E. CARTAN

La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \geq 5$ dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 57-121
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__57_0>

LA DÉFORMATION DES HYPERSURFACES DANS L'ESPACE CONFORME RÉEL A $n \geqq 5$ DIMENSIONS;

Par M. E. Cartan.

J'ai étudié, dans un Mémoire précédent [1], le problème de la déformation des hypersurfaces à $n-1$ dimensions dans l'espace euclidien à n dimensions; j'ai montré qu'en général deux hypersurfaces applicables l'une sur l'autre (avec conservation des longueurs d'arcs) sont égales ou symétriques, ce qui revient à dire qu'une hypersurface est en général *indéformable* dans un espace euclidien à plus de trois dimensions; j'ai indiqué également les catégories d'hypersurfaces qui font exception à la règle, c'est-à-dire qui sont *déformables*.

Un problème analogue se pose dans l'espace conforme : à la notion de deux hypersurfaces *applicables* se substitue alors la notion de deux hypersurfaces admettant une représentation *conforme* l'une sur l'autre (avec conservation des angles) : la notion d'angle subsiste en effet dans la géométrie conforme, à la différence de la notion de longueur qui disparaît. Une hypersurface *déformable dans l'espace conforme* est alors une hypersurface admettant une représentation conforme sur une autre hypersurface *qui ne se déduise pas de la première par une transformation conforme*, de même qu'une hypersurface déformable dans l'espace euclidien est une hypersurface applicable sur une autre hypersurface *qui ne se déduise pas de la première par un déplacement de l'espace euclidien*.

Dans l'espace à trois dimensions, deux surfaces quelconques admettent, comme on sait, une représentation conforme l'une sur l'autre; dans l'espace conforme à trois dimensions, toute surface est donc déformable et peut se déformer suivant toute autre

---

[1] *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien à n dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLIV, 1916, p. 65-99).

surface. Il en est autrement dans l'espace conforme à quatre ou plus de quatre dimensions.

Je m'occupe dans le présent Mémoire du cas de $n > 4$ dimensions qui correspond, pour l'espace euclidien, à $n > 3$ dimensions. Dans l'espace conforme à $n > 4$ dimensions, une hypersurface est *en général* indéformable, de même que dans l'espace euclidien à $n > 3$ dimensions une hypersurface est en général indéformable. Les cas d'exception sont les suivants :

a. Les hypersurfaces enveloppes d'une hypersphère dépendant d'un paramètre, qui admettent une représentation conforme sur l'hypersphère.

b. Les hypersurfaces dont l'équation peut être ramenée, en coordonnées $(n+2)$ — sphériques, à la forme

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

F *étant homogène;* l'hypersurface la plus générale résultant de la déformation d'une telle hypersurface dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.

c. Les hypersurfaces lieux d'une variété sphérique à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Les hypersurfaces applicables dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

d. Les hypersurfaces enveloppes d'une hypersphère à deux paramètres u et v lorsque les coordonnées $(n+2)$ — sphériques $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ de cette hypersphère,

$$\alpha(x_1^2 + \ldots + x_n^2) - 2\alpha_1 x_1 - \ldots - 2\alpha_n x_n + \alpha_{n+1} = 0,$$

satisfont à une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \gamma f = 0$$

et que la forme

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 - \alpha\, \alpha_{n+1}$$

est la différence $U - V$ *entre une fonction de u et une fonction de v.* Les hypersurfaces déformées dépendent essentiellement d'un paramètre; elles sont de la même catégorie, avec la même équation de Laplace, mais les fonctions U et V ont subi une même transformation homographique à coefficients constants.

e. Il existe de plus, pour $n = 5$, des hypersurfaces appartenant à la catégorie *b* et qui admettent une représentation conforme sur d'autres hypersurfaces que celles qui résultent de leur déformation *continue* dans l'espace conforme. Le ds^2 d'une telle hypersurface est, à un facteur fini près, la somme d'un ds^2 à deux variables à courbure totale constante et d'un autre ds^2 à deux variables distinctes des premières et également à courbure totale constante.

f. Il peut exister enfin, pour $n = 5$, des hypersurfaces ne rentrant dans aucune des catégories précédentes et susceptibles d'admettre une déformation continue avec conservation des lignes de courbure. Sur ces hypersurfaces les lignes de courbure de trois quelconques des quatre familles s'assemblent en hypersurfaces à trois dimensions dépendant d'un paramètre, comme cela a lieu par exemple pour les quadriques. Ces hypersurfaces seront étudiées dans un Mémoire ultérieur.

Le cas de l'espace conforme à quatre dimensions mérite une étude à part. Je ne l'ai traité incidemment que pour les hypersurfaces admettant une représentation conforme sur l'hypersphère. Les enveloppes d'hypersphères à un paramètre ne sont pas les seules hypersurfaces jouissant de cette propriété; les hypersurfaces les plus générales sont les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles admettant six familles de caractéristiques à deux dimensions; elles dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. Ces hypersurfaces peuvent être caractérisées par une propriété géométrique simple. A chaque point M d'une hypersurface quelconque de l'espace à quatre dimensions on peut faire correspondre une surface (à deux dimensions) du second ordre, située dans l'hyperplan tangent et qui est l'*indicatrice* de l'hypersurface. Les six plans (à deux dimensions) de sections cycliques de cette indicatrice peuvent être appelés les *plans tangents ombilicaux* en M à l'hypersurface. Pour qu'une hypersurface admette une représentation conforme sur l'hypersphère, il faut et il suffit qu'il existe sur cette hypersurface six familles de surfaces (à deux dimensions) telles qu'il en passe une et une seule de chaque famille pàr chaque point M de l'hypersurface et que ces six surfaces soient respectivement tangentes en M aux six plans tangents ombilicaux relatifs à ce point. Ces six familles de surfaces sont les six familles de caractéristiques dont il est question plus haut.

Les nos 1 à 18 sont consacrés à une étude préalable de la Géométrie conforme et de quelques métriques remarquables qui trouvent leur application dans la suite du Mémoire. Ce n'est qu'à partir du no 19 que la question de la déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme est abordée.

ESPACES NON EUCLIDIENS ET ESPACE CONFORME.

1. Considérons dans un espace à n dimensions la quadrique représentée, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0, \tag{1}$$

où la forme quadratique Φ est réductible à une somme de $n+1$ carrés positifs, ou à une somme de n carrés positifs et un carré négatif.

Dans le premier cas l'espace, où l'on a distingué la quadrique (1), est ce qu'on appelle un *espace elliptique*. Dans le second cas, la portion de l'espace intérieure à la quadrique (1) (c'est-à-dire celle qui rend Φ *négatif*) constitue ce qu'on appelle un *espace hyperbolique;* les points de l'espace projectif extérieurs à la quadrique absolue sont appelés *points idéaux* de l'espace hyperbolique.

Le groupe des transformations projectives qui laissent invariante l'équation (1), ou, ce qui ne restreint pas la généralité, laissent invariante la forme Φ, est le *groupe des déplacements* de l'espace elliptique ou hyperbolique : il est à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres. Étant donnés deux points M et M′ de l'espace elliptique ou hyperbolique, le rapport anharmonique de ces points et des deux points d'intersection A, B de la droite MM′ avec la quadrique absolue constitue un invariant pour le groupe des déplacements.

Si l'on désigne par k une constante donnée, positive dans le cas de l'espace elliptique, négative dans le cas de l'espace hyperbolique, on définit une *métrique de courbure* k de cet espace en appelant *distance* (*cayleyenne*) des deux points M, M', le produit par $\frac{1}{2\sqrt{-k}}$ du logarithme du rapport anharmonique

$$\frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{M'B}} : \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}};$$

cette distance est essentiellement réelle. A ce point de vue, les points de la quadrique absolue sont les *points à l'infini* de l'espace (hyperbolique).

2. On peut calculer facilement la distance (cayleyenne) des deux points M, M', ainsi que l'élément d'arc ds, en se servant d'une notation symbolique simple. Désignons par une lettre majuscule M l'ensemble de $n+1$ coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, un point géométrique étant ainsi représenté aussi bien par M que par aM, où a est un coefficient numérique quelconque. Posons

$$\mathrm{M} \mid \mathrm{M} = \Phi(x_1, \ldots, x_{n+1});$$
$$\mathrm{M} \mid \mathrm{M'} = \frac{1}{2}\left(x'_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + x'_{n+1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_{n+1}}\right).$$

L expression $\mathrm{M}|\mathrm{M'}$ (*produit géométrique* des deux points M, M') est invariante vis-à-vis de toute substitution linéaire conservant Φ, c'est-à-dire vis-à-vis du groupe des déplacements de l'espace, elliptique ou hyperbolique. Dans le cas de l'espace elliptique, le carré géométrique $\mathrm{M} \mid \mathrm{M}$ est essentiellement positif; dans le cas de l'espace hyperbolique, il est négatif si M est un point réel de l'espace, positif si c'est un point idéal, nul si c'est un point à l'infini.

On peut toujours supposer choisies les coordonnées d'un point réel M de l'espace, elliptique ou hyperbolique, de manière à avoir

$$\mathrm{M} \mid \mathrm{M} = \frac{1}{k}; \tag{2}$$

on peut aussi supposer, dans le cas de l'espace hyperbolique, que les coordonnées des points réels sont choisies de manière à avoir, quels que soient les points réels M et M',

$$M \mid M' < 0.$$

Cela posé, si A et B sont les deux points à l'infini de la droite MM' (réels si l'espace est hyperbolique, imaginaires conjugués si l'espace est elliptique), on peut poser

$$M = \lambda A + \mu B, \qquad M' = \lambda' A + \mu' B$$

avec, d'après (2),

$$\lambda\mu A \mid B = \frac{1}{2k}, \qquad \lambda'\mu' A \mid B = \frac{1}{2k}.$$

On a alors

$$M \mid M' = (\lambda\mu' + \mu\lambda') A \mid B.$$

Or, par définition, δ étant la distance cayleyenne MM', on a

$$\frac{\lambda\mu'}{e^{\delta\sqrt{-k}}} = \frac{\mu\lambda'}{e^{-\delta\sqrt{-k}}} = \sqrt{\lambda\mu\lambda'\mu'},$$

d'où

$$(3) \qquad M \mid M' = \frac{1}{k}\operatorname{ch}(\delta\sqrt{-k}) \qquad (k < 0),$$

$$= \frac{1}{k}\cos(\delta\sqrt{k}) \qquad (k > 0),$$

d'où enfin, plus généralement, si l'on ne suppose plus la relation (2) vérifiée,

$$(3') \quad \begin{cases} \cos(\delta\sqrt{k}) = \dfrac{M \mid M'}{\sqrt{M \mid M . M' \mid M'}} & \text{(espace elliptique);} \\ \operatorname{ch}(\delta\sqrt{-k}) = -\dfrac{M \mid M'}{\sqrt{M \mid M . M' \mid M'}} & \text{(espace hyperbolique).} \end{cases}$$

Dans le cas de l'espace elliptique, la longueur totale d'une droite indéfinie est $\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

3. Supposons maintenant M' infiniment voisin de M et la relation (2) vérifiée; nous aurons

$$M \left| \left(M + dM + \frac{1}{2}d^2M + \ldots\right) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}k\delta^2 + \ldots\right);\right.$$

or de (2) on déduit

$$M \mid dM = 0,$$

puis

$$M \mid d^2M = - dM \mid dM;$$

il en résulte

$$(4) \qquad \delta^2 = ds^2 = dM \mid dM,$$

relation qui n'est vraie que si l'on suppose le point variable M choisi de manière que son carré géométrique soit égal à $\frac{1}{k}$. Plus généralement, si l'on suppose ce carré géométrique *constant*, on aura

$$ds^2 = \frac{dM \mid dM}{kM \mid M};$$

telle est l'expression d'un ds^2 elliptique ou hyperbolique de courbure k.

4. On définit de même l'angle cayleyen de deux droites issues d'un point réel M : soient P et Q les deux points d'intersection (idéaux si l'espace est hyperbolique) de ces droites avec l'hyperplan polaire de M par rapport à la quadrique (1); on peut supposer choisies leurs coordonnées de manière à avoir

$$P \mid P = 1, \qquad Q \mid Q = 1;$$

l'angle φ des deux droites, qui peut se définir par le logarithme d'un rapport anharmonique, satisfait à la relation

$$\cos\varphi = P \mid Q.$$

5. Passons maintenant à la notion d'espace conforme. Considérons un espace euclidien à n dimensions rapporté à un système de coordonnées rectangulaires; l'équation de toute hypersphère est de la forme

$$(5) \qquad a_{n+1}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_{n+2} = 0,$$

chaque hypersphère étant définie par un système de $n+2$ coordonnées homogènes $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2})$. La condition pour que l'hypersphère soit de rayon nul est

$$\Omega(a_1, \ldots, a_{n+2}) \equiv a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - a_{n+1}a_{n+2} = 0.$$

L'hypersphère est réelle si la forme quadratique Ω est positive, elle est imaginaire si la forme quadratique Ω est négative.

A une hypersphère de rayon nul correspond en général un point bien déterminé, qui est son centre, et réciproquement; mais nous étendrons la notion d'hypersphère de rayon nul à tous les cas où les $n+2$ coordonnées a_i, non toutes nulles, annulent Ω, par exemple à l'hypersphère $(0, \ldots, 0, 1)$ (point à l'infini).

L'espace conforme est formé de toutes les hypersphères de rayon nul.

Le *groupe conforme* est formé de toutes les transformations linéaires effectuées sur les variable $a_1, \ldots, a_{n+2}$, et laissant invariante l'équation $\Omega = 0$ ou, ce qui ne restreint pas la généralité, laissant invariante la forme quadratique Ω. C'est un groupe ponctuel transformant les hypersphères en hypersphères.

Si l'on désigne par une lettre majuscule A une hypersphère ou plutôt l'ensemble de $n+2$ coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2})$, on définit les symboles $A \mid A$ et $A \mid A'$ par les égalités

$$A \mid A = \Omega(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}),$$

$$A \mid A' = \frac{1}{2}\left(a'_1 \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + a'_2 \frac{\partial \Omega}{\partial a_2} + \ldots + a'_{n+2} \frac{\partial \Omega}{\partial a_{n+2}}\right).$$

L'équation

$$A \mid A' = 0$$

exprime que les deux hypersphères A et A' sont *orthogonales*. Les hypersphères réelles sont caractérisées par un carré géométrique positif, les hypersphères imaginaires par un carré géométrique négatif. Si φ est l'angle de deux hypersphères réelles sécantes A, A', on a

$$\cos\varphi = \frac{A \mid A'}{\sqrt{A \mid A . A' \mid A'}}.$$

6. Il y a une correspondance remarquable entre un espace conforme E à n dimensions et un espace hyperbolique $\mathcal{E}$ à $n+1$ dimensions. Si en effet on regarde $(a_1, \ldots, a_{n+2})$ comme des coordonnées homogènes d'un espace à $n+1$ dimensions, l'équation

$$\Omega(a_1, \ldots, a_{n+2}) = 0$$

définit une quadrique de cet espace et les points intérieurs à cette quadrique constituent un espace hyperbolique $\mathcal{E}$. A une hypersphère réelle de E correspond un point idéal de $\mathcal{E}$, à une hypersphère imaginaire de E correspond un point réel de $\mathcal{E}$, à une hypersphère de rayon nul ou hypersphère-point de E correspond un point à l'infini de $\mathcal{E}$: les points de l'espace conforme E sont donc représentés d'une manière uni-univoque par les points à l'infini de $\mathcal{E}$. Enfin au groupe conforme correspond le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$.

A une hypersphère A correspond dans $\mathcal{E}$ un point α; mais on peut regarder A comme un lieu de points M; les hypersphères-points M admettant ces points M pour centres sont caractérisées par la condition d'être orthogonales à A :

$$A \mid M = 0;$$

elles sont donc représentées dans $\mathcal{E}$ par les points de la quadrique absolue qui sont dans l'hyperplan polaire de α par rapport à cette quadrique.

De même, une variété sphérique (S) à $n-p$ dimensions de E peut être envisagée à deux points de vue : en premier lieu comme intersection d'hypersphères $A_1, \ldots, A_p$ ou base d'un faisceau linéaire d'hypersphères, et alors il lui correspond dans $\mathcal{E}$ une variété linéaire π_{p-1} à $p-1$ dimensions, celle qui est déterminée par les points $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ qui correspondent à $A_1, \ldots, A_p$; en second lieu (S) peut être regardée comme un lieu de points, centres d'hypersphères de rayon nul, et alors il lui correspond dans $\mathcal{E}$ l'intersection de la quadrique absolue avec la variété linéaire π'_{n-p+1} conjuguée de π_{p-1} par rapport à la quadrique absolue.

