BULLETIN DE LA S. M. F.

BARRÉ

Hélicoïdes de seconde espèce

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 25-61
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__25_0>

HÉLICOÏDES DE SECONDE ESPÈCE;

PAR M. BARRÉ.

I. — Surfaces générales (¹).

1. DÉFINITION. — *Nous désignerons sous le nom d'*hélicoïdes de seconde espèce *les surfaces engendrées par des hélices circulaires de même axe. Elles peuvent être représentées canoniquement par les équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = f(\rho) + k(\rho)\varphi. \end{cases}$$

Lorsque k se réduit à une constante, on retombe sur les hélicoïdes ordinaires.

Remarques. — 1° Si l'on supposait ρ constant, on trouverait un cylindre droit : k devrait alors être pris comme variable indépendante; il est évident que, si on le supposait constant, les équations (1) représenteraient une hélice;

2° Quand nous parlerons sans autre indication d'hélice génératrice, ou simplement de génératrice, il est entendu qu'il s'agira des hélices $\rho =$ const.

2. FORMULES GÉNÉRALES. — *Les paramètres différentiels de Gauss pour ces surfaces sont :*

$$(2)\qquad \begin{cases} E = \rho^2 + k^2, \\ F = k(f' + k'\varphi), \\ G = 1 + (f' + k'\varphi)^2, \\ H = [\rho^2(f' + k'\varphi)^2 + \rho^2 + k^2]^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} D = -\rho^2(f' + k'\varphi), \\ D' = (k - k'\rho), \\ D'' = -(f'' + k''\varphi)\rho, \\ \left(f' = \dfrac{df}{d\varphi}, f'' = \dfrac{df'}{d\sigma}, \ldots\right) \end{cases}$$

(¹) J'ai présenté un résumé rapide de l'étude de ces surfaces dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 157, 7 juillet 1913, p. 31.

et l'élément linéaire est

$$(2\ bis)\qquad ds^2 = \mathrm{E}\,d\varphi^2 + 2\mathrm{F}\,d\varphi\,d\rho + \mathrm{G}\,d\rho^2.$$

L'équation du plan tangent au point (ρ, φ) *est*

$$(4)\qquad \mathrm{A}(x-\rho\cos\varphi) + \mathrm{B}(y-\rho\sin\varphi) + \mathrm{C}[z-f(\rho)-k(\rho)\varphi] = 0$$

avec

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \rho\cos\varphi(f'+k'\varphi) - k\sin\varphi, \\ \mathrm{B} = \rho\sin\varphi(f'+k'\varphi) + k\cos\varphi, \\ \mathrm{C} = -\rho. \end{cases}$$

Ces formules montrent que la surface ne présente de point conique que lorsque $k(0)$ est nul; l'axe est alors, au moins en général, un lieu de points coniques.

Formules relatives à l'inclinaison i d'une courbe sur la génératrice passant au point considéré. — On obtient sans difficulté, en partant de la considération de l'élément linéaire

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos i = (\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d\varphi}{ds} + k(\rho^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}(f'+k'\varphi)\dfrac{d\rho}{ds}, \\ \sin i = \dfrac{\mathrm{H}}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{d\rho}{ds}, \end{cases}$$

d'où

$$(7)\qquad \operatorname{tang} i = \frac{[\rho^2(f'+k'\varphi)^2+\rho^2+k^2]^{\frac{1}{2}}\,d\rho}{(\rho^2+k^2)\,d\varphi + k(f'+k'\varphi)\,d\rho}.$$

Angle du plan tangent avec la normale principale à la génératrice. — Cet angle ϖ est donné par la formule

$$(8)\qquad \cos\varpi = -\frac{\rho}{\mathrm{H}}(f'+k'\varphi).$$

Angle du plan tangent avec le plan directeur de la surface. — Nous appellerons, conformément à une définition que nous avons déjà donnée dans des cas plus généraux, *plan directeur de la surface* le plan xOy. L'axe Oz sera dit l'axe de la surface et les plans passant par Oz seront les plans méridiens.

L'angle V du plan tangent avec le plan directeur est donné par l'une des formules

$$\cos V = \frac{\rho}{H} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang}^2 V = \frac{k^2}{\rho^2} + (f' + k'\varphi)^2, \tag{9}$$

ou, en introduisant un nouvel angle W,

$$\left\{\begin{aligned} \sin V \sin W &= -\frac{k}{H}, \\ \sin V \cos W &= \frac{\rho}{H}(f' + k'\varphi), \\ \operatorname{tang} W &= -\frac{k}{\rho}\frac{1}{f' + k'\varphi}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Des formules (9) on déduit que l'angle V tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque le point s'éloigne indéfiniment sur une génératrice de pas non stationnaire.

Élément d'aire. — L'élément d'aire est donné par la formule

$$d^2\mathcal{A} = [\rho^2 k'^2 \varphi^2 + 2\rho^2 k' f' \varphi + \rho^2(f'^2 + 1) + k^2]^{\frac{1}{2}}\, d\rho\, d\varphi. \tag{11}$$

Nous appliquerons cette formule à la recherche de l'aire de la surface comprise entre deux plans méridiens $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ et deux hélices génératrices $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$. Nous appellerons *spire annulaire* la surface comprise entre deux génératrices ρ_1, ρ_2 et limitée au même méridien pour les valeurs $\varphi_1 = \varphi_0$ et $\varphi_2 = \varphi_0 + 2\pi$.

Laissons de côté le cas des hélicoïdes ordinaires pour lesquels la question est classique. On peut alors écrire

$$d^2\mathcal{A} = \rho k' \left[\left(\varphi + \frac{f'}{k'}\right)^2 + \frac{k^2 + \rho^2}{k'^2}\right]^{\frac{1}{2}} d\rho\, d\varphi; \tag{11 bis}$$

d'où, par une première intégration,

$$d\mathcal{A} = \rho k' \left\{ \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{f'}{k'}\right)\left[\left(\varphi + \frac{f'}{k'}\right)^2 + \frac{k^2+\rho^2}{k'^2}\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} + \frac{k^2+\rho^2}{2k'^2}\log\left\{\varphi + \frac{f'}{k'} + \left[\left(\varphi + \frac{f'}{k'}\right)^2 + \frac{k^2+\rho^2}{k'^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\Bigg|_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} \right\} d\rho. \tag{12}$$

La formule (12) donne l'aire de la couronne élémentaire comprise entre deux méridiens quelconques φ_1, φ_2 et deux hélices infiniment voisines ρ et $\rho + d\rho$.

Une seconde intégration effectuée sur la différentielle $d\mathcal{A}$ de la seule variable ρ entre les limites ρ_1 et ρ_2 donnera l'aire cherchée. Il faut observer que *l'aire d'une spire varie essentiellement avec son méridien origine*, contrairement à ce qui a lieu pour les hélicoïdes ordinaires. Cela résulte immédiatement de la formule (12).

3. Plan tangent a la surface. — *Sa répartition aux divers points d'une génératrice. Paramètre de distribution. Ligne de striction de première espèce. Problèmes divers.* — Désignons par k_1 le pas angulaire $\left(\frac{k}{\rho}\right)$ de l'hélice génératrice; la seconde formule (9) peut s'écrire

$$\operatorname{tang}^2 V = k_1^2 + \operatorname{tang}^2 U = \operatorname{tang}^2 V_1 + \operatorname{tang}^2 U \tag{13}$$

en posant

$$\operatorname{tang} U = f' + k'\varphi, \qquad \operatorname{tang} V_1 = k_1. \tag{14}$$

Donc :

Théorème I. — *L'angle* [1] *du plan tangent en un point d'une hélice génératrice avec le plan directeur est toujours supérieur à l'angle V_1 de la génératrice avec la section droite de son cylindre principal, sauf au point de cette génératrice défini par la valeur de φ donnée par la formule*

$$\varphi = -\frac{f'}{k'}. \tag{A}$$

En ce point l'angle du plan tangent à la surface avec le plan directeur de celle-ci est précisément égal à V_1. Nous donnerons à ce point le nom de *point central* de première espèce.

---

[1] Il s'agit ici de la détermination des divers angles comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$.

La quantité $\frac{\partial \operatorname{tang} U}{\partial \varphi}$ sera désignée sous le nom de *paramètre de distribution* de la génératrice ([1]).

Cette définition suppose que cette expression est constante en tous les points de la génératrice. C'est bien ce qui a lieu, car

$$\frac{\partial \operatorname{tang} U}{\partial \varphi} = -K'.$$

Ce paramètre est nul dans le cas des hélicoïdes ordinaires.

Le lieu des points centraux de première espèce défini en coordonnées polaires par la relation [(A), th. I] est la *ligne de striction de première espèce.*

Développables d'égale pente par rapport au plan de base. — Soit V_0 l'angle de pente donné : la développable correspondante sera définie par la relation

$$(15) \qquad \frac{k^2}{\rho^2} + (f' + k'\varphi)^2 = \operatorname{tang}^2 V_0,$$

qui détermine la ligne de contact. Cette équation n'est autre que l'équation en coordonnées polaires de la projection sur le plan de base de cette ligne de contact.

On voit que la ligne de contact d'une surface d'égale pente rencontre chaque hélice génératrice en deux points distincts, sauf pour les génératrices définies par l'équation en ρ

$$(16) \qquad k^2(\rho) - \rho^2 \operatorname{tang}^2 V_0 = 0.$$

Ces points sont réels si

$$k^2 < \rho^2 \operatorname{tang}^2 V_0,$$

imaginaires si

$$k^2 > \rho^2 \operatorname{tang}^2 V_0.$$

Les hélices définies par l'équation (16) forment ligne séparatrice. Pour aller plus loin, il faudrait connaître dans chaque cas la forme de $k(\rho)$. Dans le cas des surfaces de vis de seconde

---

(1) Conformément à la définition que nous avons donnée antérieurement pour le cas des surfaces générales engendrées par une hélice circulaire (Cf. *C. R. de l'Académie des Sciences de Paris*, 1907, 1re série, p. 1099, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLI, 1913, p. 287). Mais dans le cas général, la définition devait faire intervenir aussi le point choisi, car l'expression en question dépendait de φ.

espèce (*voir* ci-après : II), la séparatrice se réduit aux deux hélices

$$h(\rho - \rho_0) = \pm \rho \operatorname{tang} V_0.$$

Si $\operatorname{tang} V_0 = \pm h$, l'une de ces hélices s'évanouit.

