Supposons d'abord que cette transformation soit de la forme

$$b_i = h a_i + k \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{6}$$

Les relations (5) donnent

$$h^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad h = \pm 1.$$

Les hypersphères de courbure de (S) et de (Σ) sont alors respectivement

$$A + a_i M,$$
$$B + kP \pm a_i P.$$

Changeons au besoin l'hypersphère point P en — P, et prenons $B + kP$ pour nouvelle hypersphère B : on voit qu'on a alors

$$b_i = a_i,$$

et par suite

$$\Psi_i = \psi_i.$$

L'égalité des covariants bilinéaires de Ψ_i et ψ_i conduit, d'après (2), à

$$[\omega_i(X - \chi)] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

d'où

$$X = \chi.$$

L'égalité des covariants X' et χ' conduit à la relation

$$\Sigma[\psi_\rho(X_\rho - \chi_\rho)] = 0$$

qui, jointe à la relation, extraite de (II'),

$$\Sigma[\omega_\rho(X_\rho - \chi_\rho)] = 0,$$

montre facilement qu'on a

$$X_i = \chi_i.$$

Finalement les deux systèmes de référence associés aux deux hypersurfaces (S) et (Σ) admettent, dans l'hypothèse exprimée par les égalités (6), le même déplacement instantané, et par suite *ces deux hypersurfaces résultent l'une de l'autre par une transformation conforme*, cas banal que nous écartons.

La relation entre les a_i et les b_i est donc de la forme

$$b_i = \frac{h a_i + k}{a_i + p}; \tag{7}$$

mais on peut encore la simplifier en remarquant que les hypersphères de courbure de (Σ) étant

$$B + \frac{ha_i + k}{a_i + p} P,$$

on peut, en remplaçant B par $B + hP$, supposer h nul. On a donc finalement

$$b_i = \frac{k}{a_i + p} \tag{8}$$

avec la relation, tirée de (5),

$$k^2 = (a_1 + p)(a_2 + p)(a_3 + p)(a_4 + p). \tag{9}$$

Le système de référence associé à (S) dépend toujours de six paramètres arbitraires, mais ces paramètres une fois choisis, le système de référence associé à (Σ) est bien déterminé.

Remarquons encore que si, pour deux hypersurfaces (Σ), le coefficient p a la même valeur en deux points correspondants quelconques, ces deux hypersurfaces résultent l'une de l'autre par une transformation conforme, *puisque les coefficients b_i sont proportionnels*, et par suite, à notre point de vue, ces deux hypersurfaces ne sont pas distinctes.

On a enfin, en résolvant les équations (4),

$$\begin{aligned} 2u_i = {} & a_i(a_j + a_k + a_l) \\ & - (a_j a_k + a_j a_l + a_k a_l) - p(a_j + a_k + a_l - a_i) - p^2. \end{aligned} \tag{10}$$

5. La recherche des couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre avec conservation des lignes de courbure, revient finalement à l'intégration du système de Pfaff

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= 0, \\ \Omega &= 0, \\ \Omega_i &= \omega_i, \\ \Theta &= \theta, \\ \Pi_{ij} &= \varpi_{ij}, \\ \psi_i &= a_i \omega_i, \\ \Psi_i &= \frac{k}{a_i + p} \omega_i, \\ X_i &= \chi_i + u_i \omega_i, \end{aligned} \right.$$

7/7

où les a_i, k, p sont dix fonctions inconnues et où les u_i sont donnés par la formule (10).

La condition que les covariants bilinéaires de $\psi_i - a_i\omega_i$ et $\Psi_i - b_i\omega_i$ soient nuls pour toute solution du système (III), donne, d'après (I''),

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=4}(a_\rho - a_i)[\omega_\rho \varpi_{\rho i}] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_i),$$

$$\sum k \frac{a_\rho - a_i}{(a_\rho + p)(a_i + p)}[\omega_\rho \varpi_{\rho i}] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_i),$$

d'où l'on déduit facilement, les quatre quantités $a_\rho + p$ étant toutes distinctes,

$$[\omega_j \varpi_{ji}] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_i) \qquad (j \neq i).$$

