E. GOURSAT

Sur quelques remarques relatives au problème de Pfaff

Bulletin de la S. M. F., tome 44 (1916), p. 13-39
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__13_1>

SUR QUELQUES REMARQUES RELATIVES AU PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. E. GOURSAT.

Dans des recherches antérieures sur les invariants intégraux (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. IV, p. 331-365; *Ibid.*, 7e série, t. I, p. 241-259), j'ai été conduit à étudier des systèmes d'équations aux différentielles totales, que l'on obtient aussi en annulant la première variation de certaines intégrales. Le plus simple de ces systèmes, celui que l'on obtient en partant d'une intégrale simple, est précisément le système d'équations différentielles bien connu, associé à une forme de Pfaff. En considérant ce système comme définissant une famille d'extrémales, on établit sans aucun calcul qu'il est *complètement intégrable.* Cette propriété peut être prise comme point de départ pour établir l'existence d'une forme canonique pour toute forme de Pfaff. La démonstration est très voisine de celle de M. Darboux, quoique un peu différente par certains détails. Dans un autre travail, je montrerai comment on peut étendre les résultats aux systèmes analogues provenant de la variation d'une intégrale multiple.

On ne trouvera donc dans ce petit article que des résultats classiques. Il m'a paru intéressant de montrer comment ils se rattachent étroitement au calcul des variations, ce qui les rend presque intuitifs pour la plupart.

1. Considérons d'abord le cas de trois variables, et soient $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ trois fonctions continues, ainsi que leurs dérivées, au moins dans un certain domaine. Soit I l'intégrale définie

$$(1) \qquad I = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

prise le long d'une courbe quelconque Γ de ce domaine. La première variation de cette intégrale, quand on déforme infiniment peu le chemin d'intégration, a pour expression, d'après la formule classique (*voir*, par exemple, J. Hadamard, *Calcul des variations*, Chap. II ou le calcul du n° 3),

$$(2) \qquad \begin{aligned} \delta I = \int_\Gamma & \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\delta y\,dx - \delta x\,dy) \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)(\delta z\,dy - \delta y\,dz) \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(\delta x\,dz - \delta z\,dx) \\ & + P(x_1, y_1, z_1)\,\Delta x_1 + Q(x_1, y_1, z_1)\,\Delta y_1 + R(x_1, y_1, z_1)\,\Delta z_1 \\ & - [P(x_0, y_0, z_0)\,\Delta x_0 + Q(x_0, y_0, z_0)\,\Delta y_0 + R(x_0, y_0, z_0)\,\Delta z_0]. \end{aligned}$$

Dans cette formule, δx, δy, δz désignent les premières variations des coordonnées d'un point de Γ; (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées des extrémités A et B du chemin d'intégration; Δx_0, Δy_0, Δz_0 sont les composantes du déplacement infiniment petit de l'origine A quand on passe au chemin infiniment voisin, et Δx_1, Δy_1, Δz_1 ont une signification analogue.

Supposons d'abord que l'on fasse varier le chemin d'intégration sans changer les extrémités, les termes en dehors du signe $\int$ disparaissent dans l'expression de δI. Les *extrémales* sont les courbes de l'espace (x, y, z) telles que la première variation δI soit nulle quand on passe de l'une de ces courbes à une courbe quelconque infiniment voisine ayant les mêmes extrémités. Pour que δI soit nul, quelles que soient les variations δx, δy, δz des coordonnées x, y, z le long de Γ, assujetties seulement à s'annuler aux deux extrémités, il faut et il suffit, d'après un lemme fondamental du calcul des variations, que les coefficients de δx, δy, δz sous le signe d'intégration soient nuls en tout point de Γ.

Ces conditions se réduisent à deux, et les éléments du premier ordre des courbes cherchées doivent vérifier les relations

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Q}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial y}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial z}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}. \tag{3}$$

Les extrémales sont donc identiques aux courbes de tourbillon, relatives au vecteur (P, Q, R).

Cette remarque explique aisément les propriétés d'invariance de ces lignes, relativement à une transformation de coordonnées, et même pour tout changement de variables. Elle explique aussi très facilement *la conservation des lignes de tourbillon*. Soient, dans un fluide en mouvement, $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ les composantes de la vitesse de la molécule fluide qui passe au point (x, y, z) à l'instant t. Si la densité est fonction de la pression, et si le fluide est soumis à des forces dérivant d'un potentiel, on sait que l'intégrale définie

$$\int u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

est un invariant intégral *relatif*, c'est-à-dire que la valeur de cette intégrale, prise à l'instant t_0 le long d'une courbe *fermée* quelconque C_0, est égale à la valeur de la même intégrale prise à un autre instant t le long de la courbe fermée C, lieu des positions à cet instant t des molécules qui étaient sur C_0 à l'instant t_0 (*voir* Appell, *Mécanique rationnelle*, t. III, Chap. XXXV). Cela étant, soit A_0B_0 un arc d'une ligne de tourbillon Γ_0 à l'instant t_0, et Γ'_0 une autre courbe infiniment voisine de Γ_0 joignant les deux points A_0 et B_0. Puisque Γ est une extrémale pour l'intégrale

$$\int u(x, y, z, t_0)\, dx + v(x, y, z, t_0)\, dy + w(x, y, z, t_0)\, dz,$$

la différence des deux intégrales

$$\int_{\Gamma'_0} u_0\, dx + v_0\, dy + w_0\, dz - \int_{\Gamma_0} u_0\, dx + v_0\, dy + w_0\, dz$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, quelle que soit la courbe Γ'_0 infiniment voisine de Γ_0. A l'instant t, les molécules qui, au temps t_0, étaient sur l'arc A_0B_0 sont sur une courbe Γ joignant deux points A et B, et les molécules qui étaient sur Γ'_0 sont sur une autre courbe Γ' joignant aussi les points A et B. Puisque l'intégrale

$$\int u\, dx + v\, dy + w\, dz$$

est un invariant intégral pour toute courbe fermée, l'intégrale prise pour la valeur t_0 le long du contour fermé composé des arcs Γ_0 et Γ'_0 décrits en marchant toujours dans le même sens est égale à l'intégrale prise, pour la valeur t, le long du contour formé par les arcs Γ et Γ' en marchant toujours dans le même sens. Cette égalité peut s'écrire

$$\int_{\Gamma_0} u_0\, dx + v_0\, dy + w_0\, dz - \int_{\Gamma'_0} u_0\, dx + v_0\, dy + w_0\, dz$$
$$= \int_{\Gamma} u\, dx + v\, dy + w\, dz - \int_{\Gamma'} u\, dx + v\, dy + w\, dz,$$

toutes les intégrales étant prises en marchant de A_0 vers B_0 ou de A vers B. Mais le premier membre de cette égalité est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, quelle que soit la courbe Γ'_0 ; il en est donc de même de la différence $\int_{\Gamma} - \int_{\Gamma'}$, quelle que soit la courbe Γ', infiniment voisine de la courbe Γ et joignant les points A et B. Ceci exige que Γ soit une extrémale pour l'intégrale

$$\int u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

c'est-à-dire, nous venons de le voir, une ligne de tourbillon.