Plans tangents issus d'un point de l'axe de la surface. — Soient ρ, φ les coordonnées du point de contact d'un plan tangent à la surface plan, passant par le point de l'axe (o, o, c). En écrivant que l'équation (4) est vérifiée, on trouve la condition

$$(17) \qquad f + k\varphi - c - (f' + k'\varphi)\rho = 0.$$

Cette équation peut être considérée comme représentant la projection horizontale (sur le plan directeur) de la courbe de contact du cône circonscrit à la surface de sommet (o, o, c).

Cette équation peut en général être résolue en φ et donne

$$(17\ bis) \qquad \varphi = \frac{c + f'_\rho - f}{k + k'\rho}.$$

Il est dès lors facile de construire la courbe lorsque les fonctions f et k sont explicitées.

Il est toutefois un cas où la résolution en φ n'est pas possible, c'est lorsque $k - k'\rho$ est nul. Si cela n'a lieu que pour des valeurs isolées de ρ, on obtient une courbe en spirale, au moins en général. Mais lorsque $k - k'\rho$ est constamment nul, l'équation (17) ne dépend plus de φ. Elle se réduit à

$$(17\ ter) \qquad f - \rho f' = c,$$

d'où :

Théorème II. — *Lorsque le pas est proportionnel au rayon (ou encore lorsque le pas angulaire est constant), les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leur sommet sur l'axe de la surface sont constituées par des hélices génératrices.*

Il faut observer que, dans ce cas, les diverses hélices génératrices sont toutes semblables [1].

---

[1] En se fondant sur cette observation, on peut donner du théorème II une démonstration géométrique directe très simple.

Considérons en effet, d'une façon générale, un point S pris sur l'axe d'une

Il est à prévoir que, si la courbe de contact correspondant à un point de l'axe est une méridienne, celle-ci doit se réduire à une droite. C'est ce que montre le calcul : si l'on écrit que la valeur (17 *bis*) de φ est indépendante de ρ et égale à φ_0, on obtient sans difficulté la condition

$$f = c - \varphi_0 k + \lambda_0 \rho \qquad (\varphi_0,\ \lambda_0 = \text{const.}),$$

et par suite l'équation semi-polaire de la surface est

$$z = k(\varphi - \varphi_0) + c + \lambda_0 \rho. \tag{18}$$

Sur cette équation on voit de suite que la méridienne $\varphi = \varphi_0$ se

---

surface hélicoïdale de seconde espèce quelconque, et le cône ayant ce point pour sommet et une génératrice H quelconque de la surface pour directrice. Ce cône coupera un cylindre de révolution coaxial de la surface suivant deux hélices H′ semblables à H ; l'une d'elles seule est ***directement*** semblable à H.

Cela posé, considérons une surface dans laquelle le pas angulaire est constant : la génératrice reste constamment directement semblable à elle-même ; soient (*fig.* 1)

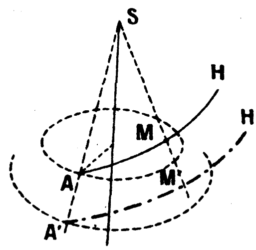


Fig. 1.

A l'origine, sur le méridien initial, d'une génératrice H ; H′ une autre génératrice de la surface, A′ son origine. Menons A′A qui coupe l'axe en S ; d'après ce qui a été exposé ci-dessus, le cône du sommet S et de directrice H contient H′.

Lorsque H′ tend vers H, le point S tend vers une position limite S_0 : chacune des génératrices du cône (S_0, H) est tangente à la méridienne située dans le plan qu'elle forme avec l'axe, car les points correspondants M et M′ sont alors confondus. En d'autres termes, H est la courbe de contact d'un cône circonscrit de sommet S_0. Il est d'ailleurs évident que le cône circonscrit ***complet*** de sommet S_0 se composera en général de ***plusieurs cônes*** tels que celui qui vient d'être défini. Il n'y en aura qu'un seul dans le seul cas où $f - \rho f'$ se réduit à une fonction du premier degré. On trouve sans peine que les surfaces les plus générales correspondantes sont définies par

$$k = h\rho \qquad f = a\rho \log \rho \qquad (a,\ h = \text{const.}).$$

réduit bien à une droite. Ce fait peut-il se présenter pour plusieurs méridiennes ?

Si cela arrive pour deux méridiennes φ_0 et φ_1 ($\varphi_1 \gtrless \varphi_0$), on doit avoir

$$(19) \qquad z = k(\varphi - \varphi_0) + c_0 + \lambda_0 \rho = k(\varphi - \varphi_1) + c_1 + \lambda_1 \rho,$$

où φ_1, c_1, λ_1 sont trois constantes analogues à φ_0, c, λ_0. On déduit de la dernière égalité ($\varphi_0 \neq \varphi_1$)

$$(20) \qquad k = \frac{c_0 - c_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)\rho}{\varphi_0 - \varphi_1},$$

d'où la conclusion :

THÉORÈME III. — *Si la surface admet plus d'une méridienne rectiligne, le pas et la fonction f sont linéaires par rapport au rayon ρ. On vérifie de plus que dans ce cas toutes les méridiennes sont rectilignes.*

Ces surfaces sont les *surfaces de vis de seconde espèce* que nous étudierons spécialement (*cf.* ci-après, II). Revenons au cas général; le dénominateur du second membre de φ admet des racines (ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n. ...) qui, en général, n'annulent pas le numérateur. La courbe, avons-nous dit, affecte en gros la forme d'une spirale avec cercle asymptote. Qu'arrive-t-il si l'une des racines ρ_n annule le numérateur ? On voit de suite que la courbe de contact se décompose en une courbe pour laquelle $\rho = \rho_n$ est ou n'est plus une singularité et est une hélice génératrice $\rho = \rho_n$. On déduit immédiatement de là que :

THÉORÈME IV. — *Les hélices génératrices correspondant aux valeurs de ρ, pour lesquelles le pas angulaire $\left(\frac{k}{\rho}\right)$ est stationnaire, sont les courbes de contact (ou une partie de la courbe de contact) de cônes circonscrits ayant leur sommet sur l'axe de la surface.*

Ce théorème est la généralisation du théorème II.

Plan tangent parallèle à un plan donné. — Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au plan donné. On trouve sans peine, pour définir les points de contact d'un plan tangent parallèle au plan donné, les relations

$$(21)\qquad \begin{cases} \rho\cos\varphi(f'+k'\varphi)-k\sin\varphi=-\dfrac{\alpha\rho}{\gamma}, \\ \rho\sin\varphi(f'+k'\varphi)+k\cos\varphi=-\dfrac{\beta\rho}{\gamma}, \end{cases}$$

entre lesquelles l'élimination de $\rho(f'+k'\varphi)$ donne

$$(22)\qquad \alpha\sin\varphi-\beta\cos\varphi=\frac{k\gamma}{\rho}.$$

On obtient ensuite sans peine

$$(23)\qquad \gamma(f'+k'\varphi)+\beta\sin\varphi+\alpha\cos\varphi=0.$$

On peut, pour résoudre le problème, remplacer les équations (21) par les équations (22) et (23). L'intérêt de cette transformation est le suivant : *On est ramené à rechercher l'intersection d'une droite* (22) *et d'une courbe* (23). *Il est à noter* que celle-ci peut, dans certains cas, être facile à construire et *le problème peut être considéré comme résolu graphiquement.*

Cas particulier. — Les formules (21) supposent $\gamma\neq 0$; on voit directement qu'il n'y a de plan tangent parallèle à Oz, que pour $\rho=0$. Le plan tangent, perpendiculaire à la direction α, β, 0, a pour équation

$$\alpha x+\beta y=0;$$

la valeur correspondante de φ est donnée par

$$\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi=0.$$

4. Cercles principaux de la surface. — Génératrices a pas stationnaire :

1° *Cercles principaux.* — Pour les valeurs de ρ qui annulent $k(\rho)$, l'hélice génératrice dégénère en un cercle. Nous donnerons à ces cercles le nom de *cercles principaux* de la surface.

Le plan tangent au point central d'un cercle principal est parallèle au plan directeur. Les formules (22) et (23) montrent que cette propriété est caractéristique des points centraux des cercles principaux. Il suffit pour le voir de faire $\alpha=\beta=0$ dans ces formules. Ce résultat est encore donné par les formules (9).

Les équations de la normale en un point d'un cercle principal sont particulièrement simples :

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-\rho_0\cos\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{y-\rho_0\sin\varphi}{\sin\varphi}=-\dfrac{z-f}{\dfrac{1}{f'+k'\varphi}} \\ (\rho_0 \text{ valeur de } \rho \text{ pour ce cercle}). \end{array}\right.$$

La normalie correspondante a pour équation

$$(25)\qquad z=f(\rho_0)+\frac{\rho_0-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\rho_0)+k'(\rho_0)\operatorname{arc\,tang}\dfrac{y}{x}}.$$

Si, en outre, le pas est stationnaire, cette normalie se réduit à un cône de révolution, résultat qu'on pouvait prévoir par application du théorème IV :

Dans le cas général les sections horizontales de cette normalie sont des spirales d'Archimède dont une, celle correspondant au plan $z=f(\rho_0)$ réduite à un cercle, le cercle principal étudié.

2° *Génératrices à pas stationnaire.* — Ce sont les hélices pour lesquelles $k'(\rho)=0$. Ces génératrices jouissent de propriétés particulièrement intéressantes. Nous signalerons ici les suivantes que l'on tire sans aucune difficulté des résultats précédents en y introduisant l'hypothèse $k'=0$.