Par suite, l'expression de Pfaff ϖ_{ij} ne dépend que de ω_i et ω_j, et l'on peut poser

$$\varpi_{ij} = \lambda_{ij}\omega_j - \lambda_{ji}\omega_i; \tag{11}$$

on a alors d'après (I')

$$\left\{\begin{aligned} da_i + a_i\theta - \chi &\equiv \sum_{\rho \neq i}(a_\rho - a_i)\lambda_{\rho i}\omega_\rho \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_i),\\ db_i + b_i\theta - \mathrm{X} &\equiv \sum_{\rho \neq i}(b_\rho - b_i)\lambda_{\rho i}\omega_\rho \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_i). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

En remplaçant dans la seconde équation (12) b_i par sa valeur $\frac{k}{a_i + p}$, on obtient

$$\begin{aligned} (13)\quad (a_i + p)\,dk - k\,dp \\ \equiv (a_i + p)^2\mathrm{X} + k\chi - k(2a_i + p)\theta + k\sum_{\rho \neq i}\frac{(a_\rho - a_i)^2\lambda_{\rho i}}{a_\rho + p}\omega_\rho \\ (\mathrm{mod}\ \omega_i). \end{aligned}$$

On peut enfin déterminer des quantités α_ρ, β_ρ, γ_ρ, telles qu'on ait, quels que soient les indices i et ρ,

$$(a_\rho - a_i)^2\lambda_{\rho i} = \alpha_\rho a_i^2 + \beta_\rho a_i + \gamma_\rho; \tag{14}$$

de sorte que l'équation (13) devient

$$(13') \quad (a_i+p)\,dk - k\,dp$$
$$\equiv (a_i+p)^2 X + k\chi - k(2a_i+p)\theta + k\sum_{\rho \neq i} \frac{\alpha_\rho a_i^2 + \beta_\rho a_i + \gamma_\rho a_i}{a_\rho + p}\omega_\rho$$
$$(\mathrm{mod}\ \omega_i).$$

6. Supposons maintenant choisi complètement le système de référence associé à (S). Les expressions χ et θ deviennent, ainsi que X, des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, soit

$$(15) \quad \begin{cases} \chi = \Sigma c_\rho \omega_\rho, & X = \Sigma \bar{c}_\rho \omega_\rho, \\ \theta = \Sigma t_\rho \omega_\rho. \end{cases}$$

Posons enfin

$$(16) \quad \begin{cases} dk = \Sigma k_\rho \omega_\rho, \\ dp = \Sigma p_\rho \omega_\rho. \end{cases}$$

La relation (13') donne alors

$$(17) \quad (a_i+p)k_\rho - kp_\rho$$
$$= (a_i+p)^2 \bar{c}_\rho + kc_\rho - k(2a_i+p)t_\rho + k\sum \frac{\alpha_\rho a_i^2 + \beta_\rho a_i + \gamma_\rho}{a_\rho + p},$$

où l'on suppose les indices i et ρ différents.

Cette relation (17) a lieu quand on remplace successivement a_i par les trois coefficients a différents de a_ρ et, comme elle est du second degré en a_i, elle est une *identité*. Exprimons en particulier qu'elle est vérifiée, ainsi que sa dérivée première, pour $a_i = -p$. Nous obtenons

$$(18) \quad \begin{cases} p_\rho = -c_\rho - p t_\rho - \dfrac{\alpha_\rho p^2 - \beta_\rho p + \gamma_\rho}{a_\rho + p} \\ k_\rho = -2k t_\rho + k\dfrac{\beta_\rho - 2p\alpha_\rho}{a_\rho + p} \end{cases} \qquad (\rho = 1, 2, 3, 4).$$

L'égalité (9) différentiée donne alors, en appelant $\bar{a}_\rho$ le coefficient de ω_ρ dans da_ρ, et en tenant compte de (18) et de (12),

$$(19) \quad \frac{\alpha_\rho a_\rho^2 + \beta_\rho a_\rho + \gamma_\rho}{(a_\rho + p)^2}$$
$$- \frac{\bar{a}_\rho - c_\rho + a_\rho t_\rho - \beta_\rho - 2\alpha_\rho a_\rho + \displaystyle\sum_{i \neq \rho} \frac{\alpha_\rho a_\rho^2 + \beta_\rho a_\rho + \gamma_\rho}{a_\rho - a_i}}{a_\rho + p} = 0.$$

Dans cette relation, p entre au premier degré, de sorte que si elle est vérifiée pour deux valeurs distinctes de p, elle est vérifiée identiquement.