En particulier à une circonférence de E correspondent d'abord une variété linéaire π_{n-2} à $n-2$ dimensions, ensuite l'intersection de la quadrique absolue avec une variété linéaire à deux dimensions; cette intersection est une conique et il est bien évident que le rapport anharmonique de quatre points de la circonférence de E est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de la conique de $\mathcal{E}$. Comme ce dernier est invariant vis-à-vis du groupe des déplacements de $\mathcal{E}$, le premier est invariant vis-à-vis du groupe conforme de E.

Le rapport anharmonique de quatre points d'une circonférence se conserve donc par le groupe conforme.

7. Il n'y a pas de *métrique* dans l'espace conforme. A la vérité l'expression $dM \mid dM$ se reproduit par les transformations du groupe conforme, mais dans les coordonnées de l'hypersphère-point M il reste un facteur indéterminé, qu'il n'y a aucune raison de choisir d'une manière plutôt que d'une autre; si l'on choisit $a_{n+1} = 1$, $dM \mid dM$ est le ds^2 euclidien. Du reste dans l'espace $\mathcal{E}$ deux points de la quadrique absolue n'ont aucun invariant vis-à-vis du groupe des déplacements hyperboliques.

Il n'en est plus de même si l'on fait choix dans l'espace conforme d'une hypersphère A, qu'on appellera l'*hypersphère absolue*. A cette hypersphère correspond dans $\mathcal{E}$ un point α : soit π l'hyperplan polaire de α par rapport à la quadrique absolue. A tout point μ de la quadrique absolue on peut faire correspondre sa projection ν faite du point α sur l'hyperplan π; réciproquement, à tout point ν de π correspondent *deux* points de la quadrique absolue, à savoir les points d'intersection de cette quadrique avec la droite $\alpha\nu$. Il y a donc une correspondance bi-univoque entre les points de la quadrique absolue et les points de l'hyperplan π. Mais cet hyperplan π peut être regardé comme un espace à n dimensions, *elliptique* s'il ne coupe pas la quadrique absolue de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si α est un point réel de $\mathcal{E}$, *hyperbolique* s'il coupe la quadrique absolue de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si α est un point idéal de $\mathcal{E}$.

En définitive, *nous avons donc établi une correspondance bi-univoque entre les points de l'espace conforme* E *dans lequel on a choisi une hypersphère absolue* A, *et les points d'un espace à n dimensions* π, *elliptique si* A *est imaginaire*, *hyperbolique si* A *est réelle*. A un hyperplan à $n-1$ dimensions de π correspondent dans $\mathcal{E}$ les points d'intersection de la quadrique absolue avec un hyperplan à n dimensions passant par α, c'est-à-dire dans E *les points d'une hypersphère orthogonale à* A, et réciproquement. A une droite de π correspond donc une circonférence de E orthogonale à l'hypersphère absolue; aux deux points à l'infini de cette droite correspondent les deux points d'intersection de cette circonférence avec l'hypersphère A.

Soient M, M′ deux points de l'espace conforme E; C et D les points d'intersection de A avec la circonférence qui lui est orthogonale et qui passe par M et M'. Soient maintenant μ, μ', γ, δ les points de la quadrique absolue de $\mathcal{E}$ qui correspondent à M, M', C, D; ces quatre points sont sur une même conique. Soient enfin ν, ν', γ, δ les projections de μ, μ', γ, δ faites du point α sur l'hyperplan π (espace e).

Il existe une relation simple entre le rapport anharmonique des quatre points en ligne droite ν, ν', γ, δ et le rapport anharmonique des quatre points de la conique μ, μ', γ, δ (c'est-à-dire le rapport anharmonique des quatre points de la circonférence M, M', C, D). En effet si μ parcourt la conique, on peut poser

$$\mu = \alpha + x\gamma + y\delta,$$
$$\nu = x\gamma + y\delta;$$

en exprimant que μ est sur la quadrique absolue de $\mathcal{E}$ on obtient

$$0 = \alpha \mid \alpha + 2xy\gamma \mid \delta,$$

et par suite le produit xy reste constant; les coordonnées de μ s'expriment donc en fonctions rationnelles du paramètre y dont les valeurs pour γ et δ sont respectivement 0 et ∞; par suite le rapport anharmonique des points μ, μ', γ, δ est

$$\frac{y'}{y};$$

d'autre part le rapport anharmonique des points ν, ν', γ, δ est

$$\frac{y'}{x'} : \frac{y}{x} = \frac{xy'}{x'y} = \frac{xy'.x'y'}{x'y.xy} = \frac{y'^2}{y^2};$$

c'est donc le carré du précédent. Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer géométriquement sans difficulté.

8. Si l'on définit dans l'espace elliptique ou hyperbolique π une métrique de courbure k, comme il a été dit plus haut, on définira par cela même une métrique dans l'espace E où l'on a fait choix d'une hypersphère absolue A, la distance de deux poiuts M, M de E étant par définition la distance des deux points correspondants ν, ν' de π. On voit d'après le théorème précédent que *la distance des deux points* M, M' *devra être définie comme l*

produit par $\frac{1}{\sqrt{-k}}$ *du logarithme du rapport anharmonique des deux points* M *et* M′ *avec les deux points d'intersection de l'hypersphère* A *avec la circonférence qui lui est orthogonale et qui passe par* M *et* M′.

L'espace conforme E, *où l'on a fait choix de l'hypersphère absolue* A *et où l'on a défini la distance de deux points comme il vient d'être dit, est ce qu'on appelle un « espace sphérique »* (*si* A *est imaginaire*) *ou « pseudo-sphérique »* (*si* A *est réelle*) *de courbure* k. Il y a une correspondance bi-univoque entre les points d'un espace sphérique et ceux d'un espace elliptique, entre les points d'un espace pseudo-sphérique et ceux d'un espace hyperbolique. A une circonférence orthogonale à l'hypersphère absolue d'un espace sphérique ou pseudo-sphérique correspond une droite de l'espace elliptique ou hyperbolique; *la longueur totale d'une circonférence d'un espace sphérique de courbure* k *est* $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, *celle de la droite de l'espace elliptique de même courbure* k *est* $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

9. Le ds^2 d'un espace sphérique ou pseudo-sphérique se calcule facilement. Choisissons les coordonnées de A de manière à avoir

$$A \mid A = -\frac{1}{k};$$

toute hypersphère-point M peut se mettre sous la forme

$$M = A + N,$$

N étant une hypersphère orthogonale à A (celle qui a pour image le point ν); M | M étant nul, on en déduit

$$N \mid N = \frac{1}{k}.$$

Le ds^2 de l'espace π est par suite [formule (3)]

$$dN \mid dN = dM \mid dM.$$

Le ds^2 *de l'espace sphérique ou pseudo-sphérique de courbure* k *est donc représenté par le carré géométrique*

$dM \mid dM$, *où les coordonnées de l'hypersphère-point* M *sont choisies de manière que* $M - A$ *soit orthogonale à* A, *le carré* $A \mid A$ *étant égal à* $-\frac{1}{k}$.

On a aussi la formule générale

$$ds^2 = -\frac{A \mid A . dM \mid dM}{k(M \mid A)^2},$$

et le second membre est indépendant du choix des coordonnées de A *et de* M.

10. Nous avons supposé jusqu'à présent l'hypersphère A de rayon non nul. Si $A \mid A = 0$, on peut définir une métrique de l'espace conforme en choisissant les coordonnées de l'hypersphère-point M de manière que $M \mid A$ soit égal à une constante donnée et poser

$$ds^2 = dM \mid dM.$$

Le ds^2 obtenu est celui d'un espace euclidien à n dimensions. Choisissons en effet n hypersphères réelles $A_1, \ldots, A_n$ passant par A et orthogonales entre elles

$$A_i \mid A_j = 0, \qquad A_i \mid A_i = 1,$$

et soit B le point d'intersection autre que A de ces n hypersphères, l'hypersphère-point B ayant ses coordonnées choisies de manière à satisfaire à $A \mid B = 1$. Si alors

$$M = y_{n+1} A + y_1 A_1 + \ldots + y_n A_n + y_{n+2} B,$$

on aura

$$M \mid M = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + 2 y_{n+1} y_{n+2} = 0$$

et

$$M \mid A = y_{n+2}.$$

Si donc on choisit y_{n+2} constant, on aura

$$dM \mid dM = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2.$$

A un hyperplan de l'espace euclidien à n dimensions, défini par une équation

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + b = 0,$$

correspond l'hypersphère

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + b A,$$

lieu des points M dont les coordonnées y_i satisfont à la même relation. C'est une hypersphère passant par A.

Tout ce qui précède devient du reste évident si par une inversion on rejette le point A à l'infini.

Le sous-groupe conforme qui laisse invariante l'hypersphère absolue A correspond au groupe des déplacements et des homothéties de l'espace euclidien : le ds^2 est ici un invariant *relatif*, cet invariant pouvant se reproduire multiplié par une constante.

11. Considérons maintenant dans l'espace hyperbolique $\mathcal{E}$ deux variétés linéaires conjuguées par rapport à la quadrique absolue, l'une (α) à p dimensions, l'autre (β) à $n-p$ dimensions. Par tout point μ de $\mathcal{E}$, et en particulier par tout point μ de la quadrique absolue, passe une droite et une seule rencontrant (α) en un point σ et (β) en un point τ. Supposons que (α) ne rencontre pas la quadrique absolue, alors (β) la rencontre. On peut choisir les coordonnées de μ de manière à avoir

$$\mu = \sigma + \tau,$$

avec

$$\sigma \mid \sigma = \frac{1}{k},$$

et par suite

$$\tau \mid \tau = -\frac{1}{k}.$$

Cela permet de définir sur la quadrique absolue une métrique par l'équation

$$ds^2 = d\mu \mid d\mu = d\sigma \mid d\sigma + d\tau \mid d\tau;$$

le ds^2 est ainsi la somme d'un ds^2 de courbure k et d'un ds^2 de courbure $-k$.

Si l'on passe de l'espace $\mathcal{E}$ à l'espace conforme E, le point μ correspond à un point M de l'espace conforme, le point σ à une hypersphère réelle S et le point τ à une hypersphère imaginaire T et l'on a

$$dM \;\; dM = dS \mid dS + dT \mid dT.$$

L'hypersphère S fait partie d'un faisceau linéaire p fois infini d'hypersphères, admettant pour *base* une variété sphérique réelle à $n-p-1$ dimensions (A) [celle qui correspond à (α)]; l'hypersphère T fait partie d'un faisceau linéaire $n-p$ fois infini d'hypersphères, orthogonal au premier, admettant pour base une variété sphérique imaginaire à $p-1$ dimensions (B). Si l'hypersphère T reste fixe, l'hypersphère S variant, le point $M = S + T$ se trouve sur toutes les hypersphères du second faisceau orthogonales à T et par suite décrit leur intersection qui est une variété sphérique à p dimensions passant par (B), et dans cette variété sphérique on a distingué le lieu des points qui se trouvent sur T, c'est-à-dire l'hypersphère (B) qui joue le rôle d'hypersphère absolue; on voit donc bien que le premier ds^2 partiel, à savoir $dS \mid dS$, est le ds^2 qu'on obtient en faisant varier M sur une hypersphère à p dimensions passant par (B) considérée comme espace sphérique de courbure k, dont l'hypersphère absolue serait (B). De même le second ds^2 partiel $dT \mid dT$ est le ds^2 qu'on obtient en faisant varier M sur une hypersphère à $n-p$ dimensions passant par (A), considérée comme espace pseudo-sphérique de courbure $-k$, dont l'hypersphère absolue serait (A).

La décomposition de l'espace conforme au moyen de ces deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques, considérées les unes comme espaces sphériques à p dimensions de courbure k, les autres comme espaces pseudo-sphériques à $n-p$ dimensions de courbure $-k$, définit ainsi une métrique de l'espace conforme. La transformation conforme la plus générale qui laisse invariante cette métrique est le produit d'une transformation laissant invariante chaque variété du premier réseau et transformant entre eux les points de cette variété comme un déplacement de l'espace sphérique à p dimensions, par une transformation laissant invariante chaque variété du second réseau et transformant entre eux les points de cette variété comme un déplacement de l'espace pseudo-sphérique à $n-p$ dimensions. Toutes ces transformations forment un groupe semi-simple à $\frac{p(p+1)}{2} + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ paramètres.

Par exemple, dans l'espace à trois dimensions, le faisceau des plans qui passent par Oz et le réseau orthogonal des circonférences d'axe Oz conduit au ds^2 suivant :

$$ds^2 = \frac{dr^2 + dz^2}{r^2} + d\theta^2,$$

où $\frac{dr^2 + dz^2}{r^2}$ est le ds^2 d'un plan pseudo-sphérique de courbure — 1 avec l'axe des z comme absolu, et où $d\theta^2$ est le ds^2 d'une circonférence considérée comme espace sphérique à une dimension de courbure 1, l'absolu étant l'ensemble de deux points cycliques à l'infini. Les coordonnées r, z, θ sont les coordonnées cylindriques ordinaires.

12. Nous avons supposé implicitement que la variété linéaire (α) n'était pas tangente à la quadrique absolue. Si elle est tangente à la quadrique absolue, il en est de même de la variété conjuguée (β) et ces deux variétés ont un point commun, le point de contact. Les deux faisceaux linéaires d'hypersphères S et T ont alors en commun une hypersphère-point A ; soient alors

$$\lambda A + \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_p B_p$$

le premier faisceau,

$$\mu A + \mu_1 C_1 + \ldots + \mu_{n-p} C_{n-p}$$

le second faisceau et soit enfin D le point d'intersection autre que A des n hypersphères B_i et C_j, choisi de manière à avoir

$$A \mid D = 1.$$

Si l'on choisit les coordonnées d'une hypersphère-point M de manière que M | A soit égal à une constante donnée, on aura

$$M = D + \sum_{i=1}^{i=p} x_i B_i + \sum_{j=1}^{j=n-p} y_j C_j - \frac{1}{2} \sum (x_\rho^2 + y_\sigma^2) A$$

et

$$dM \mid dM = \sum_{i=1}^{i=p} dx_i^2 + \sum_{j=1}^{j=n-p} dy^2.$$

On a ainsi une métrique pour laquelle le ds^2 est la somme de deux ds^2 à courbure nulle, l'un à p dimensions, l'autre à $n - p$ dimensions. Le premier ds^2 partiel est celui qu'on obtient lorsque le point M décrit la variété sphérique intersection des hypersphères $C_1 - y_1 A, \ldots, C_{n-p} - y_{n-p} A$, considérée comme espace euclidien à p dimensions, le point à l'infini étant A ; le second ds^2 partiel est celui qu'on obtient lorsque le point M décrit la variété sphérique intersection des hypersphères $B_1 - x_1 A, \ldots, B_p - x_p A$, considérée comme espace euclidien à $n-p$ dimensions, le point à l'infini étant A. Si par une inversion on rejette A à l'infini, l'espace conforme est décomposé suivant deux réseaux orthogonaux de variétés planes parallèles à p et $n-p$ dimensions.

Les transformations conformes qui laissent cette décomposition de l'espace invariante s'obtiennent en multipliant une transformation par déplacement et homothétie d'un espace euclidien à p dimensions par une transformation par déplacement et homothétie d'un espace euclidien à $n-p$ dimensions, mais cette génération n'est pas unique ; le groupe considéré est à

$$\frac{p(p+1)}{2} + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} + 1 \text{ paramètres.}$$

LES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE MOBILES DANS LES ESPACES ELLIPTIQUE ET HYPERBOLIQUE, CONFORME, SPHÉRIQUE ET PSEUDO-SPHÉRIQUE.