Théorème V. — 1° *Pour tous les points d'une hélice à pas stationnaire, l'angle du plan tangent avec le plan directeur de la surface est le même.*

2° *Le long d'une hélice à pas stationnaire, l'angle du plan tangent à la surface et du plan osculateur à la courbe reste constant.*

Ou :

Les hélices à pas stationnaire sont à la fois des cercles géodésiques et des courbes à torsion géodésique constante de la surface.

3° *Le paramètre de distribution des hélices à pas station-*

naire est nul (analogie avec certaines génératrices particulières des surfaces gauches).

5. Points centraux et lignes de striction de seconde espèce. — Nous avons montré que [1], en un point d'une génératrice de paramètre ρ, la distance à la génératrice infiniment voisine $\rho + d\rho$ était stationnaire quand on avait

$$d\varphi = -\frac{F}{E}\,d\rho.$$

Mais il y a plus : on pouvait assurer, la forme de l'élément linéaire étant définie positive, que cette détermination correspondait bien à un minimum. En se reportant toujours au Mémoire cité, on voit alors que cette distance minima sera maxima, minima ou stationnaire en même temps que $G - \frac{F^2}{E}$ [2]. En particulier, pour les minima de $G - \frac{F^2}{E}$, on sera sûr d'avoir une distance minima. Or ici

$$G - \frac{F^2}{E} = 1 + (f' + k'\varphi)^2\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + k^2}\right). \tag{26}$$

On conclut immédiatement de la considération de la formule (26) la proposition suivante :

Théorème VI. — *Sur chaque génératrice il existe un point et un seul, défini par la relation $f' + k'\varphi = 0$, pour lequel la distance à la génératrice infiniment voisine est minima.*

Ce point pourra prendre le nom de *point central de seconde espèce* [3] : on voit qu'il coïncide avec le point central déjà défini antérieurement. L'existence d'un point central de chaque espèce, unique et identique pour les deux espèces, est une analogie remarquable avec les surfaces réglées. Le lieu de ce point est la *ligne de striction de seconde espèce* qui coïncide avec celle déjà

[1] Cf. *Application de la Géométrie cinématique* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1912, n° 9).

[2] De telle sorte qu'en général on ne sait sur le résultat définitif qu'une chose : c'est qu'il correspond à un élément linéaire stationnaire.

[3] Conformément à une définition antérieurement adoptée (*C. R. Acad. Sc.*, 29 avril 1907).

définie de première espèce. Le théorème VI est en défaut pour les génératrices à pas stationnaire, mais il peut alors être remplacé par le suivant :

Théorème VII. — *La distance d'un point d'une génératrice de pas stationnaire à la génératrice infiniment voisine est constante en tous les points de la génératrice considérée.*

Angle de la ligne de striction avec la génératrice passant en chacun de ses points. — Si l'on se reporte à la formule (7) on a, pour cet angle ε,

$$\tag{27} \operatorname{tang}\varepsilon = (\rho^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)}$$

ou enfin

$$\tag{27 bis} \operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{1}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f'}{k'}\right)'}.$$

On en conclut que *la ligne de striction sera une trajectoire d'angle ε_0 des génératrices* si les fonctions f et k sont liées par la relation

$$\left(\frac{f'}{k'}\right)' + \frac{\cot\varepsilon_0}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

On peut se donner arbitrairement la fonction k et l'on aura

$$f' = k'\left[\cot\varepsilon_0\int_0^\rho \frac{d\rho}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + ak' \qquad (a = \text{const.})$$

et, en supprimant une constante d'intégration dont la présence revient à donner une translation parallèle à Oz,

$$= \cot\varepsilon_0\int_0^\rho\left[k'\int_0^\rho \frac{d\rho}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}\right]d\rho + ak.$$

En particulier, la ligne de striction sera une trajectoire orthogonale dans le seul cas où l'on aura

$$f = ak.$$

La ligne de striction est alors la méridienne située dans le plan $\varphi = -a$. On voit alors sans peine que les équations de cette surface peuvent être mises sous la forme canonique

$$(1\ bis) \qquad x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = k(\rho)\varphi,$$

forme qui rappelle celle des équations de l'hélicoïde gauche [auquel se réduit cette surface quand la fonction $k(\rho)$ dégénère en une constante]. La ligne de striction est alors la méridienne $\varphi = 0$.

On aura un exemple simple de la solution du problème général en considérant les surfaces dont le pas angulaire des génératrices est constant ($k = h_0\rho$, $k_0 =$ const.); on trouve ainsi des surfaces dont les équations peuvent être mises sous la forme canonique

$$(1\ ter) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \\ & z = h_0\rho\left[\varphi + \frac{\cot\varepsilon_0}{\sqrt{h_0^2+1}} \operatorname{Log}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Ces surfaces ne diffèrent pas de celles qui sont signalées à la fin de la note du n° **3**.

6. Équation des lignes asymptotiques et des lignes de courbure. — *a*. L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$(28) \qquad \rho^2(f' + k'\varphi)\, d\varphi^2 - 2(k - k'\rho)\, d\rho\, d\varphi + (f'' + k''\varphi)\rho\, d\rho^2 = 0.$$

La considération de cette équation met de suite en évidence la propriété suivante, qui se déduit d'ailleurs du théorème II, en appliquant le théorème de M. Kœnigs.

Théorème VIII. — *Dans les hélicoïdes de seconde espèce dont le pas angulaire des génératrices est constant, les génératrices et les méridiennes forment un réseau conjugué.*

Si dans l'équation (28) on fait $d\rho = 0$, on trouve

$$\rho^2(f' + k'\varphi) = 0.$$

Si on laisse de côté la solution $\rho^2 = 0$ de cette égalité on en tire la proposition suivante :

Théorème IX. — *Chacune des génératrices touche l'une* *des asymptotiques de la surface en un point et un seul, son point central.*

Ce théorème est en défaut dans le cas dés génératrices à pas stationnaire; il est remplacé par le suivant :

THÉORÈME X. — *En général, il n'existe aucun point, sur une génératrice à pas stationnaire, où cette génératrice soit tangente à une asymptotique. Si cela arrive, la génératrice est elle-même une asymptotique.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une génératrice soit une asymptotique de la surface est que les équations

$$f'(\rho) = 0, \qquad k'(\rho) = 0, \tag{29}$$

admettent au moins une solution commune. Cela arrive en particulier pour les hélicoïdes [1].

b. Lignes de courbure. — L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\begin{aligned} d\rho^2 \{ [k\rho(f'' + k''\varphi) + (k - k'\rho)(f' + k'\varphi)](f' + k'\varphi) + (k - k'\rho) \} \\ + d\rho\, d\varphi [(\rho^2 + k^2)(f'' + k''\varphi) - \rho(f' + k'\varphi)[1 + (f' + k'\varphi)^2]\rho \\ - d\varphi^2 [(\rho^2 + k^2)(k - k'\rho) + k\rho^2(f' + k'\varphi)^2] = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

On déduit de la considération de cette équation la proposition suivante :

THÉORÈME XI. — *Sur chacune des génératrices il existe deux points également distants (distance comptée sur l'hélice) du point central tels que la génératrice y touche une ligne de courbure. Nous donnerons le nom de* stries *au lieu de ces points* [2].

Remarque. — Ces points sont en général distincts; ils sont confondus avec le point central lorsque $k - k'\rho$ est nul. Dans les surfaces dont les génératrices sont à pas angulaire constant, ces

(1) *Cf.* à ce sujet notre Mémoire *Contribution à la théorie des hélices* (*Revue du génie militaire*, 2e semestre 1910) et notamment le théorème VI de ce Mémoire.

(2) Définition employée par MM. Demartres et Besserbe.

points sont, sur toutes les génératrices, confondus avec le point central. Comme en ce point la génératrice touche à la fois une ligne de courbure et une asymptotique, la ligne de striction est un lieu de points paraboliques, résultat obtenu directement d'autre part ([1]).

Si l'on recherche quelles sont les génératrices qui peuvent être lignes de courbure, on ne trouve aucune solution réelle autre que les cercles principaux dont le pas, nul, est en même temps stationnaire.

7. Problème. — *Chercher : 1° si une section méridienne peut être une ligne de courbure; 2° si certains hélicoïdes de seconde espèce peuvent admettre leurs courbes méridiennes comme famille de lignes de courbure.*

1° Soit φ_0 l'azimut de la section droite ligne de courbure. En introduisant la condition $d\varphi = 0$ dans l'équation des lignes de courbure on trouve que les fonctions f et φ doivent être reliées par la relation, nécessaire et suffisante :

$$(31)\quad [k\rho(f'' + k''\varphi_0) + (k - k'\rho)(f' + k'\varphi_0)](f' + k'\varphi_0) + k - k'\rho = 0.$$

2° Pour que la surface admette une famille de lignes de courbure formée de méridiennes, il faut et il suffit que l'équation (31) soit une identité par rapport à φ_0, c'est-à-dire que les fonctions f et k satisfassent aux trois relations

$$(32)\qquad k'(kk''\rho + k'(k - k'\rho)] = 0,$$
$$(33)\qquad [k\rho k'' + (k - k'\rho)k']f' + k'(k\rho f'' + kf' - k'\rho f') = 0,$$
$$(34)\qquad k\rho f' f'' + (k - k'\rho)(f'^2 + 1) = 0.$$

L'équation (32) se décompose :

a. On prend $k' = 0$. La surface est un hélicoïde. L'équation (33) est vérifiée d'elle-même et l'équation (34) s'intègre aisément une première fois et donne

$$(35)\qquad (f'^2 + 1)\rho^2 = a^2 \qquad (a = \text{constante positive})$$

([1]) *Cf.* ci-après, n° 9.

ou

$$(35\,bis)\qquad f' = \frac{1}{\rho}(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème admet donc une solution; un hélicoïde dont la méridienne est définie par l'équation (35); l'intégration de cette équation ne présente aucune difficulté et donne, en termes finis, dans le plan zOx et avec un choix convenable de l'origine,

$$(36)\qquad z = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}\,\mathrm{Log}\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}\right].$$

Cette courbe a la forme représentée ci-dessous (*fig.* 2) avec deux points d'arrêt $x = a$, $z = 0$. Oz est asymptote et axe de symétrie; Ox est tangente à la courbe aux deux points d'arrêt.