2. On peut aussi rattacher très facilement à cette propriété des lignes de tourbillon la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0. \tag{4}$$

Cette équation étant supposée complètement intégrable, c'est-à-dire telle qu'il passe une surface intégrale par chaque point du domaine considéré dans l'espace, soit S une de ces surfaces. Nous allons montrer que *cette surface est un lieu d'extrémales de l'intégrale* I. En effet, pour toute courbe Γ située sur S, on a, par hypothèse,

$$I = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Or, toute variation infinitésimale de Γ peut se décomposer en une variation tangentielle à S et une variation normale à S. Pour toute variation tangentielle, on a évidemment $\delta I = 0$. Pour qu'une courbe Γ de la surface S soit une extrémale, il suffit donc que la variation δI de l'intégrale, qui correspond à une variation de Γ normale à S, soit nulle. Or, pour une variation normale, on peut poser (les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires)

$$\frac{\delta x}{P} = \frac{\delta y}{Q} = \frac{\delta z}{R} = \lambda\,\delta\alpha,$$

et δI prend la forme

$$\begin{aligned}\delta I = \delta\alpha \int_\Gamma \lambda \Big[& \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)(R\,dy - Q\,dz) \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(P\,dz - R\,dx) \\ & + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)(Q\,dx - P\,dy)\Big].\end{aligned}$$

La courbe Γ sera donc une extrémale si elle vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)(R\,dy - Q\,dz) + \ldots = 0,$$

qui détermine une famille de courbes sur la surface S.

Toute surface intégrale de l'équation (4) est donc un lieu d'extrémales, ou une surface de tourbillons.

En particulier, la courbe de tourbillon qui passe en un point quelconque (x, y, z) doit appartenir à la surface intégrale S qui passe par ce point, puisqu'il ne passe qu'une de ces courbes par un point de l'espace. Cette courbe de tourbillon doit donc être normale au vecteur (P, Q, R), ce qui donne précisément la condition d'intégrabilité

$$(6)\qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Inversement, supposons cette relation vérifiée; elle exprime que l'intégrale I, prise le long d'un segment d'extrémale quelconque, est nulle. Cela posé, soit C_0 une courbe différente d'une extrémale, telle que les coordonnées (x_0, y_0, z_0) d'un point de cette courbe vérifient la relation

$$(7)\qquad P(x_0, y_0, z_0)\,dx_0 + Q(x_0, y_0, z_0)\,dy_0 + R(x_0, y_0, z_0)\,dz_0 = 0;$$

ces courbes dépendent d'une fonction arbitraire et il en passe une infinité par chaque point de l'espace. Le lieu des extrémales issues des différents points de C_0 est une surface Σ; nous allons montrer que *cette surface Σ est une surface intégrale de l'équation* (4).

Considérons, en effet, un arc d'extrémale variable $M_0 M_1$ de Σ, terminé d'une part à un point M_0 de C_0, d'autre part à un point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ d'une autre courbe quelconque C_1 de Σ. La valeur de l'intégrale I le long de cet arc $M_0 M_1$ étant nulle, on a aussi $\delta I = 0$, et la formule générale (2) qui donne δI devient, en tenant compte de la condition (7),

$$(8)\qquad P(x_1, y_1, z_1)\,\Delta x_1 + Q(x_1, y_1, z_1)\,\Delta y_1 + R(x_1, y_1, z_1)\,\Delta z_1 = 0.$$

Cette relation s'applique à un élément linéaire quelconque de la surface Σ, qui est par suite une surface intégrale [1].

[1] La condition d'intégrabilité (6) exprime que le vecteur (P, Q, R) est, en

3. Considérons maintenant une forme de Pfaff à un nombre quelconque de variables indépendantes

$$\omega = X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n, \tag{9}$$

$X_1 \ldots X_n$ étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces n variables étant regardées comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, les n équations

$$x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

où t varie de t_0 à t_1, représentent dans cet espace une variété à une dimension ou *courbe* Γ, et l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t_1} X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n,$$

où l'on a remplacé x_i par $f_i(t)$ et dx_i par $f_i'(t)\, dt$, est encore appelée une intégrale curviligne prise le long de Γ et représentée

---

chaque point, normal au vecteur tourbillon. L'élégante méthode d'intégration de M. Joseph Bertrand consiste en réalité à obtenir d'abord les surfaces de tourbillons, ce qui exige l'intégration du système (3), puis à déterminer la fonction arbitraire dont dépendent ces surfaces de façon que le plan tangent soit normal au vecteur (P, Q, R).

Sans rien emprunter au calcul des variations, la formule de Stokes permet de retrouver très simplement la condition d'intégrabilité par une méthode un peu différente de la méthode classique. Les surfaces intégrales (S) de l'équation (4) peuvent être définies en effet comme des surfaces telles que l'intégrale I, prise le long d'une courbe quelconque, *fermée ou non*, située sur S, soit nulle. Au contraire, d'après la formule de Stokes, les surfaces de tourbillon Σ sont telles que l'intégrale, prise le long d'une courbe *fermée* située sur Σ soit toujours nulle. Il est évident, d'après cela, que les surfaces intégrales S sont aussi des surfaces de tourbillon Σ, et par suite le vecteur tourbillon doit être normal en chaque point au vecteur (P, Q, R).