7. Cherchons d'abord si à l'hypersurface (S) on peut faire correspondre deux hypersurfaces (Σ) *distinctes*, c'est-à-dire pour lesquelles la fonction p a deux valeurs différentes. La relation (19) est alors vérifiée identiquement et l'on a

$$(20) \qquad \begin{cases} \alpha_\rho a_\rho^2 + \beta_\rho a_\rho + \gamma_\rho = 0, \\ \bar{a}_\rho - c_\rho + a_\rho t_\rho - \beta_\rho - 2\alpha_\rho a_\rho = 0. \end{cases}$$

Les formules (18) donnent pour dp une expression linéaire en p, c'est-à-dire que p satisfait à une équation aux différentielles totales de la forme

$$dp = p\,\Sigma\,\lambda_\rho \omega_\rho + \Sigma\,\mu_\rho \omega_\rho,$$

où les coefficients λ_ρ et μ_ρ sont bien déterminés. Il en résulte que si cette équation aux différentielles totales n'est pas complètement intégrable, elle admet *une solution au plus*, ce qui est contraire à l'hypothèse. L'équation étant complétement intégrable, sa solution générale est de la forme

$$p = u + C v,$$

où C est la constante d'intégration. Les hypersphères de courbure de (S) étant

$$A + a_i M,$$

on peut choisir M et A de manière à remplacer a_i par $\dfrac{a_i + u}{v}$: la valeur de p est alors une *constante arbitraire*.

On peut donc choisir les systèmes de référence de manière à supposer

$$dp = 0;$$

le système de référence associé à (S) dépend encore de quatre paramètres arbitraires, ceux qui sont nécessaires pour achever la détermination de A_1, A_2, A_3, A_4 ; ces paramètres une fois choisis, le système de référence associé à (Σ) est bien déterminé. On peut enfin choisir ces paramètres de manière à annuler θ; les deux systèmes de référence sont alors déterminés sans aucune ambiguïté.

Finalement, en tenant compte des conventions précédentes, on a

$$(21)\qquad \begin{cases} t_\rho = 0, \\ \alpha_\rho = 0, \\ \beta_\rho = c_\rho, \\ \gamma_\rho = - a_\rho c_\rho, \\ \overline{a}_\rho = 2 c_\rho, \end{cases}$$

puis, d'après (14) et (12),

$$(22)\qquad \begin{cases} \lambda_{\rho i} = \dfrac{c_\rho}{a_i - a_\rho}, \\ da_i = 2 c_i \omega_i. \end{cases}$$

On en déduit enfin

$$\chi = \frac{1}{2} \sum da_\rho.$$

Comme θ est nulle et χ une différentielle exacte, les équations (2) montrent que l'on a

$$\sum_\rho [\omega_\rho \chi_\rho] = 0,$$

$$\sum_\rho a_\rho [\omega_\rho \chi_\rho] = 0,$$

c'est-à-dire que l'expression χ_i ne dépend que de ω_i, soit

$$(23)\qquad \chi_i = w_i \omega_i.$$

Si nous exprimons que $c_i \omega_i = \frac{1}{2} da_i$ est une différentielle exacte, nous obtenons

$$(24)\qquad dc_i = c'_i \omega_i - \sum_{\rho \neq i} \frac{c_i - c_\rho}{a_i - a_\rho} \omega_\rho.$$

8. Partons maintenant de l'égalité (11), qui s'écrit

$$(11')\qquad \varpi_{ij} = \frac{c_i}{a_j - a_i} \omega_j - \frac{c_j}{a_i - a_j} \omega_i,$$

et exprimons que les coefficients de $[\omega_i \omega_j]$ dans les covariants bilinéaires des deux membres sont égaux; nous obtenons

$$(25)\qquad \frac{c'_i - c'_j}{a_j - a_i} + 3 \frac{c_i^2 + c_j^2}{(a_i - a_j)^2} + \sum_{\rho \neq i, j} \frac{c_\rho^2}{(a_i - a_\rho)(a_j - a_\rho)} + a_i a_j + w_i + w_j = 0.$$