Cette surface est un exemple intéressant de surface de

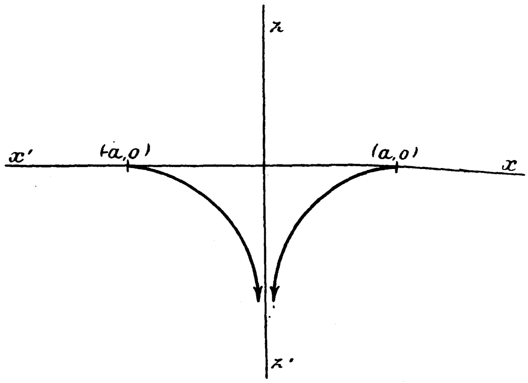


Fig. 2.

Joachimsthal. Il est à peine besoin de faire remarquer que l'on peut obtenir sans aucune intégration son second système de lignes de courbure; il est constitué par les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface et dont le sommet décrit Oz. Elles sont sphériques comme on le sait.

b. On satisfait à l'équation (32) en prenant

$$(32\,bis)\qquad kk''\rho + k'(k - k'\rho) = 0.$$

L'équation (33) donne alors, après exclusion de la solution $k' = 0$

déjà étudiée,

$$(33\ bis) \qquad k\rho f'' + f'(k - k'\rho) = 0.$$

Des équations (33 *bis*) et (34) on tire

$$(37) \qquad f'' = 0, \qquad k - k'\rho = 0;$$

l'équation (32 *bis*) est satisfaite d'elle-même. Mais on voit sans difficulté que la surface est un cône dont l'équation peut être mise sous la forme canonique

$$(38) \qquad z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

La base horizontale de ce cône est une spirale hyperbolique.

8. Trajectoires orthogonales des génératrices. — On trouve immédiatement leur équation différentielle

$$(39) \qquad \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{kk'}{\rho^2 + k^2}\varphi + \frac{kf'}{\rho^2 + k^2} = 0.$$

Cette équation est linéaire et permet de définir φ en fonction de ρ au moyen de quadratures. Cette propriété est une nouvelle analogie avec les surfaces réglées.

9. Courbure totale en un point de la surface. — La courbure totale en un point de la surface est donnée par la formule

$$(40) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\rho^3 k' k'' \varphi^2 + \rho^3 (f' k'' + f'' k')\varphi + \rho^3 f' f'' - (k - k'\rho)^2}{[\rho^2 (f' + k'\varphi)^2 + (\rho^2 + k^2)]^2}.$$

De cette relation on déduit la proposition suivante :

Théorème XII. — 1° *Sur une génératrice quelconque il existe quatre points, réels ou non, distincts ou confondus, pour lesquels la courbure totale ait une valeur donnée non nulle* (¹);

2° *Sur une génératrice quelconque il existe en général deux points paraboliques.*

(¹) Résultat identique à ce que l'on obtient dans les surfaces réglées. Si $k' = 0$, c'est-à-dire pour les génératrices dont le paramètre de distribution est nul, ce nombre se réduit à *un*, tandis qu'il est nul dans les surfaces réglées. L'analogie ne se poursuit pas pour les points paraboliques.

Étudions d'une façon plus particulière la détermination des points paraboliques. L'équation qui détermine ces points est

$$(41)\qquad \rho^3 k' k'' \varphi^2 + \rho^3 (f' k'' + f'' k')\varphi + \rho^3 f' f'' - (k - k'\rho)^2 = 0.$$

Cette équation est en général du second degré. Si on laisse de côté les valeurs infinies de φ, peu intéressantes, on obtient les résultats suivants.

L'équation (41) se réduit au premier degré lorsque $k' k''$ est nul; donc :

Théorème XIII. — *Il n'y a qu'un point parabolique sur les génératrices dont le pas est stationnaire ou dont la dérivée seconde est nulle. S'il existe des valeurs de ρ satisfaisant à l'un des systèmes* (42) *ou* (43), *ce point disparaît pour les génératrices correspondant à ces valeurs de* ρ,

$$(42)\qquad k' = 0,\qquad f' k'' = 0,\qquad \rho^3 f' f'' - k^2 \neq 0;$$
$$(43)\qquad k'' = 0,\qquad f'' k' = 0,\qquad \rho^3 f' f'' - (k - k'\rho)^2 \neq 0.$$

Si, au contraire, la troisième relation du système (42) ou (43) intéressé est remplacée par une relation d'égalité, les génératrices correspondantes sont des lieux de points paraboliques.

Si l'on cherche dans quel cas une méridienne peut appartenir au lieu des points paraboliques, on peut toujours prendre son plan pour zOx; on a de la sorte la solution la plus générale du problème, solution qui s'obtient en écrivant que la relation (41) est vérifiée pour $\varphi = 0$. On trouve ainsi, pour définir les surfaces dont une méridienne est un lieu de points paraboliques, la relation

$$(44)\qquad \rho^3 f' f'' - (k - k'\rho)^2 = 0.$$

Si, dans cette relation, on introduit la relation $k' \equiv 0$, on retrouve la condition définissant les hélicoïdes développables.

Revenons aux systèmes (42) et (43); si l'on suppose que l'on ait identiquement $k' = 0$ (hélicoïdes), les deux systèmes (42) et (43) se réduisent à une seule relation qui sera, suivant les cas, une relation d'inégalité ou d'égalité. Donc, en général, sur une génératrice quelconque d'un hélicoïde il n'y a pas de point parabolique. Le lieu de ces points sur la surface est formé par un ensemble discontinu de génératrices. Au contraire, si la fonction f est reliée au pas k_0 par la relation

$$(44\ bis) \qquad f'f''\rho^3 - k_0^2 = 0,$$

toutes les hélices génératrices seront des lieux de points paraboliques. L'hélicoïde est développable. Nous retrouvons de la sorte une démonstration de la propriété déjà rappelée de l'équation (44 *bis*).

Passons maintenant à l'étude du cas où k'' est nul identiquement; k' est alors une constante a qu'il n'y a plus lieu de supposer nulle. Donc sur les génératrices des surfaces en question il existe en général un point parabolique, sauf sur celles qui passent par les points d'inflexion de la méridienne $\varphi = 0$ (1), pour lesquelles ce point parabolique disparaît généralement. La génératrice considérée est, au contraire, un lieu des points paraboliques dans les surfaces dont le pas angulaire est constant.

Un cas particulièrement intéressant est celui où les fonctions k et f sont toutes deux linéaires. L'équation (41) se réduit à

$$(45) \qquad b^2 = 0 \qquad (k = a\rho + b).$$

La surface n'a aucun point parabolique (si $b \neq 0$) ou, au contraire, c'est une développable ($b = 0$); il est facile de montrer que dans ce dernier cas elle se réduit à un cône.

Nous étudierons ultérieurement les surfaces générales où k et f sont linéaires; nous les désignerons sous le nom de *surfaces de vis de seconde espèce*. Ce sont des surfaces réglées admettant Oz comme directrice rectiligne.

Revenons à l'équation (41); elle s'écrit, et c'est même sous cette forme qu'elle se présente directement,

$$(41\ bis) \qquad (f' + k'\varphi)(f'' + k''\varphi) - (k - k'\varphi)^2 = 0.$$

(1) Ces génératrices sont d'ailleurs des lieux des points d'inflexion de toutes les méridiennes comme on s'en assure aisément, car ici

$$\frac{d^2 z}{d\rho^2} \equiv f'' + k''\varphi \equiv f'' = 0.$$

On pouvait le prévoir par la considération même de la propriété étudiée dans le texte, pour laquelle la méridienne $\varphi = 0$ ne joue en réalité aucun rôle géométrique spécial.

Cette équation met en évidence le fait suivant :

THÉORÈME XIV. — *Dans les surfaces dont le pas angulaire de la génératrice est constant, le lieu des points paraboliques se compose de deux parties distinctes :*

1° *La ligne de striction des hélices génératrices;*

2° *Les hélices génératrices passant par les points d'inflexion de la méridienne initiale et lieux des points d'inflexion des diverses méridiennes.*

10. COURBURE MOYENNE. — *La courbure moyenne en un point de la surface a pour expression*

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\frac{[\rho^2(f'+k'\varphi)^3+(f'+k'\varphi)(\rho^2+2k^2-2kk'\rho)+(f''+k''\varphi)(\rho^2+k^2)]}{[\rho^2(f'+k'\varphi)^2+\rho^2+k^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{45}$$

De cette formule on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME XV. — 1° *Sur chaque génératrice à pas non stationnaire, il existe six points distincts ou confondus, réels ou imaginaires où la courbure moyenne de la surface ait une valeur donnée non nulle, et trois points où la courbure moyenne soit nulle* (¹);

2° *Sur une génératrice à pas stationnaire, il existe un point et un seul où la courbure moyenne ait une valeur donnée nulle ou non.*

REMARQUE. — Le 2° de ce théorème est en défaut si en même temps k'' est nul. Nous laissons au lecteur le soin de compléter l'énoncé dans ce cas (*voir* la question analogue ci-dessus, n° 9). En particulier, dans les hélicoïdes, on a $k'=k''=0$. Le lieu des points pour lesquels la courbure moyenne est nulle est un ensemble d'hélices génératrices défini par l'équation

$$\rho^2 f'^3+f'(\rho^2+2k_0^2)+f''(\rho^2+k_0^2)=0. \tag{46}$$

Si cette équation est vérifiée identiquement l'hélicoïde cor-

(¹) Propriété identique à celle d'une génératrice d'une surface réglée dont le paramètre de distribution n'est pas nul.

respondant est minimum. On retombe sur la question connue de la recherche des hélicoïdes minima. Ce sont d'ailleurs les seuls hélicoïdes de seconde espèce minima.