13. Prenons dans un espace elliptique ou hyperbolique un système de référence mobile formé de $n+1$ points $M, M_1, \ldots, M_n$ satisfaisant à

$$(5) \qquad M \mid M = \frac{1}{k}, \qquad M_i \mid M_i = 1, \qquad M \mid M_i = M_i \mid M_j = 0, \qquad (i \neq j).$$

Un tel système dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres. Si l'on donne à ces paramètres une variation infiniment petite, on aura des formules de la forme suivante :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dM \;\, = \varpi_{00} M + \varpi_{01} M_1 + \ldots + \varpi_{0n} M_n, \\ dM_1 = \varpi_{10} M + \varpi_{11} M_1 + \ldots + \varpi_{1n} M_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dM_n = \varpi_{n0} M + \varpi_{n1} M_1 + \ldots + \varpi_{nn} M_n, \end{array} \right.$$

où les ϖ_{ij} sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des paramètres (expressions de Pfaff). Si l'on exprime que les relations (5) sont vérifiées identiquement, on obtient par différentiation

$$\varpi_{00} = 0, \qquad \varpi_{ii} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\varpi_{i0} = -k\varpi_{i0}, \qquad \varpi_{ij} = -\varpi_{ji} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n),$$

ce qui permet d'écrire

$$(6') \qquad \left\{ \begin{array}{l} dM = \quad \omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 + \ldots + \omega_n M_n, \\ dM_1 = -k\omega_1 M + \varpi_{12} M_2 + \ldots + \varpi_{1n} M_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dM_n = -k\omega_n M + \varpi_{n1} M_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} M_{n-1}, \end{array} \right.$$

où $\varpi_{ij} = -\varpi_{ji}$. Il ne reste donc que $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions de Pfaff comme coefficients dans les seconds membres.

Le ds^2 de l'espace, considéré comme à courbure k, est alors

$$ds^2 = dM \mid dM = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

Si l'on exprime que les équations (6′) sont complètement intégrables, c'est-à-dire que les covariants bilinéaires des seconds membres sont identiquement nuls, on obtient les relations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_i = [\omega_1 \varpi_{1i}] + [\omega_2 \varpi_{2i}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{ni}], \\ \varpi'_{ij} = -k[\omega_i \omega_j] + [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + [\varpi_{i2} \varpi_{2j}] + \ldots + [\varpi_{in} \varpi_{nj}]; \end{array} \right.$$

ce sont les formules de structure du groupe des déplacements de l'espace, elliptique ou hyperbolique, considéré.

Les formules (6′) et (7) s'appliquent aussi à l'espace euclidien, en y faisant $k = 0$ et en supposant que $M_1, \ldots, M_n$ désignent n vecteurs unités rectangulaires, M étant un point.

14. Les formules (7) permettent de reconnaître à quelles conditions une forme quadratique définie positive des différentielles de n variables $u_1, \ldots, u_n$ (les coefficients étant des fonctions de ces variables) est le ds^2 d'un espace de courbure constante k. Cette forme quadratique peut toujours en effet être mise sous la forme $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2$. Les covariants bilinaires $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$, s'annulant nécessairement en même temps que $\omega_1, \ldots, \omega_n$, peuvent toujours être mis sous la forme

$$(8) \qquad \omega'_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} [\omega_\rho \varpi_{\rho i}],$$

où les ϖ_{ij} sont n^2 nouvelles expressions de Pfaff convenablement choisies. On peut du reste, sans changer les formules (8), remplacer ϖ_{ij} par

$$\varpi_{ij} + \alpha_{ij1}\omega_1 + \ldots + \alpha_{ijn}\omega_n,$$

où les n^3 coefficients α_{ijk} satisfont à

$$\alpha_{ijk} = \alpha_{kji}.$$

On voit sans difficulté qu'on peut disposer de ces coefficients, d'une manière et d'une seule, de façon à avoir

$$\varpi_{ii} = 0, \qquad \varpi_{ij} + \varpi_{ji} = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n).$$

Cela posé, pour que l'expression $\Sigma\omega_i^2$ soit le ds^2 d'un espace de courbure k, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer, en fonction des n variables $u_1, \ldots, u_n$, les coordonnées d'un point variable M de l'espace, de manière à avoir

$$(9) \qquad \mathrm{M} \mid \mathrm{M} = \frac{1}{k}, \qquad d\mathrm{M} \mid d\mathrm{M} = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

On pourra alors toujours poser

$$d\mathrm{M} = \omega_1 \mathrm{M}_1 + \ldots + \omega_n \mathrm{M}_n,$$

où M_i sont des points convenablement choisis et les conditions (9) donnent

$$\mathrm{M} \mid \mathrm{M}_i = 0, \qquad \mathrm{M}_i \mid \mathrm{M}_i = 1, \qquad \mathrm{M}_i \mid \mathrm{M}_j = 0.$$

On a donc ainsi un système de référence mobile et par suite, d'après (6′), des formules telles que

$$d\mathrm{M}_i = -k\omega_i \mathrm{M} + \overline{\varpi}_{i1}\mathrm{M}_1 + \ldots + \overline{\varpi}_{in}\mathrm{M}_n;$$

les formules (7) et (8) montrent alors que les $\overline{\varpi}_{ij}$ ne sont autres que les ϖ_{ij}, d'où l'on déduit, d'après (7),

$$(10) \quad \varpi'_{ij} = -k[\omega_i \omega_j] + [\varpi_{i1}\varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in}\varpi_{nj}] \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Les relations (10) fournissent les conditions nécessaires pour que le ds^2 donné soit de courbure k. Ces conditions sont suffisantes, car si elles sont vérifiées le système de Pfaff (6′) est complètement intégrable, puisque les covariants bilinéaires des deux membres de ses équations sont, d'après (8) et (10), égaux en tenant compte de ces équations elles-mêmes.

En définitive, *l'expression* $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2$ *est un* ds^2 *de courbure* k *si les expressions* $\varpi_{ij} = -\varpi_{ji}$ *définies par* (8) *satisfont à* (10).

15. Passons à l'espace conforme. Choisissons comme système de référence mobile une hypersphère-point M, puis n hypersphères réelles orthogonales entre elles $A_1, \ldots, A_n$, enfin l'hypersphère-point N dont le centre est le deuxième point d'intersection de ces n hypersphères. Nous pouvons de plus supposer qu'on a

$$(11) \qquad A_i \mid A_i = 1, \qquad M \mid N = 1,$$

en même temps que

$$(12) \quad M \mid M = 0, \quad N \mid N = 0, \quad M \mid A_i = 0, \quad N \mid A_i = 0, \quad A_i \mid A_j = 0.$$

Un tel système de référence dépend de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ paramètres et, en tenant compte des relations (11) et (12), on voit qu'on peut poser

$$(13) \quad \begin{cases} dM = \theta M + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_n A_n, \\ dA_1 = -\chi_1 M - \omega_1 N + \varpi_{12} A_2 + \ldots + \varpi_{1n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n = -\chi_n M - \omega_n N + \varpi_{n1} A_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} A_{n-1}, \\ dN = -\theta N + \chi_1 A_1 + \chi_2 A_2 + \ldots + \chi_n A_n, \end{cases}$$

avec

$$\varpi_{ij} + \varpi_{ji} = 0.$$

Il s'introduit ainsi dans les second membres $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ expressions de Pfaff θ, ω_i, χ_i, ϖ_{ij}. En prenant les covariants bilinéaires des deux membres de (13) on arrive aux formules de structure du groupe conforme

$$(14)\quad\begin{cases}\theta' = -[\omega_1\chi_1] - [\omega_2\chi_2] - \ldots - [\omega_n\chi_n],\\ \omega'_1 = [\theta\omega_1] + [\omega_2\varpi_{21}] + \ldots + [\omega_n\varpi_{n1}],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega'_n = [\theta\omega_n] + [\omega_1\varpi_{1n}] + \ldots + [\omega_{n-1}\varpi_{n-1,n}],\\ \chi'_1 = [\chi_1\theta] + [\chi_2\varpi_{21}] + \ldots + [\chi_n\varpi_{n1}],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \chi'_n = [\chi_n\theta] + [\chi_1\varpi_{1n}] + \ldots + [\chi_n\varpi_{n-1,n}],\\ \varpi'_{ij} = [\omega_j\chi_i] - [\omega_i\chi_j] + [\varpi_{i1}\varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in}\varpi_{nj}].\end{cases}$$

16. Prenons maintenant un espace sphérique ou pseudo-sphérique de courbure k, au moyen d'une hypersphère absolue. Le point M étant un point mobile quelconque, choisissons les hypersphères $A_1, \ldots, A_n$ passant par M, orthogonales entre elles et orthogonales à l'hypersphère absolue; soit N le deuxième point d'intersection de ces hypersphères. L'hypersphère absolue est de la forme $A = \alpha M + \beta N$; choisissons-la et choisissons M et N de manière à avoir, comme il a été dit au n° 9,

$$A \mid A = M \mid A = -\frac{1}{k}$$

et

$$M \mid N = 1;$$

il vient

$$A = \frac{1}{2}M - \frac{1}{k}N = -\frac{1}{k}\left(N - \frac{k}{2}M\right).$$

Si alors nous exprimons que l'hypersphère $N - \frac{k}{2}M$ reste fixe, nous obtenons, d'après (13),

$$-\theta\left(N + \frac{k}{2}M\right) + \left(\chi_1 - \frac{k}{2}\omega_1\right)A_1 + \ldots + \left(\chi_n - \frac{k}{2}\omega_n\right)A_n = 0,$$

d'où

$$\theta = 0, \qquad \chi_i = \frac{k}{2}\omega_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Par suite, les formules qui donnent le déplacement infiniment petit du système de référence dans l'espace sphérique ou pseudo-sphérique de courbure k sont

$$(15)\quad \begin{cases} dM = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_n A_n, \\ dA_1 = -\omega_1 \left(N + \frac{k}{2} M\right) + \varpi_{12} A_2 + \ldots + \varpi_{1n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n = -\omega_n \left(N + \frac{k}{2} M\right) + \varpi_{n1} A_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} A_{n-1}, \\ dN = \frac{k}{2}(\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_n A_n), \end{cases}$$

et les formules de structure (14) deviennent

$$(16)\quad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{ni}], \\ \varpi_{ij} = -k[\omega_i \omega_j] + [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in} \varpi_{nj}], \end{cases}$$

identiques aux formules de structure (7) de l'espace elliptique ou hyperbolique de même courbure.

Si $k = 0$, c'est l'hypersphère N qui est l'hypersphère absolue. Si l'on exprime que le point N (et non pas simplement l'hypersphère-point N) reste fixe, on obtient

$$\chi_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et les formulès (13) deviennent

$$(17)\quad \begin{cases} dM = \theta M + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n, \\ dA_1 = -\omega_1 N + \varpi_{12} A_2 + \ldots + \varpi_{1n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n = -\omega_n N + \varpi_{n1} A_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} A_{n-1}, \\ dN = -\theta N, \end{cases}$$

avec

$$(18)\quad \begin{cases} \theta' = 0, \\ \omega'_i = [\theta \omega_i] + [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{ni}], \\ \varpi'_{ij} = [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in} \varpi_{nj}]; \end{cases}$$

ces dernières formules sont identiques aux formules de structure du groupe des déplacements et homothéties de l'espace euclidien.

L'expression θ ayant son covariant bilinéaire nul est une différentielle exacte $\frac{du}{u}$; l'hypersphère-point uN est fixe, et le ds^2 de l'espace euclidien est, à un facteur constant près,

$$d\left(\frac{1}{u}\mathrm{M}\right) \Big| d\left(\frac{1}{u}\mathrm{M}\right) = \frac{1}{u^2}(\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2).$$

17. Considérons maintenant la métrique obtenue en décomposant l'espace conforme par deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques, considérées les unes comme espaces sphériques à p dimensions de courbure k, les autres comme espaces pseudosphériques à $n-p$ dimensions de courbure $-k$. Étant donnée une hypersphère-point M, désignons par $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ des hypersphères orthogonales entre elles et déterminant par leur intersection la variété du premier réseau qui passe par M; par $\mathrm{A}_{p+1}, \ldots, \mathrm{A}_n$ des hypersphères orthogonales entre elles et déterminant par leur intersection la variété du second réseau qui passe par M; soit enfin N le deuxième point d'intersection des hypersphères A_i. La base du premier réseau est définie par les hypersphères

$$\mathrm{A}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_p, \quad \mathrm{M} - h\mathrm{N},$$

la base du second réseau par les hypersphères

$$\mathrm{A}_{p+1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n, \quad \mathrm{M} + h\mathrm{N};$$

on a

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - h\mathrm{N}) + \frac{1}{2}(\mathrm{M} + h\mathrm{N}) = \mathrm{S} + \mathrm{T},$$

et l'on choisit M et N de manière à avoir

$$\mathrm{M} \,|\, \mathrm{N} = 1, \qquad \mathrm{S} \,|\, \mathrm{S} = \frac{1}{k}, \qquad \mathrm{T} \,|\, \mathrm{T} = -\frac{1}{k},$$

d'où

$$h = -\frac{2}{k}.$$

Si, dans les formules (13), on exprime que la base intersection de $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p, \mathrm{N} + \frac{k}{2}\mathrm{M}$, est fixe, c'est-à-dire que la différentielle d'une quelconque de ces hypersphères est une combinaison linéaire de ces hypersphères, on obtient

$$\begin{aligned}
&\theta = 0, \\
&\varpi_{i\alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n), \\
&\chi_i = \frac{1}{2} k\omega_i \qquad (i = 1, \ldots, p), \\
&\chi_\alpha = -\frac{1}{2} k\omega_\alpha \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n).
\end{aligned}$$

On a donc

$$(19)\quad \begin{cases} dM = \sum_{i=1}^{i=p} \omega_i A_i + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \omega_\alpha A_\alpha, \\ dA_i = -\omega_i \left(N + \frac{k}{2} M\right) + \sum_{j=1}^{j=p} \varpi_{ij} A_j \qquad (i = 1, \ldots, p), \\ dA_\alpha = -\omega_\alpha \left(N - \frac{k}{2} M\right) + \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} \varpi_{\alpha\beta} A_\beta \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n), \\ dN = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{i=p} \omega_i A_i - \frac{1}{2} k \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \omega_\alpha A_\alpha, \end{cases}$$

avec les formules

$$(20)\quad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_p \varpi_{pi}], \\ \varpi'_{ij} = -k[\omega_i \omega_j] + [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{ip} \varpi_{pj}], \\ \omega'_\alpha = [\omega_{p+1} \varpi_{p+1,\alpha}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{n\alpha}], \\ \varpi'_{\alpha\beta} = +k[\omega_\alpha \omega_\beta] + [\varpi_{\alpha,p+1} \varpi_{p+1,\beta}] + \ldots + [\varpi_{\alpha n} \varpi_{n\beta}]. \end{cases}$$

Ces formules montrent bien que le ds^2 de l'espace est la somme d'un ds^2 à p dimensions $\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2$ de courbure k, à savoir le ds^2 de l'espace elliptique $[A_{p+1} \ldots A_n]$ dont l'absolu est formé des points situés sur $N - \frac{k}{2} M$, et d'un ds^2 à $n - p$ dimensions $\omega_{p+1}^2 + \ldots + \omega_n^2$ de courbure $-k$, à savoir le ds^2 de l'espace hyperbolique $[A_1 \ldots A_p]$ dont l'absolu est formé des points situés sur $N + \frac{k}{2} M$. Ces formules (20) sont les formules de structure du sous-groupe conforme qui laisse invariants les deux réseaux orthogonaux.

18. Prenons enfin le cas particulier où les deux réseaux orthogonaux ont en commun une hypersphère de rayon nul; avec les notations du numéro précédent, ce sera N. Si l'on exprime que le faisceau d'hypersphères défini par $A_1, \ldots, A_p$, N est fixe, on obtient, d'après (13),

$$\begin{aligned} \chi_i &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, p), \\ \chi_\alpha &= 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n), \\ \varpi_{i\alpha} &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

On a donc

$$(21)\quad \begin{cases} dM = \theta M + \sum_{i=1}^{i=p} \omega_i A_i + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \omega_\alpha A_\alpha, \\ dA_i = -\omega_i N + \sum_{j=1}^{j=p} \varpi_{ij} A_j, \\ dA_\alpha = -\omega_\alpha N + \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} \varpi_{\alpha\beta} A_\beta, \\ dN = -\theta N, \end{cases}$$

avec

$$(22)\quad \begin{cases} \theta' = 0, \\ \omega'_i = [\theta\omega_i] + [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_p \varpi_{pi}], \\ \varpi'_{ij} = [\varpi_{i1}\varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{ip}\varpi_{pj}], \\ \omega'_\alpha = [\theta\omega_\alpha] + [\omega_{p+1}\varpi_{p+1,\alpha}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{n\alpha}], \\ \varpi'_{\alpha\beta} = [\varpi_{a,p+1}\varpi_{p+1,\beta}] + \ldots + [\varpi_{\alpha n}\varpi_{n\beta}]. \end{cases}$$

L'expression de Pfaff θ est une différentielle exacte $\frac{du}{u}$; le ds^2 de l'espace est, à un facteur constant près,

$$\frac{1}{u^2}(\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2) + \frac{1}{u^2}(\omega_{p+1}^2 + \ldots + \omega_n^2),$$

et chacun des deux termes est un ds^2 de courbure nulle.