Réciproquement, cette condition étant satisfaite, prenons, comme dans le texte, une surface de tourbillons Σ engendrée par les lignes de tourbillon issues des différents points d'une courbe C_0 vérifiant la relation (7). Sur cette surface, considérons une courbe fermée Γ, composée d'un arc A_0B_0 de C_0, de deux arcs A_0A, B_0B de deux lignes de tourbillon, et d'un autre arc quelconque AB de Σ. Puisque Σ est une surface de tourbillons, l'intégrale I le long de ce contour fermé Γ est nulle. Mais les intégrales le long des arcs A_0B_0, A_0A, B_0B sont nulles, en vertu des conditions (6) et (7). Il en est donc de même de l'intégrale prise le long de l'arc AB de Σ, quel que soit cet arc, et par suite Σ est une surface intégrale S de l'équation (4).

par

$$I = \int_{\Gamma} X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n.$$

Quand on remplace la courbe Γ par une courbe infiniment voisine, l'intégrale prend un accroissement dont nous allons calculer la partie principale. Il suffit d'appliquer à ce cas particulièrement simple la méthode générale permettant de calculer la première variation d'une intégrale; j'indiquerai rapidement le calcul. Pour cela, imaginons une famille de courbes variant d'une manière continue avec un paramètre α et se réduisant pour $\alpha = 0$ à la courbe Γ. Soient $x_i = f_i(t, \alpha)$ les équations de cette famille de courbes, la fonction $f_i(t, 0)$ étant identique à $f_i(t)$.

Nous supposerons que les limites t_0 et t_1 sont elles-mêmes variables avec α, et nous avons à calculer la dérivée $I'(\alpha)$ de l'intégrale définie

$$(10) \qquad I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) \frac{\partial f_i}{\partial t}\, dt,$$

par rapport au paramètre α. La formule classique de différentiation donne

$$\begin{aligned} I'(\alpha) = & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \frac{\partial f_n}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial f_i}{\partial t}\, dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha\, \partial t}\, dt \\ & + \frac{dt_1}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]_{t=t_1} - \frac{dt_0}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]_{t=t_0} \end{aligned}$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, on peut la remplacer par

$$\left[\sum_i X_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \frac{\partial f_n}{\partial t} \right) dt.$$

Dans le produit $\delta I = I'(\alpha)\, \delta\alpha$, on a sous le signe d'intégration les termes suivants, en posant $\delta x_i = \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\delta\alpha$,

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial t}dt\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\delta x_n\right)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\delta x_i\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}dt+\ldots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial t}dt\right)$$

$$=\int_\Gamma\sum_i dx_i\sum_k\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\delta x_k-\int_\Gamma\sum_i\delta x_i\sum_k\frac{\partial X_i}{\partial x_k}dx_k,$$

ou, en permutant les indices i et k dans la seconde intégrale,

$$\int_\Gamma\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)dx_i\,\delta x_k.$$

Quant aux termes en dehors du signe $\int$, en les réunissant on a l'expression suivante :

$$\delta t_1\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f_i}{\partial t}\right]_{t=t_1}-\delta t_0\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f_i}{\partial t}\right]_{t=t_0}$$
$$+\delta\alpha\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1}-\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right]_{t=t_0}\right\}.$$

Posons

$$a_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\qquad(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$(11)\qquad\begin{cases}(\Delta x_i)_0=\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{t=t_0}\frac{dt_0}{d\alpha}+\left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right)_{t=t_0}\right]\delta\alpha,\\(\Delta x_i)_1=\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{t=t_1}\frac{dt_1}{d\alpha}+\left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right)_{t=t_1}\right]\delta\alpha;\end{cases}$$

nous avons pour expression générale de δI

$$(12)\qquad \delta I=\int_\Gamma\sum_i\sum_k a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k+(X_1\,\Delta x_1+X_2\,\Delta x_2+\ldots+X_n\,\Delta x_n)_{t_0}^{t_1}.$$

Remarquons que $(\Delta x_1)_0$, $(\Delta x_2)_0$, $\ldots$, $(\Delta x_n)_0$ représentent les composantes du déplacement infiniment petit de l'origine du chemin d'intégration quand on fait varier α de $\delta\alpha$, et $(\Delta x_1)_1$,

$(\Delta x_2)_1$, ..., $(\Delta x_n)_1$ ont une signification analogue. Si donc on fait varier le chemin d'intégration sans changer les extrémités, le terme tout intégré disparaît, et la formule générale (12) se réduit à

$$(12)' \qquad \delta I = \int_\Gamma \sum_i \sum_k a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k.$$

Plaçons-nous dans cette hypothèse. Pour que δI soit nulle, quelles que soient les variations δx_1, ..., δx_n, le long de Γ, ces variations étant seulement assujetties à s'annuler aux extrémités, il faut et il suffit que les coefficients de δx_1, δx_2, ..., δx_n soient nuls en tout point de la courbe Γ, c'est-à-dire que tous les éléments du premier ordre de cette courbe vérifient les relations

$$(13) \qquad a_{1i}\, dx_1 + a_{2i}\, dx_2 + \ldots + a_{ni}\, dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous appellerons encore *extrémales* les courbes satisfaisant à ces conditions. Si le déterminant de Pfaff

$$(14) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, ce qui ne peut arriver que si n est pair, les équations (13) sont vérifiées seulement en prenant

$$dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_n = 0;$$

il n'y a pas d'extrémales. Mais si Δ est nul, il y a une infinité d'extrémales dépendant de constantes arbitraires si les équations (13) se réduisent à $n-1$ équations distinctes, ou de fonctions arbitraires si elles se réduisent à $n-p$ équations ($p > 1$).

4. L'expression qui figure sous le signe d'intégration dans δI et le système (13) jouent un rôle important dans la théorie du problème de Pfaff. En particulier, c'est sur leur propriété d'invariance qu'est fondée la méthode de M. Darboux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2[e] série, t. VI, 1882, p. 14-36, 49-68). Ces propriétés d'invariance se déduisent d'une façon intuitive de l'interprétation qui précède. Supposons en effet que l'on effectue

un changement de variables

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

la forme linéaire ω se change en une nouvelle forme linéaire de différentielles

$$\omega' = Y_1\, dy_1 + \ldots + Y_n\, dy_n, \tag{16}$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ étant des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et l'intégrale I, prise le long d'une courbe Γ dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se change en une intégrale

$$I' = \int_{\Gamma'} Y_1\, dy_1 + Y_2\, dy_2 + \ldots + Y_n\, dy_n,$$

prise le long de la courbe Γ' de l'espace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, qui correspond à la courbe Γ de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par la transformation (15). De l'égalité $I = I'$, on déduit que les premières variations sont égales, $\delta I = \delta I'$. Mais on peut calculer $\delta I'$ de deux façons, soit en partant de la formule générale (12)$'$, ce qui donne

$$\delta I' = \int_{\Gamma'} \sum_i \sum_k b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k, \qquad b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

soit en appliquant la formule générale du changement de variables à l'intégrale δI, et remplaçant en même temps la variation δx_i par

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}\delta y_n.$$

En égalant ces deux expressions de $\delta I'$, on a donc

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = \sum_i \sum_k b_{ik}\, dy_i\, \delta y_k. \tag{17}$$

L'expression qui figure sous le signe $\int$ dans δI est précisément le *covariant bilinéaire* de la forme ω.