11. Courbure géodésique d'une courbe tracée sur la surface. — L'application des formules générales que nous indiquons ailleurs [*cf.* notre Mémoire : *Théorie générale des surfaces engendrées par des hélices circulaires* (n° **13**) inséré dans le *Bulletin* de la Société en 1914] donne, en désignant par i l'inclinaison de la courbe sur la génératrice, l'expression suivante de la courbure géodésique :

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{di}{ds} - \frac{\rho}{H}\frac{d\varphi}{ds} - \frac{(k-k'\rho)(f'+k'\varphi)\rho}{HE}\frac{d\rho}{ds} \tag{47}$$

(ds représente l'élément d'arc de la courbe étudiée).

Cette formule prend une forme très réduite dans le cas de l'hélicoïde gauche à plan directeur ($f' = k' = 0$) et dans le cas des surfaces dont les génératrices ont un pas angulaire constant. Sur ces dernières surfaces la courbure géodésique est donnée par la formule suivante, k étant égal à $a\rho$ ($a =$ const.) :

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{di}{ds} - \frac{1}{[(a\varphi + f')^2 + a^2 + 1]}\frac{d\varphi}{ds}. \tag{47 bis}$$

Applications. — 1° *Courbure géodésique d'une génératrice.* — Introduisons dans la formule (47) la condition $i = 0$, $d\rho = 0$; nous obtenons l'expression de la courbure géodésique d'une génératrice

$$\left|\frac{1}{(\rho_g)_{\mathrm{II}}}\right| = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + k^2}}\,\frac{1}{[\rho^2 + k^2 + \rho^2(f' + k'\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Donc :

Théorème XVI. — 1° *La courbure géodésique d'une génératrice à pas non stationnaire décroît lorsqu'on s'éloigne dans un sens ou dans l'autre à partir du point central. Elle admet en ce point la valeur maxima* $\frac{\rho}{\rho^2 + k^2}$ (1). *Il existe sur une*

(1) Cette valeur est celle du rayon de courbure de la génératrice. La formule (8) permet d'expliquer simplement ce résultat ($\cos\varpi = 0$).

telle génératrice deux points réels à égale distance du point central pour lesquelles la courbure géodésique ait une valeur donnée inférieure à sa valeur maxima. Toute génératrice à pas stationnaire est un cercle géodésique de la surface dont le rayon géodésique est $\rho + \frac{k^2}{\rho}$. (*Cf.* Théorème V.)

2° *Courbure géodésique des méridiennes.* — Elle s'obtient en introduisant l'hypothèse $d\varphi = 0$ dans l'équation (47).

3° *Courbure géodésique des trajectoires orthogonales des génératrices.* — Pour les trajectoires orthogonales des génératrices on a, en appliquant la formule (47) et en observant que les formules (6) donnent

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{k(f'+k'\varphi)}{\mathrm{H}(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{d\rho}{ds} = \frac{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{H}},$$

la relation

$$(48) \qquad \gamma_{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{\rho_g}\right)_{\mathrm{T}} = \frac{k'\rho^2(f'+k'\varphi)}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}[\rho^2+k^2+\rho^2(f'+k'\varphi)^2]}.$$

Si l'on rapproche cette formule de celle qui donne la courbure $\gamma_{\mathrm{H}} = \left(\frac{1}{\rho_g}\right)_{\mathrm{H}}$ de la génératrice, on obtient la relation

$$(49) \qquad \frac{\gamma_{\mathrm{T}}}{\gamma_{\mathrm{H}}^2} = k'(f'+k'\varphi)(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette formule peut prendre une forme plus intéressante au point de vue géométrique. Désignons par Δs l'arc de l'hélice génératrice compris entre son point central et le point étudié et introduisons le paramètre de distribution ϖ de cette génératrice; on a

$$f'+k'\varphi = k'\frac{\Delta s}{\sqrt{k^2+\rho^2}} = \frac{\varpi\,\Delta s}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$\gamma_{\mathrm{T}} = (\varpi\gamma_{\mathrm{H}})^2\,\Delta s,$$

résultat très simple qu'on énoncerait sans difficulté en langage ordinaire.

De la formule (49) on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème XVII. — *Si la ligne de striction est une trajectoire* *orthogonale des hélices génératrices, elle est une géodésique de la surface.*

L'une des réciproques seule est vraie ; ainsi :

Réciproque. — *Si une ligne géodésique est une trajectoire orthogonale des génératrices, c'est la ligne de striction.*

Cette réciproque se déduit immédiatement de la formule (49); on peut aussi l'établir directement comme il suit : la ligne considérée étant une trajectoire et une géodésique on a, d'après la formule (47),

$$d\varphi + \frac{(k - k'\rho)(f' + k'\varphi)}{\rho^2 + k^2} d\rho = 0; \tag{50}$$

cette trajectoire étant orthogonale, la formule (39) donne

$$d\varphi + \frac{k(f' + k'\varphi)}{\rho^2 + k^2} d\rho = 0. \tag{51}$$

Des équations (50) et (51) on tire

$$k'(f' + k'\varphi) = 0. \tag{52}$$

La solution $k' = 0$ donne (le cas évident des hélicoïdes étant écarté) une suite discontinue de génératrices ; cette solution ne peut donc convenir, car elle ne peut donner une trajectoire orthogonale de génératrices. Il reste donc la seule relation $f' + k'\varphi = 0$. Ce qui démontre la proposition.

4° *Courbure géodésique de la ligne de striction.* — Si l'on appelle ε son inclinaison sur la génératrice passant au point que l'on considère, on démontre sans difficulté la relation

$$\frac{1}{(\rho_g)_S} + \frac{1}{(\rho_g)_{H_0}} \cos\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{ds}, \tag{53}$$

en désignant par $\frac{1}{(\rho_g)_{H_0}}$ la valeur de $\frac{1}{(\rho_g)_H}$ au point central et par $\frac{1}{(\rho_g)_S}$ la courbure géodésique de la ligne de striction.

Problème. — *Chercher dans quel cas la ligne de striction peut être une géodésique.*

On trouve de suite

$$\frac{1}{(\rho_g)_{H_0}}\cos\varepsilon\, ds = d\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho}{\rho^2+k^2}\cos\varepsilon\, ds = d\varepsilon$$

ou encore [formules (6), pour la ligne de striction]

$$\frac{\rho \cot\varepsilon}{\rho^2+k^2} = \frac{d\varepsilon}{d\rho}$$

et, en intégrant,

$$\cos\varepsilon = \frac{a}{(\rho^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{54}$$

ou

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\sqrt{\rho^2+k^2-a^2}}{a}. \tag{54 bis}$$

On aura les trajectoires orthognales en prenant $a = 0$; supposons $a \neq 0$. On a, d'autre part [formule (27 *bis*)],

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+k^2}}\,\frac{1}{\left(\frac{f'}{k'}\right)'}, \tag{27 bis}$$

d'où la condition

$$\frac{f'}{k'} + a\int^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2+k^2)(\rho^2+k^2-a^2)}} = 0, \tag{54}$$

la limite inférieure étant intentionnellement laissée indéterminée. On dispose donc d'une fonction arbitraire k par exemple. La formule (54), par une nouvelle intégration, donne f. Ces surfaces possèdent une ligne de striction qui est une géodésique sans être une trajectoire, orthogonale ou non ($a \neq 0$).

12. Détermination des hélicoides de seconde espèce divisés en carrés infiniment petits par les génératrices. — Posons

$$R = \rho^2 + k^2,$$

nous pouvons écrire sans aucune difficulté

$$R\, ds^2 = [R\, d\varphi + k(f' + k'\varphi)\, d\rho]^2 + H^2\, d\rho^2 \tag{55}$$

ou

$$R\, ds^2 = H^2\left\{\left[\frac{R\, d\varphi + k(f'+k'\varphi)\, d\rho}{H}\right]^2 + d\rho^2\right\}. \tag{56}$$

Or, si les génératrices appartiennent à un système isotherme et orthogonal, on doit avoir

$$(57)\qquad \mathrm{R}\,ds^2 = \mathfrak{F}(\rho, \varphi)\left\{[(d\Phi(u, \varphi)]^2 + \Psi^2(\rho)\,d\rho^2\right\},$$

relation dans laquelle $\mathfrak{F}$ et Φ représentent des fonctions de u et de v ($\Phi =$ const. représentant d'ailleurs les trajectoires orthogonales des génératrices). Il faut donc et il suffit pour cela qu'il existe une fonction $\Psi(\rho)$ telle que

$$(58)\qquad \frac{\Psi(\rho)}{\mathrm{H}}[\mathrm{R}\,d\varphi + k(f' + k'\varphi)\,d\rho]$$

soit une différentielle exacte; on aura alors

$$(59)\quad \mathrm{R}\,ds^2 = \frac{\mathrm{H}^2}{\Psi^2}\left(\left\{\left[\frac{\Psi(\rho)}{\mathrm{H}}[\mathrm{R}\,d\varphi + k(f' + k'\varphi)\,d\rho]\right]^2 + \Psi^2(\rho)\,d\rho^2\right\}\right).$$

Nous écrirons que l'expression (58) est une différentielle exacte en assujettissant la fonction Ψ à la condition

$$(60)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{R}\Psi}{\mathrm{H}}\right)}{\partial\rho} = \Psi\,\frac{\partial\,\frac{k(f' + k'\varphi)}{\mathrm{H}}}{\partial\varphi}.$$