LES HYPERSURFACES DE L'ESPACE CONFORME ET LEUR DÉFORMATION.

19. Soit une hypersurface (S) à $n-1$ dimensions de l'espace conforme à n dimensions. Faisons correspondre, à chaque point M de cette hypersurface, un système de référence comme au n° 5, mais *avec la restriction que l'hypersphère* A_n *soit tangente à l'hypersurface*. Pour tout déplacement de ce système de référence, on a manifestement

$$\omega_n = 0,$$

car l'hypersphère dM est constamment normale à (S). Faisons un changement de notation en posant

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{A}, \qquad \varpi_{in} = \psi_i, \qquad \chi_n = \chi \qquad (i = 1, \ldots, n-1);$$

les formules (13) et (14) deviennent

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathrm{M} &= \quad \theta\mathrm{M} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \omega_\rho \mathrm{A}_\rho, \\ d\mathrm{A}_i &= -\chi_i \mathrm{M} - \omega_i \mathrm{N} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \varpi_{i\rho} \mathrm{A}_\rho + \psi_i \mathrm{A}, \\ d\mathrm{A} &= -\chi\,\mathrm{M} - \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \psi_\rho \mathrm{A}_\rho, \\ d\mathrm{N} &= -\theta\mathrm{N} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \chi_\rho \mathrm{A}_\rho + \chi\,\mathrm{A} \end{aligned} \right.$$

et

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta' &= -\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho \chi_\rho], \\ \omega_i' &= [\theta\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho \varpi_{\rho i}] && (i = 1, \ldots, n-1). \\ 0 &= \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho \psi_\rho], \\ \chi_i' &= [\chi_i \theta] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\chi_\rho \varpi_{\rho i}] + [\psi_i \chi] && (i = 1, \ldots, n-1), \\ \chi' &= [\chi\theta] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\chi_\rho \psi_\rho], \\ \varpi_{ij}' &= [\omega_j \chi_i] - [\omega_i \chi_j] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\varpi_{i\rho} \varpi_{\rho j}] - [\psi_i \psi_j] && (i, j = 1, \ldots, n-1), \\ \psi_i' &= -[\omega_i \chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\psi_\rho \varpi_{\rho i}] && (i = 1, \ldots, n-1). \end{aligned} \right.$$

20. L'expression $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2$ étant, à un facteur fini près, le ds^2 de l'hypersurface (S), les expressions $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ sont des

combinaisons linéaires (indépendantes) des différentielles des $n-1$ paramètres dont dépend la position d'un point sur (S). L'égalité, extraite de (24),

$$[\omega_1\psi_1]+[\omega_2\psi_2]+\ldots+[\omega_{n-1}\psi_{n-1}]=0$$

montre qu'il en est de même de $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$.

L'expression

$$dA \mid dM = -(\omega_1\psi_1+\omega_2\psi_2+\ldots+\omega_{n-1}\psi_{n-1})$$

est donc une forme quadratique en $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$. Cette forme dépend du choix du système de référence associé au point M. Si l'on change ce système, on doit remplacer M par αM et A par A $+ \beta$M; la forme quadratique devient alors

$$(dA+\beta\, dM+d\beta\, M) \mid (\alpha\, dM + d\alpha\, M) = \alpha\, dA \mid dM + \alpha\beta\, dM \mid dM.$$

Par suite, *le faisceau de formes quadratiques*

$$\lambda(\omega_1\psi_1+\omega_2\psi_2+\ldots+\omega_{n-1}\psi_{n-1})+\mu(\omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_{n-1}^2)$$

est indépendant du choix du système de référence associé au point M.

Des propriétés classiques montrent qu'on peut effectuer sur $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ une substitution orthogonale, c'est-à-dire choisir les hypersphères $A_1, \ldots, A_{n-1}$, de manière à avoir l'identité

$$\omega_1\psi_1+\omega_2\psi_2+\ldots+\omega_{n-1}\psi_{n-1}=a_1\omega_1^2+a_2\omega_2^2+\ldots+a_{n-1}\omega_{n-1}^2,$$

c'est-à-dire de manière à avoir

$$\psi_i = a_i\omega_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1). \tag{25}$$

Les coefficients a_i peuvent en outre être remplacés par $\lambda a_i + \mu$ en choisissant convenablement les hypersphères M et A.

Lorsque le choix des hypersphères $A_1, \ldots, A_{n-1}$ est fait de la manière précédente, les *lignes de courbure* de l'hypersurface (S) sont définies par les systèmes

$$\begin{array}{l}\omega_2=\omega_3=\ldots=\omega_{n-1}=0,\\ \omega_1=\omega_3=\ldots=\omega_{n-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_{n-2}=0;\end{array}$$

en effet, *l'hypersphère* $A + a_1 M$ *tangente à l'hypersurface jouit de la propriété d'être tangente à l'hypersphère infiniment voisine* lorsqu'on se déplace de manière à annuler ω_2, $\omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$; car on a dans ces conditions

$$d(A + a_1 M) = (da_1 + a_1 \theta - \chi) M;$$

cette hypersphère $A + a_1 M$ est de plus *la première hypersphère de courbure* de (S) au point M.

21. Si l'hypersurface (S) est l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de $p \leqq n - 2$ paramètres, et si l'on choisit cette hypersphère pour hypersphère A, les expressions

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_{n-1}, \quad \chi$$

qui entrent dans dA sont au nombre de p linéairement indépendantes; par suite, p au plus des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont différents de zéro.

Montrons que si $p \leqq n - 3$ des coefficients a_i sont différents de zéro, les autres étant nuls, l'expression χ est une combinaison linéaire des ψ_i, et que par suite l'hypersphère A dépend de p paramètres. Si, en effet,

$$a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

on a, d'après (2),

$$-[\omega_{p+1}\chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} a_\rho [\omega_\rho \varpi_{\rho, p+1}] = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$-[\omega_{n-1}\chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} a_\rho [\omega_\rho \varpi_{\rho, n-1}] = 0;$$

la première de ces formules montre que χ est une combinaison linéaire des ω_i, mais ne contient aucun terme en $\omega_{p+2}, \ldots, \omega_{n-1}$; la deuxième formule montre ensuite qu'elle ne contient aucun terme en ω_{p+1}.

Si donc $n - 1 - p \geqq 2$ des coefficients a_i sont nuls, l'hypersurface (S) *peut être regardée comme l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de p paramètres, à savoir l'hypersphère* A.

Si $n - 1 - p \geqq 2$ des coefficients a_i sont égaux entre eux et si a est leur valeur commune, l'hypersurface (S) *peut être regardée comme l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de p paramètres, à savoir l'hypersphère* $A + aM$.

Remarquons que les a_i ne sont pas autre chose que les racines de l'équation en S de la forme quadratique

$$\omega_1 \psi_1 + \omega_2 \psi_2 + \ldots + \omega_{n-1} \psi_{n-1}.$$

En particulier, si ces racines sont toutes égales, (S) est une hypersphère; si $n - 2$ d'entre elles sont égales, la $(n-1)^{\text{ième}}$ étant différente, (S) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre.

22. Considérons une hypersurface (Σ) admettant une *représentation conforme* sur l'hypersurface (S) ou, comme on peut encore dire, résultant de la déformation de (S) dans l'espace conforme. A chaque point P de (Σ) on peut faire correspondre un système de référence formé de deux hypersphères-points P, Q et de n hypersphères-unités $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B$, de manière à avoir

$$\Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-1} = \omega_{n-1}, \tag{26}$$

les grandes lettres se rapportant à (Σ) et les petites à (S). Lorsque le système de référence associé au point M de (S) est fixé, le système de référence associé au point P de (Σ) est jusqu'à un certain point indéterminé, car on peut, sans nuire aux conditions (26), remplacer

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_{n-1}, \quad B, \quad Q,$$

par

$$B_1 + \alpha_1 P, \quad B_2 + \alpha_2 P, \quad \ldots, \quad B_{n-1} + \alpha_{n-1} P, \quad B + \alpha P,$$
$$Q - \Sigma\alpha_\rho B_\rho - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 + \alpha^2) P.$$

Les expressions

$$\theta, \quad \Pi_{ij}, \quad \Psi_i$$

sont alors remplacées par

$$\theta - \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \alpha_\rho \omega_\rho, \quad \Pi_{ij} + \alpha_i \omega_j - \alpha_j \omega_i, \quad \Psi_i - \alpha\omega_i.$$

D'après cela les équations (26), quand on égale les covariants bilinéaires de leurs deux membres, entraînent les équations

$$[(\Theta - \theta)\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho(\Pi_{\rho i} - \varpi_{\rho i})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

ces équations elles-mêmes montrent que $\Theta - \theta$ et $\Pi_{ij} - \varpi_{ij}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \Theta - \theta &= \alpha_1 \omega_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{n-1}, \\ \Pi_{ij} - \varpi_{ij} &= \alpha_j \omega_i - \alpha_i \omega_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

On peut donc, d'après la remarque faite plus haut, supposer choisies les hypersphères $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ de manière qu'on ait, non seulement les équations (26), mais encore les suivantes :

$$(27) \qquad \Theta = \theta, \qquad \Pi_{ij} = \varpi_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On pourra encore, sans nuire aux équations (26) et (27), remplacer l'hypersphère B par toute autre hypersphère tangente à (S).

LES HYPERSURFACES ADMETTANT UNE REPRÉSENTATION CONFORME SUR L'HYPERSPHÈRE.

23. Cela posé, cherchons dans quel cas l'hypersurface (S) admet une représentation conforme sur une hypersphère (ou un hyperplan qui, au point de vue conforme, n'est qu'une hypersphère particulière). Il suffit pour cela de prendre pour (Σ) une hypersurface inconnue, d'associer à chacun P de ses points le système de référence le plus général et de voir si le système de Pfaff

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \Omega_1 = \omega_1, & \ldots, & \Omega_{n-1} = \omega_{n-1}, \\ \Omega_n = 0, & \Theta = \theta, & \\ \Pi_{ij} = \varpi_{ij} & (i, j = 1, 2, \ldots, n-1), & \\ \Psi_1 = 0, & \ldots, & \Psi_{n-1} = 0, \\ X = 0 & & \end{array} \right.$$

admet une solution. Dans ce système, les variables indépendantes sont celles dont dépend la position d'un point M sur (S); les fonctions inconnues sont les paramètres dont dépend le système de référence le plus général associé à un point P de (Σ). Les équations (28) expriment, les unes que (Σ) admet une représentation conforme sur (S), les autres (les n dernières) que (Σ) est une hypersphère (l'hypersphère B).

Prenons les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28); nous obtenons, en tenant compte de ces équations (28) elles-mêmes,

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{c} \Omega'_i - \omega'_i \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega'_n \equiv 0, \\ \Theta' - \theta' \equiv -\displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho (X_\rho - \chi_\rho)], \\ \Pi'_{ij} - \varpi'_{ij} \equiv [\omega_j (X_i - \chi_i)] - [\omega_i (X_j - \chi_j)] + [\psi_i \psi_j], \\ \Psi'_i \equiv 0, \\ X' \equiv 0. \end{array}\right.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, que l'hypersurface (S) ait été rapportée à ses lignes de courbure, ou, d'une manière plus précise, qu'on ait

$$\psi_i = a_i \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

L'expression trouvée pour $\Theta' - \theta'$ montre qu'on doit avoir

$$X_i - \chi_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} b_{i\rho}\omega_\rho \qquad (b_{ij} = b_{ji}),$$

puis l'expression de $\Pi'_{ij} - \varpi'_{ij}$ montre qu'on doit avoir

$$b_{ij} = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n-1),$$

de plus

$$b_{ii} + b_{jj} = a_i a_j.$$

24. Supposons d'abord $n \geqq 5$, et soient i, j, k, l quatre des indices $1, \ldots, n-1$. Les équations

$$\begin{aligned} b_{ii} + b_{kk} &= a_i a_k, \\ b_{ii} + b_{ll} &= a_i a_l, \\ b_{jj} + b_{kk} &= a_j a_k, \\ b_{jj} + b_{ll} &= a_j a_l \end{aligned}$$

conduisent à la relation

$$(a_i - a_j)(a_k - a_l) = 0.$$

Il en résulte que les a_i sont tous égaux entre eux, à l'exception d'un au plus. Si, en effet, par exemple a_1 était différent à la fois de a_2 et de a_3, les égalités

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_i) = 0,$$
$$(a_1 - a_3)(a_2 - a_i) = 0$$

montreraient que tous les autres a_i sont égaux à a_2 et à a_3, tous les a_i autres que a_1 seraient donc égaux.

Par suite ou bien l'hypersurface (S) est une hypersphère, ou bien on peut supposer $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$, c'est-à-dire (n° **21**) que *l'hypersurface* (S) *est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre.*

Réciproquement si (S) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre, on peut supposer

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

tous les b_{ij} sont nuls et il faut ajouter aux équations (28) les équations nouvelles

$$(28') \qquad X_i = \chi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on égale alors les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28′) en tenant compte des équations (28) et (28′), on trouve

$$X'_i - \chi'_i \equiv 0;$$

par suite *le système de Pfaff formé des équations* (28) *et* (28′) *est complètement intégrable* et il existe donc une infinité d'hypersphères résultant de la déformation de (S) dans l'espace conforme.

Les hypersurfaces enveloppes d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre admettent une représentation conforme sur l'hypersphère; ce sont les seules hypersurfaces jouissant de cette propriété, si n est supérieur à 4.

25. Reste le cas $n = 4$, les trois coefficients a_1, a_2, a_3 étant *distincts*. Les différences $X_i - \chi_i$ ne sont plus alors nulles nécessairement et l'on a

$$(28'')\quad \begin{cases} X_1-\chi_1=\frac{1}{2}(a_1a_2+a_1a_3-a_2a_3)\omega_1, \\ X_2-\chi_2=\frac{1}{2}(a_2a_3+a_2a_1-a_3a_1)\omega_2, \\ X_3-\chi_3=\frac{1}{2}(a_3a_1+a_3a_2-a_1a_2)\omega_3, \end{cases}$$

On est ramené à étudier le système des équations de Pfaff (28) et (28″), et à voir s'il est compatible. Il faut et il suffit pour cela que les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28″) soient égaux en tenant compte des équations (28) et (28″).