Il est évident aussi que si la courbe Γ est une extrémale pour l'intégrale I, la courbe Γ' est une extrémale pour I', et inversement. Le système (13) est donc lui aussi un *système covariant* de la forme ω. Après la transformation (15) il est remplacé par le système

$$(18) \qquad b_{i1}\,dy_1 + \ldots + b_{in}\,dy_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons encore la forme à $n+1$ variables

$$x_{n+1}(X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n) + dx_{n+1},$$

où x_{n+1} est une variable auxiliaire. Les équations différentielles des extrémales pour cette nouvelle forme sont

$$(19) \quad \begin{cases} x_{n+1}(a_{i1}\,dx_1 + \ldots + a_{in}\,dx_n) + X_i\,dx_{n+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = 0, \end{cases}$$

a_{ik} ayant le même sens que tout à l'heure. Des n premières équations on déduit, en les multipliant respectivement par $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, et ajoutant

$$dx_{n+1}(X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n) = 0.$$

Si $dx_{n+1} = 0$, le système des n premières équations (19) est identique au système (13). Si $dx_{n+1} \neq 0$, la dernière des équations (19) est une conséquence des n premières. Les courbes intégrales du système

$$(20) \qquad \frac{a_{i1}\,dx_1 + \ldots + a_{in}\,dx_n}{X_i} = -\frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on regarde x_{n+1} comme une variable paramétrique, représentent donc les projections, dans l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, des extrémales de la forme linéaire

$$dx_{n+1} + x_{n+1}\,\omega.$$

Il est évident, d'après cela, que ces équations forment un système covariant pour toute transformation de la forme

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad x_{n+1} = y_{n+1},$$

où l'on ne change pas la variable auxiliaire x_{n+1}.

Cette propriété du système (20) joue aussi un rôle essentiel dans la méthode de M. Darboux.

5. Nous montrerons encore comment on peut rattacher au calcul

des variations la propriété fondamentale du système (13), *d'être complètement intégrable.*

Il faut d'abord, pour cela, présenter quelques remarques générales sur les systèmes d'équations aux différentielles totales.

Soit

$$(21) \qquad A_{i1}\,dx_1 + \ldots + A_{in}\,dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un système de cette espèce se réduisant à $n-p$ équations distinctes ($p \geqq 1$), dont les coefficients A_{ik} sont des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si ces équations forment un système complètement intégrable, le système (21) est équivalent à un système de la forme

$$(22) \qquad dF_1 = 0, \qquad dF_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad dF_{n-p} = 0,$$

$F_1, F_2, \ldots, F_{n-p}$ étant $n-p$ fonctions distinctes, et les équations

$$(23) \qquad F_1 = C_1, \qquad F_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad F_{n-p} = C_{n-p}$$

représentent une famille de ∞^{n-p} multiplicités à p dimensions E_p, telles qu'il passe une de ces multiplicités, et une seule en général, par tout point de l'espace ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Nous appellerons ces multiplicités E_p les multiplicités intégrales du système (21).

Quel que soit le système (21), nous appellerons *courbe intégrale* toute multiplicité à une dimension dont tous les éléments infinitésimaux du premier ordre vérifient les relations (21). Une telle multiplicité est définie par un système de n fonctions $x_i = f_i(t)$, continues et admettant une dérivée continue. Nous supposerons même que les dérivées $f_i'(t)$ peuvent avoir un nombre quelconque de discontinuités de première espèce. Si $p = 1$, le système (21) est toujours complètement intégrable, car il se réduit à un système de $n-1$ équations différentielles ordinaires, et les courbes intégrales se confondent avec les multiplicités intégrales E_p.

Il n'en est plus de même si l'on a $p > 1$. Il y a toujours une infinité de courbes intégrales, dépendant de fonctions arbitraires, puisque l'on peut ajouter aux $n-p$ équations équivalentes au système (21) $p-1$ relations arbitraires entre les variables x_i. Lorsque le système (21) est complètement intégrable, les coordonnées d'un point de toute courbe intégrale satisfont aux relations

tions (21) et, par suite, aux relations (23) et inversement. En d'autres termes, *si le système* (21) *est complètement intégrable, toute courbe intégrale est située sur une multiplicité intégrale, et réciproquement toute courbe située sur une multiplicité intégrale est une courbe intégrale.*

Considérons en particulier l'ensemble des courbes intégrales issues d'un point quelconque M de l'espace; toutes ces courbes sont situées sur la multiplicité intégrale E_p qui passe par M. Par conséquent, *l'ensemble des points de l'espace que l'on peut joindre à un point quelconque* M *par une courbe intégrale est une multiplicité dont toutes les courbes sont elles-mêmes des courbes intégrales.*

Cette propriété caractérise les systèmes complètement intégrables. Soit en effet $E'(M)$ la multiplicité formée par l'ensemble des points que l'on peut joindre à un point M par une courbe intégrale du système (21), pouvant présenter un nombre quelconque de points anguleux (c'est-à-dire de points où quelques-unes des dérivées sont discontinues). Il est évident que, par tout point M, passe une de ces multiplicités, et que la multiplicité $E'(M')$ correspondant à un point quelconque M' de $E'(M)$ est identique à $E'(M)$. Ces multiplicités $E'(M)$ sont au moins à p dimensions, car les tangentes aux courbes intégrales issues d'un point M, qui sont toutes situées sur $E'(M)$, dépendent de $p-1$ paramètres arbitraires.

D'autre part, puisque toute courbe de $E'(M)$ est une courbe intégrale, tous les éléments linéaires situés sur cette multiplicité vérifient les relations (21) qui se réduisent à $n-p$ relations distinctes. Ces multiplicités $E'(M)$ sont donc à p dimensions et sont des multiplicités intégrales du système (21), qui est par suite complètement intégrable.