En posant

$$(61)\qquad \frac{\mathrm{R}\psi' + \mathrm{R}'\psi}{\Psi} = \Phi,$$

l'équation (60) se met sous la forme

$$(62)\qquad \Phi\mathrm{H}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{R}\frac{\partial(\mathrm{H}^2)}{\partial\rho} - kk'\mathrm{H}^2 + \frac{1}{2}k(f' + k'\varphi)\frac{\partial(\mathrm{H}^2)}{\partial\varphi} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité est un polynome du second degré en φ. En annulant le coefficient des termes en φ^2 et en φ, et en laissant de côté les solutions $k' = 0$ qui donne les hélicoïdes et $f' = 0$ qui conduit à un cas particulier de la solution que nous allons trouver, nous obtenons les deux conditions

$$(63)\qquad k'\rho\Phi = (\rho^2 + k^2)(k'\rho)'$$

et

$$(64)\qquad k'\rho\Phi = (\rho^2 + k^2)' + \frac{\rho(\rho^2 + k^2)(f'k')'}{2f'}.$$

De la comparaison des équations (63) et (64) on tire

$$(65) \qquad f' k'' = f'' k',$$

d'où

$$f = -\varphi_0 k + a_1 \qquad (\varphi_0,\ a_1 = \text{const.}).$$

Un choix convenable de la position de l'origine sur Oz et de la direction des axes permet de supposer nulles les constantes a et φ_0. La solution, si elle existe, appartient donc au groupe particulièrement intéressant d'hélicoïdes de seconde espèce déjà rencontré et défini par la relation

$$(\mathrm{I}) \qquad x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = k(\rho)\varphi.$$

Si maintenant nous écrivons que les termes indépendants de φ dans le premier membre de l'équation (62) disparaissent, nous trouvons, en tenant compte de l'équation (63) et après réductions,

$$(66) \qquad k'' \rho(\rho^2 + k^2) = 2kk'^2\rho - k^2 k'.$$

L'équation (66) détermine la fonction k. On obtiendra toutes les surfaces cherchées en prenant dans les équations (I) pour fonction $k(\rho)$ une solution quelconque de l'équation (66). Cette équation est vérifiée en particulier par $k' = 0$; la surface correspondante est l'hélicoïde gauche à plan directeur. Tout revient donc à trouver la solution générale de l'équation (66). L'équation

$$z = k(\rho)$$

représentera l'une des méridiennes dont toutes les autres se déduisent (¹). L'intégration de l'équation (66) ne peut se faire par les fonctions connues, ainsi qu'il résulte de la réduction suivante de laquelle nous allons maintenant nous occuper.

En posant $k = m\rho$, puis $\rho = e^t$, l'équation (66) devient

$$(67) \qquad (m'' + m')(m^2 + 1) = (m + m')(m^2 + 2mm').$$

Prenons maintenant

$$m' = \frac{1}{u},$$

(¹) Sans entrer dans le détail de l'étude de ces surfaces, observons qu'elles jouissent d'une propriété intéressante au point de vue de leur construction : Toutes leurs méridiennes se déduisent de l'une d'elles par dilatation perpendiculairement à Oz.

de l'équation (67) nous tirons

$$(68) \qquad \frac{du}{dm} + \frac{2m}{m^2+1}u + \frac{2m^2-1}{m^2+1}u^2 + \frac{m^3}{m^2+1}u^3 = 0,$$

équation d'Abel définissant u comme fonction de m. Cette équation n'appartient pas aux types intégrables signalés par M. Liouville ([1]). D'ailleurs, si l'on suppose u déterminé en fonction de m, on peut, au moyen de quadratures, exprimer ρ et k en fonction de m. Devant l'irréductibilité de l'équation (13), il nous semble intéressant, pour obtenir un développement de k en fonction de ρ, d'opérer comme il suit : l'équation (12) s'écrit visiblement

$$(69) \qquad \frac{k''}{k'}\left(\rho + \frac{k^2}{\rho}\right) = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{k^2}{\rho} + \rho\right) - 1,$$

que l'on peut remplacer par le système

$$(70) \qquad \begin{cases} \rho + \dfrac{k^2}{\rho} = \sigma, \\ \dfrac{k''}{k'} = \sigma' - 1 \qquad \left(\sigma' = \dfrac{d\sigma}{d\rho}\right), \end{cases}$$

ou enfin par le suivant :

$$(71) \qquad \begin{cases} k'u' = 1, \\ k'u = \rho + \dfrac{k^2}{\rho} \qquad \left(u = \dfrac{\sigma}{k'}\right). \end{cases}$$

En posant $\rho = e^t$, on remplace le système (70) par le suivant :

$$(72) \qquad \frac{dk}{dt}\frac{du}{dt} = e^{2t}, \qquad u\frac{dk}{dt} = k^2 + e^{2t},$$

qui admet aux environs du point $t = 0$ un système de solutions holomorphes quelle que soit la valeur initiale adoptée pour k et pour u (exception faite de $u_0 = 0$). La méthode des coefficients indéterminés permet de trouver sans difficulté les coefficients du développement. Les calculs étant particulièrement simples pour la solution correspondant à $k = 0$, $u = 1$, pour $t = 0$, nous nous

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CV, 1887, p. 460.

arrêterons plus particulièrement à cette solution. En posant

$$(73)\qquad \begin{cases} k = \phantom{1+{}} a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_p t^p + \ldots, \\ u = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_p t^p + \ldots, \end{cases}$$

on obtient sans difficulté les conditions de récurrence

$$(74)\qquad \begin{cases} pa_p b_1 + 2(p-1)a_{p-1}b_2 + \ldots + a_1 b_{p-1} = \mathrm{P} + \dfrac{2^{p-1}}{(p-1)!}, \\ pa_p + (p-1)a_{p-1}b_1 + \ldots + a_1 b_p = \dfrac{2^{p-1}}{(p-1)!}, \end{cases}$$

dans lesquelles P a deux formes suivant la parité de p,

$$(75)\qquad \begin{cases} \mathrm{P} = 2a_1 a_{2n-1} + \ldots + 2a_{n-1}a_{n+1} + a_n^2 & \text{si } p = 2n-1, \\ \mathrm{P} = 2a_1 a_{2n} \phantom{{}_{-1}} + \ldots + 2a_n \phantom{{}_{-1}} a_{n+1} & \text{si } p = 2n. \end{cases}$$

En revenant à la variable ρ, et introduisant le rayon initial ρ_0 que le calcul précédent suppose implicitement pris pour l'unité de longueur, on trouve ainsi, en se limitant aux quatre premiers termes,

$$(76)\qquad k = \rho_0 \left[\log \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2} \log^2 \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2} \log^3 \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{8} \log^4 \frac{\rho}{\rho_0} \right].$$

Si l'on voulait une représentation complète de la méridienne définie par l'équation (76), il faudrait étudier l'approximation obtenue en l'arrêtant à ce développement (ou d'une façon générale au $n^{\text{ième}}$ terme), pour la valeur de $\frac{\rho}{\rho_0}$ comprise à l'intérieur d'un cercle de rayon inférieur au rayon de convergence du développement indéfini. L'intérêt de cette discussion ne nous paraît pas justifier les développements de calcul qu'elle comporte.

II. — Étude particulière des surfaces de vis de seconde espèce.

1. Définition. — *Nous désignerons sous le nom de* surfaces de vis de seconde espèce *les surfaces hélicoïdales de seconde espèce à méridienne rectiligne.*

On démontre facilement que ces surfaces comportent trois grandes classes :

1° Les *surfaces de vis ordinaires;*

2° Les *cônes* ayant pour directrice une hélice circulaire et pour sommet un point de l'axe de cette courbe;

3° Des *surfaces générales dont la représentation sous forme réduite est*

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = h\varphi(\rho - \rho_0) \tag{1}$$

(ρ_0 constante positive; dans le cas limite où $\rho_0 = 0$ on retrouve les *cônes* définis dans le 2°).

2. Réseaux conjugués et lignes asymptotiques. — Soit

$$\frac{\delta\rho}{\delta\varphi} = \Phi(\rho, \varphi) \tag{1}$$

l'équation différentielle d'une famille de lignes à un paramètre tracée sur la surface. La famille conjuguée de la précédente est donnée par l'équation ([1])

$$d\varphi[\Phi\rho_0 + \varphi\rho^2] + \rho_0\, d\rho = 0. \tag{2}$$

Si Φ se réduit à une fonction de φ, cette équation définit ρ en fonction de φ par une équation de Riccati. Si l'on se reporte à l'interprétation de la forme correspondante de l'équation (1), on peut énoncer la proposition suivante :

La détermination de la seconde famille du réseau conjugué dont une famille est formée de courbes se projetant sur le plan de base de la surface suivant les diverses conchoïdes de l'une d'elles, le pôle de la transformation conchoïdale étant le pied de l'axe sur le plan de base, se réduit à l'intégration d'une équation de Riccati.

Application. — *Réseau conjugué des hélices génératrices.* — L'intégration est immédiate; on trouve

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi^2}{2\rho_0} \tag{3}$$

(ρ_1 constante, valeur de ρ pour $\varphi = 0$).

([1]) Il est remarquable que l'équation (2) ne dépende pas du paramètre h. Ce résultat s'explique immédiatement en observant que toutes les surfaces correspondant aux diverses valeurs de h se déduisent de l'une d'elles par simple dilatation parallèlement à Oz. (Cette observation s'applique naturellement à l'équation des asymptotiques.)

Cette équation représentant la relation entre ρ et φ n'est autre que l'équation polaire de la projection de la courbe sur son plan de base (cette remarque s'appliquera aux divers problèmes suivants). Nous ne discuterons pas cette équation, que nous retrouverons à peine modifiée ci-après.

Asymptotiques. — Le premier système est formé par les méridiennes ($\varphi =$ const.); le second système est donné par [1]

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi^2}{4\rho_0}. \tag{4}$$

La courbe représentée en coordonnées polaires par (4) est symétrique par rapport à l'axe polaire. Elle admet l'origine comme point asymptote.

Premier cas : $\rho_1 > 0$. — La projection horizontale (sur le plan de base $z = 0$) n'a ni branches infinies ni inflexion. Elle a toujours la forme représentée sur la figure hors texte I (asymptotique I). La projection verticale (sur le méridien $\varphi = 0$) est symétrique par rapport à la ligne de terre.