Avant de faire le calcul, remarquons que les trois équations

$$\psi_i=a_i\omega_i \qquad (i=1,2,3)$$

conduisent, en prenant les covariants bilinéaires des deux membres, aux formules

$$\begin{aligned}
&[(da_1+a_1\theta-\chi)\omega_1]+(a_1-a_2)[\varpi_{12}\omega_2]+(a_1-a_3)[\varpi_{13}\omega_3]=0,\\
&[(da_2+a_2\theta-\chi)\omega_2]+(a_2-a_3)[\varpi_{23}\omega_3]+(a_2-a_1)[\varpi_{21}\omega_1]=0,\\
&[(da_3+a_3\theta-\chi)\omega_3]+(a_3-a_1)[\varpi_{31}\omega_1]+(a_3-a_2)[\varpi_{32}\omega_2]=0.
\end{aligned}$$

Ces formules montrent que ϖ_{23}, ϖ_{31}, ϖ_{12}, $da_i+a_i\theta-\chi$ sont des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2, ω_3, et l'on trouve sans difficulté qu'on peut poser

$$(30)\quad \begin{cases}
\varpi_{23}=\dfrac{h}{a_2-a_3}\omega_1+h_3\omega_2+h'_2\omega_3,\\
\varpi_{31}=h'_3\omega_1+\dfrac{h}{a_3-a_1}\omega_2+h_1\omega_3,\\
\varpi_{12}=h_2\omega_1+h'_1\omega_2+\dfrac{h}{a_1-a_2}\omega_3;\\
da_1+a_1\theta-\chi=k_1\omega_1+(a_1-a_2)h_2\omega_2+(a_3-a_1)h'_3\omega_3,\\
da_2+a_2\theta-\chi=(a_1-a_2)h'_1\omega_1+k_2\omega_2+(a_2-a_3)h_3\omega_3,\\
da_3+a_3\theta-\chi=(a_3-a_1)h_1\omega_1+(a_2-a_3)h'_2\omega_2+k_3\omega_3.
\end{cases}$$

Cela posé, si l'on égale les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28″) en tenant compte de (28) et (28″) et en appelant pour abréger b_i les coefficients de ω_i dans les seconds membres, on obtient

$$[(db_1+2b_1\theta-a_1\chi)\omega_1]+(b_1-b_2)[\varpi_{12}\omega_2]+(b_1-b_3)[\varpi_{13}\omega_3]=0,$$
$$[(db_2+2b_2\theta-a_2\chi)\omega_2]+(b_2-b_3)[\varpi_{23}\omega_3]+(b_2-b_1)[\varpi_{21}\omega_1]=0,$$
$$[(db_3+2b_3\theta-a_3\chi)\omega_3]+(b_3-b_1)[\varpi_{31}\omega_1]+(b_3-b_2)[\omega_{32}\omega_2]=0,$$

ou, en tenant compte des formules (30),

$$(a_2-a_3)h[\omega_2\omega_3]+\frac{1}{2}\{(a_1-a_3)(a_2-a_3)(h_3+h'_3)+(a_1-a_2)k_3\}[\omega_3\omega_1]$$
$$+\frac{1}{2}\{(a_1-a_2)(a_3-a_2)(h_2+h'_2)+(a_3-a_1)k_2\}[\omega_1\omega_2]=0,$$

$$(a_3-a_1)h[\omega_3\omega_1]+\frac{1}{2}\{(a_3-a_1)(a_2-a_1)(h_1+h'_1)+(a_2-a_3)k_1\}[\omega_1\omega_2]$$
$$+\frac{1}{2}\{(a_2-a_3)(a_1-a_3)(h_3+h'_3)+(a_1-a_2)k_3\}[\omega_2\omega_3]=0,$$

$$(a_1-a_2)h[\omega_1\omega_2]+\frac{1}{2}\{(a_1-a_2)(a_3-a_2)(h_2+h'_2)+(a_3-a_1)k_2\}[\omega_2\omega_3]$$
$$+\frac{1}{2}\{(a_3-a_1)(a_2-a_1)(h_1+h'_1)+(a_2-a_3)k_1\}[\omega_3\omega_1]=0.$$

Par suite *les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'hypersurface* (S) *admette une représentation conforme sur l'hypersphère sont exprimées par les quatre relations*

$$(31)\quad\left\{\begin{array}{l} h=0,\\ (a_2-a_3)k_1-(a_3-a_1)(a_1-a_2)(h_1+h'_1)=0,\\ (a_3-a_1)k_2-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(h_2+h'_2)=0,\\ (a_1-a_2)k_3-(a_2-a_3)(a_3-a_1)(h_3+h'_3)=0.\end{array}\right.$$

26. Les formules (30) et par suite les conditions (31) peuvent être un peu simplifiées en profitant de l'indétermination relative des hypersphères A_1, A_2, A_3, qui permet d'ajouter (n° **22**) aux expressions ϖ_{ij} les quantités $\alpha_i\omega_j-\alpha_j\omega_i$; on peut alors supposer le choix de A_1, A_2, A_3 fait de manière à avoir

$$h'_1=h_1,\qquad h'_2=h_2,\qquad h'_3=h_3.$$

Les conditions cherchées s'écrivent alors

$$(31')\quad \begin{cases} h = 0, \\ k_1 = 2\,\dfrac{(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)}{a_2 - a_3}\,h_1, \\ k_2 = 2\,\dfrac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}{a_3 - a_1}\,h_2, \\ k_3 = 2\,\dfrac{(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}{a_1 - a_2}\,h_3. \end{cases}$$

La condition $h = 0$ s'interprète facilement. On a en effet

$$\omega_1' = \frac{a_2 - a_3}{(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)}\,h[\omega_2\omega_3] + [\theta\omega_1] + h_2[\omega_1\omega_2] - h_3[\omega_1\omega_3];$$

par suite, pour que l'équation $\omega_1 = 0$ soit complètement intégrable, il faut et il suffit que l'on ait $h = 0$. Dire que l'équation $\omega_1 = 0$ est complètement intégrable, c'est dire d'ailleurs que *les lignes de courbure de la deuxième et de la troisième famille s'assemblent en variétés à deux dimensions dépendant d'un paramètre*. C'est une condition nécessaire pour que l'hypersurface admette une représentation conforme sur l'hypersphère; *si elle est réalisée, les lignes de courbure de deux quelconques des trois familles s'assemblent aussi en variétés à deux dimensions dépendant d'un paramètre*.

27. Les conditions (31') sont susceptibles d'une interprétation géométrique simple. Appelons plan tangent *ombilical* en un point M de l'hypersurface un plan (à deux dimensions) tangent à l'hypersurface et coupant la quadrique indicatrice suivant un cercle. En tout point M il y a six plans tangents ombilicaux, deux réels et quatre imaginaires. *Les équations* (31') *expriment qu'il existe six familles de surfaces* (*à deux dimensions*) *tracées sur l'hypersurface et tangentes en chacun de leurs points à l'un des plans tangents ombilicaux correspondant à ce point.*

Les plans tangents ombilicaux s'obtiennent en effet en exprimant que la forme quadratique

$$a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_3^2 - S(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)$$

est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires en ω_1,

ω_2, ω_3 ; chacun de ces facteurs linéaires, égalé à zéro, donne l'équation de Pfaff de l'une des familles de surfaces cherchées.

Prenons, par exemple, le plan tangent ombilical

$$\sqrt{a_1 - a_2}\,\omega_1 - \sqrt{a_2 - a_3}\,\omega_3 = 0.$$

Si l'on exprime que l'équation précédente est complétement intégrable, on trouve la condition

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_3)k_2 + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)h_2 + \sqrt{a_1 - a_2}\sqrt{a_2 - a_3}\,h = 0.$$

L'intégrabilité complète de l'équation

$$\sqrt{a_1 - a_2}\,\omega_1 + \sqrt{a_2 - a_3}\,\omega_3 = 0$$

conduit de même à la condition

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_3)k_2 + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)h_2 - \sqrt{a_1 - a_2}\sqrt{a_2 - a_3}\,h = 0.$$

Ces conditions, comparées aux équations (31'), démontrent le théorème.

Les six plans tangents ombilicaux se distribuent en trois couples de deux, les plans tangents ombilicaux d'un même couple se coupant suivant un axe de la quadrique indicatrice. Il suffit qu'il existe quatre familles de surfaces ombilicales, les quatre plans tangents ombilicaux correspondants appartenant à trois couples différents, pour que les deux autres familles existent.

28. Cherchons en particulier toutes les hypersurfaces admettant une représentation conforme sur l'hypersphère et telles que l'une des familles réelles de surfaces ombilicales soit formée de sphères. Choisissons le système de référence de manière que la sphère correspondant à un point M de l'hypersurface soit l'intersection de l'hypersphère A et de l'hypersphère A_3, et de plus qu'on ait

$$\omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_3\psi_3 = \omega_3(2\omega_1 + m\omega_3).$$

On aura

$$\psi_1 = \omega_3, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \psi_3 = \omega_1 + m\omega_3.$$

Écrivons que, si l'on fait $\omega_3 = 0$, la sphère $[AA_3]$, intersection des hypersphères A et A_3, reste fixe; nous en déduisons que χ,

χ_3, ϖ_{13} et ϖ_{23} ne dépendent que de ω_3. On peut alors choisir A_1 et A_2 de manière à avoir

$$\varpi_{13} = 0, \qquad \varpi_{23} = 0,$$

puis

$$\chi = u\omega_3, \qquad \chi_3 = u_3\omega_3.$$

Les équations des plans tangents ombilicaux sont

$$\omega_3 = 0, \qquad 2\omega_1 + m\omega_3 = 0,$$
$$\omega_3 = S_k(\omega_1 \pm i\omega_2) \qquad (k = 1, 2),$$

où S_1 et S_2 sont les deux racines de l'équation

$$S^2 - mS - 1 = 0.$$

Si nous exprimons que l'équation

$$\omega_3 = S_k(\omega_1 + i\omega_2)$$

est complètement intégrable, nous obtenons

$$[(dS_k - iS_k\varpi_{12})(\omega_1 + i\omega_2)\omega_3] = 0,$$

d'où

$$\frac{dS_k}{S_k} - i\varpi_{12} = (\lambda_k + i\mu_k)(\omega_1 + i\omega_2) + (\rho_k + i\sigma_k)\omega_3.$$

En exprimant $S_1 S_2 = -1$, on obtient

$$\lambda_k = \mu_k = 0, \qquad \varpi_{12} = \sigma\omega_3, \qquad dm = m'\omega_3.$$

Enfin, en exprimant que l'équation

$$2\omega_1 + m\omega_3 = 0$$

est complètement intégrable, on obtient $\sigma = 0$.

Finalement on a

$$\varpi_{12} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0,$$
$$\psi_1 = \omega_3, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \psi_3 = \omega_1 + m\omega_3,$$
$$\chi = u\omega_3, \qquad \chi_3 = u_3\omega_3.$$

On en déduit, en exprimant $\varpi'_{12} = \varpi'_{13} = \varpi'_{23} = 0$,

$$\chi_1 = \frac{1}{2}\omega_1, \qquad \chi_2 = -\frac{1}{2}\omega_2, \qquad \chi_3 = \frac{1}{2}\omega_3.$$

La condition $\psi'_2 = 0$ donne ensuite

$$\chi = 0,$$

puis on a

$$\theta = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
dM &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\
dA_1 &= -\frac{1}{2}\omega_1 M - \omega_1 N + \omega_3 A, \\
dA_2 &= +\frac{1}{2}\omega_2 M - \omega_2 N, \\
dA_3 &= -\frac{1}{2}\omega_3 M - \omega_3 N + (\omega_1 + m\omega_3) A, \\
dA &= -\omega_3 A_1 - (\omega_1 + m\omega_3) A_3, \\
dN &= \frac{1}{2}\omega_1 A_1 - \frac{1}{2}\omega_2 A_2 + \frac{1}{2}\omega_3 A_3,
\end{aligned}$$

avec

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \omega'_3 = 0.$$

Pour définir les hypersurfaces ainsi obtenues, remarquons d'abord que les deux hypersphères A, A_3 dont l'intersection constitue la sphère ombilicale, font partie d'un réseau linéaire d'hypersphères

$$A, \quad A_3, \quad A_1, \quad \frac{1}{2}M + N,$$

qui est fixe, et qui admet pour base deux points fixes réels $M - 2N \pm 2A_2$. Considérons maintenant les deux hypersphères-points $A \pm iA_3$ qui passent par la sphère ombilicale; l'hypersphère $A + iA_3$ par exemple fait partie d'un faisceau linéaire *fixe* d'hypersphères points

$$A + iA_3, \qquad A_1 + i\left(\frac{1}{2}M + N\right);$$

l'autre hypersphère-point $A - iA_3$ fait partie du faisceau conjugué qui est également fixe.

La sphère, intersection des hypersphères A et A_3, est complètement déterminée par le point imaginaire $A + iA_3$, qui décrit une droite isotrope fixe et l'on peut dire que c'est la sphère réelle *associée* au point imaginaire $A + iA_3$. On obtient ainsi la génération suivante de l'hypersurface :

On considère une droite isotrope sans point réel; les points de cette droite isotrope dépendent de deux paramètres réels. On établit entre ces deux paramètres une relation arbitraire;

l'hypersurface cherchée est engendrée par la sphère réelle variable associée au point imaginaire variable ainsi obtenu.

Si l'on transporte à l'infini l'un des points de base du réseau linéaire d'hypersphères $\left(A,\ A_3,\ A_4,\ \frac{1}{2}M+N\right)$, l'équation de l'hypersurface est de la forme

$$F(x_1x_3+x_2x_4,\ x_1x_4-x_2x_3,\ x_1^2+x_2^2)=0,$$

F étant homogène.

GÉNÉRALITÉS SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DANS L'ESPACE A $n \geqq 5$ DIMENSIONS.

29. Reprenons le problème général de la recherche des hypersurfaces (Σ) admettant une représentation conforme sur une hypersurface donnée (S). Comme nous l'avons déjà vu, ce problème revient à l'intégration du système de Pfaff

$$(32)\quad \begin{cases} \Omega_i = \omega_i & (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\\ \Omega_n = 0, & \\ \Theta = \theta, & \\ \Pi_{ij}=\varpi_{ij} & (i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \end{cases}$$

Si l'on égale les covariants bilinéaires des deux membres de ces équations, en tenant compte de ces équations elles-mêmes, on trouve, d'après (24),

$$(33)\quad \begin{cases} \Omega'_i-\omega'_i\equiv 0,\\ \Omega'_n \equiv [\omega_1\Psi_1]+[\omega_2\Psi_2]+\ldots+[\omega_{n-1}\Psi_{n-1}],\\ \Theta'-\theta' \equiv -[\omega_1(X_1-\chi_1)]-[\omega_2(X_2-\chi_2)]-\ldots-[\omega_{n-1}(X_{n-1}-\chi_{n-1})],\\ \Pi'_{ij}-\varpi'_{ij}\equiv[\omega_j(X_i-\chi_i)]-[\omega_i(X_j-\chi_j)]-[\Psi_i\Psi_j]+[\psi_i\psi_j]. \end{cases}$$

La valeur de Ω'_n conduit à poser

$$(34)\quad \Psi_i=v_{i1}\omega_1+v_{i2}\omega_2+\ldots+v_{i,n-1}\omega_{n-1}\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

avec

$$v_{ij}=v_{ji};$$

la valeur de $\Theta'-\theta'$ conduit à poser

$$(35)\quad X_i=\chi_i+u_{i1}\omega_1+u_{i2}\omega_2+\ldots+u_{i,n-1}\omega_{n-1}\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

avec

$$u_{ij} = u_{ji};$$

enfin la valeur de $\Pi'_{ij} - \varpi'_{ij}$ conduit, en tenant compte de (25), aux relations suivantes :

$$(36) \quad \begin{cases} u_{ii} + u_{jj} = v_{ij}^2 - v_{ii} v_{jj} + a_i a_j, \\ u_{ij} \quad = v_{ik} v_{jk} - v_{ij} v_{kk} \qquad (i \neq j \neq k), \\ \text{o} \quad\;\; = v_{ik} v_{jl} - v_{il} v_{jk} \qquad (i \neq j \neq k \neq l). \end{cases}$$

Cela posé, nous avons trois cas à distinguer :

a. Deux au moins des coefficients v_{ij} $(i \neq j)$ sont différents de zéro ;

b. Un seul de ces coefficients est différent de zéro ;

c. Tous ces coefficients sont nuls.

30. Dans le cas *a*, on peut supposer que v_{12} et v_{13} par exemple ne sont pas nuls. Si, par exemple, les deux coefficients différents de zéro n'avaient aucun indice commun, comme v_{12} et v_{34}, la formule

$$v_{12} v_{34} = v_{13} v_{24}$$

montre que v_{13} ou v_{24} serait différent de zéro.

Soit donc $v_{12} v_{13} \neq$ o. Les formules

$$v_{1i} v_{2j} = v_{1j} v_{2i} \qquad (i, j = 3, \ldots, n - \text{1})$$

permettent de poser

$$\begin{aligned} v_{1i} &= a v_i, \\ v_{2i} &= b v_i \qquad (i = 3, \ldots, n - \text{1}), \end{aligned}$$

en désignant par a et b deux coefficients dont le rapport seul,

$$\frac{b}{a} = \frac{v_{23}}{v_{13}},$$

est déterminé. On a alors

$$v_{12} v_{ij} = v_{1i} v_{2j} = ab\, v_i v_j;$$

comme le produit ab peut être remplacé par abk^2, on peut choisir k de manière que v_{12} soit égal à $\pm ab$. En posant alors

$a = v_1$, $b = v_2$, on a

$$v_{ij} = \varepsilon v_i v_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

avec

$$\varepsilon^2 = 1, \qquad v_1 v_2 v_3 \neq 0.$$

Les formules (36) donnent alors

$$u_{ij} = v_i v_j (v_k^2 - \varepsilon v_{kk}),$$

d'où

$$v_i v_j [v_k^2 - \varepsilon v_{kk} - (v_l^2 - \varepsilon v_{ll})] = 0;$$

en faisant successivement $i = 1$, $j = 2$, $l = 3$, puis $i = 1$, $j = 3$, $l = 2$, on voit que les $n - 1$ expressions $v_{kk} - \varepsilon v_k^2$ sont toutes égales entre elles. Comme d'autre part on peut choisir l'hypersphère B de manière à augmenter tous les v_{ii} d'une même quantité, on voit qu'on peut poser

$$v_{ii} = \varepsilon v_i^2.$$

Mais alors l'expression

$$\omega_1 \Psi_1 + \omega_2 \Psi_2 + \ldots + \omega_{n-1} \Psi_{n-1}$$

devient un carré parfait, et par suite l'hypersurface (Σ) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre. L'hypersurface (S) admet donc une représentation conforme sur l'hypersphère, cas que nous avons déjà traité.