6. Pour démontrer que le système (13) satisfait à la condition précédente, nous établirons d'abord deux lemmes :

Lemme I. — Soient E_2 une multiplicité quelconque à deux dimensions composée d'extrémales, et Γ une courbe fermée quelconque située sur cette multiplicité, et pouvant se réduire à un contour fermé infiniment petit par une déformation continue en restant constamment sur E_2; *l'intégrale*

$$\int X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

prise le long de ce contour fermé, est nulle.

On pourrait le déduire facilement de la formule de Stokes généralisée, mais, au point de vue adopté dans ce travail, il est préférable de le déduire de la formule générale qui donne δI. Tout revient à prouver que, si l'on fait subir à une ligne quelconque C de E_2 une déformation infiniment petite dans laquelle cette ligne reste sur E_2, sans changer les extrémités, on a toujours $\delta I = 0$, quelle que soit cette déformation. Si la courbe C est elle-même une extrémale, la propriété est évidente. Si C n'est pas une extrémale, écrivons la formule qui donne δI

$$\delta I = \int_C \sum_i \left(\sum_k a_{ik}\,\delta x_k \right) dx_i;$$

puisque la multiplicité E_2 est composée d'extrémales, on peut supposer que dans la déformation infiniment petite de C, chaque point de C décrit un élément d'extrémale, c'est-à-dire que les variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ vérifient les relations

$$\sum_k a_{ik}\,\delta x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui sont identiques aux relations (13), d'après l'identité $a_{ik} + a_{ki} = 0$. On a donc aussi $\delta I = 0$. C. Q. F. D.

Lemme II. — Soient Γ_0 une extrémale quelconque, et E_2 une multiplicité à deux dimensions formée par une suite continue d'extrémales, différentes de Γ_0, issues des divers points de Γ_0 (ce qui suppose que ces extrémales dépendent de fonctions arbitraires); *toute courbe située sur* E_2 *est aussi une extrémale.*

Considérons en effet un arc de courbe Γ, obtenu en prenant sur chaque extrémale issue d'un point M_0 d'un arc A_0B_0 de Γ_0 un point arbitraire M, et limité aux deux points A et B, situés sur les extrémales qui partent des points A_0 et B_0. Tout revient à démontrer que Γ est aussi un arc d'extrémale. Pour cela, prenons un arc de courbe quelconque Γ', infiniment voisin de Γ et terminé aux mêmes points A et B. Par chaque point de Γ' faisons passer une extrémale de façon que le lieu de ces extrémales soit une multiplicité E'_2 infiniment voisine de E_2, et de plus que E_2 et E'_2 aient en commun les extrémales AA_0, BB_0 de E_2; ce qu'on peut faire évidemment d'une infinité de manières. Sur cette multiplicité E'_2, prenons ensuite un arc Γ'_0, infiniment voisin de Γ_0, et terminé aux deux points A_0, B_0. En appliquant le lemme précédent à chacun des contours fermés $A_0\Gamma_0B_0B\Gamma AA_0$, $A_0\Gamma'_0B_0B\Gamma'AA_0$, qui sont situés l'un et l'autre sur des multiplicités d'extrémales, on en conclut que la différence des deux intégrales $\int_\Gamma - \int_{\Gamma'}$, prises de A vers B, est égale à la différence des deux intégrales $\int_{\Gamma_0} - \int_{\Gamma'_0}$, prises de A_0 vers B_0. Mais cette dernière différence est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier puisque Γ_0 est une extrémale. Il en est donc de même de la différence $\int_\Gamma - \int_{\Gamma'}$, quelle que soit la courbe Γ' infiniment voisine de Γ, et par suite Γ est aussi une extrémale.

Ces lemmes étant établis, la proposition que nous avons en vue s'en déduit immédiatement. Nous supposons que les n équations (13) se réduisent à $n-p$ équations distinctes, p étant au moins égal à *deux*, de façon que par chaque point de l'espace il passe une infinité d'extrémales. Soit, comme au n° 5, $E'(M)$ la multiplicité formée par les extrémales issues du point M, c'est-à-dire le lieu des points que l'on peut joindre à un point M par une extrémale pouvant présenter un nombre quelconque de points anguleux. Il s'agit de montrer que tout arc de courbe AB, situé sur $E'(M)$, est aussi un arc d'extrémale. Or, soit A_0B_0 un arc d'extrémale pris à volonté sur $E'(M)$. D'après la définition même de $E'(M)$, on peut joindre un point quelconque de AB à un point quelconque de A_0B_0 par un arc d'extrémale situé sur $E'(M)$. Si l'on associe ces points deux à deux de façon que ces extrémales forment une suite continue, elles engendrent une multiplicité à deux dimensions, à laquelle on peut appliquer le second lemme, et par suite l'arc AB est aussi, d'après ce lemme, un arc d'extrémale : ce qui prouve la proposition énoncée au début du n° 5.

7. Cette propriété du système (13) est évidente si la forme ω est ramenée à la forme réduite. Nous la démontrerons encore d'une autre façon en nous appuyant uniquement sur la propriété d'invariance du système (13), relativement à tout changement de variables.

Le théorème peut être considéré comme exact, si le déterminant Δ n'est pas nul; dans ce cas, en effet, le système (13) est équivalent au système

$$dx_1 = 0, \qquad dx_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad dx_n = 0,$$

et l'on peut dire qu'il admet n intégrales premières distinctes

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = C_n.$$

Le théorème est vrai aussi si les n équations (13) se réduisent à $n - 1$ équations linéairement distinctes; elles forment alors un système de $n - 1$ équations différentielles ordinaires, et admettent par conséquent $n - 1$ intégrales premières distinctes

$$f_1 = C_1, \qquad f_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad f_{n-1} = C_{n-1}.$$