Nous pouvons éliminer les c'_i et les w_i entre les six équations (25) en les multipliant respectivement par $(a_i - a_j)(a_k - a_l)$, où les indices i, j, k, l forment une permutation paire des indices 1, 2, 3, 4. Il vient alors, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned}(a_2 - a_3)^2 (a_2 - a_4)^2 (a_3 - a_4)^2 c_1^2 &+ (a_1 - a_3)^2 (a_1 - a_4)^2 (a_3 - a_4)^2 c_2^2 \\ &+ (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_4)^2 (a_2 - a_4)^2 c_3^2 \\ &+ (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2 c_4^2 = 0.\end{aligned}$$

Cela n'est possible que si tous les c_i sont nuls. Mais alors les équations (25) conduisent facilement à des relations telles que

$$(a_i - a_j)(a_k - a_l) = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc il *est impossible que l'hypersurface* (S) *admette une représentation conforme sur plus d'une hypersurface* (Σ) *distincte de* (S). En particulier *il est impossible que* (S) *admette une déformation continue dans l'espace conforme.*

9. La fonction p n'ayant qu'une valeur possible on peut, en prenant l'hypersphère $A - pM$ comme nouvelle hypersphère A, supposer $p = 0$. On peut de plus choisir le facteur arbitraire qui entre dans les coordonnées de M de manière à avoir

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = 1; \tag{26}$$

on a alors

$$k = 1,$$
$$b_i = \frac{1}{a_i}.$$

On peut enfin, comme plus haut, supposer choisies les hypersphères A de manière à annuler θ, les systèmes de référence étant alors complètement déterminés. La formule (17) donne dans ces conditions

$$(a_\rho - a_i)^2 \lambda_{\rho i} = - a_\rho (c_\rho + a_i^2 \bar{c}_\rho), \tag{27}$$

d'où, en tenant compte de (12) et (26),

$$\frac{da_i}{a_i} = \sum_{\rho \neq i} \frac{c_\rho + a_i a_\rho \bar{c}_\rho}{a_i - a_\rho} \omega_\rho + \sum_{\rho \neq i} \frac{c_i + a_i a_\rho \bar{c}_i}{a_i - a_\rho} \omega_i. \tag{28}$$

Avant d'aller plus loin, résumons les résultats obtenus. La recherche des couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre revient à l'intégration du système de Pfaff

$$
\text{(IV)}\quad \begin{cases}
\omega = 0, \\
\Omega = 0, \\
\Omega_i = \omega_i, \\
\theta = 0, \\
\Pi_{ij} = \varpi_{ij}, \\
\psi_i = a_i\,\omega_i, \\
\Psi_i = \dfrac{1}{a_i}\,\omega_i, \\
X_i = \chi_i + \dfrac{1}{2}(a_i a_j + a_i a_k + a_i a_l - a_j a_k - a_j a_l - a_k a_l)\,\omega_i, \\
0 = 0, \\
\chi = \Sigma c_\rho \omega_\rho, \\
X = \Sigma \bar{c}_\rho \omega_\rho, \\
\varpi_{ij} = a_j \dfrac{c_j + a_i^2 \bar{c}_j}{(a_i - a_j)^2}\,\omega_i - a_i \dfrac{c_i + a_j^2 \bar{c}_i}{(a_i - a_j)^2}\,\omega_j, \\
\dfrac{da_i}{a_i} = \displaystyle\sum_{\rho \neq i} \dfrac{c_\rho + a_i a_\rho \bar{c}_\rho}{a_i - a_\rho}\,\omega_\rho + \sum_{\rho \neq i} \dfrac{c_i + a_i a_\rho \bar{c}_i}{a_i - a_\rho}\,\omega_i,
\end{cases}
$$

où les a_i, c_i, $\bar{c}_i$ sont des fonctions inconnues, les quatre premières ayant un produit égal à 1.

Pour toute solution de ce système, les covariants bilinéaires des deux membres de chacune de ses équations sont nuls. Il en est ainsi identiquement pour les 21 premières équations, la dernière étant

$$\Psi_4 = \frac{1}{a_4}\,\omega_4.$$

Il en est aussi de même pour les quatre équations suivantes, comme un calcul sans difficulté le montrerait.