31. Supposons-nous maintenant dans le cas *b* où v_{12}, par exemple, est le seul coefficient v_{ij} qui ne soit pas nul. Les formules (36) donnent alors

$$u_{12} = -v_{12} v_{ii} \qquad (i = 3, \ldots, n-1),$$

ce qui montre que les coefficients $v_{33}, v_{44}, \ldots, v_{n-1,n-1}$ sont tous égaux entre eux et par suite, par un choix convenable de l'hypersphère B, peuvent être supposés nuls. Il reste donc les trois coefficients v_{11}, v_{22}, v_{12} qui ne soient pas nécessairement nuls; par suite, la forme quadratique

$$\omega_1 \Psi_1 + \omega_2 \Psi_2 + \ldots + \omega_{n-1} \Psi_{n-1}$$

est réductible à une somme de deux carrés et *l'hypersurface* (Σ) *est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres.*

En continuant à appliquer les formules (36), on trouve

$$\begin{aligned}
u_{ij} &= 0 \qquad (i \neq j = 1, \ldots, n-1),\\
u_{11} + u_{22} &= v_{12}^2 - v_{11}v_{22} + a_1 a_2,\\
u_{11} + u_{ii} &= a_1 a_i,\\
u_{22} + u_{ii} &= a_2 a_i,\\
u_{ii} + u_{jj} &= a_i a_j.
\end{aligned}$$

Supposons d'abord $a_1 \neq a_2$; la formule

$$u_{11} - u_{22} = (a_1 - a_2) a_i$$

montre que les coefficients $a_3, \ldots, a_{n-1}$ sont égaux entre eux, et par suite peuvent être supposés nuls par un choix convenable de l'hypersphère A; alors u_{11}, u_{22} et tous les u_{ii} sont nuls et l'on a

$$v_{11}v_{22} - v_{12}^2 = a_1 a_2.$$

L'hypersurface (S) *est elle aussi l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres* et de plus *les caractéristiques des hypersphères sont conservées par la déformation dans l'espace conforme.*

Dans ce cas, la recherche des hypersurfaces (Σ) revient à l'intégration d'un système de Pfaff obtenu en adjoignant aux équations (32) les suivantes :

$$(32') \qquad \begin{cases} \Psi_i = 0 & (i = 3, 4, \ldots, n-1),\\ X_i = \chi_i & (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Avant d'examiner ce nouveau système, plaçons-nous dans le cas laissé de côté où $a_1 = a_2$; on peut supposer $a_1 = a_2 = 0$; par suite,

$$u_{11} = u_{22} = -u_{ii} = \frac{1}{2}(v_{12}^2 - v_{11}v_{22}) = -\frac{1}{2}a_i a_j \qquad (i, j = 3, \ldots, n-1).$$

Si l'un des a_i ($i \geqq 3$) est nul, ils sont tous nuls, à l'exception d'un au plus; par suite, l'hypersurface (S) est une hypersphère ou l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre, cas déjà traité. Si aucun des a_i ($i \geqq 3$) n'est nul, et si $n \geqq 6$, ces a_i sont tous égaux entre eux; on peut les supposer nuls, $a_1 a_2$ *n'étant plus nul;* on retombe sur la même conclusion que pour $a_1 \neq a_2$. Si enfin aucun des a_i n'est nul, n étant égal à 5, *l'hypersurface* (S) *est, ainsi que l'hypersurface* (Σ), *l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres, mais les caractéristiques de ces hypersphères ne se correspondent pas dans la représentation conforme;* on a

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \psi_3 = a_3\omega_3, \qquad \psi_4 = a_4\omega_4,$$

$$\Psi_1 = v_{11}\omega_1 + v_{12}\omega_2, \qquad \Psi_2 = v_{12}\omega_1 + v_{22}\omega_2, \qquad \Psi_3 = 0, \qquad \Psi_4 = 0,$$

$$X_1 - \chi_1 = -\frac{1}{2}a_3 a_4\omega_1, \qquad X_3 - \chi_3 = \frac{1}{2}a_3 a_4\omega_3,$$

$$X_2 - \chi_2 = -\frac{1}{2}a_3 a_4\omega_2, \qquad X_4 - \chi_4 = \frac{1}{2}a_3 a_4\omega_4,$$

$$v_{11}v_{22} - v_{12}^2 = a_3 a_4.$$

En résumé, dans le cas b, abstraction faite du cas des hypersurfaces admettant une représentation conforme sur l'hypersphère, chacune des hypersurfaces (S) et (Σ) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres, les caractéristiques de ces hypersphères se correspondant par la représentation conforme. Exception possible dans le cas $n = 5$, où les caractéristiques peuvent ne pas se correspondre.

32. Supposons enfin qu'on soit dans le cas c, où les v_{ij} $(i \neq j)$ sont tous nuls. Dans ce cas, *les lignes de courbure se correspondent par la représentation conforme;* on a de plus, d'après (36),

$$u_{ij} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$u_{ii} + u_{jj} = a_i a_j - v_{ii}v_{jj}.$$

De là on tire, i, j, k, l étant quatre indices différents quelconques,

$$(v_{ii} - v_{jj})(v_{kk} - v_{ll}) = (a_i - a_j)(a_k - a_l).$$

Cherchons d'abord si à deux coefficients a_i égaux peuvent correspondre deux coefficients v_{ii} distincts; supposons

$$a_1 = a_2, \qquad v_{11} \neq v_{22};$$

on aurait alors

$$v_{33} = v_{44} = \ldots = v_{n-1,\, n-1}$$

et la valeur commune de ces coefficients pourrait être supposée nulle; on peut, d'autre part, supposer $a_1 = a_2 = 0$; on aurait alors

$$u_{11} = u_{22} = - u_{ii} = - \frac{1}{2} v_{11} v_{22} = - \frac{1}{2} a_i a_j$$

et l'on retomberait sur la discussion faite dans le cas b.

Supposons donc qu'à deux coefficients a_i égaux correspondent deux coefficients v_{ii} égaux. Supposons d'abord que les $n - 1$ coefficients a_i ne soient pas tous distincts, que par exemple

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p,$$

$a_{p+1}, \ldots, a_{n-1}$ étant tous différents de a_1; si $p = n - 2$, l'hypersurface (S) admet une représentation conforme sur l'hypersphère. Si $p = n - 3$, elle est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres; il en est de même de (Σ) et les caractéristiques des hypersphères se correspondent. Si enfin $p < n - 3$, on peut supposer

$$a_1 = \ldots = a_p = 0,$$
$$v_{11} = \ldots = v_{pp} = 0;$$

par suite

$$\begin{aligned} &u_{ii} + u_{jj} = 0, \\ &u_{ii} + u_{\alpha\alpha} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n-1), \\ &u_{jj} + u_{\alpha\alpha} = 0; \end{aligned}$$

donc tous les u_{ii}, $u_{\alpha\alpha}$ sont nuls et

$$v_{\alpha\alpha} v_{\beta\beta} = a_\alpha a_\beta,$$

d'où enfin

$$v_{ii} = \varepsilon a_i \qquad (\varepsilon^2 = 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dans ce cas en changeant au besoin B en — B, on peut supposer $\varepsilon = 1$; on a donc

$$\Psi_i = \psi_i, \qquad X_i = \chi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

d'où l'on déduit

$$[\omega_i (X - \chi)] = 0$$

et enfin

$$X = \chi;$$

les deux hypersurfaces (S) et (Σ) *résultent donc l'une de l'autre par une transformation conforme;* ce sont, à notre point de vue, des hypersurfaces identiques.

Reste le cas où les coefficients a_i sont tous distincts, ainsi que les coefficients v_{ii}; les formules

$$(v_{ii} - v_{jj})(v_{kk} - v_{ll}) = (a_i - a_j)(a_k - a_l)$$

entraînent comme conséquence que le rapport anharmonique de quatre quelconques des a_i est égal à celui des quatre v_{ii} correspondants ; on a donc

$$v_{ii} = \frac{\alpha a_i + \beta}{\gamma a_i + \delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\gamma a_i + \delta)(\gamma a_j + \delta)(\gamma a_k + \delta)(\gamma a_l + \delta).$$

Si $n - 1 > 4$, il en résulte que les expressions $\gamma a_i + \delta$ sont toutes égales entre elles, et que par suite γ est nul ; on a donc

$$v_{ii} = \alpha a_i + \beta$$

et l'on peut, en choisissant B convenablement, supposer $\beta = 0$; on a de plus $\alpha^2 = 1$, d'où

$$v_{ii} = \varepsilon a_i ;$$

on retombe sur la conclusion précédente.

Le dernier cas qui reste à examiner est donc celui où $n = 5$, avec

$$v_{ii} = \frac{\alpha a_i + \beta}{\gamma a_i + \delta},$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\gamma a_1 + \delta)(\gamma a_2 + \delta)(\gamma a_3 + \delta)(\gamma a_4 + \delta) \qquad (\gamma \neq 0).$$

Dans ce cas, que je me réserve d'étudier dans un autre mémoire, la déformation de l'hypersurface (S) se fait avec conservation des lignes de courbure. Il est facile de vérifier que chacune des équations

$$\omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'*on peut exprimer paramétriquement les coordonnées d'un point de l'hypersurface de manière que les lignes de courbure de chaque famille s'obtiennent en laissant fixes trois des paramètres et en faisant varier le quatrième.*

En dehors des hypersurfaces précédentes, les seules hypersurfaces (S) *qui, dans un espace à* $n \geqq 5$ *dimensions, admettent une représentation conforme sur une hypersurface* (Σ) *qui ne* *résulte pas de (S) par une transformation conforme, sont les hypersphères et les enveloppes d'hypersphères à un ou deux paramètres. Dans ce dernier cas, il y a conservation des caractéristiques, sauf exception possible pour $n = 5$.*

LES HYPERSURFACES ENVELOPPES D'HYPERSPHÈRES DÉPENDANT DE DEUX PARAMÈTRES.

33. Soit (S) une hypersurface enveloppe d'hypersphères dépendant de deux paramètres. Nous pouvons choisir pour A l'hypersphère dont (S) est l'enveloppe et supposer en même temps choisies A_1 et A_2 de manière à avoir

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \psi_i = 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \chi = 0. & \end{array}\right.$$

Les expressions ψ_1 et ψ_2 seront des combinaisons linéaires indépendantes de ω_1 et ω_2; c'est tout ce que nous supposons provisoirement. Les équations (37) entraînent comme conséquence, en prenant les covariants bilinéaires,

$$\begin{array}{ll} [\varpi_{1i}\psi_1] + [\varpi_{2i}\psi_2] = 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ [\chi_1\ \psi_1] + [\chi_2\ \psi_2] = 0, & \end{array}$$

ce qui permet d'écrire

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \varpi_{1i} = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, & \\ \varpi_{2i} = \gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \chi_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, & \\ \chi_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2. & \end{array}\right.$$

D'après les résultats du n° **30**, la recherche des hypersurfaces (Σ) admettant une représentation conforme sur (S) revient, sauf exception sur laquelle nous reviendrons plus loin, à l'intégration du système

$$(39)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Omega_i = \omega_i & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega_n = 0, & \\ \Theta = \theta, & \\ \Pi_{ij} = \varpi_{ij} & (i, j = 1, 2, \ldots, n-1), \\ X_i = \chi_i & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Psi_i = 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \end{array}\right.$$

auquel il faut ajouter l'équation

$$(39') \qquad X = 0,$$

car on a, en tenant compte de (39),

$$X'_1 - \chi'_1 \equiv [\Psi_1 X],$$
$$X'_2 - \chi'_2 \equiv [\Psi_2 X],$$

ce qui montre que, pour toute solution de (39), l'équation (39') est vérifiée.

Pour étudier le système de Pfaff (39), (39'), égalons les covariants bilinéaires des deux membres de ces équations en tenant compte de ces équations elles-mêmes. Nous obtenons

$$(40) \begin{cases} \Omega'_i - \omega'_i \equiv 0 & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega'_n \equiv [\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2], & \\ \theta' - \theta' \equiv 0, & \\ \Pi'_{12} - \pi'_{12} \equiv -[\Psi_1 \Psi_2] + [\psi_1 \psi_2], & \\ \Pi'_{1i} - \varpi'_{1i} \equiv 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \Pi'_{2i} - \varpi'_{2i} \equiv 0, & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \Pi'_{ij} - \varpi'_{ij} \equiv 0, & \\ X'_i - \chi'_i \equiv 0 & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Psi'_i \equiv -[\varpi_{1i} \Psi_1] - [\varpi_{2i} \Psi_2] & (i = 3, \ldots, n-1), \\ X' \equiv [\chi_1 \Psi_1] + [\chi_2 \Psi_2]. & \end{cases}$$

Cela posé il y a plusieurs cas à distinguer suivant le nombre de ceux des seconds membres qui sont linéairement indépendants. Les formules (38) montrent que ce nombre est au plus 5, et même 4; car s'il était égal à 5, on devrait avoir, pour toute solution du système,

$$[\omega_1 \Psi_1] = [\omega_2 \Psi_1] = [\omega_1 \Psi_2] = [\omega_2 \Psi_2] = 0,$$

ce qui donnerait

$$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,$$

conséquence absurde.

S'il y a quatre seconds membres linéairement indépendants, pour toute solution du système Ψ_1 et Ψ_2 sont des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2 dont les coefficients sont déterminés, au signe près; par suite on a

$$\Psi_1 = \varepsilon \psi_1, \qquad \Psi_2 = \varepsilon \psi_2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

et, en changeant au besoin le signe de B, on verrait que le déplacement instantané du système de référence a les mêmes composantes relatives pour (S) et (Σ), par suite *les deux hypersurfaces résultent l'une de l'autre par une transformation conforme.*

Reste donc à examiner deux cas :

1° Celui où tous les mineurs à deux lignes et deux colonnes du Tableau

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix} \right\|$$

sont nuls (hypersurfaces de la première catégorie);

2° Celui où tous les mineurs d'ordre 2 ne sont pas nuls, tous les mineurs d'ordre 3 étant nuls (hypersurfaces de la seconde et de la troisième catégorie).

LES HYPERSURFACES DE LA PREMIÈRE CATÉGORIE.

34. Dans le premier cas on a

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \delta_i, \qquad \beta_i = \gamma_i = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ &\alpha = \delta, \qquad \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Par un choix convenable de $A_3, \ldots, A_{n-1}$ on peut retrancher de ϖ_{1i} et ϖ_{2i} respectivement $\alpha_i\omega_1$ et $\alpha_i\omega_2$; on aura donc

$$(38') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varpi_{1i} = \varpi_{2i} = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ &\chi_1 = \frac{1}{2} k\,\omega_1, \\ &\chi_2 = \frac{1}{2} k\,\omega_2. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on remplace l'hypersphère-point M par λM, ω_i est remplacé par $\lambda\omega_i$ et χ_i par $\frac{1}{\lambda}\chi_i$. Si donc k n'est pas nul, on peut le supposer égal à ± 1, ou du moins à une constante dont le signe est déterminé d'avance; si k est nul, l'hypersphère-point n'est pas complètement déterminée.

De (38′) on déduit, au moyen des formules (24),

$$-\left[\omega_1\left(\chi_i+\frac{k}{2}\omega_i\right)\right]=0,$$
$$-\left[\omega_2\left(\chi_i+\frac{k}{2}\omega_i\right)\right]=0,$$

d'où

(41) $$\chi_i=-\frac{k}{2}\omega_i \qquad (i=3, \ldots, n-1);$$

puis

$$k[\theta\omega_1]=0,$$
$$k[\theta\omega_2]=0,$$

d'où

(42) $$k\theta=0,$$

et enfin, si $k=0$, d'après (24), (38′) et (41),

$$\theta'=0.$$

35. Les hypersurfaces (S) qui satisfont aux conditions précédentes sont faciles à déterminer géométriquement. Supposons d'abord $k\neq 0$ et partons des formules, déduites de (23),

(43) $$\begin{cases} dM = \omega_1 A_1+\omega_2 A_2+\displaystyle\sum_{i=3}^{i=n-1}\omega_i A_i, \\ dA=-\psi_1 A_1-\psi_2 A_2, \\ dA_1=-\omega_1\left(N+\dfrac{k}{2}M\right)+\varpi_{12}A_2+\psi_1 A, \\ dA_2=-\omega_2\left(N+\dfrac{k}{2}M\right)+\varpi_{21}A_1+\psi_2 A, \\ dA_i=-\omega_i\left(N-\dfrac{k}{2}M\right)+\displaystyle\sum_{j=3}^{j=n-1}\varpi_{ij}A_j, \\ dN=\dfrac{k}{2}(\omega_1 A_1+\omega_2 A_2)-\dfrac{k}{2}\displaystyle\sum_{i=3}^{i=n-1}\omega_i A_i. \end{cases}$$

Comparées aux formules (19), elles montrent que

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\sum_{i=3}^{i=n-1}\omega_i^2$$

est le ds^2 de l'hypersurface dans la métrique correspondant à la décomposition de l'espace conforme en deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques, le premier formé de variétés sphériques à trois dimensions considérées comme des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) de courbure k; le second formé de variétés sphériques à $n-3$ dimensions considérées comme des espaces (pseudo-sphériques ou sphériques) de courbure $-k$. De plus chaque variété du second réseau appartient tout entière à l'hypersurface (S), chaque variété du premier réseau ayant en commun avec l'hypersurface une variété à deux dimensions, ou *surface* (s); l'hypersurface (S) est engendrée par les variétés du second réseau (variétés génératrices) qui passent par les différents points de l'une de ces surfaces (s_0). Toutes les surfaces (s), considérées comme situées dans des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) à 3 dimensions, sont par cela même égales entre elles, deux points homologues de deux surfaces (s) et (s') étant sur la même variété sphérique génératrice.