Si $\rho_1 > \rho_0$ (cas de la figure), la projection verticale possède un point double réel à tangentes distinctes. Si $\rho_1 < \rho_0$, cette projection n'a plus de point double réel. Si $\rho_1 = \rho_0$, elle a un point de rebroussement — ($\varphi = 0$, $\rho = \rho_0 = \rho_1$). Dans tous les cas la projection verticale s'approche asymptotiquement de la projection verticale de l'axe de la surface en ondulant, par sinuosités d'épaisseur décroissante autour de cet axe.

---

[1] On rapprochera ce résultat de celui qui est relatif aux surfaces de vis ordinaires pour lesquelles l'équation polaire de la projection sur le plan de base d'une asymptotique du second système est de la forme

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi}{a}.$$

On voit que ceci suggère l'idée de considérer les surfaces de vis de première espèce et celles de seconde espèce comme les deux premiers termes d'une famille de surfaces réglées admettant une directrice rectiligne et dont les asymptotiques du second système aient pour projection sur un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne des courbes qui, en coordonnées polaires, le pôle étant le pied de la directrice sur le plan de projection, aient pour équation

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi^n}{a} \quad (n \text{ entier}).$$

Nous reviendrons ultérieurement sur l'étude de ces surfaces.

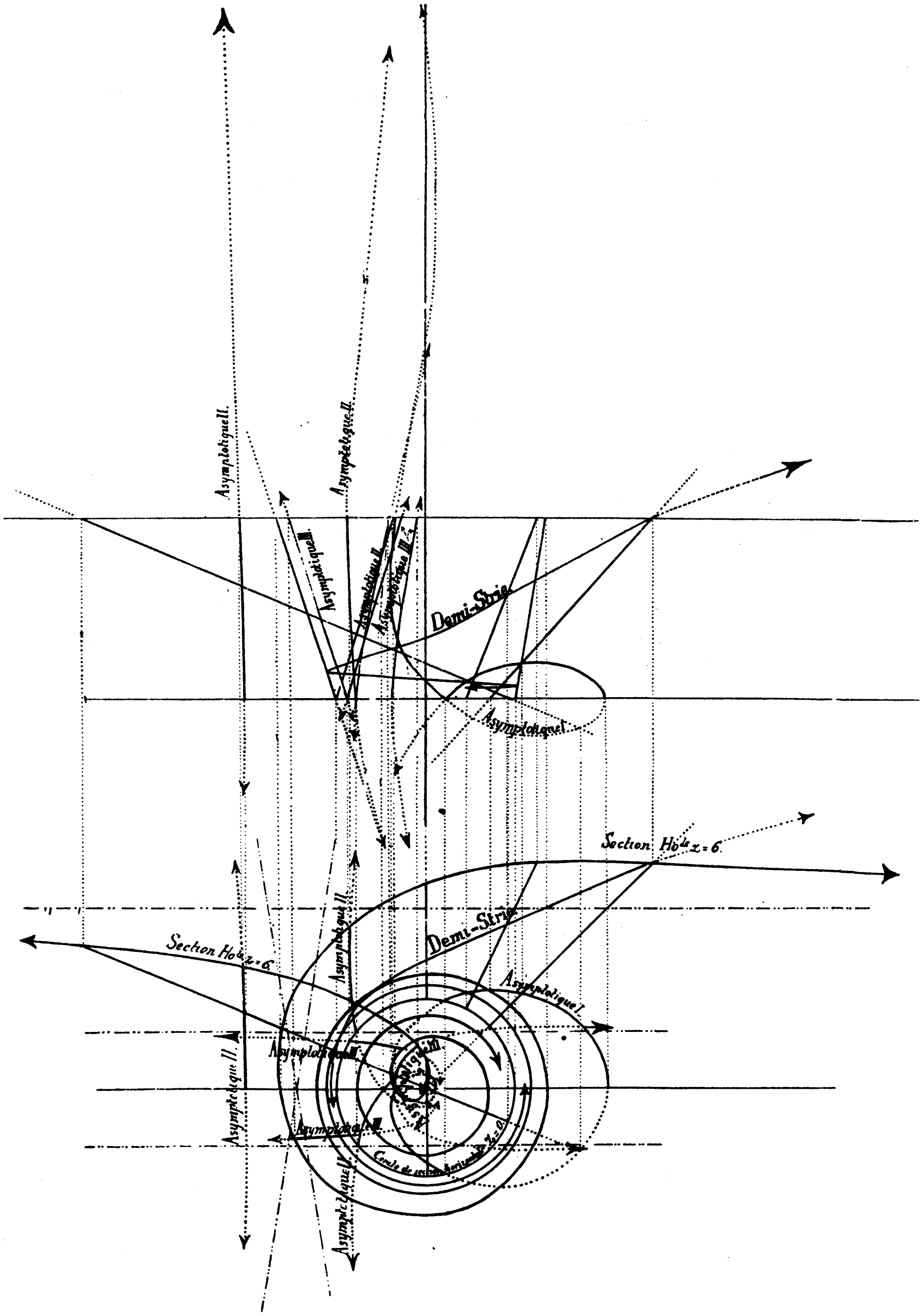

Asymptotique II.
Asymptotique II.
Asymptotique III.
Asymptotique III.
Demi-Strie.
Asymptotique I.
Section Hoʳˡᵉ z = 6.
Section Hoʳˡᵉ z = 6.
Demi-Strie.
Asymptotique II.
Asymptotique I.
Asymptotique III.
Asymptotique II.
Asymptotique III.
Asymptotique II.

Fig. 1.

Deuxième cas : $\rho_1 < 0$. — La projection horizontale possède des branches infinies. Posons, pour simplifier, $\rho'_1 = |\rho_1|$, et désignons par φ_∞ la valeur de l'azimut de l'une quelconque des directions infinies. On a, en appelant S_A la sous-asymptote,

$$\varphi_\infty = \pm 2\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho'_1}}, \qquad S_A = \sqrt{\rho_0\rho'_1}.$$

A chaque direction infinie de la projection horizontale correspond, sur la projection verticale, une branche infinie admettant une asymptote dont l'équation est

$$(5) \qquad y - \frac{h\varphi_\infty}{\cos\varphi_\infty} + h\rho_0\left(\varphi_\infty - 2\frac{\operatorname{tang}\varphi_\infty}{\varphi_\infty}\right) = 0.$$

La projection verticale de l'axe est encore une asymptote de la courbe de laquelle celle-ci s'approche par une infinité d'ondulations d'épaisseur décroissante.

Si $\rho'_1 > 2\rho_0$, la projection horizontale n'a pas d'inflexion;

Si $\rho'_1 = 2\rho_0$, la projection horizontale possède un méplat sur son axe de symétrie au point $\varphi = 0$, $\rho = \rho_1$ (deux inflexions confondues) : c'est le cas représenté figure I (asymptotique II);

Si $\rho'_1 < 2\rho_0$, la courbe possède deux inflexions données par

$$\varphi_1 = \pm 2\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho'_1} - \frac{1}{2}}.$$

Elle est alors susceptible d'une infinité de formes suivant la valeur de $\frac{\rho_0}{\rho'_1}$. La discussion de ces formes ne présente aucune difficulté, mais est assez longue : nous ne pouvons nous y arrêter.

La courbe représentée figure I sous la rubrique « asymptotique III » correspond au cas où

$$\rho'_1 = \frac{4}{\pi^2}\rho_0 \qquad (\varphi_\infty = \pi).$$

3. Élément linéaire. Trajectoires orthogonales des hélices. — L'élément linéaire est :

$$ds^2 = [\rho^2 + h^2(\rho - \rho_0)^2]\,d\varphi^2 + 2h^2(\rho - \rho_0)\varphi\,d\rho\,d\varphi + (h^2\varphi^2 + 1)\,d\rho^2.$$

Les trajectoires orthogonales des hélices génératrices s'obtiennent immédiatement par une quadrature élémentaire :

$$\operatorname{Log}\frac{\varphi}{\varphi_1} + h^2\int_{\rho_1}^{\rho}\frac{\rho-\rho_0}{\rho^2+h^2(\rho-\rho_0)^2}\,d\rho = 0,$$

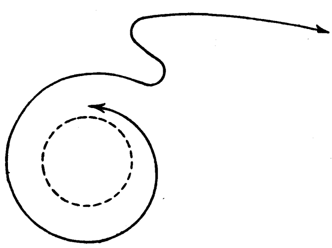
que nous nous dispenserons d'expliciter.

4. Lignes de courbure. Stries. — Il existe sur chaque hélice génératrice deux points où elle touche une ligne de courbure. Le lieu de ces points est donné par (1) :

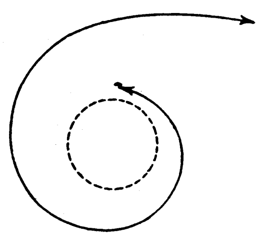
$$\varphi^2 = \frac{\rho}{h^2(\rho-\rho_0)} + \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\rho_0^2}{\rho^2},$$

qui représente aussi en coordonnées polaires la projection de la courbe sur le plan de base. Cette projection se compose de deux branches symétriques par rapport à l'axe polaire et extérieures au cercle principal $\rho = \rho_0$. Deux formes suivant que $h^2 \leqq 27$ ou que $h^2 > 27$. (Le cas de l'égalité donne bien une même forme que le cas de $h^2 < 27$, mais, en réalité, la courbe possède un méplat.)

Les croquis *a* et *b* ci-dessous représentent schématiquement une branche dans chacun des deux cas.



(*a*) $h^2 \leqq 27$.



(*b*) $h^2 > 27$.

5. Sections horizontales. Construction du plan tangent en un point de la surface. — La section horizontale $z = z_0$ a pour équation polaire

$$\rho = \rho_0 + \frac{z_0}{h\varphi}.$$

(1) Ce résultat s'obtient en introduisant la condition $d\rho = 0$ dans l'équation des lignes de courbure qui se déduit de suite de l'équation (3).