Reste à examiner le cas où les n équations (13) se réduisent à p équations linéairement distinctes ($p < n - 1$). Ajoutons à ces p équations $n - p - 1$ équations différentielles

$$A_{i1}\, dx_1 + \ldots + A_{in}\, dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - p - 1),$$

dont les coefficients sont des fonctions quelconques des variables x_i, choisis de façon à former avec les p équations du système (13) un système de $n - 1$ équations différentielles distinctes. L'intégration de ce système nous fera connaître une famille de courbes extrémales dépendant de $n - 1$ constantes arbitraires. Soient

$$f_1 = C_1, \qquad f_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad f_{n-1} = C_{n-1}$$

les équations de cette famille d'extrémales. Imaginons maintenant que l'on fasse un changement de variables, en prenant un nouveau système de variables $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, où

$$y_1 = f_1, \qquad y_2 = f_2, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f_{n-1},$$

la dernière variable y_n restant arbitraire, à condition de former avec $y_1, \ldots, y_{n-1}$ un système de n variables indépendantes. Par ce changement de variables, la forme donnée ω est remplacée par une nouvelle forme

$$\omega' = Y_1\, dy_1 + \ldots + Y_n\, dy_n,$$

tandis que le système (13) est remplacé par le système

$$(18) \qquad b_{i1}\, dy_1 + \ldots + b_{in}\, dy_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}.$$

Ce système (18) doit admettre la solution

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = C_{n-1},$$

la variable y_n étant arbitraire, quelles que soient les constantes C_1, C_2, ..., C_{n-1}. On a donc identiquement

$$b_{in} = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice i. D'autre part, on a aussi, quels que soient les indices i, k, l, les identités faciles à vérifier,

$$(24) \qquad \frac{\partial b_{ik}}{\partial y_l} + \frac{\partial b_{kl}}{\partial y_i} + \frac{\partial b_{li}}{\partial y_k} = 0,$$

et par suite, en supposant $l = n$,

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial y_n} = 0.$$

Les nouvelles équations (18) ne renferment donc ni y_n ni dy_n, et, par le changement de variables précédent, nous avons remplacé un système de p équations à n variables par un système équivalent à $n - 1$ variables, comprenant p équations linéairement distinctes,

$$(18)' \qquad b_{i1}\, dy_1 + \ldots + b_{i,n-1}\, dy_{n-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si $p = n - 2$, le système $(18)'$ est complètement intégrable, et par suite il en est de même du système primitif (13).

Si $p < n - 2$, le nouveau système $(18)'$ est de même nature que le système (13); en d'autres termes, il définit les courbes extrémales pour une intégrale de la forme

$$\int Z_1\, dy_1 + \ldots + Z_{n-1}\, dy_{n-1},$$

où $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ ne dépendent que de $y_1, \ldots, y_{n-1}$. En effet, la relation (24) étant vérifiée pour toutes les combinaisons d'indices i, k, l, on peut trouver $n - 1$ fonctions Z_i de $y_1, \ldots, y_2, y_{n-1}$ vérifiant les relations [1]

$$b_{ik} = \frac{\partial Z_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial y_i},$$

et la différence

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i\, dy_i - \sum_{i=1}^{n-1} Z_i\, dy_i$$

est une différentielle exacte, de sorte que les extrémales sont les mêmes pour les deux intégrales

$$\int \sum_1^n Y_i\, dy_i, \quad \int \sum_1^{n-1} Z_i\, dy_i.$$

On peut donc recommencer la même transformation sur le système (18)′, et ainsi de suite. Il est clair qu'on finira par arriver à un système de p équations à $p + 1$ variables seulement, c'est-à-dire à un système complètement intégrable.

8. Du théorème précédent on peut déduire très facilement l'existence d'une forme canonique pour toute expression ω, en suivant une marche très analogue à celle de M. Darboux dans le Mémoire cité plus haut. La démonstration comprend plusieurs parties :

---

(1) La proposition, qui est classique pour $n = 3$, s'établit de proche en proche par récurrence. On satisfait aux relations

$$\frac{\partial Z_1}{\partial y_i} - \frac{\partial Z_i}{\partial y_1} = b_{1i} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

en prenant

$$Z_1 = 0, \qquad Z_i = -\int_{y_1^0}^{y_1} b_{1i}\, dy_1 + \varphi_i(y_2, \ldots, y_n),$$

et, en substituant dans les suivantes, elles deviennent, en tenant compte des relations (24),

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} = b_{ik}(y_1^0, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i, k = 2, 3, \ldots, n).$$

On a donc un système de même forme que le premier avec une variable de moins.

I. Toute forme $X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n$, pour laquelle le déterminant Δ est nul, peut être ramenée, par un changement de variables, à la somme d'une forme à moins de n variables, pour laquelle ce déterminant est différent de zéro, et d'une différentielle exacte (qui peut être nulle).

Supposons en effet que les n équations différentielles (13) des extrémales se réduisent à p équations distinctes ($p < n$), ce qui aura toujours lieu si n est impair. Puisque ce système est complètement intégrable, il admet p intégrales premières distinctes, et l'on peut faire un changement de variables tel que les équations différentielles des extrémales se réduisent à

$$dy_1 = 0, \quad \ldots \quad dy_p = 0. \tag{25}$$

Soit

$$Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_n\,dy_n \tag{26}$$

la nouvelle expression de la forme de Pfaff considérée après ce changement de variables. Le système d'équations différentielles

$$b_{i1}\,dy_1 + \ldots + b_{in}\,dy_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

où

$$b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

doit être équivalent au système (25). Il faut et il suffit pour cela que tous les coefficients b_{ik}, où l'un des indices est supérieur à p, soient nuls, et de plus que le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & \ldots & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{p1} & \ldots & \ldots & b_{pp} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, ce qui exige que *p soit un nombre pair*. Si dans la relation générale (24) nous prenons pour les indices i et k des nombres non supérieurs à p, et pour l un nombre supérieur à p, on en déduit immédiatement que tous les coefficients b_{ik}, où $i \leqq p$, $k \leqq p$, ne dépendent pas de $y_{p+1}, \ldots, y_n$. Ces coefficients forment donc un système de $\frac{p(p-1)}{2}$ fonctions des p

variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$, vérifiant les relations (24), où aucun des indices ne dépasse p. On en déduit comme plus haut que l'on peut trouver p fonctions $Z_1, \ldots, Z_p$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_p$, vérifiant les relations

$$\frac{\partial Z_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial y_i} = b_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p).$$

La différence

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i\, dy_i - \sum_{k=1}^{p} Z_k\, dy_k$$

est donc une différentielle exacte, en vertu des relations

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = \frac{\partial Z_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial y_i},$$

qui sont vérifiées quels que soient les indices i et k. Cela est évident si aucun des indices i et k n'est supérieur à p. Si l'un des indices, i par exemple, est supérieur à p, on a

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = b_{ik} = 0, \qquad Z_i = 0, \qquad \frac{\partial Z_k}{\partial y_i} = 0.$$

La forme de Pfaff $\sum_{1}^{n} Y_i\, dy_i$ est donc identique à

$$\sum_{k=1}^{p} Z_k\, dy_k + dU, \tag{28}$$

$Z_1, \ldots, Z_p$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_p$, et la fonction U pouvant se réduire à une constante; le cas où U ne dépendrait que de $y_1, y_2, \ldots, y_p$ se ramène immédiatement à celui-là.