Nous ne poursuivrons pas l'étude du système (IV). Nous nous contenterons de chercher les couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) jouissant de la propriété que *les trois premières familles de lignes de courbure soient, pour chacune de ces hypersurfaces, formées de circonférences.*

10. Exprimons d'abord que la première famille de lignes de courbure de (S) est formée de circonférences. Cela veut dire que, quand on se déplace en laissant ω_2, ω_3, ω_4 nuls, il existe une circonférence fixe passant par M et normale à A_1. Cette circonférence est l'intersection de quatre hypersphères de la forme

$$A + \rho M, \quad A_2 + \rho_2 M, \quad A_3 + \rho_3 M, \quad A_4 + \rho_4 M.$$

Or l'on a, en supposant $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$,

$$\begin{aligned}
d(A + \rho M) &= (\rho - a_1)\omega_1 A_1 + (d\rho - c_1\omega_1)M,\\
d(A_2 + \rho_2 M) &= (\rho_2 + \lambda_{21})\omega_1 A_1 + (d\rho_2 - \chi_2)M,\\
d(A_3 + \rho_3 M) &= (\rho_3 + \lambda_{31})\omega_1 A_1 + (d\rho_3 - \chi_3)M,\\
d(A_4 + \rho_4 M) &= (\rho_4 + \lambda_{41})\omega_1 A_1 + (d\rho_4 - \chi_4)M.
\end{aligned}$$

Il faut donc et il suffit qu'on ait

$$\begin{aligned}
da_1 &\equiv c_1\omega_1 && (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4),\\
d\lambda_{i1} + \chi_i &\equiv 0 && (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4) \qquad (i = 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

Si l'on veut que la même propriété appartienne à (Σ), il faudra qu'on ait en particulier

$$-\frac{da_1}{a_1^2} \equiv \bar{c}_1\omega_1 \qquad (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4),$$

d'où

$$c_1 + a_1^2\bar{c}_1 = 0. \tag{29}$$

Mais les formules (28) donnent, en tenant compte de (29),

$$\frac{da_1}{a_1} \equiv -3a_1\bar{c}_1\omega_1 \qquad (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4);$$

il faut donc qu'on ait

$$c_1 = \bar{c}_1 = 0.$$

Il est impossible que les quatre familles de lignes de courbure soient, pour chacune des deux hypersurfaces (S) et (Σ), formées de circonférences, car alors les c_i et les $\bar{c}_i$ étant tous nuls, on aurait

$$\varpi_{ij} = 0,$$

d'où

$$[\omega_j\chi_i] - [\omega_i\chi_j] - [\psi_i\psi_j] = 0;$$

χ_i serait de la forme $w_i \omega_i$, avec

$$w_i + w_j + a_i a_j = 0,$$

relations qui donneraient

$$(a_i - a_j)(a_k - a_l) = 0.$$

Supposons donc que les trois premières familles de lignes de courbure soient formées de circonférences. Réservons la lettre i pour désigner un des indices 1, 2, 3. On a alors à intégrer le système

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{aligned}
\omega &= 0,\\
\Omega &= 0,\\
\Omega_i &= \omega_i,\\
\Omega_4 &= \omega_4,\\
\Theta &= \theta,\\
\Pi_{ij} &= \varpi_{ij},\\
\Pi_{4i} &= \varpi_{4i},\\
\psi_i &= a_i \omega_i,\\
\psi_4 &= a_4 \omega_4,\\
\Psi_i &= \frac{1}{a_i}\omega_i,\\
\Psi_4 &= \frac{1}{a_4}\omega_4,\\
\mathrm{X}_i &= \chi_i + \frac{1}{2}(a_i a_j + a_i a_k + a_i a_4 - a_j a_k - a_j a_4 - a_k a_4)\omega_i,\\
\mathrm{X}_4 &= \chi_4 + \frac{1}{2}(a_i a_4 + a_j a_4 + a_k a_4 - a_i a_j - a_i a_k - a_j a_k)\omega_i,\\
\theta &= 0,\\
\chi &= c_4 \omega_4,\\
\mathrm{X} &= \bar{c}_4 \omega_4,\\
\varpi_{ij} &= 0,\\
\varpi_{4i} &= -a_4 \frac{c_4 + a_1^2 \bar{c}_4}{(a_i - a_4)^2}\omega_i,\\
\frac{da_i}{a_i} &= \frac{c^4 + a_i a_4 \bar{c}_4}{a_4 - a_4}\omega_4.
\end{aligned}\right.$$