C'est la conchoïde d'une spirale hyperbolique. Cette courbe est facile à construire : il suffit d'ailleurs que l'on ait obtenu la spirale

$$\rho = \frac{(z_0)_1}{h\varphi}$$

correspondant à une valeur particulière de z_0 pour qu'on puisse, par simple transformation homothétique par rapport à l'origine dans le rapport $\frac{z_0}{(z_0)_1}$, construire un point de la spirale correspondant à une section quelconque z_0 et par suite un point de cette section. D'ailleurs, on sait construire la sous-tangente $\left(S_T = -\frac{z_0}{h}\right)$ et, par suite, la normale à la spirale hyperbolique et, en conséquence, à sa conchoïde. On a donc une construction géométrique, très simple et que nous nous dispenserons d'énoncer, de la tangente en un point quelconque d'une section horizontale de la surface. Cette droite et la génératrice rectiligne permettent de déterminer le plan tangent. On aurait pu utiliser évidemment la tangente à l'hélice génératrice, mais la construction précédente, qui n'exige le tracé complet que d'une seule spirale hyperbolique, est bien plus simple.

6. Équation du plan tangent. Courbes d'ombre. Contours apparents. — L'équation du plan tangent est :

$$(1) \quad \begin{aligned}&[\rho\varphi\cos\varphi - (\rho - \rho_0)\sin\varphi]x \\ &\quad + [\rho\varphi\sin\varphi + (\rho - \rho_0)\cos\varphi]y - \frac{\rho}{h}z - \rho\varphi_0\varphi = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit la relation entre ρ et φ définissant l'ombre propre relative à la direction α, β, γ, ou d'une façon plus générale la relation définissant la courbe de contact du cône de sommet $x_0 y_0 z_0$. Chacune des équations obtenues représente l'équation en coordonnées polaires de la projection sur le plan de base de la courbe correspondante. Si l'on fait $\alpha = \gamma = 0$, on obtient l'équation correspondant au contour apparent sur le méridien $\varphi = 0$; cette équation résolue en ρ est

$$(2) \quad \rho = \frac{\rho_0 \cos\varphi}{\varphi\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Mais ici, ce qui est surtout intéressant pour la représentation

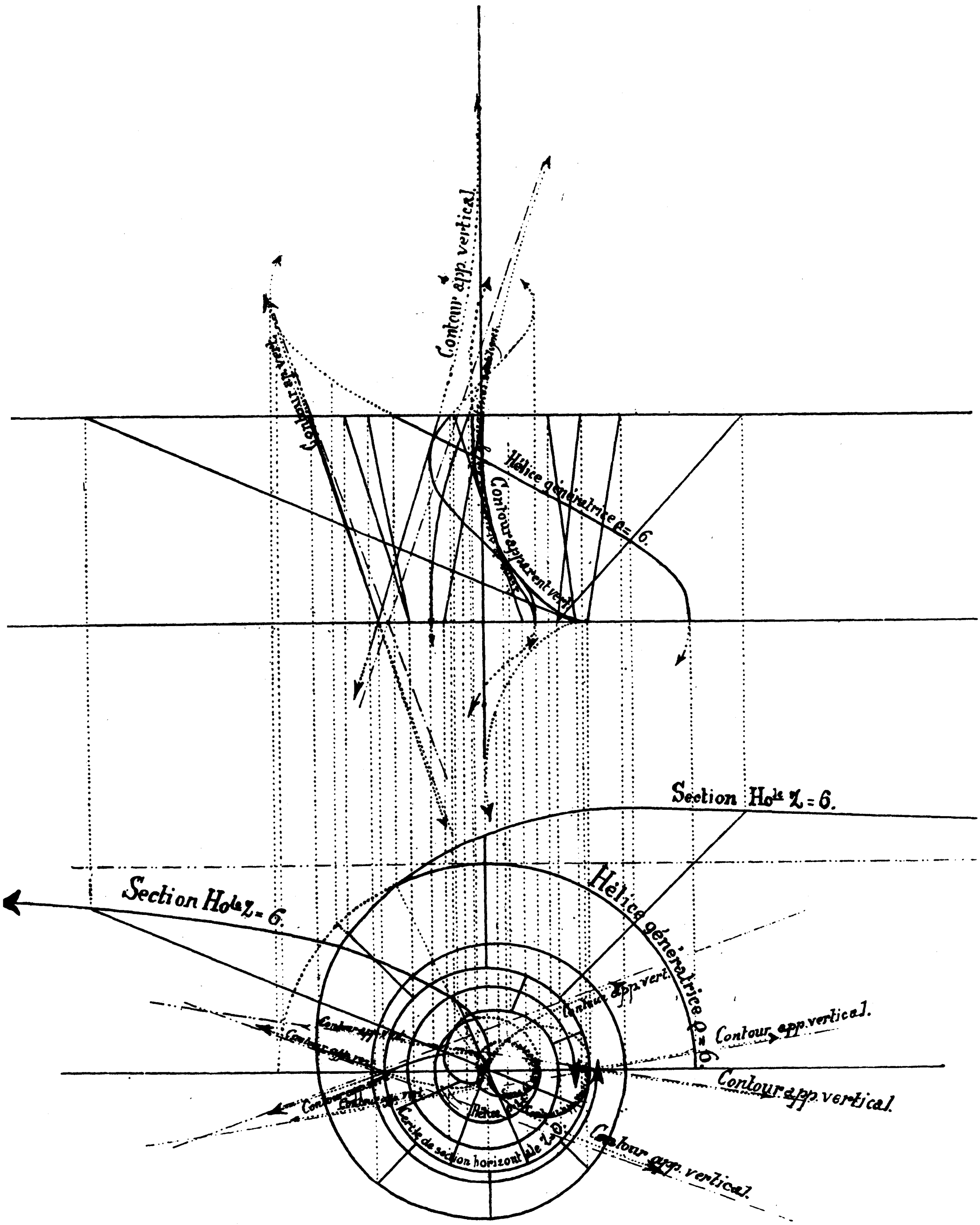

Contour app. vertical
Hélice génératrice ρ = 6.
Contour apparent vert.
Section Hole z = 6.
Section Hole z = 6.
Hélice génératrice ρ = 6.
Contour app. vert.
Contour app. vertical.
Contour app. vertical.
Contour app. vertical.
Cercle de section horizontale z = 0.

Fig. II.

graphique, c'est la projection de ce contour sur le plan $\varphi = 0$, cette projection est définie par

$$x = \rho_0 \frac{\cos^2\varphi}{\varphi \sin\varphi + \cos\varphi}, \qquad z = \frac{\rho h \varphi^2 \sin\varphi}{\varphi \sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Toutefois, la construction de sa projection horizontale est intéressante pour elle-même d'abord, car c'est la projection d'une ligne remarquable de la surface, et surtout elle sera d'un grand secours pour construire la projection verticale par relèvement point par point. Pour avoir les asymptotes de la projection verticale il suffira de remarquer que ces asymptotes seront les génératrices rectilignes correspondant aux directions infinies de la projection horizontale ($\varphi \sin\varphi + \cos\varphi = 0$).

On étudiera cette projection horizontale très simplement en écrivant l'équation (2) sous la forme

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}[1 + \varphi \operatorname{tang}\varphi].$$

On verra ainsi que *les points à l'infini de cette courbe sont inflexionnels* et que ce sont les seuls points d'inflexion réels (voir *fig.* II). On s'est borné en projection horizontale à l'intervalle -2π, $+2\pi$: en projection verticale on s'est arrêté à l'intervalle $-\pi$, $+\pi$: on remarquera combien le contour s'approche des génératrices rectilignes $\varphi = -\pi$ ou $\varphi = +\pi$; on peut dire que graphiquement, dans la partie utile, il y aurait eu confusion entre le contour et les génératrices $\pm 2\pi$.

C'est un fait analogue qui se produit (et qui est bien connu) dans le dessin des surfaces de vis ordinaires, mais qui s'exagère ici lorsque φ croît.

7. Surfaces de vis de seconde espèce considérées comme surfaces réglées. — L'étude des surfaces de vis de seconde espèce peut se poursuivre en se plaçant au point de vue qui consiste à les regarder comme des surfaces réglées. Nous nous bornerons aux quelques indications qui suivent.

Ligne de striction des génératrices rectilignes. — Elle a pour équation

$$\rho = \frac{\rho_0 h^2}{h^2\varphi^2 + h^2 + 1}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} - \frac{h^2+1}{h^2}\frac{1}{\rho_0} = \frac{\varphi^2}{\rho_0}.$$

Elle est de la nature des asymptotiques.

Paramètre de distribution. — Ce paramètre a pour valeur

$$\chi = \rho_0 h(1 + h^2\varphi^2).$$

Surface réglée applicable de même cône directeur. — On peut se demander si la surface réglée de même cône directeur que la surface étudiée et applicable sur elle n'est pas une surface simple, ce qui donnerait un intéressant théorème d'applicabilité. Sa détermination, par la méthode indiquée dans le traité de M. Darboux (t. III) ne présente aucune difficulté. Malheureusement cette surface n'est pas simple. Elle est engendrée par une droite dont les paramètres directeurs sont ceux de la génératrice rectiligne de la proposée, et qui, lorsque φ varie, s'appuie sur la directrice dont les équations paramétriques sont :

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \quad 2\rho_0 h^2 \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{h^2\varphi^2 + h^2 + 1},$$

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = - 2\rho_0 h^2 \frac{\cos\varphi + \varphi\sin\varphi}{h^2\varphi^2 + h^2 + 1},$$

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = \quad \rho_0 h \frac{1 - h^2 - h^2\varphi^2}{1 + h^2 + h^2\varphi^2}.$$

Cette dernière, avec un choix convenable de l'origine, s'écrit :

$$\zeta = \rho_0 h\left[\frac{2}{h^2+1}\operatorname{arc\,tang}\frac{h}{\sqrt{h^2+1}}\varphi - \varphi\right].$$

Les coordonnées ξ et η ne peuvent s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires. On peut les ramener au logarithme intégral par l'introduction des imaginaires.