L'hypersurface (Σ) admet une génération analogue avec deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques de mêmes courbures k et $-k$, les variétés du premier réseau coupant (Σ) suivant une surface (σ). *Pour l'applicabilité, dans l'espace conforme, de* (S) *et* (Σ), *il faut que les deux surfaces* (s) *et* (σ), *considérées comme des surfaces d'un espace (sphérique ou pseudo-sphérique) à* 3 *dimensions, soient applicables l'une sur l'autre, et cela suffit.* On aperçoit du reste immédiatement la représentation conforme la plus générale de (S) ou (Σ) : elle dépend de l'application de (s) sur (σ) et en outre d'un groupe à $\frac{(n-3)(n-2)}{2}$ paramètres, celui qui laisse invariantes, dans l'espace conforme de (Σ), les variétés sphériques du second réseau (groupe des déplacements d'un espace pseudo-sphérique ou sphérique à $n-3$ dimensions).

Le ds^2 commun de (S) et de (Σ) est du reste la somme d'un ds^2 arbitraire à 2 variables et d'un ds^2 de courbure $-k$ à $n-3$ variables.

Remarquons enfin qu'on peut choisir les coordonnées $(n+2)$ — sphériques fixes de l'espace conforme, de manière que l'équation de la surface soit de la forme

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

le premier membre étant homogène : il suffit pour cela que les équations des variétés sphériques du second réseau soient

$$\frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2} = \frac{x_3}{c_3} = \frac{x_4}{c_4}.$$

36. Passons maintenant au cas $k = 0$. On a alors

$$(44)\quad \begin{cases} dM = \theta M + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \sum_{i=3}^{i=n-1} \omega_i A_i, \\ dA = -\psi_1 A_1 - \psi_2 A_2, \\ dA_1 = -\omega_1 N + \varpi_{12} A_2 + \psi_1 A, \\ dA_2 = -\omega_2 N + \varpi_{21} A_1 + \psi_2 A, \\ dA_i = -\omega_i N + \sum_{j=3}^{j=n-1} \varpi_{ij} A_j, \\ dN = -\theta N. \end{cases}$$

Ces formules, comparées aux formules (21), montrent que, au besoin par une inversion, l'hypersurface (S) est susceptible de la génération suivante. On considère deux réseaux orthogonaux de variétés planes parallèles, les unes à 3 dimensions, les autres à $n - 3$ dimensions. On prend dans l'une des variétés du premier réseau une surface (s); l'hypersurface (S) est engendrée par les variétés du second réseau qui passent par les différents points de cette surface. L'hypersurface (Σ) admet une génération analogue.

En posant $\theta = \dfrac{du}{u}$, on a vu que le ds^2 de l'hypersurface (S) dans l'espace euclidien était, *à un facteur constant près*,

$$\frac{1}{u^2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sum_{i=3}^{i=n-1} \omega_i^2\right);$$

il en est de même pour (Σ). Il en résulte que les deux surfaces (s) et (σ), considérées comme des surfaces d'un espace euclidien à trois dimensions, ont des ds^2 différant seulement par un facteur constant; *la surface (σ) est donc applicable sur (s) ou sur une homothétique de (s) : c'est la condition nécessaire et suffisante pour que (Σ) admette une représentation conforme sur* (S).

On peut choisir les coordonnées rectangulaires de l'espace euclidien à n dimensions de manière que l'équation de (S) soit de la forme

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

et le ds^2 de (S) est la somme d'un ds^2 arbitraire à deux variables et d'un ds^2 de courbure nulle à $n - 3$ variables.

LES HYPERSURFACES DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE.

37. Arrivons maintenant au cas où les mineurs du deuxième degré de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_3 - \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \alpha_{n-1} - \delta_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ \alpha - \delta & \beta & \gamma \end{matrix} \right\|$$

sont tous nuls. Cela revient à dire que les équations homogènes et du second degré

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_1 \varpi_{2i} - \omega_2 \varpi_{1i} = 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \omega_1 \chi_2 - \omega_2 \chi_1 = 0 & \end{array} \right.$$

se réduisent à une seule, sans être toutes des identités. Nous allons supposer d'abord que le premier membre de cette équation unique est un carré parfait que nous pouvons supposer ω_1^2. Nous aurons donc

$$\begin{array}{lll} \beta_i = 0, & \delta_i = \alpha_i & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \beta = 0, & \delta = \alpha. & \end{array}$$

Comme dans le premier cas on peut choisir $A_3, \ldots, A_{n-1}$ de manière à annuler tous les coefficients α_i. Il restera donc

$$(46) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \varpi_{1i} = 0, & \varpi_{2i} = \gamma_i \omega_1 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \chi_1 = \alpha \omega_1, & \chi_2 = \gamma \omega_1 + \alpha \omega_2. & \end{array} \right.$$

Les formules (40) montrent qu'on a alors

$$\begin{array}{l} [\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2] = 0, \\ [\omega_1 \Psi_2] \hphantom{+ [\omega_2 \Psi_2]} = 0, \\ [\Psi_1 \Psi_2] - [\psi_1 \psi_2] = 0, \end{array}$$

et, par suite,

$$\Psi_1 = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,$$
$$\Psi_2 = \mu\omega_1,$$
$$[\psi_1\psi_2] = -\mu^2[\omega_1\omega_2];$$

le coefficient μ est donc un invariant, c'est-à-dire a la même valeur pour (S) et pour (Σ); autrement dit on peut ajouter aux équations (39) et (39′) la nouvelle équation

$$(39'') \qquad \Psi_2 = \psi_2.$$

Si l'on calcule les covariants bilinéaires des deux membres des équations (39), (39′) et (39″) en tenant compte de ces équations elles-mêmes et si l'on néglige d'écrire les résultats quand ils sont identiques, on obtient

$$(40') \qquad \begin{cases} \Omega'_n \equiv [\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{12} - \varpi'_{12} \equiv [\psi_2(\Psi_1 - \psi_1)], \\ X' \equiv \alpha[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Psi'_2 - \psi'_2 \equiv -[\varpi_{12}(\Psi_1 - \psi_1)]. \end{cases}$$

Or prenons les covariants bilinéaires des deux membres des premières équations (46), nous trouvons

$$[(\alpha\omega_i + \chi_i + \gamma_i\varpi_{12})\omega_1] = 0,$$
$$[(\alpha\omega_i + \chi_i - \gamma_i\varpi_{12})\omega_2] + \left[\left(\gamma\omega_i - \sum_{\rho=3}^{\rho=n-1}\gamma_\rho\varpi_{\rho i} - \gamma_i\theta - d\gamma_i\right)\omega_1\right] = 0;$$

cette dernière équation montre que les γ_i ne peuvent pas être tous nuls, sans quoi γ serait nul aussi, contrairement à l'hypothèse; les deux équations montrent ensuite que $\alpha\omega_i + \chi_i$ et $\gamma_i\varpi_{12}$ ne dépendent que de ω_1 et ω_2. L'expression ϖ_{12} ne dépend donc que de ω_1 et ω_2 :

$$(47) \qquad \varpi_{12} = h\omega_1 + k\omega_2.$$

Si k n'est pas nul, les formules (40′) montrent qu'on doit avoir

$$\Psi_1 - \psi_1 = 0;$$

par suite l'hypersuface (Σ) résulte de (S) par une simple transformation conforme.

Considérons donc le cas $k = 0$. S'il en est ainsi les formules (40′)

montrent qu'il existe une infinité d'hypersurfaces (Σ) admettant une représentation conforme sur (S) sans en résulter par une transformation conforme, et que ces hypersurfaces dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

38. Il est facile de caractériser ces hypersurfaces (S), que nous appellerons *hypersurfaces de la seconde catégorie*. Remarquons d'abord en effet que l'équation $\omega_1 = 0$ est complètement intégrable, car on a, d'après (24), (46), (47) et l'hypothèse $k = 0$,

$$\omega_1' = [\theta\,\omega_1] + h[\omega_1\,\omega_2].$$

Cette équation définit donc sur (S) une famille de variétés à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Il est facile de voir que *ces variétés sont sphériques*. En effet quand on se déplace sur une de ces variétés, c'est-à-dire quand on fait $\omega_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} dA &= -\psi_1 A_1, \\ dA_1 &= \psi_1 A; \end{aligned}$$

la variété sphérique, intersection de A_1 et A, reste donc fixe.

Réciproquement, *si une hypersurface* (S) *est le lieu d'une variété sphérique à* $n-2$ *dimensions dépendant d'un paramètre, elle est de la seconde catégorie*. En effet toute hypersphère contenant cette variété est tangente. Si on la choisit pour hypersphère A, cette hypersphère ne dépend que de deux paramètres. Si alors on choisit pour A_1 l'hypersphère orthogonale à A contenant la variété, il faut que l'intersection de A_1 et A ne dépende que d'un paramètre. Or

$$d[A_1 A] = -\chi_1[MA] - \omega_1[NA] + \sum_{\rho=2}^{\rho=n-1} \varpi_{1\rho}[A_\rho A] + \chi[MA_1] - \psi_2[A_1 A_2];$$

il faut donc que toutes les expressions ω_1, χ_1, $\varpi_{1\rho}$, χ, ψ_2 ne dépendent linéairement que d'une seule d'entre elles :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \alpha\,\omega_1, \\ \varpi_{1i} &= \alpha_i\,\omega_1, \\ \psi_2 &= \mu\,\omega_1, \\ \chi &= a\,\omega_1. \end{aligned}$$

On peut déjà supposer a nul en choisissant convenablement A_2, puis $\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ nuls en choisissant convenablement $A_3, \ldots, A_{n-1}$. Les formules

$$[\omega_1 \ \psi_1] + [\omega_2 \ \psi_2] = 0,$$
$$[\varpi_{1i} \psi_1] + [\varpi_{2i} \psi_2] = 0,$$
$$[\chi_1 \ \psi_1] + [\chi_2 \ \psi_2] = 0$$

conduisent alors facilement aux équations (46); comme on a d'autre part $\varpi_{12} = \alpha_2 \omega_1$, le théorème est démontré.

Les hypersurfaces lieux d'une variété sphérique à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre admettent donc dans l'espace conforme une déformation dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument; les variétés sphériques génératrices se conservent dans la déformation.

Chaque variété génératrice $[A_1 A]$ a comme caractéristique une variété à $n-4$ dimensions, formée des points qui lui sont communs à A_2 et $N + \alpha M$; cette caractéristique est une variété sphérique. Les choses se passent de la même manière pour (Σ), les caractéristiques des variétés génératrices se correspondant dans la représentation conforme.

On peut ajouter que les composantes du déplacement instantané du système de référence de (Σ) sont connues sans intégration; la seule inconnue est en effet Ψ_1 ; or $\Psi_1 - \psi_1$ est de la forme $\lambda\omega_1$, c'est-à-dire $f(t)\,dt$, en désignant par t le paramètre dont dépend la variété génératrice et par $f(t)$ une fonction *arbitraire* de t.

Au contraire il est impossible d'avoir sans signe d'intégration l'équation générale de (Σ), lorsqu'on se donne l'équation de (S).

LES HYPERSURFACES DE LA TROISIÈME CATÉGORIE.

39. Arrivons enfin au cas où les équations (45) se réduisent à une seule, dont le premier membre ne soit pas un carré parfait. Ce cas est celui où il existe deux familles de variétés sphériques $[A_1 A_2 A]$ admettant une enveloppe, ou d'une manière plus précise jouissant de la propriété que chaque variété de la famille ait avec la variété infiniment voisine une variété commune à $n-4$ dimensions.

Si, en effet, on exprime que l'hypersphère-point

$$x_{n+1} M + x_3 A_3 + \ldots + x_{n-1} A_{n-1} + x_{n+2} N$$

appartient aux hypersphères dA_1, dA_2, dA, on obtient

$$-\omega_1 x_{n+1} - \chi_1 x_{n+2} + \sum_{\rho=3}^{\rho=n-1} \varpi_{1\rho} x_\rho = 0,$$

$$-\omega_2 x_{n+1} - \chi_2 x_{n+2} + \sum_{\rho=3}^{\rho=n-1} \varpi_{2\rho} x_\rho = 0;$$

pour que ces équations en x_i se réduisent à une seule il faut que les équations (45) se réduisent à une, et cette équation unique donne les valeurs qu'il faut attribuer au rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ pour que la propriété énoncée ait lieu.

Supposons alors qu'on ait choisi les paramètres u et v, dont dépend l'hypersphère A, de manière que les deux familles considérées soient $u =$ const. et $v =$ const. Il est facile de voir que l'hypersphère A satisfera à une équation de Laplace de la forme

$$(48) \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial A}{\partial v} + \gamma A = 0.$$

On peut du reste le vérifier par le calcul.

Soit en effet

$$(\omega_2 - p\omega_1)(\omega_2 - q\omega_1) = 0$$

l'équation qui admet pour intégrales $u =$ const., $v =$ const.; on peut poser

$$(49) \qquad \begin{cases} \omega_1 = a\, du + b\, dv, \\ \omega_2 = pa\, du + qb\, dv, \end{cases}$$

puis

$$(50) \qquad \begin{cases} \varpi_{1i} = a_i\, du + b_i\, dv, \\ \varpi_{2i} = pa_i\, du + qb_i\, dv, \\ \chi_1 = a'\, du + b'\, dv, \\ \chi_2 = pa'\, du + qb'\, dv. \end{cases}$$

On a enfin

$$(51) \qquad \begin{cases} \psi_1 = -qm\, du - pn\, dv, \\ \psi_2 = m\, du + n\, dv. \end{cases}$$

Ajoutons qu'on peut toujours choisir l'hypersphère A_1 de manière qu'elle ne dépende que de u et de v; il en sera de même évidemment de A_2; les coefficients de du, dv dans ψ_1 et ψ_2 ne dépendront alors que de u, v; les quantités m, n, p, q sont donc des fonctions de u et v seulement; de plus les expressions de Pfaff qui se présentent dans les expressions de dA_1 et de dA_2 sont des combinaisons linéaires de du et de dv.

Cela posé on a, d'après (23), (49), (50), (51),

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial u} = -m(A_2 - qA_1), \\ \dfrac{\partial A}{\partial v} = -n(A_2 - pA_1); \end{cases}$$

d'autre part les formules

$$(53)\qquad \begin{cases} dA_1 = -(a'\,du + b'\,dv)M - (a\,du + b\,dv)N + \varpi_{12}A_2 \\ \qquad + \sum\limits_{\rho=3}^{\rho=n-1}(a_\rho\,du + b_\rho\,dv)A_\rho - (qm\,du + pn\,dv)A, \\ dA_2 = -(pa'\,du + qb'\,dv)M - (pa\,du + qb\,dv)N - \varpi_{12}A_1 \\ \qquad + \sum\limits_{\rho=3}^{e=n-1}(pa_\rho\,du + qb_\rho\,dv)A_\rho + (m\,du + n\,dv)A, \end{cases}$$

montrent que

$$\frac{\partial A_2}{\partial v} - q\frac{\partial A_1}{\partial v}, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial u} - p\frac{\partial A_1}{\partial u}$$

ne dépendent que de A_1, A_2, A, ou encore que $\dfrac{\partial^2 A}{\partial u\,\partial v}$ est linéaire en $\dfrac{\partial A}{\partial u}$, $\dfrac{\partial A}{\partial v}$, A.