La considération de ϖ'_{il} montre que χ_i ne dépend que de ω_i ; celle de θ' montre alors que χ_4 ne dépend que de ω_4 ; soit

$$(30)\qquad \chi_i = w_i \omega_i, \qquad \chi_4 = w_4 \omega_4.$$

En égalant entre eux les covariants de χ et $c_4\omega_4$, ainsi que ceux de X et $\bar{c}_4\omega_4$, on voit que dc_4 et $d\bar{c}_4$ ne dépendent que de ω_4. Les covariants bilinéaires des deux membres des trois dernières équations (V) sont alors égaux d'eux-mêmes. En égalant enfin les covariants bilinéaires des deux membres des équations (V) relatives à ω_{ij} et ω_{4i}, on obtient

$$(31) \qquad \begin{cases} w_i + w_j + a_i a_j + \lambda_{4i}\lambda_{4j} = 0, \\ w_i + w_4 + a_i a_4 + \lambda_{4i}^2 + \lambda'_{4i} = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé pour abréger

$$d\lambda_{4i} = \lambda'_{4i}\omega_4.$$

Les solutions du système (V) satisfont donc au système complémentaire suivant

$$(\text{VI}) \qquad \begin{cases} \chi_i = w_i\omega_i, \\ \chi_4 = w_4\omega_4, \end{cases}$$

où les w_i et w_4 sont liées aux fonctions inconnues a_i, a_4, c_4, $\bar{c}_4$ par les relations (31); ce sont du reste des fonctions dont la différentielle ne dépend, comme les précédentes, que de ω_4. En posant

$$dw_i = \omega'_i\,\omega_4, \qquad dw_4 = \omega'_4\,\omega_4,$$

l'égalité des covariants bilinéaires des deux membres des équations (VI) donne

$$(32) \qquad w'_i = \lambda_{4i}(w_4 - w_i) - c_4 a_i.$$

Or ces relations sont des conséquences des relations (31); il suffit en effet de remarquer que les trois premières équations (31) déterminent w_1, w_2, w_3 et par suite w'_1, w'_2, w'_3. Les relations (32) sont donc des conséquences de (31) si, en différentiant les trois premières équations (31), on obtient des identités en tenant compte de (31) et (32); et c'est ce que montre un calcul facile.

11. Finalement, si l'on remarque que les équations (31) déterminent sans ambiguïté w_1, w_2, w_3, w_4 en fonction de a_1, a_2, a_3, c_4, $\bar{c}_4$, le problème revient à la détermination de ces cinq dernières fonctions inconnues. Comme $\omega'_4 = 0$, l'expression ω_4 est la différentielle d'une variable indépendante x, et *les cinq quantités* a_1, a_2,

a_3, c_4, $\bar{c}_4$ *sont des fonctions de x définies par les cinq équations différentielles*

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a_i' = a_i \frac{c_4 + a_i a_4 \bar{c}_4}{a_i - a_4}, \\
& \lambda'_{41} - \lambda'_{43} + (\lambda_{41} - \lambda_{43})(\lambda_{41} + \lambda_{43} - \lambda_{42}) + (a_1 - a_3)(a_4 - a_2) = 0, \\
& \lambda'_{42} - \lambda'_{43} + (\lambda_{42} - \lambda_{43})(\lambda_{42} + \lambda_{43} - \lambda_{41}) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_1) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

où a_4 *est mis pour* $\dfrac{1}{a_1 a_2 a_3}$ et λ_{4i} *pour sa valeur*

$$\lambda_{4i} = - a_4 \frac{c_4 + a_i^2 \bar{c}_4}{(a_i - a_4)^2}.$$

La solution générale du problème proposé dépend donc de cinq constantes arbitraires, indépendamment des constantes qui fixent la position des hypersurfaces (S) *et* (Σ) *dans l'espace conforme.*

12. Les hypersurfaces (S) et (Σ) ainsi obtenues admettent une génération assez simple. Considérons en effet sur chacune d'elles les variétés à trois dimensions obtenues en faisant $\omega_4 = 0$, c'est-à-dire les variétés trajectoires orthogonales, sur les hypersurfaces, des lignes de courbure de la quatrième famille. Sur une de ces variétés, on a

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
dM &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\
dA &= - a_1 \omega_1 A_1 - a_2 \omega_2 A_2 - a_3 \omega_3 A_3, \\
dA_i &= \omega_i(- w_i M - N - \lambda_{4i} A_4 + a_i A), \\
dA_4 &= \lambda_{41} \omega_1 A_1 + \lambda_{42} \omega_2 A_2 + \lambda_{43} \omega_3 A_3, \\
dN &= w_1 \omega_1 A_1 + w_2 \omega_2 A_2 + w_3 \omega_3 A_3.
\end{aligned}
\right.
$$

On a de plus

$$\omega_1' = \omega_2' = \omega_3' = 0,$$

de sorte que ω_i est une différentielle exacte, soit dx_i.