II. Toute forme de Pfaff, pour laquelle le déterminant Δ est différent de zéro (ce qui exige que n soit pair), peut être ramenée, par un changement de variables, à une forme où ne figurent que $\frac{n}{2}$ différentielles. La proposition étant exacte pour $n = 2$, il nous suffira de démontrer que, si elle est vraie jusqu'à une certaine valeur de n, elle est encore vraie pour la valeur de n supérieure de deux unités.

Soit $X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n$ une forme de Pfaff pour laquelle le déterminant Δ n'est pas nul. On peut toujours, et d'une infinité de manières, déterminer un facteur e^λ de façon que le déterminant correspondant pour la forme $e^\lambda(X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n)$ soit nul; en égalant ce déterminant à zéro, on est conduit en effet à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et l'on s'assure aisément que l'une au moins des dérivées de λ figure dans cette équation si Δ n'est pas nul (on reviendra du reste sur ce point au n° 10). La fonction λ ayant été choisie de cette façon, l'expression de Pfaff $e^\lambda(X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n)$ peut, d'après la proposition précédente, être ramenée à la forme

$$Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_p\,dy_p + dU,$$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_p$, et la fonction U pouvant se réduire à une constante. Le nombre p, qui est forcément pair, est au plus égal à $n - 2$. Le déterminant Δ pour la forme $\sum_1^p Y_i\,dy_i$ n'étant pas nul, on peut, par un nouveau changement de variables, le ramener à une forme où figurent seulement $\frac{p}{2}$ différentielles, puisque le théorème est supposé vrai pour les formes à moins de n variables. Après toutes ces transformations, la forme de Pfaff $e^\lambda \sum X_i\,dx_i$ est remplacée par une autre forme, où figurent au plus $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ différentielles; nous verrons tout à l'heure qu'il ne peut en figurer moins de $\frac{n}{2}$. Il en est par suite de même de la forme $\sum X_i\,dx_i$.

III. Soit

$$Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_n\,dy_n \tag{29}$$

une forme de Pfaff, où ne figurent que n différentielles $dy_1, \ldots, dy_n$, et dont les coefficients Y_i dépendent de $2n$ variables $y_1, \ldots, y_{2n}$: *si le déterminant* Δ *n'est pas nul, les fonctions* $Y_1, \ldots, Y_n$ *sont des fonctions distinctes de* $y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$.

Ceci revient à démontrer que le jacobien

$$\delta = \frac{D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)}{D(y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n})}$$

est différent de zéro. En effet, si l'on avait $\delta = 0$, on pourrait satisfaire aux équations différentielles des extrémales de la forme (29) en prenant $dy_1 = \ldots = dy_n = 0$, et en prenant des valeurs de $dy_{n+1}, \ldots, dy_{2n}$, *non toutes nulles*, vérifiant les n équations

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Y_1}{\partial y_{n+1}} dy_{n+1} + \ldots + \frac{\partial Y_1}{\partial y_{2n}} dy_{2n} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial Y_n}{\partial y_{n+1}} dy_{n+1} + \ldots + \frac{\partial Y_n}{\partial y_{2n}} dy_{2n} = 0.
\end{gathered}$$

Les fonctions $Y_1, \ldots, Y_n$ forment donc, avec $y_1, \ldots, y_n$, un système de $2n$ variables indépendantes, et en posant

$$z_1 = Y_1, \quad \ldots, \quad z_n = Y_n,$$

la forme de Pfaff est ramenée à la forme canonique

$$z_1\, dy + \ldots + z_n\, dy_n.$$

Il résulte de ce raisonnement que, lorsque le déterminant Δ n'est pas nul, on ne peut ramener une expression de Pfaff à $2n$ variables à une forme où figurent moins de n différentielles.

9. En rapprochant les trois parties qui viennent d'être démontrées, on en conclut immédiatement que toute expression de Pfaff peut être, par un changement de variables, ramenée à l'une des deux formes canoniques

$$(\alpha) \qquad z_1\, dy_1 + z_2\, dy_2 + \ldots + z_p\, dy_p,$$

$$(\beta) \qquad z_1\, dy_1 + z_2\, dy_2 + \ldots + z_p\, dy_p + dy_{p+1},$$

les variables (z_i, y_k) étant indépendantes. Les extrémales correspondantes ont pour équations différentielles

$$dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_p = 0; \quad dz_1 = 0, \quad \ldots, \quad dz_p = 0.$$

Ceci permet de déterminer *a priori* le type auquel une forme de de Pfaff donnée $\sum_1^n X_i dx_i$ est réductible, et le nombre p. Le nombre $2p$ est égal, en effet, au nombre des équations différentielles distinctes qui définissent les extrémales. Pour distinguer si la forme appartient au type déterminé ou au type indéterminé, il suffit d'observer que dans le premier cas l'équation obtenue en égalant la forme de Pfaff à zéro est une combinaison linéaire des équations différentielles des extrémales, tandis qu'il n'en est pas de même si la forme appartient au type indéterminé.

Par exemple, pour que l'équation

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = 0 \tag{30}$$

soit complètement intégrable, sans que le premier membre soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que les équations différentielles des extrémales se réduisent à deux équations distinctes, et que l'équation (30) en soit une combinaison linéaire. On peut vérifier que ces conditions sont suffisantes par un raisonnement analogue à ceux des n^{os} 5-6. En effet, puisque les équations différentielles des extrémales se réduisent à deux, ces courbes sont distribuées sur des multiplicités E_{n-2} à $n-2$ dimensions dépendant de deux constantes arbitraires, et toute courbe située sur l'une de ces multiplicités est une extrémale. De plus, l'intégrale

$$\int X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

prise le long d'un arc d'extrémale quelconque, est nulle. Cela étant, soit Γ_0 une courbe de l'espace à n dimensions, autre qu'une extrémale, dont tous les éléments du premier ordre vérifient la relation (30). Les multiplicités E_{n-2}, qui passent par les différents points de Γ_0, forment une multiplicité E_{n-1}, et toutes les courbes Γ situées sur E_{n-1} vérifient la relation (30). Il suffit de reprendre le raisonnement du lemme II (n° 5); E_{n-1} est donc une multiplicité intégrale à $n-1$ dimensions, et il passe évidemment une multiplicité de cette espèce par un point quelconque de l'espace à n dimensions.