La réciproque est du reste évidente.

Posons maintenant

$$(54)\qquad \varpi_{12} = h\,du + k\,dv;$$

on a, en différentiant les équations (52) et tenant compte de l'équation (48),

$$(55)\qquad \begin{cases} \gamma - mn(1+pq) = 0, \\ \dfrac{\partial m}{\partial v} - mkq + m\alpha + n\beta = 0, \\ \dfrac{\partial (mq)}{\partial v} + mk + mq\alpha + np\beta = 0, \\ \dfrac{\partial n}{\partial u} - nhp + m\alpha + n\beta = 0, \\ \dfrac{\partial (np)}{\partial u} + nh + mq\alpha + np\beta = 0, \end{cases}$$

et ces équations déterminent α, β, γ.

40. Quand on passe de (S) à (Σ) les coefficients a, b, a_i, b_i, a', b', p, q restent les mêmes; les coefficients m, n sont remplacés par μ, ν et la formule

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2]$$

devient

$$\mu\nu = mn;$$

on peut donc poser

$$\mu = tm, \qquad \nu = \frac{1}{t} n$$

ou encore

$$(39'') \qquad \begin{cases} \Psi_1 = -qtm\,du - p\dfrac{n}{t}\,dv, \\ \Psi_2 = \quad tm\,du + \dfrac{1}{t} n\,dv, \end{cases}$$

et les seconds membres des équations (40) deviennent alors identiquement nuls. Les hypersurfaces (Σ) s'obtiennent donc en somme par l'intégration des équations (39), (39′), (39″), où t est une fonction inconnue nouvelle de u, v.

Si maintenant on prend les covariants bilinéaires des équations (39), (39′), (39″), en tenant compte de ces équations elles-mêmes, les covariants des deux membres de chaque équation (39), (39′) sont égaux d'eux-mêmes; en égalant ceux des deux membres des équations (39″), on obtient les valeur de $\dfrac{\partial t}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial t}{\partial v}$.

Le calcul donne

$$\left[\frac{\partial(mq)}{\partial v} + mk\right]t - \left[\frac{\partial(np)}{\partial u} + nh\right]\frac{1}{t} + mq\frac{\partial t}{\partial v} + np\frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial m}{\partial u} - mkq\right]t - \left[\frac{\partial n}{\partial u} - nhp\right]\frac{1}{t} + m\frac{\partial t}{\partial v} + n\frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = 0.$$

Ces équations, comparées aux équations (55), donnent

$$(56) \qquad \frac{\partial t}{\partial v} = \left(t - \frac{1}{t}\right)\alpha, \qquad \frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = \left(t - \frac{1}{t}\right)\beta,$$

ou encore, en posant $t^2 = \theta$,

$$(57) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\theta}{\theta - 1} = \theta\beta\,du + \alpha\,dv.$$

41. Cela posé, plusieurs cas peuvent se présenter :

1° Cette équation aux différentielles totales (57) n'admet pas d'autre solution que $\theta = 1$; alors l'hypersurface (Σ) résulte de (S) par une transformation conforme; autrement dit l'hypersurface (S) est *indéformable* dans l'espace conforme;

2° Cette équation admet une solution et une seule différente de $\theta = 1$; il existe *une* hypersurface (Σ) sur laquelle (S) admet une représentation conforme, sans résulter de (S) par une transformation conforme;

3° Cette équation est complètement intégrable. Alors (S) admet une déformation *continue* dans l'espace conforme, et cette déformation dépend d'un paramètre. L'hypersurface (S) sera dite appartenir à la *troisième catégorie*.

La condition pour qu'il en soit ainsi est donnée immédiatement par les équations

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = -2\alpha\beta. \tag{58}$$

Les hypersurfaces (S) *de la troisième catégorie s'obtiennent donc en prenant l'enveloppe d'une hypersphère unité* A *à deux paramètres satisfaisant à une équation de Laplace de la forme*

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u\, \partial v} + \alpha \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial A}{\partial v} + \gamma A = 0,$$

où les coefficients α *et* β *satisfont aux relations*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = -2\alpha\beta.$$

On trouve immédiatement

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{V'}{U-V}, \qquad \beta = \frac{1}{2}\frac{U'}{U-V},$$

où U est une fonction de la variable u seule et V une fonction de la variable v seule.

Si l'on considère maintenant l'hypersphère

$$K = \sqrt{U-V}\, A,$$

on trouve

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u\, \partial v} + \left\{ \gamma - \frac{1}{4}\frac{U'V'}{(U-V)^2} \right\} K = 0.$$

On peut donc encore dire que *l'hypersurface* (S) *la plus générale de la troisième catégorie est l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de deux paramètres* u, v, *les coordonnées* $(n+2)$ — *sphériques* $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ *de cette hypersphère satisfaisant à une même équation de Laplace de la forme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \gamma' f = 0$$

et l'expression

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1} x_{n+2}$$

étant en même temps la différence entre une fonction U *de* u *et une fonction* V *de* v.

Comme dans le problème de la déformation des hypersurfaces dans un espace euclidien, on démontre que *l'hypersurface déformée* (Σ) *est donnée d'une manière analogue, l'équation de Laplace étant la même, mais les fonctions* U *et* V *subissant une même transformation homographique à coefficients constants.*

42. Un cas particulier intéressant est celui où les équations (45) se réduisent à

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0.$$

Dans ce cas $p = i$, $q = -i$; les hypersphères $\frac{\partial A}{\partial u}$ et $\frac{\partial A}{\partial v}$ sont des hypersphères-points; l'équation

$$\frac{\partial A}{\partial u} \left| \frac{\partial A}{\partial u} \right. = 0$$

conduit alors, en dérivant par rapport à v, à

$$\frac{\partial A}{\partial u} \left| \left(\alpha \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial A}{\partial v} + \gamma A \right) \right. = 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta \frac{\partial A}{\partial u} \left| \frac{\partial A}{\partial v} \right. = 0,$$

et comme les hypersphères $\frac{\partial A}{\partial u}$, $\frac{\partial A}{\partial v}$ ne peuvent pas être orthogonales, on a

$$\beta = 0$$

et de même

$$\alpha = 0;$$

par suite, les conditions (58) sont vérifiées et l'hypersphère (S) est certainement de la troisième catégorie.

Un autre cas particulier intéressant est celui où l'équation (48) se réduit à

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u \, \partial v} = 0$$

SUR CERTAINES HYPERSURFACES DE L'ESPACE A CINQ DIMENSIONS ENVELOPPES D'HYPERSPHÈRES A DEUX PARAMÈTRES.

43. Arrivons maintenant au cas exceptionnel signalé n° **30** où les hypersurfaces (S) et (Σ) dans l'espace à cinq dimensions sont chacune enveloppe d'hypersphères à deux paramètres sans que les caractéristiques se correspondent dans la représentation conforme.

L'hypersurface (S) satisfait aux équations

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \tag{59}$$

et l'on peut choisir les hypersphères A_3 et A_4 de manière à avoir en outre

$$\chi = 0. \tag{60}$$

Les expressions de ψ'_1 et ψ'_2 donnent alors les relations

$$[\varpi_{13}\psi_3] + [\varpi_{14}\psi_4] = 0,$$
$$[\varpi_{23}\psi_3] + [\varpi_{24}\psi_4] = 0,$$

qui montrent que ϖ_{13}, ϖ_{14}, ϖ_{23}, ϖ_{24} ne dépendent que de ψ_3 et de ψ_4, c'est-à-dire de ω_3 et ω_4.

D'autre part, les équations

$$\Psi_3 = 0, \qquad \Psi_4 = 0, \tag{61}$$

auxquelles satisfait l'hypersurface (Σ), conduisent à

$$\left\{ \begin{aligned} &-[\omega_3 X] + [\Psi_1 \varpi_{13}] + [\Psi_2 \varpi_{23}] = 0, \\ &-[\omega_4 X] + [\Psi_1 \varpi_{14}] + [\Psi_2 \varpi_{24}] = 0, \end{aligned} \right. \tag{62}$$

et ces relations montrent que ϖ_{13} et ϖ_{23} ne dépendent que de ω_3,

Ψ_1, Ψ_2, c'est-à-dire de ω_3, ω_1, ω_2; par suite ϖ_{13} et ϖ_{23} ne dépendent que de ω_3. Or on peut choisir les hypersphères A_1 et A_2 de manière que les coefficients de ω_3 dans ϖ_{13} et ϖ_{23} soient nuls : on peut donc supposer

$$\varpi_{13} = \varpi_{23} = 0. \tag{63}$$

Les équations (62) montrent alors d'une part que X ne peut dépendre que de ω_3, d'autre part que X ne peut dépendre que de ω_4, ω_1, ω_2. On a donc

$$X = 0; \tag{64}$$

on voit enfin que ϖ_{14} et ϖ_{24} sont nuls aussi :

$$\varpi_{14} = \varpi_{24} = 0. \tag{65}$$

Si l'on exprime que les covariants bilinéaires de ϖ_{13}, ϖ_{23}, ϖ_{14}, ϖ_{24} sont nuls, on obtient :

$$\begin{array}{ll}
[\omega_3\chi_1] - [\omega_1\chi_3] = 0, & [\omega_3 X_1] - [\omega_1 X_3] = 0, \\
[\omega_3\chi_2] - [\omega_2\chi_3] = 0, & [\omega_3 X_2] - [\omega_2 X_3] = 0, \\
[\omega_4\chi_1] - [\omega_1\chi_4] = 0, & [\omega_4 X_1] - [\omega_1 X_4] = 0, \\
[\omega_4\chi_2] - [\omega_2\chi_4] = 0, & [\omega_4 X_2] - [\omega_2 X_4] = 0,
\end{array}$$

ce qui entraîne des relations de la forme

$$(66)\quad \left\{\begin{array}{l}
\chi_1 = \frac{1}{2} m\,\omega_1, \\
\chi_2 = \frac{1}{2} m\,\omega_2, \\
\chi_3 = -\frac{1}{2} m\,\omega_3, \\
\chi_4 = -\frac{1}{2} m\,\omega_4,
\end{array}\right. \qquad (67)\quad \left\{\begin{array}{l}
X_1 = \frac{1}{2} \mu\,\omega_1, \\
X_2 = \frac{1}{2} \mu\,\omega_2, \\
X_3 = -\frac{1}{2} \mu\,\omega_3, \\
X_4 = -\frac{1}{2} \mu\,\omega_4.
\end{array}\right.$$

Enfin en exprimant que $\Pi'_{12} - \varpi'_{12}$, $\Pi'_{34} - \varpi'_{34}$ sont nuls, on obtient les relations

$$[\Psi_1\Psi_2] = (m - \mu)[\omega_1\omega_2], \tag{68}$$
$$[\psi_3\psi_4] = (m - \mu)[\omega_3\omega_4]; \tag{69}$$

et, en égalant les covariants bilinéaires des deux membres des équations (66) et (67), on arrive aux équations

$$dm + 2m\theta = 0, \tag{70}$$

$$d\mu + 2\mu\theta = 0. \tag{71}$$

La formule (69) montre que $m - \mu$ n'est pas nul; d'autre part, si l'on change l'hypersphère M en λM, ce coefficient $m - \mu$ est divisé par λ^2; on peut donc le supposer égal à une constante positive ou négative; on voit alors, d'après (70) et (71), que l'on a

$$\theta = 0,$$

d'où

$$dm = d\mu = 0;$$

les coefficients m et μ sont donc des constantes distinctes, dont l'une au plus peut être nulle.

44. Cela posé il est facile de voir la nature géométrique de l'hypersurface (S). On a en effet

$$\left\{\begin{aligned}
dM &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 + \omega_4 A_4,\\
dA_1 &= -\omega_1\left(N + \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{12} A_2,\\
dA_2 &= -\omega_2\left(N + \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{21} A_1,\\
dA_3 &= -\omega_3\left(N - \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{34} A_4 + \psi_3 A,\\
dA_4 &= -\omega_4\left(N - \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{43} A_3 + \psi_4 A,\\
dA &= -\psi_3 A_3 - \psi_4 A_4,\\
dN &= \frac{1}{2} m(\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2) - \frac{1}{2} m(\omega_3 A_3 + \omega_4 A_4).
\end{aligned}\right. \tag{72}$$

Ces formules, comparées aux formules (19), montrent que (S) est une hypersurface de la première catégorie. On considère un premier réseau de variétés sphériques à trois dimensions $[A_1 A_2]$ et un réseau orthogonal de variétés sphériques (sphères) à deux dimensions $[A_3 A_4 A]$; les premières peuvent être considérées comme des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) de courbure $-m$, les autres comme des espaces (pseudo-sphériques ou sphériques) de courbure $+m$. On considère alors dans une des variétés à trois dimensions du premier réseau (ici la variété

$[A_1A_2]$) une surface à deux dimensions (s) par chaque point de laquelle on fait passer la sphère du second réseau qui contient ce point.

Ici la surface (s) n'est pas une surface arbitraire; son ds^2, dans l'espace à trois dimensions de courbure $-m$ dans lequel elle est placée, est

$$\omega_3^2 + \omega_4^2.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \omega'_3 &= [\omega_4 \varpi_{43}], \\ \omega'_4 &= [\omega_3 \varpi_{34}], \\ \varpi'_{34} &= m[\omega_3\omega_4] - [\psi_3\psi_4] = \mu[\omega_3\omega_4]; \end{aligned}$$

par suite (n° **14**) la courbure (absolue) [1] de ce ds^2 est $-\mu$, c'est-à-dire *constante*.

Quant à l'hypersurface (Σ), les formules

$$(73)\qquad \left\{ \begin{aligned} dP &= \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3 + \omega_4 B_4, \\ dB_1 &= -\omega_1\left(Q + \frac{\mu}{2}P\right) + \varpi_{12}B_2 + \Psi_1 B, \\ dB_2 &= -\omega_2\left(Q + \frac{\mu}{2}P\right) + \varpi_{21}B_1 + \Psi_2 B, \\ dB &= -\Psi_1 B_1 - \Psi_2 B_2, \\ dB_3 &= -\omega_3\left(Q - \frac{\mu}{2}P\right) + \varpi_{34}B_4, \\ dB_4 &= -\omega_4\left(Q - \frac{\mu}{2}P\right) + \varpi_{43}B_3, \end{aligned} \right.$$

montrent qu'elle est susceptible d'une génération analogue. On considère un premier réseau de variétés sphériques à deux dimensions $[B_1B_2B]$ et un réseau orthogonal de variétés sphériques à trois dimensions $[B_3B_4]$; les premières peuvent être considérées comme des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) de courbure $-\mu$, les autres comme des espaces de courbure $+\mu$. On considère alors, dans une des variétés à trois dimensions du second réseau, la variété $[B_3B_4]$, une surface à deux dimensions (σ) par chaque point de laquelle on fait passer la sphère du premier réseau qui contient ce point.

Ici la surface (σ) n'est pas arbitraire, son ds^2, dans l'espace

---

[1] La courbure *relative* (produit des deux rayons de courbure principaux) serait $m - \mu$.

à trois dimensions de courbure $+\mu$ dans lequel elle est placée, est

$$\omega_1^2 + \omega_2^2.$$

Or on a

$$\omega'_1 = [\omega_2 \varpi_{21}],$$
$$\omega'_2 = [\omega_1 \varpi_{12}],$$
$$\varpi'_{12} = m[\omega_1 \omega_2];$$

par suite (n° **14**) la courbure [absolue ([1])] de ce ds^2 est $+m$, c'est-à-dire une constante.

Réciproquement il est facile de voir que deux hypersurfaces (S) *et* (Σ), *engendrées comme il vient d'être dit, sont applicables l'une sur l'autre dans l'espace conforme*, car pour chacunes d'elles le ds^2 est la somme d'un ds^2 à deux variables de courbure m et d'un ds^2 à deux variables de courbure $-\mu$. Dans la représentation conforme des deux hypersurfaces l'une sur l'autre, *les sphères génératrices de* (S) *correspondent aux surfaces* (σ) *de* (Σ) *et les surfaces* (s) *de* (S) *aux sphères génératrices de* (Σ).

Dans le cas particulier où m par exemple serait nul, l'hypersurface (S) pourrait, par une inversion, être engendrée au moyen de deux réseaux orthogonaux de variétés planes parallèles, le premier formé de plans à deux dimensions, le second formé d'hyperplans à trois dimensions, dont chacun coupe (S) suivant une surface de courbure totale constante $-\mu$.

([1]) La courbure *relative* serait, ici aussi, égale à $m - \mu$.