Il résulte des formules (34) que l'hypersphère A_i ne dépend que du paramètre x_i, et l'on trouve facilement

$$\frac{d^2 A_i}{dx_i^2} = - (a_i^2 + \lambda_{4i}^2 + 2 w_i) A_i.$$

Supposons par exemple les trois coefficients $a_i^2 + \lambda_{4i}^2 + 2 w_i$ positifs (il pourrait y en avoir deux seulement de positifs, le troissième étant nul ou négatif); on aura, en les appelant m_i^2,

$$A_i = \cos(m_i x_i) H_{2i-1} + \sin(m_i x_i) H_{2i},$$

où H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 sont six hypersphères *fixes* orthogonales entre elles et satisfaisant à

$$H_i | H_i = 1.$$

On en déduit

$$M = \sum_i \frac{1}{m_i} [\sin(m_i x_i) H_{2i-1} - \cos(m_i x_i) H_{2i}] + \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2}} H_7,$$

où H_7 désigne une hypersphère fixe orthogonale aux six premières et satisfaisant à

$$H_7 | H_7 = -1.$$

Autrement dit on peut choisir, pour chaque trajectoire orthogonale des lignes de courbure de la quatrième famille, un système de référence tel que les coordonnées heptasphériques d'un point de la variété soient de la forme

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_{2i-1} &= \frac{1}{m_i} \sin m_i x_i, \\ x_{2i} &= -\frac{1}{m_i} \cos m_i x_i, \\ x_7 &= \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2}}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients m_i sont naturellement des fonctions du paramètre dont dépend la variété considérée. Ces variétés sont tout à fait analogues aux cyclides de l'espace à trois dimensions : ce sont de triples enveloppes d'hypersphères à un paramètre.

13. Les hypersurfaces (S) qui satisfont au système (IV) font partie d'une catégorie plus générale d'hypersurfaces, à savoir celles qui admettent des *variétés de courbure* à trois dimensions, c'est-à-dire des variétés remplissant toute l'hypersurface et contenant trois des lignes de courbure de l'hypersurface : ce sont encore les trajectoires orthogonales des lignes de courbure de la dernière famille. Ces variétés à trois dimensions existent; on a, en effet, d'après (11),

$$\omega'_i = [\theta\omega_i] + \sum_\rho \lambda_{\rho i}[\omega_\rho \omega_i],$$

ce qui prouve que l'équation $\omega_i = 0$ est complètement intégrable. Sa solution générale fournit les variétés de courbure de la $i^{\text{ème}}$ famille.

Les hypersurfaces qui font partie d'un système quintuple orthogonal jouissent toutes de cette propriété.

Cherchons à déterminer les hypersurfaces les plus générales qui en jouissent. En les supposant rapportées à leurs lignes de courbure, il faudra que les quatre équations $\omega_i = 0$ soient complètement intégrables. Or on a

$$\omega'_i = [\theta\omega_i] + \Sigma [\omega_\rho \varpi_{\rho i}];$$

posons

$$\varpi_{ij} = \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \lambda_{ij\rho}\omega_\rho$$

avec

(36) $$\lambda_{ij\rho} + \lambda_{ji\rho} = 0 \qquad (i \neq j);$$

nous devrons avoir, en exprimant que le coefficient de $[\omega_j\omega_k]$ dans ω'_i est nul,

(37) $$\lambda_{jik} - \lambda_{kij} = 0 \qquad (i \neq j \neq k).$$

En appliquant successivement les relations (36) et (37), on obtient

$$\lambda_{ijk} = -\lambda_{jik} = -\lambda_{kij} = \lambda_{ikj} = \lambda_{jki} = -\lambda_{kji} = -\lambda_{ijk};$$

par suite tous les coefficients λ_{ijk} à trois indices différents sont nuls. On a donc la formule (11)

$$\varpi_{ij} = \lambda_{ij}\omega_j - \lambda_{ji}\omega_i.$$

La recherche des hypersurfaces en question revient donc à l'intégration du système de Pfaff