La généralisation de la méthode de M. J. Bertrand (Forsyth, *Theory of differential equation*, Part I, p. 20) consiste à déterminer d'abord les extrémales, puis à faire un changement de variables tel que les deux intégrales premières des équations différentielles des extrémales soient précisément $dy_1 = 0$, $dy_2 = 0$. L'équation à intégrer se change alors en une équation différentielle ordinaire à deux variables y_1 et y_2. Il semble qu'on augmente ainsi la difficulté du problème, puisqu'il faut d'abord obtenir les extrémales de la forme considérée. En réalité, il n'en est rien, car si l'on a intégré l'équation $\Sigma X_i\, dx_i = 0$, on a par là même mis $\Sigma X_i\, dx_i$ sous la forme $y_2\, dy_1$, et l'on a par conséquent ramené les équations différentielles des extrémales à la forme

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0.$$

10. Je terminerai par une remarque relative au cas où le déterminant Δ correspondant à la forme $\sum_1^n X_i\, dx_i$ n'est pas nul. Pour que le déterminant Δ' correspondant à la forme $e^\lambda \sum_1^n X_i\, dx_i$ soit nul, il faut et il suffit que les équations suivantes, qui définissent les extrémales pour l'intégrale $\int e^\lambda \Sigma X_i\, dx_i$,

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{c} a_{i1}\, dx_1 + \ldots + a_{in}\, dx_n + X_i\, d\lambda - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\left(\displaystyle\sum_1^n X_k\, dx_k\right) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right.$$

soient vérifiées par des valeurs non toutes nulles de dx_1, dx_2, ..., dx_n. En éliminant dx_1, dx_2, ..., dx_n entre ces n équations homogènes, on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre en λ. Au lieu de chercher la solution générale, cherchons à déterminer λ de façon que les équations (31) soient vérifiées par des valeurs non toutes nulles de dx_1, ..., dx_n, satisfaisant aussi à la relation

$$(32)\qquad X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n = 0.$$

Les équations (31) se réduisent alors aux suivantes :

$$(33)\qquad a_{i1}\, dx_1 + \ldots + a_{in}\, dx_n + X_i\, d\lambda = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Réciproquement, si les équations (33) sont vérifiées par des valeurs non toutes nulles de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, ces valeurs des dx_i vérifient aussi la relation (32). En effet, en multipliant les n équations (33) par $dx_1, \ldots, dx_n$ respectivement, et ajoutant les équations obtenues, il vient

$$d\lambda(X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n) = 0.$$

On ne peut supposer $d\lambda = 0$, puisque par hypothèse les équations (33), où l'on fait $d\lambda = 0$, sont incompatibles pour des valeurs non toutes nulles de $dx_1, \ldots, dx_n$. Ces valeurs des dx_i vérifient donc aussi la relation (32), et tout revient à déterminer λ de façon que le déterminant des équations (33) développées soit égal à zéro, ou encore à déterminer λ de façon que les $n+1$ équations en $dx_1, \ldots, dx_n, d\lambda$,

$$(34)\qquad \begin{cases} a_{i1}\, dx_1 + \ldots + a_{in}\, dx_n + X_i\, d\lambda = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_n} dx_n - d\lambda = 0 \end{cases}$$

soient compatibles. Il faut et il suffit pour cela que λ soit une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$(35)\qquad F(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_n} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation contient nécessairement quelques-unes des dérivées de λ; pour que toutes ces dérivées disparaissent, il faudrait que le déterminant formé par les mineurs du premier ordre de Δ soit nul, ce qui n'est pas puisque Δ lui-même n'est pas nul. Ayant déterminé une solution λ de cette équation, les équations différentielles (33) définissent les extrémales de l'intégrale

$$\int e^\lambda \sum_1^n X_i\, dx_i,$$

mais on remarquera que λ ne figure dans ces équations différentielles que par sa différentielle $d\lambda$, de sorte que l'on peut déterminer ces extrémales sans connaître la fonction λ elle-même. Il suffit pour cela d'intégrer le système d'équations différentielles

$$(36)\qquad \frac{a_{11}\,dx_1+\ldots+a_{1n}\,dx_n}{X_1}=\frac{a_{21}\,dx_1+\ldots+a_{2n}\,dx_n}{X_2}=\ldots$$

identique au système (20) signalé plus haut (n° 4). Soient

$$f_1=C_1,\qquad f_2=C_2,\qquad \ldots,\qquad f_{n-1}=C_{n-1},$$

l'intégrale générale de ce système. Si l'on prend un nouveau système de variable $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ étant identiques à $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, la dernière variable y_n pouvant être choisie à volonté, on a vu plus haut (n° 9) que $e^{\lambda}(\Sigma X_i\,dx_i)$ se change en une expression de la forme

$$Y_1\,dy_1+\ldots+Y_{n-1}\,dy_{n-1}+dU,$$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Mais dans le cas actuel dU doit être nul, car les équations (36), qui sont identiques à $dy_1=0, \ldots, dy_{n-1}=0$, entraînent la relation $\Sigma X_i\,dx_i=0$. On a donc

$$X_1\,dx_1+\ldots+X_n\,dx_n=e^{-\lambda}(Y_1\,dy_1+\ldots+Y_{n-1}\,dy_{n-1});$$

par suite, si l'on fait le changement de variables précédent dans la forme $\Sigma X_i\,dx_i$, on voit qu'après cette transformation elle ne contiendra pas dy_n, et les rapports des coefficients de $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$ seront indépendants de y_n. On aura donc mis l'expression $\Sigma X_i\,dx_i$ sous la forme

$$K(Y_1\,dy_1+\ldots+Y_{n-1}\,dy_{n-1}),$$

la variable y_n ne figurant que dans le facteur K.

La méthode qui précède est absolument identique dans la marche des calculs à celle de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 21-22). Leur interprétation seule est légèrement différente.