(VII) $$\begin{cases} \omega = 0, \\ \psi_i - a_i\omega_i = 0, \\ \varpi_{ij} - \lambda_{ij}\omega_j + \lambda_{ji}\omega_i = 0. \end{cases}$$

Or si l'on forme les covariants bilinéaires des premiers membres de ces équations en tenant compte de ces équations elles-mêmes, on trouve

$$
(\mathrm{VII}')\quad\left\{
\begin{aligned}
&\omega' \equiv 0,\\
&(\psi_i - a_i\omega_i)' \equiv \Big[\omega_i\Big(da_i + a_i\theta - \chi - \sum_\rho (a_\rho - a_i)\lambda_{\rho i}\omega_\rho\Big)\Big],\\
&(\varpi_{ij} - \lambda_{ij}\omega_j + \lambda_{ji}\omega_i)'\\
&\quad\equiv \Big[\omega_j\Big(d\lambda_{ij} + \chi_i + \lambda_{ij}\theta + \frac{1}{2}(a_i a_j + \Sigma\lambda_{\rho i}\lambda_{\rho j})\omega_i + \Sigma(\lambda_{ij} - \lambda_{i\rho})\lambda_{\rho j}\omega_\rho\Big)\Big]\\
&\qquad - \Big[\omega_i\Big(d\lambda_{ji} + \chi_j + \lambda_{ji}\theta + \frac{1}{2}(a_i a_j + \Sigma\lambda_{\rho i}\lambda_{\rho j})\omega_j + \Sigma(\lambda_{ji} - \lambda_{j\rho})\lambda_{\rho i}\omega_\rho\Big)\Big].
\end{aligned}\right.
$$

Les seconds membres des formules (VII′) sont de la forme

$$
(\mathrm{VII}'')\qquad\left\{
\begin{aligned}
&[\omega_i \Pi_i],\\
&[\omega_j \Pi_{ij}] - [\omega_i \Pi_{ji}],
\end{aligned}\right.
$$

où les 16 expressions Π_i, Π_{ij} sont linéairement indépendantes entre elles et indépendantes des ω_i. Il résulte facilement de là que le système (VII) est en involution et l'on peut non moins facilement trouver le degré d'indétermination de ses solutions. Il suffit pour cela d'appliquer la théorie générale des systèmes en involution. Désignons par α_i, α'_i, α''_i, ..., des systèmes de quatre arbitraires et considérons un premier système d'équations linéaires en Π_i, Π_{ij},

$$
\begin{gathered}
\alpha_i \Pi_i = 0,\\
\alpha_j \Pi_{ij} - \alpha_i \Pi_{ji} = 0;
\end{gathered}
$$

il contient $s_1 = 10$ équations linéairement indépendantes. Le système obtenu en ajoutant aux équations précédentes les suivantes

$$
\begin{gathered}
\alpha'_i \Pi_i = 0,\\
\alpha'_j \Pi_{ij} - \alpha'_i \Pi_{ji} = 0
\end{gathered}
$$

contient en tout $s_1 + s_2 = 10 + 6$ équations linéairement indépendantes. Le système suivant obtenu en utilisant les α''_i ne contiendrait évidemment pas d'équations nouvelles. Au système de Pfaff (VII) sont donc associés les entiers

$$
s_1 = 10,\qquad s_2 = 6,\qquad s_3 = 0,\qquad s_4 = 0,
$$

et le système sera en involution si les formules qui donnent les

Π_i et les Π_{ij} en fonctions linéaires des ω_i de manière à annuler les expressions (VII′) dépendent de

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 22$$

paramètres arbitraires; or c'est ce qui se vérifie immédiatement.

Le système (VII) *est donc complètement intégrable et sa solution générale dépend de* $s_2 = 6$ *fonctions arbitraires de deux arguments.* L'hypersurface la plus générale de l'espace à cinq dimensions dépend au contraire d'une fonction arbitraire de quatre arguments.

La même méthode s'applique encore plus facilement au système de Pfaff qui donne les systèmes n — uples orthogonaux dans l'espace à n dimensions; elle conduit immédiatement à la conclusion que le système le plus général dépend de $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux arguments.